

AZ UNIFORM PIACTISZTÍTÓ ÁR ÁLTAL INDUKÁLT KIFIZETÉSEK STABILITÁSA KÉTOLDALÚ, TÖBBEGYSÉGES AUKCIÓKBAN¹

BENEDEK MÁRTON – CSERCSIK DÁVID – KÓCZY Á. LÁSZLÓ

ELTE Közgazdaság- és Regionális Tudományi Kutatóközpont

A kétoldalú többegységes aukcióknak több fontos gyakorlati alkalmazása létezik, többek között az előzőnap villamosenergia-piacok területén. Az ilyen formában megadott aukciókban több lehetséges piactisztítási módszer alkalmazható, de a gyakorlatban leginkább az uniform ár alapú piactisztítás az elterjedt. A piactisztító ár által indukált kifizetésvektor tulajdonságai vizsgálhatóak a kooperatív játékelmélet kontextusában. Jelen munkában megmutatjuk, hogy amíg a piacon nincsenek jelen nemkonvex ajánlatok, a piactisztító ár által indukált kifizetésvektor a magban van, viszont, ha több gyakorlati alkalmazáshoz hasonlóan nemkonvex ajánlatok is megjelennek, melyekhez a paradox elutasítás lehetősége társul, akkor lehetséges, hogy az eredő kifizetésvektor nincs a magban, illetve a mag üres is lehet.

1 Bevezetés

Kétoldalú többegységes aukciók olyan esetekben kerülnek alkalmazásra, ha egy homogénnek tekinthető termék kereskedelmét kívánjuk koordinálni több eladó és több vevő esetén egyidejűleg. A kereskedett homogén termék ezen esetekben egységekre osztható, a vevők és eladók pedig adott mennyiségekre tesznek keresleti, illetve kínálati ajánlatokat. Alapesetben egy ajánlatot egy mennyiség és egy egységár (a továbbiakban ár) határoz meg. Egy vevő legfeljebb a meghatározott áron kíván vásárolni a termékből, míg egy eladó legalább a meghatározott áron kívánja értékesíteni azt. Minden résztvevő maximalisan a meghatározott mennyiséget kívánja megvásárolni, illetve eladni, de alapesetben az ajánlatok részben is teljesíthetőek, azaz oszthatóak. Ha minden ajánlat ilyen, a piacot konvexnek nevezzük.

A gyakorlatban talán legnagyobb jelentőséggel bíró kétoldalú többegységes aukciós piaci alkalmazás az előzőnap villamosenergia-piac (*day-ahead power exchange*, DAPX), melynek több jellemző egyedi tulajdonsága is van, például

¹Beérkezett 2025. november 18. DOI: <https://doi.org/10.15170/SZIGMA.57.1329>. Benedek Márton: ELTE KRTK KTI és Corvinus Egyetem Operáció és Döntés Intézet Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék, benedek.marton@krtk.elte.hu. Csercsik Dávid: ELTE KRTK KTI és Pázmány Péter Katolikus Egyetem Információs Technológiai Kar, csercsik.david@krtk.elte.hu. Kóczy Á. László: ELTE KRTK KTI és BME Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar, Pénzügyek Tanszék, koczy.laszlo@krtk.elte.hu.

a több kereskedési periódust egyidejűleg kezelő struktúra, illetve a nemkonvex (pl. csak teljes mértékben elfogadható vagy elutasítható) ajánlatok.

1.1 Irodalmi áttekintés

A kétoldalú többegységes aukciók vizsgálatának egyik legkorábbi úttörő eredménye a Wilson (1985) által publikált cikk, mely megmutatja, hogy bizonyos feltételezések mellett az univerzális ár (vagy más néven piactisztító ár) alapú piactisztítás hatékony azon értelemben, hogy nem létezik más olyan piactisztítási szabály, melyet minden résztvevő bizonyosan preferálna. Egy másik korai eredmény Satterthwaite és Williams (1989) munkája, melyben a szerzők egy hasonló speciális esetet vizsgálnak, azon feltételezések mellett, hogy minden keresleti és kínálati ajánlat egységnyi mennyiségre vonatkozik, illetve hogy a végső piactisztító árat a kereslet-oldali ajánlatok határozzák meg. McAfee (1992) cikke szintén hasonló problémát vizsgál, a piaci mechanizmus azon tulajdonságát helyezve előtérbe, hogy az a vevőknek és eladóknak domináns stratégiát biztosítson.

Többegységes aukciók esetén a stratégiai ajánlattétel nem hatékony kimeneteket eredményezhet. Egyoldalú aukciók esetén a problémát Ausubel, Cramton és tsai. (2014) vizsgálták és írták le a kereslet-redukció (demand reduction) jelenségét. Kétoldalú többegységes aukciók esetén hasonló elvek mentén a kínálati oldal szereplőinek is van lehetősége visszafogni a termelést, így ideális esetben egyszerre csökkenteni a termelési költségeiket és növelni a piactisztító árat, így az egységnyi termelésre jutó profitot (lásd még Csercsik (2021)). Mindazonáltal, ahogy Bodoh-Creed (2013) tanulmánya megmutatja, egyoldalú aukció esetén, ha a résztvevők száma magas, és így képességük a piactisztító ár befolyásolására alacsony, az uniform áras aukció kimenetele megközelítőleg hatékony.

1.1.1 Magválasztó aukciók

Egyoldalú aukciók esetén fontos kérdés, hogy az aukciós játék egyensúlyi állapotában megfelelő mértékű bevételt generál-e a használt mechanizmus az eladónak (ez a széleskörűen vizsgált Vickrey-mechanizmus egyik potenciális hiányossága), illetve megfelelően korlátozza-e az ún. shill licitálás ('shill bidding') lehetőségét, amikor egy stratégiai résztvevő több entitásként regisztrálva az aukción jobb kifizetést képes elérni – lásd pl. Ausubel és Milgrom (2002) munkáját, ami a terület egyik úttörő eredménye. A fenti szempontok aspektusában kiemelt szerepe van az ún. magválasztó (core-selecting) aukcióknak.

A magválasztó aukciók koncepcióját Day és Milgrom (2008) írta le egyoldalú csomag-aukciók esetén. Ebben a kontextusban az aukciós játék egy egyénileg racionális kimenetele akkor magbéli, ha nem létezik az ajánlattevő játékosoknak olyan csoportja, akik szigorúan preferálnának egy alternatív üzletet, mely esetén az eladó is szigorúan jobban jár.

Ahogy Day és Milgrom (2008) megmutatják, a magválasztó tulajdonság általános esetben nem feltétlenül teljesül a más szempontokból kívánatos tulajdonságokkal rendelkező mechanizmusok esetén. A több jószágra általánosított Vickrey-aukcióról (lásd Vickrey (1961)) például Green és Laffont (1979) megmutatják, hogy bizonyos feltevések mellett az egyetlen igazmondásra ösztönző mechanizmus. Day és Milgrom (2008) viszont a következő példával illusztrálja, hogy a Vickrey-aukció bevétele kritikusan alacsony lehet, ami magon kívüli eredményhez vezethet. Tekintsük két azonos jószág árverését, három vevő esetén. Az első vevő mindkét jószágot meg kívánja szerezni, és 10 egységet hajlandó fizetni értük. A második és a harmadik vevő egyaránt 10 egységre értékeli az egyik, vagy mindkét jószágot (a második jószág határhasznossága 0). A Vickrey-mechanizmus a második és a harmadik vevőhöz rendeli a termékeket, 0 áron. Az alacsony bevétel problémáját jól mutatja, hogy a három vevő bármelyike kész lenne 10 egységet fizetni a jószágpárért. További probléma, hogy ezen mechanizmus esetén az eladó növelhetné a bevételét azáltal, hogy pl. a harmadik vevőt kizárja, így 10-re emelve az árat.

Habár az irodalomban a magválasztási tulajdonságot jellemzően egyoldali aukciók és oszthatatlan javak esetén vizsgálták különböző feltételezések (pl. többfajta áru) mellett, Rostek és Yoder (2015) általánosította a koncepciót kétoldali piacok esetére is, osztható javakat, azaz többegységes aukciót feltételezve, az aukció lefolytatóját is játékosnak (stratégiai szereplőnek) tekintve. Rostek és Yoder (2015) munkája egy meglehetősen általános feltételrendszer mellett fogalmaz meg eredményeket, elsősorban a Vickrey-aukció kapcsán. Az általuk vizsgált modellben, ahol több osztható jószág egyidejű aukciója történik, az aukció szervezője is rendelkezhet javakkal a kiindulási helyzetben. A használt modell ezenkívül heterogén hasznossági függvényeket feltételez a résztvevők esetén. A szerzők nemrégiben további eredményeket fogalmaztak meg a témában reallokációs aukciók esetén (Rostek és Yoder (2025)), melyek például spektrum-aukciós alkalmazásoknál relevánsak.

