NEMLINEÁRIS DINAMIKA KLASSZIKUS NÖVEKEDÉSI MODELLEKBEN[1]

MÓCZÁR JÓZSEF
Budapesti Corvinus Egyetem

Ebben a tanulmányban a klasszikus Harrod növekedési modellt nemlineáris kiterjesztéssel, keynesi és schumpeteri tradíciók bevezetésével reprezentatív ügynök modellbe alakítjuk. A híres *Lucas kritika* igazolásaként megmutatjuk, hogy az *intrinsic* gazdasági növekedési ütemek trajektóriái vagy egy turbulens káoszba szóródnak szét, vagy egy nagyméretű rendhez vezetnek, ami elsődlegesen a megfelelő fogyasztási függvény típusától függ, s bizonyos paraméterek piaci értékei, pedig csak másodlagos szerepet játszanak. A másik meglepő eredmény empirikus, ami szerint külkereskedelmi többlet, a hazai valuta bizonyos devizapiaci értékei mellett, *különös attraktorok*at generálhat.

Kulcsszavak: Harrod modell, akcelerátor-elv, stacionárius növekedés, bifurkáció, Rössler szalag.

1 Bevezetés

A modern közgazdaságtan szépsége a változó arculata. Mindegyik történelmi periódus új közgazdasági kihívásokat vet fel, és az alapvető elméletek új megközelítéseket igényelnek. Például, a brilliánsan megfogalmazott makroökonómiai modellek többsége inkompatibilis a gazdasági folyamatok jelenlegi értelmezésével. A makroökonómiai elmélet két mostani intellektuális fronttörekvése: (1) hangsúlyozni mikroökonómiai megalapozását és integrálni a mikroökonómia legújabb eredményeit; (2) alapos vizsgálat alá vetni a gazdaság viselkedését egyensúlyon kívüli állapotában.

A makroökonómiai növekedést az eredendően is bonyolult mikromegalapozásával együtt vizsgálni meglehetősen nehéz feladat.[2] Azokban a reprezentatív ügynök modellekben, amelyek megkísérlik ezt, elsősorban a *mikro-optimalitás* jelenik meg. Itt nem optimalizálunk; csak a lehetséges, tetszőleges

[1]Beérkezett: 2008. február 14. E-mail: `jozsef.moczar@uni-corvinus.hu`. A szerző ezúttal is megköszöni Molnárka Győzőnek a tanulmányban szereplő grafikonok input fájljainak felírásában nyújtott segítségét.

[2]E megközelítés nemcsak mostanában lett fontos, hosszú története van. Már a keynesi aggregátumok sem voltak mikromegalapozás nélküliek, amint erre Hahn (1985) is emlékeztet bennünket, "... az Általános elméletnek csaknem kétharmada valójában a mikroökonómiának szentelt." A makroökonómia alapvetően azt a versenyzői folyamatot nem érinti a mikroökonómiából, ami megállapítja az árakat és a kibocsátási szinteket a különböző piacokon. A kétféle elmélet közötti összefüggés mindvégig ellentmondásos volt a közgazdaságtan történetében, de mára bizonyos mértékig sikerült integrálni őket. (vö. Hahn, F. (1985)).

induló feltételeket kielégítő egyensúlyi és nem egyensúlyi pályák viselkedése érdekel bennünket. Ezzel az endogén változók kezdeti értékeinek megadásával képet kaphatunk azok időbeli alakulásáról. Egy ún. *konstruktív mikromegalapozást* fejlesztünk ki, ami a mi értelmezésünkben azt jelenti, hogy az aggregált magánkiadások elemeit megfelelően, különböző piaci értékelésekkel szabályozzuk. E szabályozások eszközei a *fogyasztási adó*, a részvénypiaci értékelés (a *Tobin-q*), és az *árfolyam*. Ezek mindegyike valamiképpen a mikroökonómiában gyökerezik, és értékeik a megfelelő piaci folyamatokat és döntéseket tükrözik.

E modellekben csak a tőkefelhalmozás, együtt a fogyasztás és a megtakarítás közötti választással, szolgál a gazdasági növekedés alapjául. Ezt tekintjük a növekedés magjának, csakúgy, mint a különböző externáliákkal dolgozó modellekben. Például, az endogén növekedési modellekben is a felhalmozás a fő magyarázó változó. Ugyanakkor, a makroökonómiai fejlődésről szóló legtöbb modern elméleti munkában a tőkefelhalmozást a stacionárius, kiegyensúlyozott növekedéssel összefüggésben tanulmányozták (vö. Solow (1956), Uzawa (1961), Morishima (1964), McKenzie (1976)). Különösen az 1960-as években egy olyan világ volt az elméleti közgazdaságtan elsődleges ideálja, ami elkerüli a hirtelen változásokat és az endogén bifurkációkat. Ezek a sima közelítések többnyire a gazdaság reál szektorán alapultak, és bizonyos fokig a fejlett országoknak abban az időszakban elért gazdasági sikereit támasztották alá. Később, még a pénzpiaccal kiegészített klasszikus egyensúlyi modellek is a stacionárius megoldásokban voltak érdekelve, a soron következő konklúziókra jutva: (1) a hosszú távú tőkeintenzitás alacsonyabb a monetáris gazdaságban, mint a nem-monetárisban[3]; (2) a monetáris hatóságok —a nominális pénzmennyiség megváltoztatásával— képesek variálni a gazdaság stacionárius tőkeintenzitását (vö. Tobin (1965), Stein (1966), Sidrauski (1967), Rose (1969), Hadjimichalakis (1971)). Azonban, mostanában bármerre is tekintünk, a piacgazdaságokban mind evolúciós, mind recessziós piaci folyamatokat látunk, amelyek üzleti ciklusokhoz, növekvő (strukturális) komplexitáshoz, és ezt követően turbulenciához vezetnek. (vö., pl., Day és Chen (eds.) (1993), Chiarella és Flaschel (2000)). Így, a csak arányos egyensúlyi növekedésbe vetett hit ma már a múlté.

A Harrod és Leontief klasszikus növekedéselméletei alapján *kalibrált modelljeink*ben tapasztalható nemlineáris dinamikát exogén sokkok nélkül vizsgáljuk. Ugyan Harrod és Leontief rögzített arányú technológiáit a modern közgazdaságtan univerzálisan a Solow-féle folytonos helyettesíthetőséggel váltotta fel, mi most mégis Lahiri (1976) eredményeit adoptáljuk, amikor is megfelelő tulajdonságokkal rendelkező, a növekedési ütemtől függő koefficienseket veszünk. Tekintettel a híres *Lucas kritiká*ra (lásd in Lucas (1976)), ami világossá teszi, hogy miért is nagyon veszélyes *ad hoc* függvényekkel leírni a háztartások viselkedését, a fogyasztási és a beruházási függvényeinket néhány ismert közgazdasági elmélet és empirikus tanulmány figyelembe vételével értelmeztük. A beruházási koefficiensek nemlinearitásának specifikáció-

[3]Eme egyenlőtlenség —egy lehetséges magyarázatként— a pénz nem-semlegességét tükrözi a gazdasági növekedésben.

jában sok megfontolásunkat Hawkins (1948) feltevéseire, Mukerji (1964) és Bródy (1970) vizsgálataira, valamint a 60-as évekbeli japán adatokkal végzett empirikus számítások (lásd in Móczár (1991, 1997), Móczár és Tsukui (1992)) következtetéseire alapoztuk.

A Lucas kritika egyféle igazolásaként megmutatjuk, hogy az ún. *intrinsic* gazdasági növekedési ütemek trajektóriái vagy egy turbulens káoszba szóródnak szét, vagy egy nagymértékű rendhez vezetnek, ami elsődlegesen a megfelelő fogyasztási függvény típusától, és csak másodlagosan bizonyos paraméterek piaci értékeitől függ.

A másik meglepő eredmény empirikus, ami szerint egy külkereskedelmi többlet, a hazai valuta megfelelő devizapiaci értékelése mellett, *különös attraktorok*at generálhat. Ezekben a vizsgálatokban a dinamika legújabb szerszámosládájából, Goodwin (1990) és Chiarella (1990) valamint May (1976), Guckenheimer és Holmes (1991), Brock és Malliaris (1989) és végül Day (1994, 2000) ötleteiből és technikai arzenáljából merítettünk.