Jelen tanulmányban Rostek és Yoder (2015) munkájához képest egy sokkal egyszerűbb (illetve speciálisabb) esetet tekintünk. A kooperatív játékelmélet kontextusában vizsgálunk olyan egytermékes, kétoldali, többegységes aukciókat, melyek potenciálisan nemkonvex ajánlatokat is tartalmazhatnak, és a piactisztító mechanizmus az uniform ár alapú aukció. Modellünkben, melyben a piac résztvevőit tekintjük játékosoknak (az aukció lefolytatóját nem), feltételezzük, hogy a piac szereplői 'őszinte' ajánlatokat adnak be a kereskedni kívánt mennyiségre, illetve árra vonatkozóan – tehát nem vesszük figyelembe a kereslet-, illetve kínálatredukció lehetőségét –, továbbá, hogy a játékosok hasznossága egyszerűen a kifizetési többletükkel egyenlő (tehát nincsenek egyéni hasznossági függvények).

A következő fejezetben bevezetjük a kooperatív játékelmélet legfontosabb fogalmait, melyeket a későbbiekben használni fogunk.

1.2 Karakterisztikus függvény alakú, átruházható hasznosságú kooperatív játékok

Egy átruházható hasznosságú (*transferable utility*, TU) kooperatív játék egy N játékosalmazból és egy $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ értékelő- vagy *karakterisztikus* függvényből áll, mely a játékosok minden $T \subseteq N$ koalíciójához egy $v(T)$ valós értéket rendel. A $v(T)$ érték írja le, hogy a T koalícióban szereplő játékosok milyen értéket tudnak elérni együttműködésükkel, függetlenül a játék többi játékosának viselkedésétől. Az értékelőfüggvényre tett egyetlen általános feltételezés, hogy $v(\emptyset) = 0$.

Egy (N, v) kooperatív játék megoldása egy $x \in \mathbb{R}^N$ kifizetésvektor, amely minden játékoshoz egy kifizetést rendel. Egy megoldást *hatékony*nak hívunk, ha maradéktalanul szétosztja a *nagykoalíció* $v(N)$ értékét a játékosok között, tehát $x(N) = v(N)$, ahol a jelölés értelmezése $x(T) := \sum_{k \in T} x_k$ minden $T \subseteq N$ koalícióra. Egy megoldást *egyéni*leg racionálisnak hívunk, ha $x_k \geq v(\{k\})$ minden $k \in N$ játékosra, más szóval, minden játékos legalább akkora kifizetést kap, mint az általa egymagában alkotott (egyszemélyes) koalíció értéke.

Az egyéni racionalitás fogalmának csoportokra történő általánosításával eljutunk a legszélesebb körben ismert megoldásfogalomhoz, a maghoz (Shapley (1955), Gillies (1959)). A mag nem más, mint a *csoportos racionalitás* feltételeit teljesítő hatékony kifizetésvektorok halmaza, azaz az olyan $x \in \mathbb{R}^N$ kifizetésvektorok halmaza, melyek esetén igaz, hogy $x(N) = v(N)$ és $x(T) \geq v(T)$ minden $T \subset N$ -re.

A magbeli kifizetésvektorok jelentősége, hogy a stabilnak tekinthető alokációkat írják le, ahol a magbeli kifizetéshez képest egyetlen játékos-csoport sem jár jobban azzal, ha elhagyja a nagykoalíciót és önállóan működik együtt. Sajnos általános esetben magelosztások kiszámítása közismerten nehéz feladat a legtöbb játékosztály esetén. Mindazonáltal, a lineáris programozás (LP) eszköztárát használva felépíthető egy LP-probléma, melynek megoldása eldönti a mag ürességét, illetve nem-ürességét, és az utóbbi esetben egy magelosztást is visszaad.

1.3 Kontribúció

Jelen tanulmány fő célja az uniform árazás alapú piactisztítási mechanizmus tanulmányozása kooperatív játékelméleti szempontból kétoldalú többegységes aukciók esetén. A karakterisztikus függvényt az adott koalíció által elérhető teljes többlet (nemzetközi irodalomban Total social welfare – TSW) értékén keresztül definiáljuk. Egy egyszerű, egy-periódusú modell segítségével megmutatjuk, hogy az uniform árazás-alapú piactisztítási mechanizmus által implicált kifizetések magbeli elosztásra vezetnek, feltéve, hogy csak egyszerű ajánlatok szerepelnek a piactisztítási problémában, melyek esetén a részleges elfogadás megengedett. Ezenkívül megmutatjuk, hogy ha az előző napi villamosenergia-piaci aukciókhoz hasonlóan nemkonvex (ún. blokk-) ajánlatok is szerepelnek a problémában, és a paradox elutasítás megengedett, az indukált

kifizetésvektor nem feltétlenül magbeli, illetve a mag ebben az esetben üres is lehet.

2 Modell

Modellünkben egy homogén termék kétoldali többegységes aukcióját vizsgáljuk, ahol vásárlók (D) és eladók (S) mennyiség-ár párokkal leírt ajánlatokat adnak be (a többi résztvevő ajánlatának ismerete nélkül, tehát 'vakon'). Jegyezzük meg, hogy habár realisztikus esetekben, mint például a másnapi villamosenergia-piacok, egy szereplő akár több, eltérő paraméterű ajánlatot is beadhat, itt, az egyszerűség kedvéért azon eset vizsgálatára korlátozzuk munkánkat, amikor egy szereplő csupán egy ajánlatot ad be. A vizsgált modellben ezek a mennyiség-ár típusú ajánlatok lehetnek *egyszerű* vagy ún. *blokkajánlatok*. Míg az előbbi esetben megengedett a részleges elfogadás, az utóbbi esetben csak teljes elfogadás, vagy teljes elutasítás lehetséges.

2.1 Keresleti oldal

A modellünk feltételezése szerint minden $i \in D$ *vásárló* egyszerű ajánlatokat ad be, melyeket a q_i^d mennyiség, illetve a p_i^d ár jellemez. Egy vételi ajánlat paramétereinek értelmezése szerint az ajánlatot beadó szereplő legfeljebb q_i^d egységet kíván vásárolni, legfeljebb p_i^d egységáron.

2.2 Kínálati oldal

Hasonlóan, a kínálati oldalon is az *eladók* egy véges S halmazát feltételezzük. Lehetséges, hogy a kínálati oldalon ajánlatokat tevő eladók a homogén terméket olyan termelési egységek segítségével állítják elő, melyek jelentős indítási költséggel, illetve technológiai korlátozásokkal rendelkeznek. Ilyen jellegű jelenségek kezelésére került bevezetésre bizonyos aukciókon (pl. előzőnapi villamosenergia-piacok) a *blokkajánlatok* fogalma. Mivel egy blokkajánlatot csak teljesen elfogadni, vagy teljesen elutasítani lehet, elfogadás esetén a minimális bevétel jobban becsülhető, így a blokkajánlat alkalmasabb az ilyen jellegű nem konvex költségek figyelembe vételére. Modellünkben megkülönböztetjük az eladók azon halmazát, akik egyszerű ajánlatokat adnak be (SE), és azon eladókat, akik blokkajánlatokat adnak be (SB). Ekkor $S = SE \cup SB$.

Egy $j \in SE$ eladó egyszerű ajánlata esetén az ajánlati ár és mennyiség (p_j^s és q_j^s) azt jelenti, hogy a $j \in SE$ ajánlattevő kész eladni a homogén termékből legfeljebb q_j^s egységnyi mennyiséget, legalább p_j^s egységáron. A piactisztítási folyamat során az egyszerű ajánlatok vagy elutasításra kerülnek, vagy részben, illetve egészben elfogadásra.

A blokkajánlatokat szintén két paraméter, egy mennyiség-ár számpár jellemzi (q_j^s , illetve p_j^s a $j \in SB$ résztvevő esetén), de esetükben csak teljes elfogadás vagy teljes elutasítás lehetséges (részleges elfogadás nem).

2.3 További feltételezések

Legyen $n_d := |D|$, $n_s := |S|$, és az általánosság megszorítása nélkül tegyük fel, hogy $D = \{1, \dots, n_d\}$ és $S = \{1, \dots, n_s\}$ olyanok, hogy $p_i^d \geq p_{i+1}^d$ minden $1 \leq i < n_d$ esetén, és $p_j^s \leq p_{j+1}^s$ minden $1 \leq j < n_s$ esetén. Természetes feltételezés, hogy $q_i^d, q_j^s > 0$ minden $i \in D$ és $j \in S$ esetén, valamint $p_1^d \geq p_1^s$, minthogy egyéb esetben nem történne kereskedés a piacon.