A tanulmány egyes pontjaiban a következő kérdésekkel foglalkozunk. A 2. pontban a Harrod modellt kiterjesztjük egy lineáris Leontief-Neumann típusú felhalmozási modellbe a szokásos reprezentatív ügynök megközelítés felhasználásával. A 3. pont a nemlineáris Leontief-Neumann kiterjesztésű klasszikus Harrod növekedési modell egy lehetséges ún. *konstruktív mikromegalapozását* írja le. Itt bevezetünk néhány nemlineáris leképezést, amelyek segítségével definiáljuk a tőkekoefficiensek és a ráfordítási koefficiensek dinamikus viselkedését. A modell végső alakja a keynesi dinamika és a schumpeteri evolúció egyféle kombinációját implikálja. Továbbá, bizonyítást adunk Harrod ún. *kétszarv problémá*jára is, nevezetesen, hogy a sima növekedés és a ciklus, akár periodikus akár aperiodikus, szimultán módon, mint sziámi ikrek jelennek meg. Egy másik újdonság itt, egy lehetséges versenyzői optimalitás bevezetése a fenti modellbe. A 4. pont egy kétdimenziós és egy háromdimenziós nemlineáris rendszert vizsgál zárt és nyílt Harrod-Leontief típusú rendszerekben. Az egyszerűség kedvéért most mind a tőkekoefficiensek, mind a ráfordítási koefficiensek rögzítettek. A nemlinearitást a nemzetközi kereskedelmi korlátok tartalmazzák. Az utóbbi differenciálrendszer egy Rössler rendszer, ami különös attraktorokat generálhat a valuta bizonyos piaci értékelése mellett. Az 5. pont az *intrinsic* gazdasági növekedési ütemek és a Rössler rendszer idősorainak szimulációs vizsgálatait tartalmazza. A kaotikus dinamikát a Maple V. program segítségével megrajzolt számítógépes grafikákkal mutatjuk ki. A 6. pont néhány következtető megjegyzést és további propozíciókat foglal magába.

2 A dinamikus Leontief-Neumann modell mint a Harrod modell egyik általánosítása

A következőkben egy reprezentatív ügynök modellt értelmezünk, és a gazdasági növekedés két központi meghatározójára, a megtakarításra és a beruházásra összpontosítjuk figyelmünket, amelyek mindegyike a gazdaságnak a kormányzati politika által szabályozható strukturális változója. Az ügynök egyetlen egy szolgáltatás előállítására specializált, mégpedig egy Leontief-típusú termelési függvény segítségével, a rendelkezésére álló tőkeállomány és szélesebb értelemben vett fogyasztás felhasználásával. A növekedési folyamatban a reprezentatív ügynökünk tőkét halmoz fel és inputokat fogyaszt. Itt és a továbbiakban is feltesszük, hogy a kibocsátásnak létezik világpiaca, ezért a bővülő gazdaság szabadon exportálhat és importálhat, és az árak kompetitívek és a fizetési mérlegfeltétel is teljesül.

Egy pillanatig zárt gazdaságot feltételezve, a tőkefelhalmozási folyamatban jelölje b a rögzített tőke-kibocsátás arányt (K/x), vagy ezzel ekvivalensen, a stacionárius tőkekoefficienst, és az s a rögzített megtakarítás-kibocsátás arányt (S/x), vagy ezzel ismét ekvivalensen, egy stacionárius megtakarítási koefficienst. Az s/b növekedési ütemet, a várakozások realizálódása (*tökéletes előrelátás*), vagyis az $x_t^e = x_t$ teljesülése esetén, Harrod 'garantált' növekedési ütemnek nevezte és ρ_w-vel jelölte, azaz,

$$\rho_w = s/b\,. \tag{1}$$

Az (1) egyenlőség, egyféle neoklasszikus értelmezésben, stacionárius egyensúlyi növekedést definiál, mégpedig az arányos egyensúlyi fogalom időbeli kiterjesztéseként. Ha az (1) egyenlőség fennáll, akkor a gazdaság összes stacionárius egyensúlyi feltétele teljesülni fog.

Az (1) összefüggés, Leontief jelöléseivel, a következő egyenlettel is megadható:

$$b(x_t - x_{t-1}) = (1-a)x_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots\ , \tag{2}$$

ahol $(1-a)$ jelöli a megtakarítási rátát, amelynek reciproka a stabilizáló multiplikátor, és amelyben az a a fogyasztási határhajlandóság, azaz az input koefficiens. A (2) egyenletről mondhatjuk azt is, hogy az export és import egyensúlyát is mutatja, és ekkor nyitott gazdaságra is értelmezhető. Megfelelő átrendezés után, (2)-ből az ismert dinamikus és lineáris Leontief modellt kapjuk diszkrét időben egyetlen jószágra aggregált gazdaságban:

$$x_{t-1} = ax_{t-1} + b(x_t - x_{t-1}), \quad t = 1, 2, \dots\ , \tag{3}$$

ahonnan

$$x_t = \frac{1}{b}(1 + b - a)x_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots\ . \tag{4}$$

Megjegyzendő, hogy a (4) egyenlet jobb oldalán az első két tényező a Neumann értelemben vett növekedési tényezőnek felel meg. (A részletekért lásd Móczár (1995), (1997).)

2.1 Növekedés és ciklus mint sziámi ikrek

Ahhoz, hogy a (4) rendszert közelítsük a valósághoz, nemlineárissá alakítjuk át. Megfelelő tulajdonságokkal rendelkező skála-függő koefficienseket használunk (lásd in Lahiri (1976)), azaz, az a és b koefficienseket az x_{t-1} kibocsátás bizonyos függvényeiként vesszük a (4)-ben:

$$x_t = \frac{1}{b(x_{t-1})}\left(1 + b(x_{t-1}) - a(x_{t-1})\right) x_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots . \tag{5}$$

Itt az a fő célkitűzésünk, hogy szimultán módon vizsgáljuk Harrod ún. *kétszarv problémá*ját, vagyis az (5) által adott intertemporális egyensúlyi pálya ciklikusságát és növekedését. Ciklusok létezhetnek növekedés nélkül is, és fordítva, növekedés létezhet ciklusokkal is. A probléma specialitását az adja, hogy azok szorosan összefüggnek, azaz, teljesen értelmetlen egymás nélkül elemezni őket. Mivel bennünket majd a kibocsátás változásának a változása érdekel[4], ezért, követve Tsukui és Murakami (1979, pp. 76–77) vizsgálatait, a (4) összefüggést egyszerűen az egyes időszakok ρ_t növekedési ütemeivel írjuk fel:

$$\rho_t = \frac{1}{b(\rho_{t-1})}\left(1 + b(\rho_{t-1}) - a(\rho_{t-1})\right) \rho_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots . \tag{6}$$

A (6) egyenlet alapján az $(1 + b(\rho_o) - a(\rho_o))\,\rho_o > 0$, $\rho_o > 0$ kezdeti feltétellel, mindegyik növekedési ütem a következőt adja. Az (5)-ből a fogyasztási és a beruházási függvények segítségével valóban a kibocsátás változási rátáját kapjuk:

$$\frac{1 - a(x_{t-1})}{b(x_{t-1})} = \rho_t \qquad \text{és} \qquad \rho_t = \frac{x_t}{x_{t-1}} - 1\,, \tag{7}$$

míg a (6)-ból a változási ráta vátozási rátáját:

$$\frac{1 - a(\rho_{t-1})}{b(\rho_{t-1})} = \frac{\rho_t - \rho_{t-1}}{\rho_{t-1}} \quad \text{vagy} \quad \frac{1 - a(\rho_{t-1})}{b(\rho_{t-1})} = \frac{(x_t - x_{t-1})/x_{t-1}}{(x_{t-1} - x_{t-2})/x_{t-2}} - 1\,. \tag{8}$$

Alaposabban szemügyre véve a (6) egyszektoros modellünket, még mielőtt további vizsgálatokba kezdenénk, megfigyelhetjük, hogy az a fogyasztás és a beruházás (megtakarítás) között egy korlátos *oximoron*t tükröz, vagy a közgazdaságilag elterjedtebb *trade-off*-t, ami több figyelmet érdemel a modern piacgazdasági vizsgálatokban.

Felhasználva azt a propozíciót, hogy a közvetlen adót inkább a fogyasztásra mintsem a jövedelemre kell kivetni, bevezetjük modellünkbe a fogyasztási adót, mint az egyetlen lehetséges adóztatási formát. A stabil fogyasztási adó elhalaszthatja a jelen fogyasztást a következő időszakra, ami több megtakarításra és nagyobb növekedési ütemre vezethet. Ugyanakkor, a fogyasztási adó bármilyen emelése a beruházások (nettó) kiszorításával jár, ami viszont csökkenti a növekedési ütemet. A fogyasztási adókulcs nagysága általában attól függ, hogy a befolyt jövedelmet hogyan költi el a kormány, és az milyen hatással van a reprezentatív ügynökünk kiadásaira.

Ami a beruházásokat illeti, azt explicite a *nemlineáris akcelerátor-elv*ben és a *Tobin-q*-ban kifejezve magyarázzuk, valamint implicite a kamatlábbal a

[4] Itt egész pontosan Cagan (1956) vizsgálatához hasonlóan, csak most nem az inflációs rátára, hanem a növekedési ütemre kívánunk elvégezni bizonyos dinamikai vizsgálatokat. További lényeges különbség, hogy Cagant az inflációs ráta stabilizálása érdekelte, bennünket pedig a kibocsátás változási rátájának alakulása, megengedve irreguláris oszcillációkat és a kaotikus mozgásokat is.