2.4 Piactisztítás uniform árral

Az uniform árazású piactisztítási algoritmus feladata, hogy a beadott ajánlatok összességének figyelembevételével (I) meghatározza a *piactisztító árat* (p^*) és (II) meghatározza az egyes ajánlatok részleges, illetve teljes elfogadását vagy elutasítását (y) oly módon, hogy az elfogadási mintázat konzisztens legyen a p^* piactisztító árral, biztosítva a kereslet és a kínálat mennyiségi egyensúlyát. A piactisztítási probléma optimalizációs problémaként kerül megfogalmazásra, ahol a cél a teljes társadalmi jólét maximalizálása. A teljes jólét ebben a kontextusban az elfogadott keresleti ajánlatok teljes hasznosságának és az elfogadott kínálati ajánlatok teljes költségének különbsége, feltételezve, hogy a vásárlók, illetve az eladók a hasznossági-, illetve költségértéküknek megfelelően adják meg az ajánlatok p_i^d , illetve p_j^s paramétereit (a feltételezett modell keretein belül történő stratégiai ajánlattétel lehetőségeire vonatkozó eredmények kapcsán lásd a Tellidou és Bakirtzis (2007), Aliabadi, Kaya és Şahin (2016), Csércsik (2021) cikkeket).

A jelen munkában Meeus, Verhaegen és Belmans (2009) cikkének formalizmusát követjük, azon különbséggel, hogy a keresleti oldalon nem veszünk figyelembe blokkajánlatokat. Az optimalizációs problémát az (1)–(10) egyenletek írják le, ahol y_i^d és y_j^s jelölik rendre a keresleti és kínálati ajánlatok elfogadási indikátorait, (1) formula írja le a teljes jólétet, a (2) egyenlet a kereslet és kínálat megkövetelt egyensúlyát, (3)–(10) formulák pedig az elfogadási korlátozások, melyek az ajánlati ár és a piactisztító ár viszonyát írják le az ajánlatok elfogadása, illetve elutasítása esetén, felhasználva a z_i^d , u_i^d , illetve z_j^s , u_j^s bináris segédváltozókat.

$$\max_{p^*, y, z, u} \quad \sum_{i \in D} y_i^d q_i^d p_i^d - \sum_{j \in S} y_j^s q_j^s p_j^s \quad (1)$$

$$\text{f. h.} \quad \sum_{i \in D} y_i^d q_i^d - \sum_{j \in S} y_j^s q_j^s = 0 \quad (2)$$

$$p^* \leq p_i^d + (1 - z_i^d) M_i^d, \quad y_i^d \leq z_i^d \quad \forall i \in D \quad (3)$$

$$p^* \geq p_i^d u_i^d, \quad y_i^d \geq 1 - u_i^d \quad \forall i \in D \quad (4)$$

$$p^* \geq p_j^s z_j^s, \quad y_j^s \leq z_j^s \quad \forall j \in SE \quad (5)$$

$$p^* \leq p_j^s + (1 - u_j^s) M_j^s, \quad y_j^s \geq 1 - u_j^s \quad \forall j \in SE \quad (6)$$

$$p^* \geq p_j^s y_j^s \quad \forall j \in SB \quad (7)$$

$$z_i^d, u_i^d \in \{0, 1\}, \quad y_i^d \in [0, 1] \quad \forall i \in D \quad (8)$$

$$z_j^s, u_j^s \in \{0, 1\}, \quad y_j^s \in [0, 1] \quad \forall j \in SE \quad (9)$$

$$y_j^s \in \{0, 1\} \quad \forall j \in SB \quad (10)$$

Jegyezzük meg, hogy a (3) egyenlőtlenség biztosítja, hogy abban az esetben, ha az i keresleti ajánlat legalább részben elfogadásra kerül, tehát $y_i^d > 0$, akkor $p^* \leq p_i^d$, egyébként pedig (ha $y_i^d = 0$) triviálisan teljesül $z_i^d = 0$ mellett, ha $M_i^d > 0$ egy elegendően nagy konstans. Utóbbi a beadott ajánlatok ára alapján meghatározható a következőképpen. Mivel $\hat{p} := \min\{p_1^d, p_{n_s}^s\}$ természetes felső korlátja p^* -nak, bármilyen $M_i^d \geq \hat{p} - p_i^d$ elegendően nagy. Hasonlóképpen a (4) egyenlőtlenség biztosítja, hogy ha az i keresleti ajánlat legalább részlegesen elutasításra kerül, tehát $y_i^d < 1$, akkor $p^* \geq p_i^d$. Az (5) és (6) korlátozások az $M_j^s \geq \hat{p} - p_j^s$ konstans segítségével hasonló megfontolásokat formalizálnak az egyszerű kínálati ajánlatok esetén.

Blokkajánlatok esetében a feltételezett modell megengedi a paradox elutasítást (lásd a (10) egyenletet), azaz azt az esetet, hogy egy blokk kínálati ajánlat elutasításra kerül akkor is, ha az ajánlati ára a piactisztító árnál alacsonyabb (Meeus, Verhaegen és Belmans (2009)). Ez a feltételezés szükséges ahhoz, hogy biztosítsuk az (1)–(10) probléma megoldhatóságát, valamint követi például az európai előzőnap villamosenergia-piacok általános gyakorlatát, lásd pl. Biskas, Chatzigiannis és Bakirtzis (2013), illetve Chatzigiannis és tsai. (2016) munkáit. Szemléletesen, ha a paradox elutasítás nem lenne lehetséges, és a blokkajánlatok elfogadási kényszerfeltételei megegyeznének az egyszerű ajánlatok esetében leírtakkal, akkor abban az esetben, ha a kumulatív keresleti és kínálati görbék metszéspontja éppen egy blokkajánlat belső pontjára esik, az optimalizációs problémának nincs megoldása. Ahogy Madani és Van Vyve (2017) leírják, a piactisztítás során megfogalmazható különféle célok, mint az összjólét maximalizálása, a kereskedett mennyiség maximalizálása, illetve az elveszett lehetőségekkel kapcsolatos költségek vagy a paradox módon elutasított ajánlatok minimalizálása, egymással általános esetben nem összeegyeztethető célok.

2.4.1 Piactisztítás kizárólag egyszerű ajánlatok esetén

Kizárólag egyszerű ajánlatokat tartalmazó esetben lehetséges a formalizmus jelentős egyszerűsítése. Az (1)–(10) egyenletek halmaza helyett ez esetben a (11)–(14) egyenletek által leírt probléma megoldásával is számolható a piactisztítás.

$$\max_y \quad \sum_{i \in D} y_i^d q_i^d p_i^d - \sum_{j \in SE} y_j^s q_j^s p_j^s \quad (11)$$

$$\text{f. h.} \quad \sum_{i \in D} y_i^d q_i^d - \sum_{j \in SE} y_j^s q_j^s = 0 \quad (12)$$

$$y_i^d \in [0, 1] \quad \forall i \in D \quad (13)$$

$$y_j^s \in [0, 1] \quad \forall j \in SE \quad (14)$$

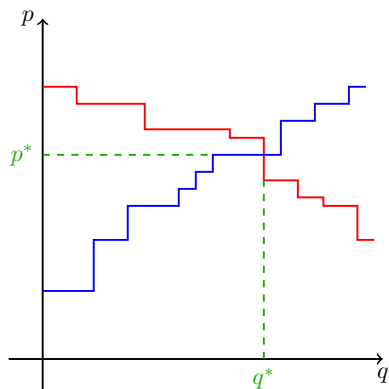
Indirekt módon belátható, hogy a (11)–(14) probléma optimumának szükséges feltétele, hogy a legalacsonyabb árú kínálati, illetve a legmagasabb árú keresleti ajánlatok kerüljenek elfogadásra. Ha pl. feltesszük, hogy keresleti oldalon léteznek olyan A és B ajánlatok, hogy $p_A^D > p_B^D$, és az optimumban B valamekkora részben elfogadásra kerül, de A nem (vagy B egészben, de A csak részben), akkor a B ajánlat elfogadása részben vagy egészben (az ajánlati mennyiségektől függően) helyettesíthető az A ajánlat elfogadásával, ami a célfüggvény értékét javítja, és a (12) egyenlőség továbbra is teljesül (a gondolatmenet azonosan alkalmazható a kínálati oldalra is). Ez a megállapítás a következő szemléletes megközelítést teszi lehetővé.

Tekintsük az aggregált keresleti görbét, mely egy monoton csökkenő $p(q)$ lépcsősfüggvény, melynek értéke p_1^d , ha $q \leq q_1^d$, p_2^d , ha $q_1^d < q \leq q_2^d$, ..., és $-\infty$, ha $q_{n_D}^d < q$. A monoton növekedő aggregált kínálati görbe hasonlóan számolható. A két oldal igényei a görbék metszéspontjában, illetve metszéspontjaiban találkoznak (a görbék nem szükségszerűen egy pontban metszik egymást). Az aggregált keresleti és kínálati görbék metszetének jellege alapján négy esetet különböztethetünk meg (ld. 1. ábra).