Tobin-q-n keresztül. Az első most azt jelenti, hogy a tetszőleges várható növekedések a GDP-ben egy megfelelő nemlineáris növekedést követelnek meg a tőkeállományban. A beruházások *Tobin-q elmélete* pedig azt állítja, hogy az aggregált beruházás várhatóan stabilan függ a q-tól, amely a tőke piaci értékének és pótlási költségének aránya. (A részletekért lásd, Tobin (1969).) Ha $q = 1$, akkor a beruházás nem változik, míg ha q nagyobb vagy kisebb mint 1, akkor a beruházás rendre pozitív vagy negatív. Így vehetünk egy $I = I(q-1)$ típusú függvényt, és megfelelően érvelhetünk, hogy $I'(.) > 0$.[5]

Hogyan kapcsolódik a kamatláb a *q-elmélethez*, a beruházás kulcsmeghatározójához? A piac értékeli a vállalatokat a diszkontált jövőbeli jövedelmeik alapján a reálkamatláb felhasználásával. A kamatláb bármilyen növekedése nagyobb mértékű diszkontáláshoz vezet, ami viszont a piaci tőkeárak esését eredményezi. Így a reálkamatláb negatív hatása a beruházásra ténylegesen a *Tobin-q*-n keresztül ,,érvényesül". A kamatláb mellett, a *Tobin-q* két másik tényező figyelembe vételét is lehetővé teszi a beruházási döntésekben. Az első, a tőke termelékenységének növekedése emeli a jövőbeli jövedelmet és ezáltal növeli a részvényárakat és a q-t. A második, a q megtestesíti a várakozások szerepét is. Vitathatatlan, hogy a beruházás lényegében ,,*fogadás a jövőre*", a vállalatok felszereléseket vásárolnak, hogy előállítsanak termékeket sok-sok éven keresztül bizonytalan feltételek mellett. Hogy hogyan lesznek képesek kihasználni a felszereléseket, a beruházások eldöntésekor még nem ismert. A bizonytalanság nő a hazai és a külföldi piacok versenyzése folyamán, csakúgy, mint a technológiai fejlődés és a kiszámíthatatlan politikai fejlemények során. Mindezeket a szempontokat folyamatosan értékelik a tőzsdék.

Az empirikus vizsgálatok azt mutatják, hogy a *Tobin-q* tipikusan beruházás-generáló. Mivel a vállalatok inkább kölcsönöznek mintsem részvényeket bocsátanak ki, a *Tobin-q* mindig megfelelően méri a beruházási ösztönzést, tükrözi mind a várható jövedelmezőséget a számlálóban, és mind a kölcsönzés reál költségét, a diszkonttényezőn és a tőkeköltségen keresztül, a nevezőben.

Egy sokkal nehezebb kérdés merül fel a tekintetben, hogy vajon a tőkeárak előrejelző természete vezethet-e bizonyos kauzalitásra a tőzsdei árak és a növekedés között? A jelen tőzsdei áraknak tükrözniük kell a jövőbeli profitok diszkontált jelenértékét. Egy hatékony részvénypiacon a reálkamatláb megegyezik a növekedési ütemmel, ezért a jövőbeli növekedési ütemek az induló árakban fognak tükröződni. Ez a megközelítés a forgalom (piaci tőkésítésen felüli eladások), mint elsődleges növekedési mérték használata mellett érvel, ezáltal tisztázva a hamis oksági hatást, mert a nagyobb növekedés előre-

[5] Keynes (1936, 135. o.) jelölésében $q = V/C$, ahol V-t Keynes a tőkevagyon várható hozamának jelenértékeként definiálta, míg nála a C a tőkevagyon kínálati árát jelöli. Következésképpen, a marginális q tekinthető Tobin marginális q-jára adott sokféle változat egyikének, pontosabban, a beruházási határhatékonyság és a kamatláb hányadosaként, azaz, $q = MEI/r$. Ezért a keynesi beruházási függvény átírható $I(q-1)$-re, ahol a vállalat $q = 1$-ig (vagy ezzel ekvivalensen, $MEI = r$-ig) beruház. Így ha r nő, akkor q és így a beruházás is esik, azaz, $dI/dr = I_r < 0$. További megjegyzést érdemel még, hogy Tobin beruházási q-elmélete formálisan megegyezik Eisner-Strotz (1963) és Lucas (1967) beruházási elméletével a szabályozási költségek marginalizációja esetén.

jelzésében a magasabb árak a törtnek mind a számlálóját, mind a nevezőjét befolyásolják. Granger (1969) oksági tesztjét széleskörűen használják a pénzügyi piacok tanulmányozásában, csakúgy, mint a gazdasági növekedés meghatározóiban, például a megtakarítások, az export, a pénzkínálat és árstabilitás vizsgálatában. Ugyanakkor, Harris (1997) szerint pozitív kapcsolat van a piaci tőkésítés (a GDP szintjére normalizálva) és a jövőbeli gazdasági növekedés között. Nem meglepő, hogy a fejlettebb pénzügyi piacok hatékonyabbak, és ezért jobban képesek belefoglalni az anticipált jövőbeli növekedést a jelen áraikba. A vizsgálat meglepő a forgalom sebessége vonatkozásában, aminek egy jobb indikátornak kell lennie a tőzsdék növekedésre gyakorolt hatása mérésében, mivel az megtisztított az árak előrejelző hatásaitól. Az eredmények azt mutatják, hogy nagyobb forgalomsebesség nagyobb növekedést vált ki, de csak a nagyon magas és a nagyon alacsony jövedelmű országokban. Eltérően a forgalom sebességtől, arra nincs bizonyíték, hogy a tőzsdén szereplő hazai vállalatok számának változása a gazdasági növekedési ütemek változását eredményezné.

Összegezve érveléseinket, a fenti (6) intertemporális egyensúlyi egyenlet a következőképpen fog változni:

$$\rho_t = \frac{1}{qb(\rho_{t-1})}\left(1 + qb(\rho_{t-1}) - pa(\rho_{t-1})\right)\rho_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots\,, \tag{9}$$

ahol $p = 1 + \tau$ és τ egy állandó fogyasztási adókulcs.

Megjegyzendő, hogy a (9) rendszer a technológiát az *intrinsic* piaci értékeléssel együtt tartalmazza. Ezután a (9) egyenlet által meghatározott növekedési ütemeket megfelelő kezdeti feltételek mellett *intrinsic* növekedési ütemeknek nevezzük.

Továbbá, bevezetünk bizonyos nemlineáris leképezéseket a (9)-be azért, hogy közelítsük mind a tőkekoefficiensek, mind a ráfordítási koefficiensek dinamikus viselkedését a valósághoz. Így az egy periódus alatti tőkeállomány-változás, azaz a beruházás, formálisan a nemlineáris akcelerátorelvben és a Tobin-féle beruházási q-elméletben kifejezve a következőképpen magyarázható:

$$\begin{aligned} i_{t-1} &= [(q-1)\,\nu e^{\rho_{t-1}} + \nu e^{\rho_{t-1}}]\rho_{t-1} \\ &= (q\nu e^{\rho_{t-1}})\rho_{t-1}\,. \end{aligned} \tag{10}$$

ahol

$$\nu e^{\rho_{t-1}} = b(\rho_{t-1}), \qquad \text{és általában} \quad 2 < \nu < 3\,. \tag{11}$$

Szavakban, a tőkekoefficiensek exponenciálisan nőnek a megfelelő *intrinsic* növekedési ütem szerint (vö. Mukerji (1964)), ahol ν a tőke-kibocsátás arány, most 2 és 3 között értékelve. (Napjainkban a nagyon fejlett országokban az éves GDP a működésbe állított tőkeállomány egyharmad és másfél közötti értékét mutatja általában.) Ugyanakkor, tetszőlegesen adott tőkeállománybeli növekedésre jutó kiadás a tőkefelhalmozás *intrinsic* ütemének növekvő függvénye.

A ráfordítási koefficiensek esetében feltesszük, hogy a tőke ($b(\rho_{t-1})$) gazdasági élettartam-eloszlása megközelít valamilyen nemlineáris $h(\rho_{t-1})$ leképezést. Így, ha a tőkeállományról, mint készletről gondolkodunk (vö. Lange (1952), Bródy (1970)), akkor az alábbit kapjuk:

$$h(\rho_{t-1})a(\rho_{t-1}) = b(\rho_{t-1}) \ , \tag{12}$$

ahonnan

$$\begin{aligned} a(\rho_{t-1}) &= b(\rho_{t-1})h^{-1}(\rho_{t-1}) \\ &= \nu e^{\rho_{t-1}} h^{-1}(\rho_{t-1}) \ . \end{aligned} \tag{13}$$

Így a ráfordítási koefficiensek nemlineárisan 'arányosak' a tőkekoefficiensekkel, ami a fogyasztási adón keresztül megengedi, hogy a teljes kormányzati kiadás az aggregált tőkével arányosan nőjön a gazdaságban.

A (11) és (13) szerint rendre mind a tőke arány, mind a megtakarítási arány inkább endogén mintsem exogén módon determináltak. Hangsúlyozandó azonban, hogy ezeket a nemlineáris függvényeket a tőkekoefficiensek közelítésére csak bizonyos tartományokban használjuk a (lokális) vizsgálatainkban.

Behelyettesítve (11)-et és (13)-at (9)-be, kapjuk:

$$\begin{aligned} \rho_t &= \frac{1}{q\nu e^{\rho_{t-1}}} \left(1 + q\nu e^{\rho_{t-1}} - p\nu e^{\rho_{t-1}} h^{-1}(\rho_{t-1})\right) \rho_{t-1} \\ &= \frac{1}{q}\left(\frac{1}{\nu e^{\rho_{t-1}}} + q - ph^{-1}(\rho_{t-1})\right)\rho_{t-1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{q\nu} e^{-\rho_{t-1}} - \frac{p}{q} h^{-1}(\rho_{t-1})\right)\rho_{t-1} \ . \end{aligned} \tag{14}$$

Schumpeter innovációi nélkül azonban a (14) nem lehet teljes. Schumpeter (1939) szintén azon a nézeten volt, hogy a növekedés és a ciklus *intrinsic* módon kapcsolódnak egymáshoz, és a fő elméleti probléma ebben az összefüggésben az, hogy megmagyarázzuk, miért nem megy végbe simán a gazdasági bővülés, miért fordulnak elő púpok és mélyedések? Ő úgy gondolta, hogy a tőkés gazdaságok oszcilláló viselkedése az innovációs folyamatokkal függnek össze, ami a fogyasztási és a beruházási javak nagyobb mennyiségeit eredményezik. Azt állította, hogy az üzleti ciklus lényegében attól a ténytől függ, hogy az innovációk nem egyformán, hanem megszakításokkal oszlanak el az időben.

Új technikák, új termékek és új piacok bevezetése szintén hozzájárul a kibocsátás növekedéséhez, azonban időben különböző mértékben. Mivel a (14) egyenlet jobb oldala egy szakaszosan lineáris függvény, megszorozva azt $\mu = 1 + \omega$-val, ahol az ω egy schumpeteri innovációs „*swarms*" paraméter, pótlólagos cikk-cakk növekményeket nyerünk az *intrinsic* növekedési ütemeinkben.

$$\rho_t = \mu\left(1 + \frac{1}{q}\nu e^{-\rho_{t-1}} - \frac{p}{q}h^{-1}(\rho_{t-1})\right)\rho_{t-1} \, , \qquad t = 1, 2, \ldots \ . \tag{15}$$

Keynes (1936) absztrakt szinten magyarázta a ciklikus mozgást. Az volt a nézete, hogy a fellendülési és a visszaesési erők közötti egyensúlyban a változások simán vagy összevissza következhetnek be. A (15) egyenlet jobb oldalán a zárójelek közt bizonyos expanzív (beruházás) és kontraktív (fogyasztás) erők léteznek, amelyek lehetnek Keynes elgondolásainak bizonyos specifikációi. A (15) egyenlet így a keynesi dinamika és a schumpeteri evolúció egyféle kombinációját fejezi ki. Mind a beruházás, mind az innováció lényegesek a növekedés fenntartásában és azok szinkronizált módon mozognak.[6]

Matematikailag a (15) elsőrendű differenciaegyenlet. Jobb oldalán az $f(\rho)$ nemlineáris leképezés a p, μ, ν és q paraméterek bizonyos értékei és a megfelelő $h^{-1}(\rho_{t-1})$ mellett a következő tulajdonságokkal rendelkezik: $f(0) = 0$, $f(\rho)$ monoton növekvő függvénye ρ-nak a $0 < \rho < c$ tartományban ($f(\rho)$ maximális értéke a $\rho = c$-nél van); $f(\rho)$ monoton csökkenő függvénye ρ-nak $\rho > c$-re. A p, q és μ paraméterek komplex módon szelídítik meg a nemlineáris viselkedés ,,vadságát", más szóval, finomítják a púp meredekségét az $f(\rho)$ leképezésben. Az ilyen tulajdonságú leképezést *unimodális leképezés*nek nevezik az irodalomban. Jól ismert, hogy ilyen egydimenziós diszkrét idejű nemlineáris rendszer nagyon bonyolult dinamika szerint viselkedhet, ami egy véletlenszerű folyamathoz hasonlít. Meglepő tulajdonsága, hogy az általa generált idősorok véletlenszerűek, vagyis nem lehet előrejelezni változóik jövőbeli alakulását. Még ha egy modell teljesen determinisztikus is a struktúra és a kezdeti értékek specifikációi szerint, az egymáshoz közel elhelyezkedő kezdeti értékek teljesen különböző idősorokat eredményezhetnek, annak ellenére, hogy ugyanazon dinamikai rendszer generálta őket. Ezt a jelenséget nevezik az irodalomban a *kezdeti értékektől való érzékenységi függőség*nek.

Mivel a (15) modellünkben az állapotváltozó az *intrinsic* növekedési ütem, a növekedés és a ciklus, akár periodikus, akár aperiodikus, szimultán módon jelennek meg sziámi ikrekként. Ezzel egy lehetséges egzisztenciabizonyítást adtunk Harrod ,,kétszarv" problémájára modern piaci értékelésben.

2.2 Optimális periodikus vagy aperiodikus intertemporális egyensúlyi pályák

A (9) egyenletből a következő korlátokat nyerhetjük:

$$1 - p\,a(\rho_{t-1}) \geq q\,b(\rho_{t-1}), \quad \rho_{t-1} \geq 0, \quad t = 2, 3, \ldots, \tag{16}$$

azaz, nem akkumulálhatunk többet a megtakarításoknál a megfelelő *intrinsic* növekedési tényező mellett. A pozitív ρ_0-t a kezdeti feltételek adják meg úgy, hogy az $[1 - pa(\rho_0) + qb(\rho_0)]\,\rho_0 > 0$ reláció teljesüljön.

[6] Matsuyama (1998) szerint a neoklasszikus növekedési modell a felhalmozást tekinti a növekedés motorjának, míg a neo-schumpeteri növekedési modell az innovációt hangsúlyozza. Modellünkkel ellentétben arra a megállapításra jutott, hogy a beruházás és az innováció aszinkron módon mozognak, közülük csak az egyik játszik domináns szerepet fázisról fázisra. Az egyik fázis nagyobb kibocsátás-növekedéssel, magasabb beruházással, innováció hiánnyal és egy kompetitív piaci struktúrával jellemezhető. A másik fázist alacsonyabb kibocsátás-növekedés, alacsonyabb beruházás, nagyobb innováció és monopolistább piaci struktúra jellemzi. A gazdaság gyorsabban nő a ciklusok mentén, mint az instabil egyensúlyi növekedési pályán.

Jelölje most $\Pi(\rho_{t-1})$ a ρ_{t-1} *intrinsic* növekedési tényező profitabilitását. Vegyük a ρ_{t-1}, $\rho_t, \ldots$ teljes *intrinsic* növekedési ütemsorozat profitabilitásának jelenértékét a következőképpen:

$$\Pi(\rho_{t-1}, \rho_t, \ldots) = \sum_{t=1}^{\infty} \gamma^{1-t} \Pi(\rho_{t-1}) \ , \tag{17}$$

ahol $\Pi'(\rho) < 0$ és $\Pi''(\rho) > 0$, valamint $\gamma > 1$.

Az optimális periodikus vagy aperiodikus intertemporális egyensúlyi pálya a ρ_1, ρ_2, ρ_3, ... intrinsic növekedési ütemek egy olyan sorozata, amely maximalizálja a (17)-et, kielégítve a (9)-et és (16)-ot adott kezdeti értékek mellett. Ez az optimum-probléma a szerző egy korábbi eredményének (lásd Móczár (1991)) nemlineáris dinamikus kiterjesztése.