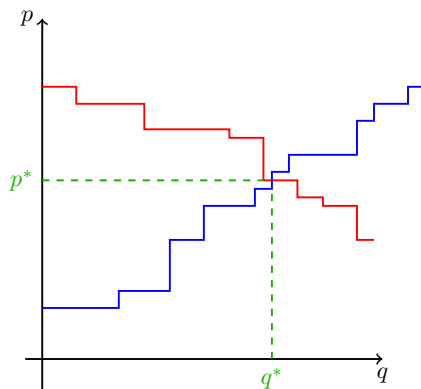
- (i) *Kínálat-vezérelt piactisztítás.* A görbék egy pontban metszik egymást, ahol a keresleti függvény ugrása található.
- (ii) *Kereslet-vezérelt piactisztítás.* A görbék egy pontban metszik egymást, ahol a kínálati függvény ugrása található.
- (iii) A fentiek közül egyik sem, ami 2 további esetre bontható:
 - a) A görbék több pontban (egy intervallumon) metszik egymást egy konstans ár mellett.
 - b) A görbék több pontban metszik egymást egy konstans mennyiség mellett.

Vezessük be a teljes kereskedett mennyiségnek megfelelő $q^* = \sum q_j^s y_j^s = \sum q_i^d y_i^d \geq 0$ segédváltozót, amit a 2. ábra szemléltet.

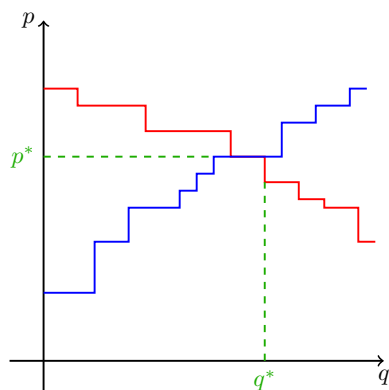
Mivel az ajánlatokat a keresleti, illetve kínálati aggregált görbe szerint sorba rendezve egy adott q^* érték egyértelműen meghatározza az y elfogadási indikátorokat, látható, hogy a (11)–(14) egyenletekkel leírt optimalizálási feladat megoldása ebben az esetben ekvivalens q^* optimális megválasztásával, amit pedig a keresleti és a kínálati görbék metszéspontja fog meghatározni (ha a görbék több pontban metszik egymást, akkor bármelyikhez ugyanazon célfüggvény-érték tartozik, tételezzük fel ez esetben a maximális értéket), hiszen eddig a pontig növelve q^* -t a célfüggvény értéke is növekszik, ezen túl viszont csökken. A piactisztító árat az utolsó, részben elfogadott ajánlat fogja meghatározni, illetve, ha esetleg éppen az 1.d ábrán látható eset áll elő (nincs részben elfogadott ajánlat), akkor az utolsó két teljesen elfogadott keresleti, illetve kínálati ajánlat ára közé kell esnie (lásd később).



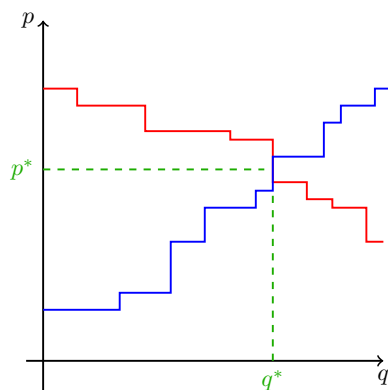
(a) Kínálatvezérelt piactisztítás



(b) Keresletvezérelt piactisztítás

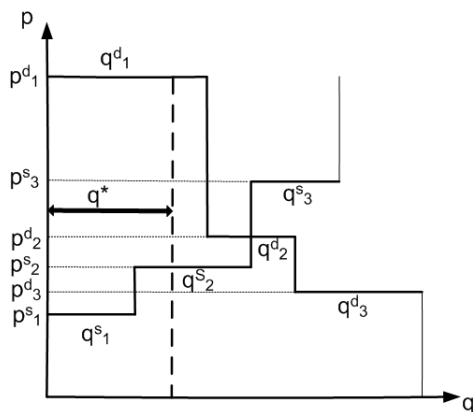


(c) (iii.a) eset



(d) (iii.b) eset

1. ábra. A piactisztítás különböző esetei


 2. ábra. A q^* segédváltozó szemléltetése

Így meghatározva q^* -ot, az ajánlat-elfogadási indikátorváltozókat (y) és a piactisztító árat (p^*), az (1)–(10) probléma optimális megoldását is megkaptuk egyben, a következők miatt. A piactisztító ár (p^*) és az elfogadott ajánlatokhoz tartozó p^s és p^d értékek viszonya megfelel a (3)–(6) feltételeknek – hiszen a teljes egészében elfogadott keresleti (kínálati) ajánlatok ára magasabb (alacsonyabb), az elutasított keresleti (kínálati) ajánlatok ára pedig alacsonyabb (magasabb) a piactisztító árhoz képest, a részben elfogadott ajánlat ára pedig azzal megegyező –, így az eredeti (1)–(10) probléma z és u segédváltozói értelemszerűen meghatározhatók oly módon, hogy a megfelelő korlátok teljesüljenek. Szemléletesen ez azt jelenti, hogy ha kizárólag egyszerű ajánlatok vannak jelen, a p^* piactisztító ár (market clearing price – MCP) és az eredő kereskedett mennyiség (q^*) meghatározható az aggregált keresleti és kínálati görbék metszéspontja alapján.

Ekkor a keresleti oldalon a teljes q_i^d keresleti mennyiség kielégítésre kerül minden $i \in D$ esetén, melyre $p_i^d > p^*$, míg $p_i^d = p^*$ esetén az $i \in D$ kereslete valamilyen szinten kerül kielégítésre a $[0, q_i^d]$ intervallumban. Az (i) esetben ez utóbbi vásárlók halmaza üres. Kínálati szemszögből a teljes q_j^s kínálati mennyiség felhasználásra kerül a kereslet kielégítésére minden $j \in S$ esetén, melyre $p_j^s < p^*$ (jegyezzük meg, hogy ez utóbbi nem igaz blokkajánlatok esetén), míg további kínálati mennyiség is felhasználásra kerülhet, melyekre $p_j^s = p^*$.

Azonban minden esetben meghatározunk egy egyértelmű $\hat{i} \in D$ és $\hat{j} \in S$ párt, melyek egyértelműen meghatározzák a piactisztító p^* árat, illetve q^* kereskedett mennyiséget az alábbiak szerint. Az (i) esetben $p^* = p_j^s$ úgy, hogy $q^* = \sum_{k=1}^{\hat{i}} q_k^d$, valamint $p^* < p_i$ és $\sum_{k=1}^{\hat{j}-1} q_k^s < q^* < \sum_{k=1}^{\hat{j}} q_k^s$. Ezzel szemben a (ii) esetben $p^* = p_i^d$ és $q^* = \sum_{k=1}^{\hat{j}} q_k^s$, illetve $p^* > p_j$ és $\sum_{k=1}^{\hat{i}-1} q_k^d < q^* < \sum_{k=1}^{\hat{i}} q_k^d$. A (iii.a) esetben $p^* = p_j^s = p_i^d$, valamint $q^* = \min \left(\sum_{k=1}^{\hat{j}} q_k^s, \sum_{k=1}^{\hat{i}} q_k^d \right)$. A (iii.b) esetben azonban, míg a q^* egyértelműen adódik, mint $q^* = \sum_{k=1}^{\hat{j}} q_k^s = \sum_{k=1}^{\hat{i}} q_k^d$, addig elméletben bármilyen p^* piactisztító árat választhatnánk a $[p_j^s, p_i^d]$ intervallumban. Annak érdekében, hogy p^* minden esetben egyértelműen meghatározott legyen, mi az intervallum középpontját választjuk, azaz $p^* = (p_j^s + p_i^d)/2$ a (iii.b) esetben. Végül megjegyezzük, hogy a (iii.a) és (iii.b) esetek úgymond egyszerre is fennállhatnak, pontosan akkor, ha a q^* -ot a (iii.a)-ban meghatározó minimum mindkét argumentumban felvételik, illetve amikor a (iii.b)-ben a potenciális piactisztító árak intervalluma egyetlen pontból áll. Mivel ekkor a p^* és q^* értékek meghatározása ugyanarra vezetnének mindkét esetet követve, az egyértelműség kedvéért mi ezt a (iii.b) esetbe soroljuk.

A piactisztító ár és mennyiség meghatározásával lehetőségünk adódik a piac résztvevőinek jólétének mérésére is, melyet $x^* \in \mathbb{R}^N$ -nel jelölünk, ahol a résztvevők $N = D \cup S$ halmaza áll a keresleti oldali vevőkből és kínálati oldali eladókból.