3 Különös attraktorok külkereskedelmi többlet vagy hiány mellett

Először egy lineáris dinamikus rendszert írunk fel az egyszerű Harrod-Leontief gazdaságban, mégpedig folytonos időváltozóval.[7] Feltesszük, hogy a kibocsátás változási időrátája, $\dot{x}$, arányos a γ tényező szerint az x kibocsátáshoz a b tőkekoefficiens mellett szükséges tőkeállomány és az y megtakarítás közötti különbséggel:

$$\dot{x} = \gamma(bx - y) \ . \tag{18}$$

A megtakarítás változási időrátája az outputból az a fogyasztási határhajlandósági koefficiens által meghatározott kereslettel csökkentett kibocsátással egyezik meg:

$$\dot{y} = x - ax \ . \tag{19}$$

A (18) és (19) egyenletek egy kétdimenziós lineáris differenciálegyenlet-rendszert alkotnak:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \gamma(bx - y) \ , \quad \gamma > 0 \\ \dot{y} &= (1-a)x \ , \end{aligned} \tag{20}$$

ahol a γ, b és az a paraméterek, az utóbbi két betű értelmezése pontosan megegyezik a korábbi közgazdasági jelentésükkel. A (20) rendszert kompaktabb módon mátrixegyenletként is felírhatjuk:

$$\dot{r} = Ar \ ,$$

ahol

$$A = \begin{pmatrix} \gamma b & -\gamma \\ 1-a & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad r = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ .$$

Az $\dot{r} = Ar$ rendszer megoldásai az (x, y) síkon mozgó trajektóriákként vizualizálhatók, amelyek összessége a fázisportré. Az $\dot{r} = Ar$ rendszer általános megoldása a következő:

$$r(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} r_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} r_2 \ , \tag{21}$$

[7] A változók t időtől való függését a jelölés egyszerűsége miatt elhagyjuk.

ahol most a λ_1 és λ_2 az A mátrix két különböző sajátértéke, r_1 és r_2 a megfelelő sajátvektorok, és c_1 és c_2 olyan skalárok, amelyek kielégítik az $r(0) = c_1 r_1 + c_2 r_2$ egyenletet az adott $r(0)$ kezdeti feltételre.

Amint a (21) egyenletből is látható, a megoldás viselkedése a sajátértékektől függ. Ha a sajátértékek valósak, és, például, különböző előjelűek, akkor a fázissík origója nyeregpont, mint most a (20) dinamikai rendszer esetében is.

Transzformálva a (20) kétdimenziós elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerünket egydimenziós másodrendű differenciálegyenletbe, kapjuk:

$$\ddot{x} = \gamma(ax + b\dot{x} - x) \ . \tag{22}$$

Szavakban, a kibocsátás sebességváltozásának időrátája, $\ddot{x}$, a γ tényező szerint arányos a túlkereslettel, vagy túlkínálattal. Mivel $\gamma > 0$, ha túlkereslet van, akkor $\ddot{x} > 0$, azaz, a kibocsátás sebessége gyorsul, míg túlkínálat esetén $\ddot{x} < 0$, így a kibocsátás sebessége lassul. Amennyiben $\ddot{x} = 0$ a (22) egyenletből, megfelelő átrendezés után, az ismert zárt, dinamikus és lineáris Leontief modellt kapjuk folytonos, állandó sebességű időváltozóval:

$$x = ax + b\dot{x} \ , \tag{23}$$

vagyis a periódus kibocsátása pontosan fedezi a fogyasztást és a következő periódus kibocsátásnövekedéséhez szükséges beruházást.

A (23) megoldása $(1 - a)/b$ állandó ütemmel exponenciálisan növekvő egyensúlyi pálya. Az ilyen ,,hőn óhajtott" gazdaság örökké stacionárius egyensúlyi növekedésben van. Viszont instabil, összhangban a korábbi kutatásokkal (lásd például Tsukui (1961)). E stacionárius növekedést a zérus gyorsulás feltevése specifikálta, ami közgazdaságilag meglehetősen irreális premissza.

Modellünk ,,kinyitásához" bevezetünk egy speciális külkereskedelmi mérlegkorlátot, és feltesszük, hogy a nettó import változási időrátája a következőképpen definiált:

$$\dot{z} = s + \mu z(x - d) \ , \qquad \mu > 0 \ , \tag{24}$$

ahol s a rögzített nettó importkoefficiens, d a kibocsátás alsó korlátja és z az időben változó nettó importkoefficiens. (Az s, d paraméterek természetesen pozitívak.) Itt a μ az igazodási sebesség paramétere, amely egyébként az időkésleltetés inverze.

A kibocsátás alsó korlátja szerinti külkereskedelmi mérleg befolyásolja a kibocsátás-változás időbeli rátáját, így annak meg kell jelennie a (18) egyenletben is:

$$\dot{x} = \gamma(bx - y - czd) \ , \qquad \gamma > 0 \ , \tag{25}$$

ahol c jelöli az árfolyamot, amely a hazai valuta devizapiaci értékelését tükrözi. A $bx - y > 0$ feltevés mellett, ha $z < 0$, akkor a kibocsátás-változás időrátája nő a külkereskedelmi szufficit következtében, míg ha $z > 0$, akkor pedig csökken a külkereskedelmi deficit miatt. Most γ az időkésleltetés inverze, azaz, a kibocsátási folyamra vonatkozó igazodási sebesség paramétere.

Ezzel egy olyan háromdimenziós differenciálegyenlet-rendszert kaptunk, amely a kibocsátás, a megtakarítás és a külkereskedelmi mérleg *szimultán* mozgását írja le egy nyílt, folytonos időváltozójú Harrod-Leontief modell keretei között[8]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \gamma(bx - y - czd) \\ \dot{y} &= (1-a)x \\ \dot{z} &= s + \mu z(x-d)\,. \end{aligned} \tag{26}$$

Ismét, a (26) rendszerből kapjuk:

$$\ddot{x} = \gamma\left[b\dot{x} - (1-a)x - c\big(s + \mu z(x-d)\big)d\right]\ , \tag{27}$$

ahonnan az $\ddot{x} = 0$ esetre kapjuk: $x + c\big(s + \mu z(x-d)\big)d = ax + b\dot{x}$, amelyből

$$(1-a)x = b\dot{x} - c\dot{z}d\,. \tag{28}$$

A (28) bal oldalán a megtakarítás, a jobb oldalán pedig a beruházás és a kibocsátás alsó korlátján meghatározott folyó fizetési mérleg szerepel. Ez pontosan megfelel annak, hogy nyitott modellben a folyó megtakarítás kétféleképpen is felhasználható a jövőbeli jövedelem növelésére: belföldi vagy külföldi beruházásra.

Könnyű belátni, hogy a (23) rendszer ténylegesen egy Rössler (1976) rendszer. A paraméterek bizonyos értékei mellett, mint majd látni fogjuk, a Rössler rendszerünk mozgása instabillá válik, és egy komplex dinamika jelenik meg.

Amíg a Lorenz (1963) rendszerben két nemlineáris egyenlet generálja a nagyon véletlenszerű komplex vagy kaotikus pörgést, addig ugyanehhez Rösslernek csak egy nemlineáris egyenletre volt szüksége. Továbbá, itt csak egy alsó érték konvertálja a lokális instabilitást globális stabilitásba. Amint a későbbiekben látni fogjuk a megfelelő számítógépes grafikákból, egy rendszer fixpontra vonatkozó stabilitási fogalmát itt egy pontból egy határciklusba, és ezután egy korlátos régióba általánosítjuk. Amikor egy rendszer visszatartott attól, hogy elérje az egyensúlyi fixpontját, a legkisebb disszipációs állapotában „nyugszik meg".

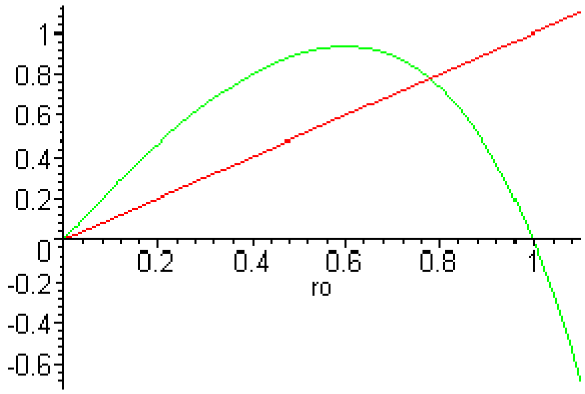
4 Szimulációs számítások

A (15) egyenlettel adott intertemporális egyensúlyi pálya szimulációs elemzésére a szerző korábbi, a japán gazdaság endogén növekedésére vonatkozó számításait használjuk fel. (Lásd Móczár (1991).) A tipikusan beruházó-készletező iparágak (walrasi értelemben vett tőkejószágokat kibocsátó ágazatok) egy meglehetősen magas növekedési ütemet mutattak, $\rho = 0.3$, a japán kormány által kibocsátott 56 szektoros input-output táblázatok alapján készített számítások. Most két alig különböző kezdeti értéket adunk az állapotváltozónak, azaz, $\rho_{01} = 0.1$ és $\rho_{02} = 0.09$. A paraméterértékek a (15)-ben most

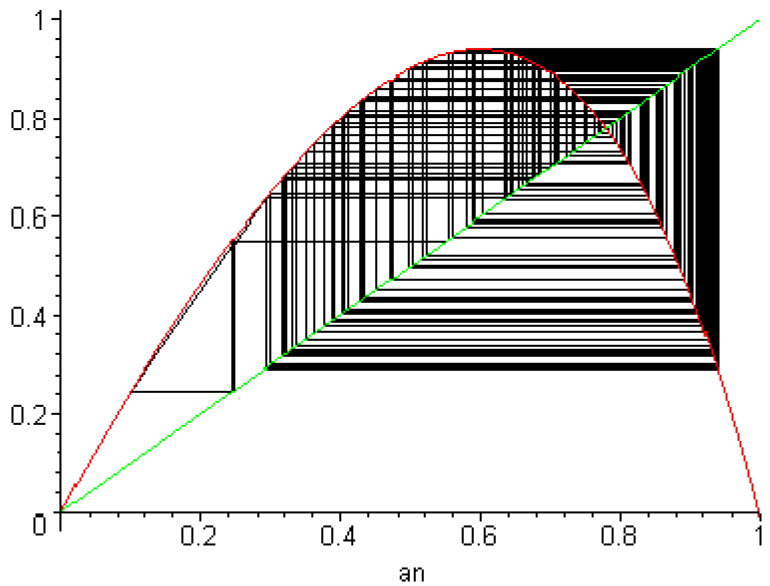
[8]A modell struktúrája hasonló Meltzer (1947) beruházási modelljéhez, illetve Goodwin (1990) adaptációjához.

a következők: $\mu = 1.1$, $\nu = 1.5$, $p = 5/3$, $q = 1.1$ valamint $h^{-1}(\rho_{t-1}) = \rho_{t-1}^3$. Ezekre a paraméterértékekre és az élettartam-eloszlásra a (15) grafikonját az 1. ábra mutatja.

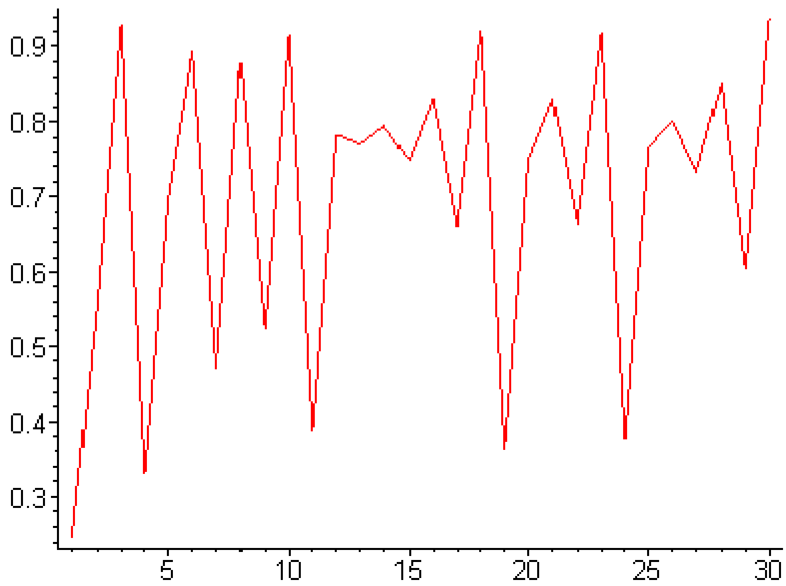
Az 2. ábra a (15) egydimenziós nemlineáris differenciaegyenlet által generált *intrinsic* növekedési ütemeinek divergáló idősorait mutatja. (Ezekhez és a későbbi számításokhoz, valamint a grafikák megrajzolásához is a *Maple V.* programot használtuk fel.)



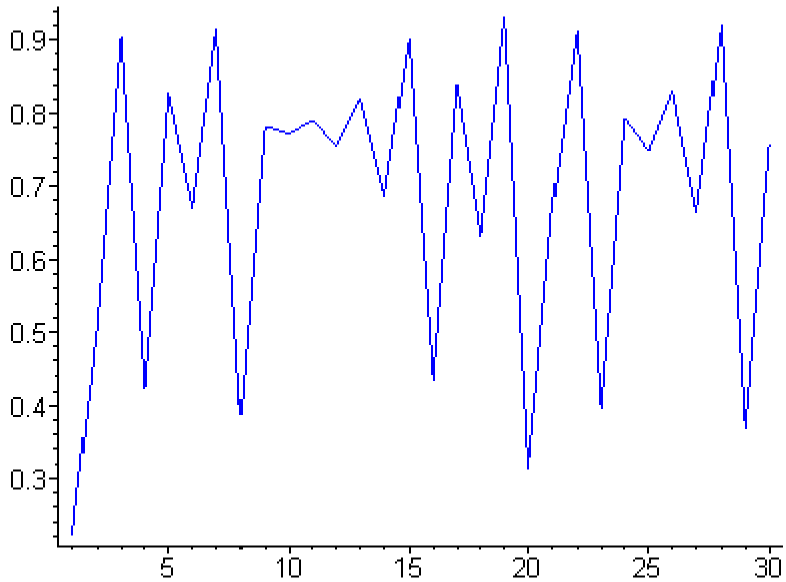
1. ábra. (15) idősora $\mu = 1.1$, $\nu = 1.5$, $p = 5/3$, $q = 1.1$ és $h^{-1}(\rho_{t-1}) = \rho_{t-1}^3$ mellett



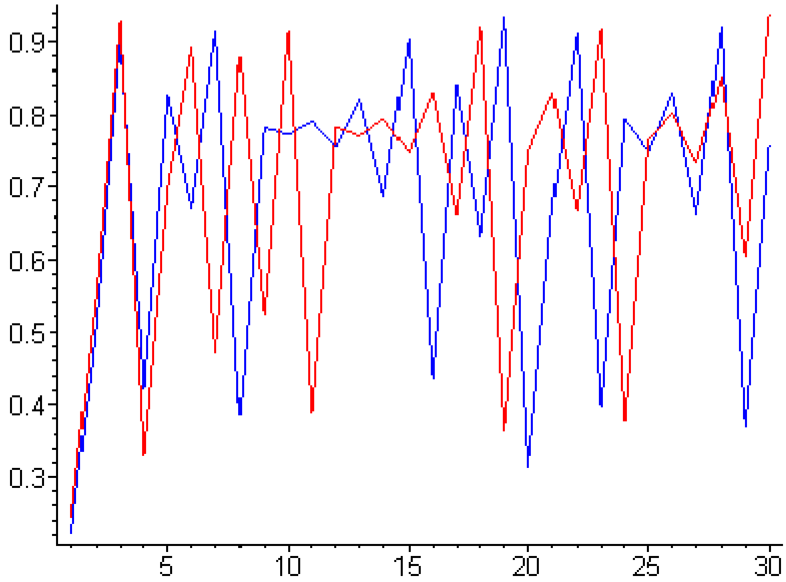
2. ábra. A (15)-tel generált idősor ergodikus viselkedése



3. ábra. A (15) idősorának grafikonja $\rho_{01} = 0.1$ kezdeti érték mellett



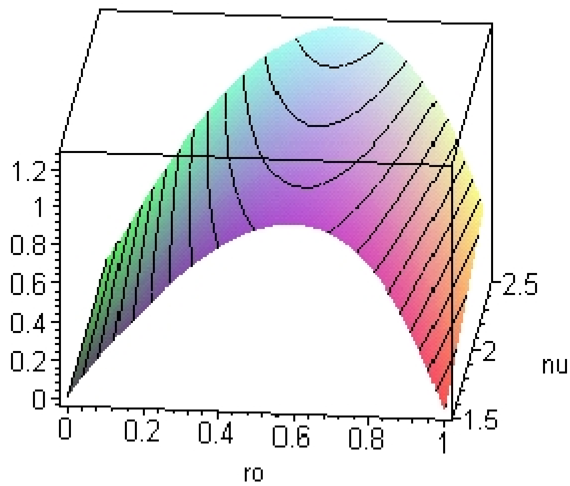
4. ábra. A (15) idősorának grafikonja $\rho_{02} = 0.09$ kezdeti érték mellett



5. ábra. Szenzitív függőség a kezdeti feltételektől

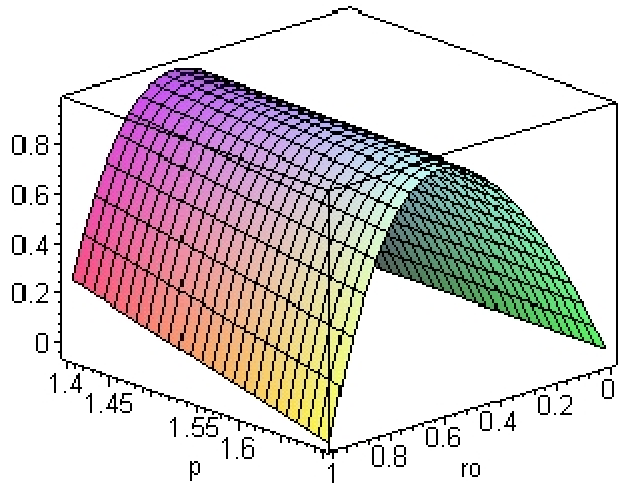
A 3. és 4. ábrák mutatják rendre a (15) idősorainak grafikáit a $\rho_{01} = 0.1$ és $\rho_{02} = 0.09$ kezdeti értékek mellett.