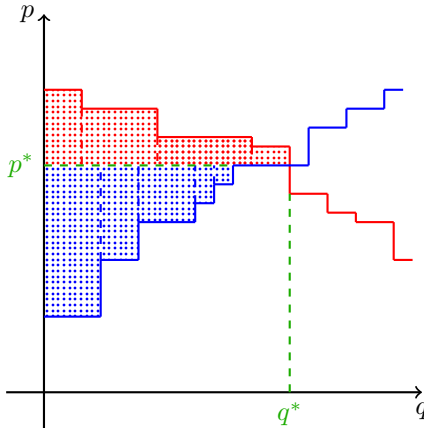
1. Példa. Legyen $n_d = 8$, $n_s = 9$, és a kínálati, illetve keresleti ajánlatok az 1. táblázat szerintiek. Nincsenek blokkajánlatok, azaz minden kínálati

ajánlat „egyszerű”. Ez a szituáció egy kínálatvezérelt piachoz vezet, melyet az 1a. ábra szemléltet. Az aggregált keresleti és kínálati görbék metszéspontja a $p^* = 6$, $q^* = 6.5$ pontban található. Tegyük fel, hogy megjelenik egy új j kínálati ajánlat a piacon, melyre $p_j^s = 1.5$ és $q_j^s = 2.25$. Ekkor lényegében az aggregált kínálati görbe (egy része) eltolódik jobbra, miközben az aggregált keresleti görbe változatlan marad. A piac átvált az 1b. ábrán látható keresletvezéreltbe, a görbék metszéspontja megváltozik, immáron a $p^* = 5.25$, $q^* = 6.75$ pontban található. A piactisztító ár és mennyiség ilyen jellegű monoton változásának nagy jelentősége lesz a későbbiekben (ld. 2. Lemma).

i/j	p_i^d	q_i^d	p_i^s	q_i^s
1	8	1	2	1.5
2	7.5	2	3.5	1
3	6.75	2.5	4.5	1.5
4	6.5	1	5	0.5
5	5.25	1	5.5	0.5
6	4.75	0.75	6	2
7	4.5	1	7	1
8	3.5	0.5	7.5	1
9			8	0.5

1. táblázat. Keresleti és kínálati ajánlatok

Legyen $\tilde{D} = \{i \in D : p_i^d \geq p^*\}$ és $\tilde{S} = \{j \in S : p_j^s \leq p^*\}$. Az (i), (ii) és (iii.b) esetekben legyen x_i^* értéke $q_i^d(p_i^d - p^*)$ minden $i \in \tilde{D}$ esetén, illetve legyen $x_j^* = q_j^s(p^* - p_j^s)$ minden $j \in \tilde{S}$ esetén. Ez összhangban van a piactisztítás melletti jólét klasszikus mérésével, azaz az összjólétet úgy értelmezzük, mint az aggregált keresleti és aggregált kínálati görbék különbségének integrálját a görbék metszéspontjáig bezárólag, az egyéni többleteket pedig a görbék és a piactisztító ár által bezárt téglalapok adják meg, melyekre ez az integrál felbontható (ld. 3. ábra).



3. ábra. Piactisztítás melletti összjólét, és felbontása egyéni többletekre

A (iii.a) esetben óvatosan kell bánnunk vagy $\hat{i} \in \tilde{D}$ vagy $\hat{j} \in \tilde{S}$ esetében, attól függően, hogy a minimum hol vétetik fel. Konkrétan

$$x_i^* = \left(q^* - \sum_{k=1}^{\hat{i}-1} q_k^d \right) (p_i^d - p^*) \quad \text{és} \quad x_j^* = \left(q^* - \sum_{k=1}^{\hat{j}-1} q_k^s \right) (p^* - p_j^s).$$

Természetesen $x_i^* = x_j^* = 0$ minden $i \in D \setminus \tilde{D}$ és $j \in S \setminus \tilde{S}$ esetén.

2.5 Az uniform árazás-alapú piactisztítási mechanizmus által indukált TU-játék

Ebben a részben bevezetünk egy TU játékosztályt, az általunk vizsgált uniform árazás-alapú, kétoldali többegységes aukciók melletti piactisztítási mechanizmus által indukálva. Egy ilyen TU-játék játékoshalmaza álljon a vevőkből és eladókból, azaz $N = D \cup S$. Ahogy a 2.4.1 alfejezetben bemutatuk, az aggregált keresleti és kínálati görbék metszéspontja meghatároz egy egyértelmű p^* piactisztító árat és q^* mennyiséget. Ez egyben meghatározza, mi az a maximális többlet, amit a nagykoalíció N meg tud teremteni.

Hasonlóan, tetszőleges $T \subseteq N$ koalíció esetén, ha megszorítjuk az aggregált keresleti és kínálati görbéket úgy, hogy csak a $T \cap D$ keresleti oldali és $T \cap S$ kínálati oldali ajánlatokat tükrözzék, akkor is kapunk egy egyértelmű p_T^* piactisztítási árat és q_T^* mennyiséget a T azon piactisztítási probléma esetén, ahol csak a T koalíció ajánlatait tekintjük. A T koalíció által ekkor elért többlet nem más, mint

$$\sum_{\substack{i \in T \cap D \\ Q_i^d \leq q_T^d}} p_i^d q_i^d - \sum_{\substack{j \in T \cap S \\ Q_j^s \leq q_T^s}} p_j^s q_j^s, \quad (15)$$

ahol

$$Q_i^d := \sum_{\substack{k \in T \cap D \\ k \leq i}} q_k^d \quad \text{és} \quad Q_j^s := \sum_{\substack{k \in T \cap S \\ k \leq j}} q_k^s$$

a $T \subseteq N$ koalícióban lévő kumulatív keresleti és kínálati mennyiségek az $i \in T \cap D$ keresleti és $j \in T \cap S$ kínálati licitekig bezárólag. A (15) által meghatározott többletérték a TU-játékban a T koalícióhoz tartozó $v(T)$ érték. Vegyük észre, hogy ez utóbbi közvetlenül nem függ a koalícióhoz tartozó p_T^* piactisztító ártól, csupán implicit módon a q_T^* piactisztító mennyiségen keresztül.

3 Eredmények

3.1 Egyszerű ajánlatok esetén az uniform piactisztító ár által indukált elosztás magbéli

Az alábbiakban megmutatjuk a cikk fő eredményét, mely szerint egyszerű ajánlatok esetén az imént definiált TU-játék magja nem üres. Mindezt konst-

ruktívan látjuk be, valamivel többet megmutatva: meghatározunk egy magbeli elosztást. Konkrétabban megmutatjuk, hogy a nagykoalíció esetén a játékosokhoz rendelt többletekből álló x^* kifizetésvektor magbeli. Legyen a problémában a keresleti és kínálati résztvevők halmaza $N = D \cup S$, az ajánlatok pedig a $(p_i^d, q_i^d)_{i=1}^{n_d}$ és $(p_j^s, q_j^s)_{j=1}^{n_s}$ párokkal adottak, valamint az erre épülő TU-játék (N, v) . A kezdetekben az egyszerűség kedvéért feltételezünk egyedi árajánlatokat, azaz feltesszük, hogy $p_1^d > \dots > p_{n_d}^d$ és $p_1^s < \dots < p_{n_s}^s$. A későbbiekben feloldjuk majd ezt a feltételezést.

Ahogy a T koalíció által elérhető $v(T)$ többletet visszavezettük a nagykoalícióval analóg módon a T koalícióra megszorított aggregált keresleti és kínálati görbék közötti területre, úgy a nagykoalíciós piactisztítás melletti x^* elosztáshoz analóg módon tudunk egy-egy $x^T \in \mathbb{R}^T$ elosztást is értelmezni a $T \subseteq N$ koalíció esetén. Legyen $x_i^T = \max(p_i^d - p_T^*, 0)q_i^d$ minden $i \in T \cap D$ keresleti és $x_j^T = \max(p_T^* - p_j^s, 0)q_j^s$ minden $j \in T \cap S$ kínálati ajánlat esetén. Egy $T \subset N$ koalíció esetén a p_T^* áron kereskedett q_T^* mennyiséget nevezzük *koalíciós piactisztításnak*, míg az x_T elosztást az ehhez tartozó *elosztásnak*.

Vizsgáljuk meg, mi történik, ha egy $k \notin T$ játékos csatlakozik a T koalícióhoz. A játék értelemszerűen monoton, azaz $v(T \cup k) \geq v(T)$, hiszen egy új ajánlat megjelenésével az aggregált görbék közötti terület nem csökkenhet. Azonban ennél többet is meg tudunk állapítani, az alábbi lemmában megmutatjuk, hogy ez a monotonitás kiterjed a koalíciós piactisztítás melletti elosztásra is.

2. Lemma. $x^{T \cup k}(T) \geq x^T(T)$ minden $k \notin T$ esetén.

Bizonyítás. Az x^T elosztás mellett a koalíció által megtermelt többletet fel tudjuk bontani az elosztás által a keresleti, illetve a kínálati oldalnak kiosztott többletekre, azaz $x^T(T) = x^T(T \cap D) + x^T(T \cap S)$.