Az 5. ábra a kezdeti feltételektől való érzékenységi függőséget mutatja, amely az *intrinsic* gazdasági növekedési ütemek aperiodikus mozgásait eredményezi.

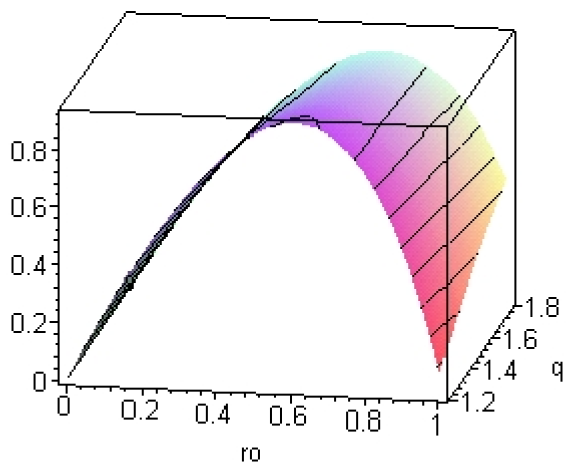


6. ábra. (15) grafikus felszíne $1.5 < \mu < 2$ intervallumban

A 6., 7. és a 8. ábrák mutatják, hogy megengedve a paraméterértékek változását a megfelelő intervallumokban, a fixpontok instabilitása nem változik, vagyis a megfelelő paraméter bármely rögzített értéke mellett a „grafikus felszín" metszetének nyomvonala olyan parabolát ad, amelynek fixpontjába húzott érintőjének meredeksége abszolút értékben nagyobb, mint egy.



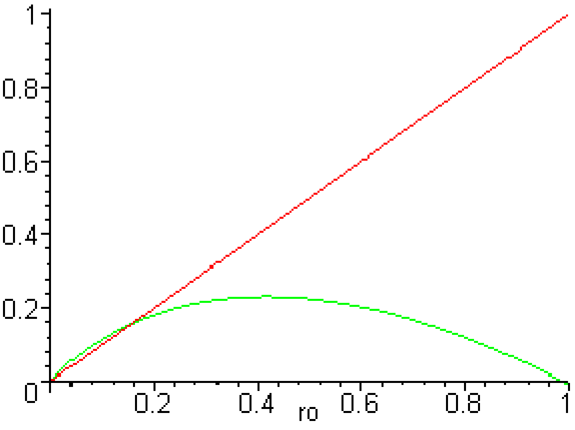
7. ábra. (15) grafikus felszíne $1.4 < p < 1.7$ mellett



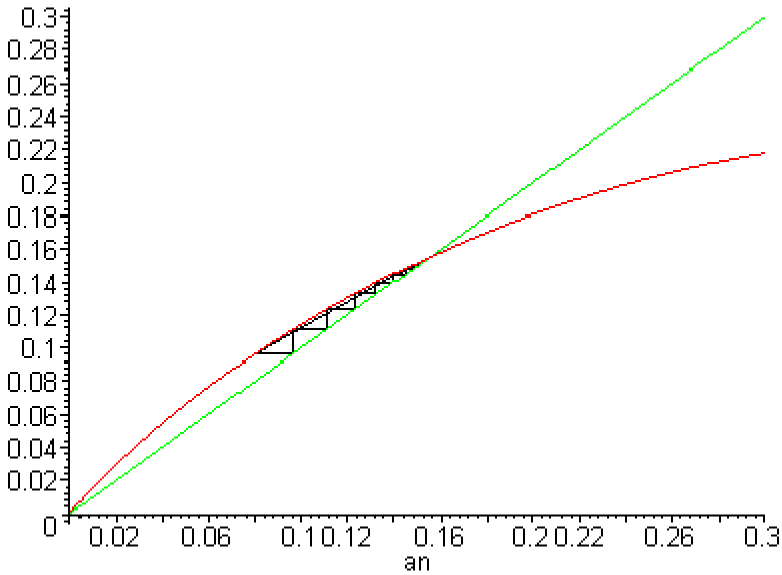
8. ábra. (15) grafikus felszíne $1.1 < q < 1.8$ mellett

Azonban, ha a paraméterek értékeit a (15)-ben csak a fenti intervallumokban változtatjuk meg, mépedig a következőképpen: $\mu = 1.1$; $\nu = 1.6$; $p = 1.65$; $q = 1.2$, míg az élettartam-eloszlást $h^{-1}(\rho_{t-1}) = \rho_{t-1}^{1/5}$-nek vesszük, akkor a (15) grafikonja a 9. ábrán láthatóan alakul.

Az 10. ábra világosan mutatja, hogy a fixpont ebben az esetben stabil. A fixpont ezen kvalitatív tulajdonsága, mivel a paraméterek a fenti intervallumokban változtak, az élettartam-eloszlás változásának a következménye, azaz, a fogyasztási függvény megváltozásának. Itt érdemes kihangsúlyozni a fentiekben már említett *Lucas kritika* egyféle igazolásaként, hogy vajon a (15)-ből kapott intrinsic gazdasági növekedési ütemek folyamai vagy trajektóriái szétszóródnak-e egy turbulens káoszba vagy egy nagyméretű rendhez vezetnek, elsősorban a megfelelő fogyasztási függvény típusától függ, és csak másodsorban bizonyos piaci értékelő paraméterektől.



9. ábra. (15) grafikonja $\mu = 1.1$, $\nu = 1.5$, $p = 5/3$, $q = 1.1$ és $h^{-1}(\rho_{t-1}) = \rho_{t-1}^{1/5}$ mellett



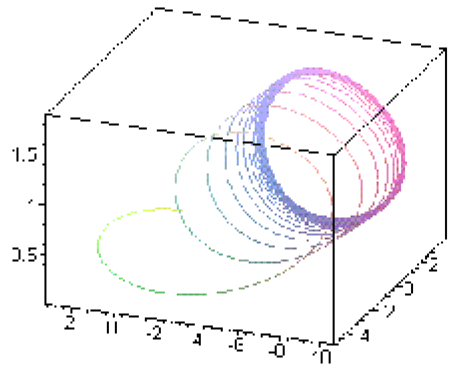
10. ábra. A (15) stabil fixpontja

A (26) nemlineáris dinamikus rendszer szimulációs vizsgálatához először a paramétereket és a kezdeti feltételeket adjuk meg, mégpedig a következőképpen.

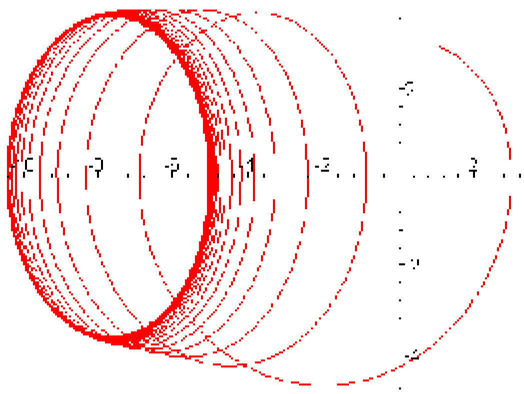
>$a := 0.429$; $b := 0.0833$; $c := 6.0$; $d := 2.0$; $\gamma := 0.5$; $\mu := 1.0$; $s := 0.1$;
>ODes := diff$(x(t),t) = \gamma * b * x(t) - \gamma * y(t) - \gamma * c * d * z(t)$,
diff$(y(t),t) = (1-a) * x(t)$, diff$(z(t),t) = s + \mu * z(t) * (x(t) - d)$;
>initvals := $x(0) = 3.0$, $y(0) = 1.0$, $z(0) = 0.05$;
>result := dsolve({ODes,initvals}, $\{x(t), y(t), z(t)\}$,
type = numeric, method = rkf45, output = listprocedure);
>xx := rhs(result[2]); xy := rhs(result[3]); xz := rhs(result[4])
with(plots):with(plottools):
spacecurve(['$xx(t)$','$xy(t)$','$xz(t)$'], $t = 0..300$, numpoints = 1000);

A rendszer fázisportréja egy határciklus, és így mindhárom változó mozgása periodikus, amint a 11. ábrán is látható.

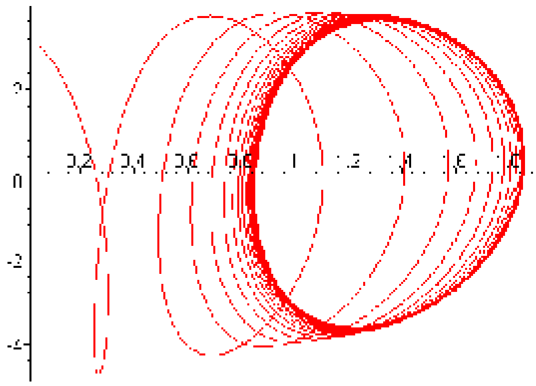
A 12., 13. és a 14. ábrák a 3D határciklus projekcióit mutatják rendre az xy, a zx és a zy síkon. A 15, 16. és a 17. ábrák az x, y és z állapotváltozók idő szerinti dinamikáját mutatják.