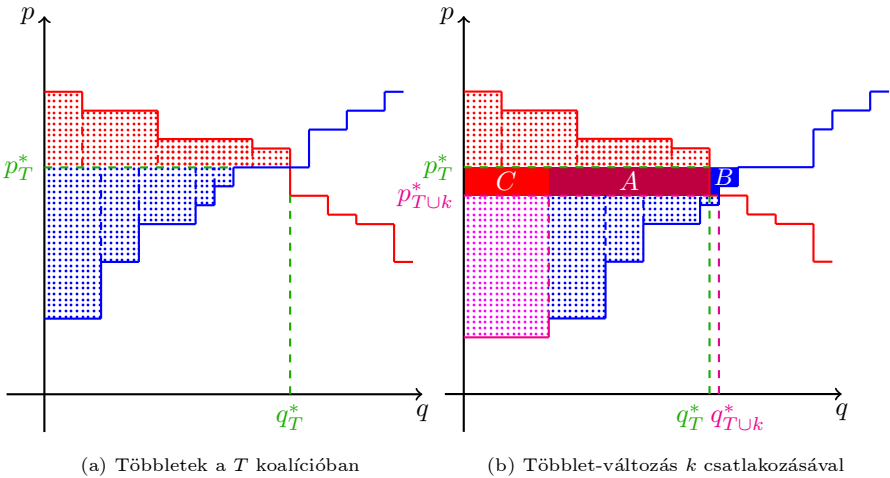
Vizsgáljuk először a $k \in S$ kínálati esetet (a $k \in D$ keresleti oldal hasonló módon adódik). A (p_k^s, q_k^s) új kínálati ajánlat megjelenésével az új piactisztító ár nem nőhet, valamint a kereskedett mennyiség nem csökkenhet, azaz $p_{T \cup k}^* \leq p_T^*$ és $q_{T \cup k}^* \geq q_T^*$. Eközben a kínálati oldal $x^T(T \cap S)$ többlete az alábbiak szerint változik: az árváltozás hatására csökkenhetnek a kínálati oldali többletek, ráadásul k csatlakozásával előfordulhat, hogy bizonyos (magasabb árú) kínálati ajánlatok nem kerülnek elfogadásra a $T \cup k$ szerinti piactisztítás alatt, amik T -nél még elfogadásra kerültek. Mindenesetre együttesen az árváltozás és a piacról való kiszorulás potenciális hatásai mellett a kínálati többletcsökkenés felülről becsülhető:

$$x^{T \cup k}(T \cap S) - x^T(T \cap S) \leq (p_T^* - p_{T \cup k}^*)q_T^*.$$

Eközben a keresleti oldal $x^T(T \cap D)$ többlete legalább $(p_T^* - p_{T \cup k}^*)q_T^*$ mennyiséggel növekszik: a potenciálisan alacsonyabb piactisztító ár hatása azon $T \cap S$ -beli ajánlatokon, melyek $T \cup k$ mellett is elfogadásra kerülnek, egyszerűen áthelyezi a többletet a kínálati oldalról a keresleti oldalra; míg a potenciálisan növekvő mennyiség és ezáltal a relatíve magas kínálati árajánlatok piacról való kiszorulása még további többletet eredményezhet a keresleti oldalon.

Ez utóbbit szemlélteti a 4. ábra: a bal oldalon a T koalíció melletti piactisztítás, a jobb oldalon a $T \cup k$ koalíció mellett a többletek változása. Az új kínálati oldali ajánlat² megjelenésével az A -val jelölt lila és a B -vel jelölt kék többletet elveszti a $T \cap S$ kínálati oldal. Ebből viszont az előbbi megkapja a $T \cap D$ keresleti oldal, sőt, az tovább növekszik a pirossal jelölt C többlettel. Az, hogy a C mindig elegendő lesz az elvesztett B hiány úgymond „kárpótlására”, könnyen belátható azzal, hogy az előbbinél elért plusz többlet $(p_T^* - p_{T \cup k}^*)q_k$, míg a B esetében elvesztett többlet legfeljebb $(p_T^* - p_{T \cup k}^*)q_k$.

A $k \in D$ keresleti oldali ajánlat csatlakozása eset teljesen analóg módon elemezhető, csak akkor az új piactisztító ár nem csökken (a mennyiség továbbra is nem csökken), a keresleti oldali többlet csökken, amit viszont fedez a kínálati oldali többletnövekmény. $\square$



4. ábra. Piactisztítás melletti többletek változása új kínálati ajánlat csatlakozása esetén

3. Tétel. *Az x^* nagykoalíciós többlet-elosztás a 2.5 alfejezetben definiált DAPX játék magjában van.*

Bizonyítás. Tetszőleges $T \subseteq N$ koalíció esetén $v(T) = x^T(T)$ definíció szerint. Így egyrészt $x^*(N) = v(N)$ teljesül, másrészt a 2. Lemma szerint tetszőleges $k \notin T$ -re $x^T(T) \leq x^{T \cup k}(T)$. Vegyük tehát az $N \setminus T$ -beli játékosokat, tetszőleges sorrendben a T koalícióhoz csatlakozva kapjuk, hogy

$$v(T) = x^T(T) \leq x^{T \cup k}(T) \leq \dots \leq x^*(T)$$

tetszőleges $T \subseteq N$ esetén, azaz az x^* elosztás magbéli. $\square$

²Megjegyezzük, hogy a T és $T \cup k$ koalíciók 0-tól a $\sum_{\substack{j \in T \cap S \\ p_j^s \leq p_k^s}} q_j^s$ aggregált mennyiségig

bezárólag pontosan ugyanannyi többletet állítanak elő. Az általánosság megsértése nélkül tehát feltehető, hogy $p_k^s \leq p_j^s$ minden $j \in T \cap S$ esetén.

4. Megjegyzés. A 2. Lemma és a 3. Tétel akkor is fennáll, ha vannak azonos árajánlatok.

Bizonyítás. Tegyük most fel, hogy $\exists i \in D$ melyre $p_i^d = p_{i+1}^d$ (a kínálati oldali áregyenlőség teljesen analóg módon belátható), és legyen $T \subseteq N$ tetszőleges koalíció. Az egyedüli eset, amikor az x^T elosztás vagy a $v(T)$ koalíciós érték bármiben eltérhet az egyedi árajánlatoktól az, ha T esetén a koalíciós piac keresletvezérelt; minden más esetben az i és $i+1 \in D$ ajánlatokat egyszerre fogadják el vagy utasítják el teljes egészében a T koalíció melletti piactisztítás során. Vegyük észre azonban, hogy ebben az esetben $x_i^T = x_{i+1}^T = 0$ attól függetlenül, hogy az i , illetve $i+1 \in D$ ajánlatokat milyen mértékben fogadjuk el. $\square$

5. Megjegyzés. Ha a 2.4.1 alfejezetben definiált három eset közül az (i), illetve a (ii) esetet tekintjük (melyek a gyakorlatban a legnagyobb eséllyel fordulnak elő), akkor az egyetlen, részben elfogadott ajánlat többlete mindig 0 lesz, ezért a releváns játékos egyéni racionalitási feltétele marginálisan teljesül, ezért az MCP-alapú kifizetési szabály a mag egy határpontját adja meg. A (iii.a) esetben két olyan szereplő is lesz, akik szempontjából az egyéni racionalitási feltétel marginálisan teljesül.

6. Megjegyzés. Sánchez-Soriano, López és García-Jurado (2001) cikke a jelen cikkben vizsgált problémához hasonló struktúrát, az úgynevezett szállítási probléma által definiált szállítási játékot vizsgálja. A szállítási probléma általános esetben a (16)–(19) egyenletekkel írható le, ahol q_{ij} a j -ik eladótól az i -ik vevőnek átadandó mennyiség, és $b_{ij} \geq 0$ ezen szállítás által generált egységnyi többlet.

$$\max \sum_i \sum_j b_{ij} q_{ij} \quad (16)$$

$$\text{f. h. } \sum_j q_{ij} \leq q_i^d \quad \forall i \quad (17)$$

$$\sum_i q_{ij} \leq q_j^s \quad \forall j \quad (18)$$

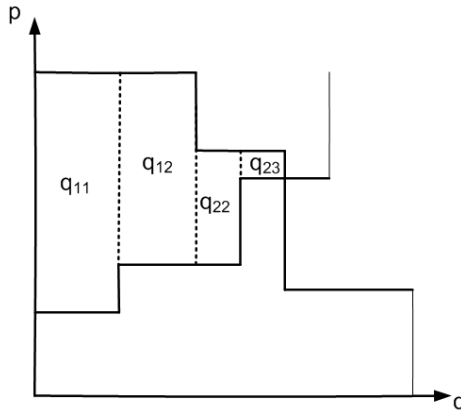
$$q_{ij} \geq 0. \quad (19)$$

A játék karakterisztikus függvénye egy adott koalícióra szintén azon piac eredő jólétértékeként van definiálva, melyben csak a koalícióban szereplő játékosok vesznek részt. Az általunk vizsgált DAPX játék (csak egyszerű ajánlatok esetén) szoros kapcsolatban van a szállítási játékokkal. Adott $(p_i^d)_{i \in D}$ és $(p_j^s)_{j \in SE}$ árajánlatok esetén a vonatkozó DAPX játék egyben egy szállítási játék is, ha a

$$b_{ij} = p_i^d - p_j^s \quad \forall i \in D, \quad j \in SE \quad (20)$$

egyenletrendszernek van $b \geq 0$ nemnegatív megoldása (ami pontosan akkor teljesül, ha $p_i^d - p_j^s \geq 0$ minden $i \in D, j \in SE$ párra). Ha ez teljesül, akkor

a 2.4.1 alfejezetben tett megfontolás ez esetben is alkalmazhatóvá válik: a probléma optima esetén a legmagasabb értékű, tehát a legnagyobb $p_i^d - p_j^s$ különbséghez tartozó szállítások kell, hogy megvalósuljanak. Ha például a vevők oldalát tekintve feltesszük, hogy léteznek olyan A és B vevők, hogy $p_A^d > p_B^d$, és az optimumban $\sum q_{Aj} < q_A^d$ és $\sum q_{Bj} > 0$, akkor a B -hez tartozó szállítások részben vagy egészben (a q_A^d és q_B^d mennyiségektől függően) helyettesíthetőek A -hoz tartozó szállításokkal, amik a célfüggvény értékét javítják, hiszen a j partner, így a tranzakcióhoz tartozó p_j^s ugyanaz marad, míg p_i^d növekszik. Ekkor, ahogy az 5. ábrán látható, a probléma kézenfekvően megfeleltethető a többegységes kétoldalú piac problémájának, és szintén az aggregált keresleti és kínálati görbék metszéspontja által meghatározott megoldásra vezet.



5. ábra. Kétoldalú piac, speciális szállítási probléma esetén

Látható tehát, hogy ekkor a Sánchez-Soriano, López és García-Jurado (2001) cikkében megfogalmazott, általános szállítási játékokra tett állítások fennállnak. A jelen cikkben megfogalmazott állítással összhangban Sánchez-Soriano, López és García-Jurado (2001) cikkének 5. tétele mutatja a mag nemürességét.

Sánchez-Soriano, López és García-Jurado (2001) cikkét követve megvizsgáljuk a (11)–(14) által megadott LP duálját.

$$\min_{u,v,\alpha} \sum_{i \in D} u_i + \sum_{j \in SE} v_j \quad (21)$$

$$\text{f. h. } u_i + q_i^d \alpha \geq q_i^d p_i^d \quad \forall i \in D \quad (22)$$

$$v_j - q_j^s \alpha \geq -q_j^s p_j^s \quad \forall j \in SE \quad (23)$$

$$u, v \geq 0 \quad (24)$$

Az u_i , illetve v_j változók a keresleti (13) és kínálati (14) felső korlátokhoz tartozó duál változók, míg α a (12) egyenlőségkorláthoz tartozó (előjelkövetlen) duál változó. A (16)–(19) LP-től kis mértékben eltérő formalizmus eltérő értelmezést is eredményez, de ettől függetlenül hasonló következtetéseket tudunk levonni: a (11)–(14) és (21)–(24) LP-knek egyaránt van optimális megoldása, és az utóbbi (duál) LP tetszőleges (u^*, v^*, α^*) optimális megoldása esetén az u^* és v^* változók értékei közvetlenül meghatároznak egy magelosztást a vonatkozó DAPX játéokban.

Ugyanakkor az továbbra is igaz, hogy nem minden magelosztás állítható elő duál optimális megoldásokból. Adaptálva Sánchez-Soriano, López és García-Jurado (2001) példáját, legyen $D = \{1\}$, $SE = \{2, 3\}$, $q_1^d = 4$, $q_2^s = 3$, $q_3^s = 2$, $p_1^d = 4$, $p_2^s = 2$ és $p_3^s = 1$.³ Ekkor a (21)–(24) duál LP egyetlen optimális megoldása az $(u^*, v^*, \alpha^*) = (8, 0, 2, 2)$, míg a mag végtelen sok pontból áll: $x \in \mathbb{R}_+^3$, melyre $x_1 + x_j \geq 6$ ($j = 2, 3$) és $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, mind magelosztást határoz meg.

A DAPX és szállítási játékok kapcsolatáról megállapíthatjuk, hogy általánosságban egyik játékosztály sem tartalmazza a másikat. Korábban láttuk, hogy bizonyos nemnegativitási feltételek ($p_i^d - p_j^s \geq 0$ minden $i \in D, j \in SE$ párra) teljesülése esetén a DAPX játékok a szállítási játékok speciális esetei; fordítva egy szállítási játék rögzített b esetén a (20) egyenletrendszer p -ben való megoldhatóságától függ, hogy felírható-e DAPX játékként. Vegyük észre, hogy $|D|$ és $|SE|$ számú értékek különbségeinek kell illeszkednie $|D| * |SE|$ értékhez, azaz az alábbi következtetést tudjuk levonni.

7. Megjegyzés. Legyen $|D| \leq 2$ és $|SE| \leq 2$. Ekkor minden legfeljebb 2×2 -es szállítási játék (melyben $|D|$ keresleti és $|SE|$ kínálati pont szerepel) felírható, mint egy DAPX játék; illetve ha $p_i^d - p_j^s \geq 0$ minden $i \in D$ és $j \in SE$ párra, akkor minden ilyen DAPX játék megadható úgy, mint egy szállítási problémából eredeztethető szállítási játék (melyben $|D|$ keresleti és $|SE|$ kínálati pont szerepel).

A fentebbi nemnegativitási feltétel a szállítási problémák természetes része, azonban nem feltétlenül egy valódi megkötés a szállítási játékokra vonatkozóan, az alábbiak szerint. Tekintsünk most egy olyan DAPX játékot, mely esetén a (20) egyenletrendszernek megoldása bizonyos $i \in D, j \in SE$ párokra negatív, azaz $b_{ij} < 0$. Defináljuk ekkor azt a *pseudoszállítási játékot*, melyet továbbra is a (16)–(19) megoldásaiból származtatunk, immáron a nemnegativitást sértő b vektorral. Természetesen egyértelmű, hogy $q_{ij} = 0$ a (16)–(19) LP tetszőleges optimális megoldásában, ha $b_{ij} < 0$. Legyen ekkor $\tilde{b}_{ij} := \max(b_{ij}, 0)$ minden $i \in D, j \in SE$ pár esetén, és vegyük észre, hogy a $\tilde{b}$ által generált szállítási játék megegyezik a b által generált pseudoszállítási játékkal.⁴

³A keresleti és kínálati árajánlatokat szabadon megválaszthatjuk egész addig, amíg $p_1^d - p_2^s = 2$ és $p_1^d - p_3^s = 3$.

⁴Vegyük észre azonban, hogy az ekvivalens játékok ellenére például az LP-k megoldáshalmaza eltérő.

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a 3. Tétel nem teljesül abban a pillanatban, hogy egyszerű ajánlatok mellett blokkajánlatok is megjelenhetnek. Sőt, ilyenkor nemcsak hogy a piactisztítás melletti elosztás nem feltétlenül magbéli, elképzelhető, hogy nincs is magmegoldás.

8. Megjegyzés. Blokkajánlatokat is tartalmazó probléma esetén az uni-form árazás alapú piactisztítási mechanizmus által indukált TU-játék magja lehet üres.

9. Példa. Legyen $D = \{d_1\}$: $p_1^d = 4$, $q_1^d = 5$; illetve $S = \{s_1, s_2\}$, $p_1^s = 1$, $q_1^s = 2$, $p_2^s = 2$, $q_2^s = 4$, és az s_2 egy ún. *blokkajánlat*, azaz csak teljes egészében lehet elfogadni vagy elutasítani (részben elfogadni nem). A nagykoalíciós piactisztítás esetén $p^* = 4$, az s_1 teljes mértékben elfogadásra kerül, a d_1 pedig $2/5$ mértékben ($q^* = 2$). Az s_2 ún. *paradox* módon kerül elutasításra: ugyan $p^* > p_2^s$ és $q_1^d > q_1^s$, nincs elegendő keresleti kapacitás s_2 -t teljes mértékben elfogadni, így csak elutasítani lehet. A többletek úgy alakulnak, hogy $x_{d_1}^* = x_{s_2}^* = 0$, $x_{s_1}^* = v(N) = 2(4 - 1) = 6$. Vizsgáljuk meg a $T = \{d_1, s_2\}$ koalíciót: $p^T = 4$, $q^T = 4$, s_2 elfogadásra kerül. T melletti piactisztítás esetén d_1 többlete továbbra is 0, s_2 -é viszont már $x_{s_2}^T = 4(4 - 2) = 8$. Azaz $v(T) = 8 > v(N)$, tehát a játék magja üres. Vegyük észre továbbá, hogy x^* nincs a játék magjában tetszőleges $x_{s_2}^T > 0$ esetén. Ha kis módosítással például $q_2^s = 3$ (minden más változatlan), akkor a játék magja nem üres (egy pontból áll), x^* még sincs a magban.

10. Megjegyzés. Kézenfekvő feltételezés, hogy mivel a blokkajánlatok nélküli esetben a szállításijáték-analógia használható, a blokkajánlatokkal rendelkező esetben is hasznos lehet. Itt a blokkajánlatok leírására a szállítási játék alapú formalizmus egy értelemszerű kiterjesztésnek tűnik, hogy bizonyos j eladókra $\sum_i x_{ij}$ vagy 0, vagy q_i^s . Ha megköveteljük az $x_{ij} = 0$ feltételt minden olyan párra, melyre $p_i^d < p_j^s$, akkor még a kétoldalú többegységes piacok ún. paradox elutasítási megközelítését is le tudjuk írni egy periódus esetén – enélkül viszont nem garantált a konzisztens piactisztító ár (p^*) létezése. Legyen például $q_1^d = q_2^d = 1$, $q_1^s = 2$, $p_1^d = 4$, $p_2^d = 1$ és $p_1^s = 2$ – itt, ha a kínálati ajánlat blokkajánlat, ha megszorítás nélkül az optimum $x_{11} = x_{12} = 1$, de ekkor nem létezik univerzális piactisztító ár, ami megfelel az eredeti (1)–(4) modellben leírt ajánlatelfogadási feltételeknek. Továbbá az egész értékű változók miatt a Sánchez-Soriano, López és García-Jurado (2001) által alkalmazott dualisalapú megközelítés sajnos nem alkalmazható (legalábbis nem közvetlenül).

4 Összefoglalás és további kutatási lehetőségek

4.1 Összefoglalás

Jelen munkában megmutattuk, hogy kétoldalú többegységes aukciók esetében, ha csak egyszerű ajánlatok vannak jelen, melyek esetén a részben elfogadás lehetséges, az univerzális piactisztító ár alapú kifizetésvektor magbéli

elosztást eredményez. Egy egyszerű példa segítségével szemléltettük továbbá, hogy ha a piacon nemkonvex ajánlatok is jelen vannak, melyek esetében csak a teljes elfogadás vagy elutasítás lehetséges, és a piactisztító mechanizmus az általános gyakorlathoz megfelelően ezek paradox elutasítását engedi meg, akkor a piactisztító ár alapú kifizetésvektor nem feltétlenül esik a magba, illetve a mag üres is lehet.

4.2 További kutatási lehetőségek

Kétoldalú többegységes aukciók kooperatív játékelméleti szemléletű vizsgálatának egy potenciális következő lépése annak vizsgálata, hogy a piactisztító ár alapú kifizetésvektor hogyan viszonyul az átruházható hasznosságú játékok esetén leggyakrabban használt kitüntetett értékekhez, mint a Shapley-érték (Shapley (1953)), illetve a nukleólusz (Schmeidler (1969)). Ezen lehetséges kutatási irány kapcsán két tényezőt kell megemlíteni. Az egyik, hogy ezen értékek kiszámítása (főleg a nukleóluszé) magasabb játékoszám esetén általános esetben nehézségekbe ütközik. Ennek kapcsán merül fel a kérdés, hogy meghatározható-e egyszerűen valamelyik kitüntetett érték a vizsgált játékosztály esetén.

A másik érdekes aspektus a marginális ajánlat kifizetésének kérdése. A piactisztító ár alapú kifizetésvektorban a marginális ajánlat, mely csak részben kerül elfogadásra, mindig nulla kifizetést kap (mivel ezen ajánlat ára határozza meg a piactisztító árat), de ez más megközelítések esetén nem feltétlen igaz. Ennek kapcsán érdemes lehet megvizsgálni a marginális ajánlat kifizetésének jelentőségét.

Érdemes tovább vizsgálni a DAPX játékok egyéb játékosztályokkal való kapcsolatát, ahogyan azt a szállítási játékok kapcsán elkezdtük. Érdekes kérdés például, hogy a piactisztító ár mellett meghatározott elosztási szabály vajon előállítható-e a szállítási játék formalizmus duál LP (csúcsponthi) megoldásaként, vagy sem. Kifejezetten érdekes irány kiterjeszteni az eddig feltárt, és további potenciális kapcsolatokat a blokkajánlatokat is tartalmazó DAPX játékokra is.

5 Köszönetnyilvánítás

A kutatást a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal – NKFIH, FK137608 projektje támogatta. A szerzők köszönik az ismeretlen szaklektor munkáját a 6. és 7. Megjegyzésben leírt megállapítások kapcsán.

Irodalom

1. Aliabadi, Danial Esmaeili, Murat Kaya és Güvenç Şahin (2016). Determining collusion opportunities in deregulated electricity markets. *Electric Power Systems Research*, 141, 432–441.
2. Ausubel, Lawrence M., Peter Cramton, Marek Pycia, Marzena Rostek és Marek Weretka (2014). Demand reduction and inefficiency in multi-unit auctions. *The Review of Economic Studies*, 81(4), 1366–1400.

3. Ausubel, Lawrence M. és Paul Milgrom (2002). Ascending auctions with package bidding. *The BE Journal of Theoretical Economics*, 1(1), 20011001. old.
4. Biskas, Pandelis N., Dimitris I Chatzigiannis és Anastasios G. Bakirtzis (2013). European electricity market integration with mixed market designs – Part I: Formulation. *IEEE Transactions on Power Systems*, 29(1), 458–465.
5. Bodoh-Creed, Aaron (2013). Efficiency and information aggregation in large uniform-price auctions. *Journal of Economic Theory*, 148(6), 2436–2466.
6. Chatzigiannis, Dimitris I., Grigoris A. Dourbois, Pandelis N. Biskas és Anastasios G. Bakirtzis (2016). European day-ahead electricity market clearing model. *Electric Power Systems Research*, 140, 225–239.
7. Csercsik, Dávid (2021). Strategic bidding via the interplay of minimum income condition orders in day-ahead power exchanges. *Energy Economics*, 95, 105–126.
8. Day, Robert és Paul Milgrom (2008). Core-selecting package auctions. *International Journal of Game Theory*, 36(3-4), 393–407.
9. Gillies, Donald B (1959). Solutions to general non-zero-sum games. In A. W. Tucker és R. D. Luce (Eds.), *Contributions to the Theory of Games* (AM-40) (Vol. 4, pp. 47–86).
10. Green, Jerry és Jean-Jacques Laffont (1979). *Incentives in public decision-making*. Elsevier North-Holland.
11. Madani, Mehdi és Mathieu Van Vyve (2017). A MIP framework for non-convex uniform price day-ahead electricity auctions. *EURO Journal on Computational Optimization*, 5(1), 263–284.
12. McAfee, R. Preston (1992). A dominant strategy double auction. *Journal of Economic Theory*, 56(2), 434–450.
13. Meeus, Leonardo, Karolien Verhaegen és Ronnie Belmans (2009). Block order restrictions in combinatorial electric energy auctions. *European Journal of Operational Research*, 196(3), 1202–1206.
14. Rostek, Marzena és Nathan Yoder (2015). Core Selection in Auctions and Exchanges. Techn. jel. https://users.ssc.wisc.edu/~mrostek/Core_selection.pdf.
15. Rostek, Marzena és Nathan Yoder (2025). Reallocation auctions and core selection. Available at SSRN 4450987.
16. Sánchez-Soriano, Joaquín, Marco A. López és Ignacio García-Jurado (2001). On the core of transportation games. *Mathematical Social Sciences*, 41(2), 215–225.
17. Satterthwaite, Mark A. és Steven R. Williams (1989). The rate of convergence to efficiency in the buyer's bid double auction as the market becomes large. *The Review of Economic Studies*, 56(4), 477–498.
18. Schmeidler, David (1969). The nucleolus of a characteristic function game. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 17(6), 1163–1170.
19. Shapley, Lloyd S. (1953). A value for n -person games. <https://apps.dtic.mil/sti/tr/pdf/AD0604084.pdf>.
20. Shapley, Lloyd S. (1955). Markets as cooperative games. <https://apps.dtic.mil/sti/tr/pdf/AD0604632.pdf>.
21. Tellidou, Athina C. és Anastasios G. Bakirtzis (2007). Agent-based analysis of capacity withholding and tacit collusion in electricity markets. *IEEE Transactions on Power Systems*, 22(4), 1735–1742.

22. Vickrey, William (1961). Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders. *The Journal of Finance*, 16(1), 8–37.
23. Wilson, Robert (1985). Incentive efficiency of double auctions. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 53(5), 1101–1115.

PAYMENT STABILITY UNDER A UNIFORM MARKET-CLEARING PRICE IN TWO-SIDED MULTI-UNIT AUCTIONS

The applications of two-sided multiunit auctions include multiple important examples, including day-ahead electricity markets. While several market-clearing methods are applicable for such auctions, the uniform price-based approach is the most widespread in practice. It is possible to analyze the properties of the payoff vector induced by the uniform price clearing in the context of cooperative game theory. In the current work, we show that as long as only convex orders are present in the market, the payoff vector induced by the market-clearing price is in the core. We show furthermore that if nonconvex orders are also present, together with the possibility of paradox rejection, as in the case of several practical applications, it is possible that the induced payoff vector falls outside of the core, or the core may be empty as well.