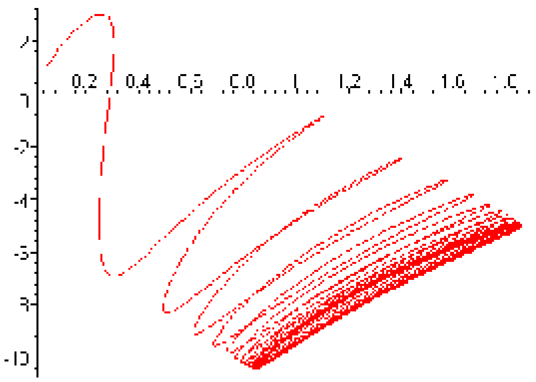
11. ábra. A (26) nemlineáris dinamikus rendszer határciklus megoldása



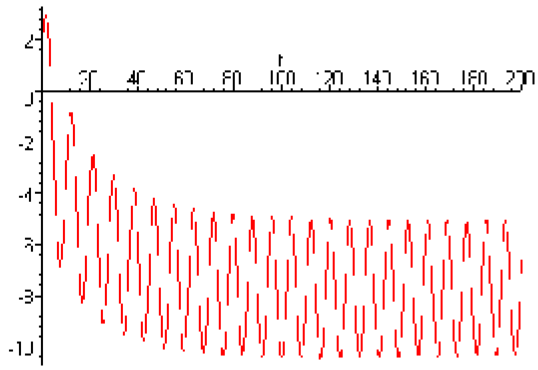
12. ábra. Plot(['xy(t)', 'xx(t)', t=0..300]) : 3D határciklus



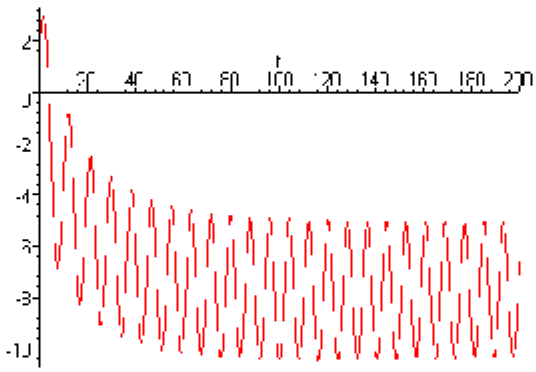
13. ábra. Plot(['xz(t)', 'xx(t)', t=0..300]) : 3D határciklus



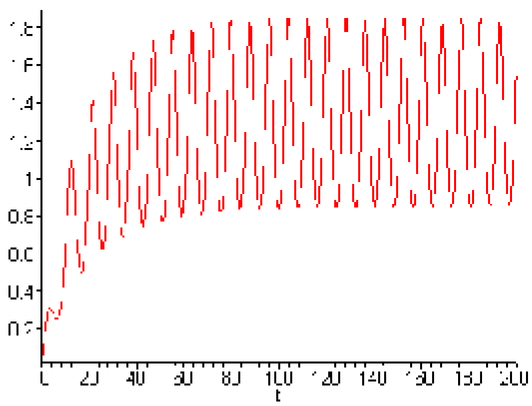
14. ábra. Plot(['xz(t)', 'xy(t)', t=0..300]) : 3D határciklus



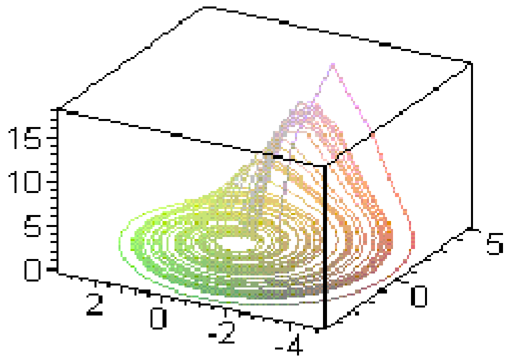
15. ábra. Az x állapotváltozó idő szerinti dinamikája (Plot ('xx(t)', t=0..200)



16. ábra. Az y állapotváltozó idő szerinti dinamikája (Plot ('xy(t)', t=0..200)



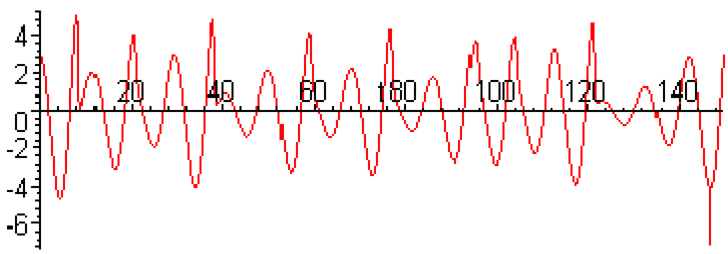
17. ábra. A z állapotváltozó idő szerinti dinamikája (Plot ('xz(t)', t=0..200)



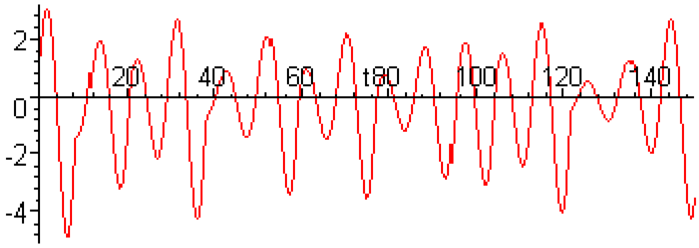
18. ábra. Rössler szalag

Megváltoztatva a modell kalibrálását a lentiek szerint, mindegyik változó irregulárisan mozog egy világos szenzitív függőséggel a kezdeti feltételekre, ami végül is egy Rössler szalagot eredményez, amint a 18. ábrán látható is. Az egyes állapotváltozó dinamikája az 19., 20. és a 21. ábrákon látható.

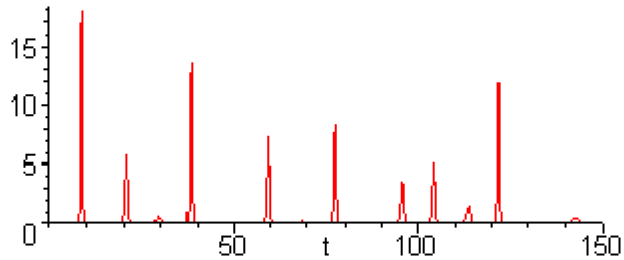
>$a := 0.429$; $b := 0.25$; $c := 1.0$; $d := 2.8$; $\gamma := 0.5$; $\mu := 0.8$; $s := 0.1$;
>ODes := diff$(x(t), t) = \gamma * b * x(t) - \gamma * y(t) - c * d * z(t)$,
diff$(y(t), t) = (1 - a) * x(t)$, diff$(z(t), t) = s + z(t) * (x(t) - d)$;
>initvals := $x(0) = 3.0$, $y(0) = 1.0$, $z(0) = 0.05$;
>result := dsolve({ODes,initvals}, $\{x(t), y(t), z(t)\}$,
type = numeric, method = rkf45, output = listprocedure);
>xx := rhs(result[2]); xy := rhs(result[3]); xz := rhs(result[4])



19. ábra. Az x állapotváltozó dinamikája (Plot('xx(t)', t=0..150)



20. ábra. Az y állapotváltozó dinamikája (Plot('xy(t)', t=0..150)



21. ábra. A z állapotváltozó dinamikája (Plot('xz(t)', t=0..150)

5 Következtetések és további propozíciók

Láttuk, hogy a klasszikus Harrod növekedési modell a nemlineáris Leontief típusú reprezentatív ügynök megközelítésben és konstruktív mikromegalapozással többé nem ad csak tartós állapotú növekedési pályát. Az *intrinsic* gazdasági növekedési ütemek folyamai és trajektóriái szétszóródnak egy turbulens káoszba vagy egy nagyméretű rendhez vezetnek attól függően, hogy milyen interakció van az instabil akcelerátor és a stabilizáló multiplikátor között. Ez az interakció viszont a piaci értékelésektől és a mikromegalapozástól függ, nevezetesen, a fogyasztási adó nagyságától és a beruházások tőzsdei értékelésétől. Ez a vizsgálat választ adott Harrod *kétszarv problémájára* is. Megmutattuk, hogy a növekedés és a ciklus, akár periodikus, akár aperiodikus, szimultán módon sziámi ikrekként jelenik meg. Érdemes itt hangsúlyozni, hogy eredményünk nem mond ellent a tartós növekedésnek, csak a sima, egyenletes növekedést nem teszi lehetővé.

Hasonlóan, a nyílt Harrod-Leontief egyszektoros gazdaságban megfogalmazott Rössler rendszer dinamikája a valuta piaci értékelésétől függ, és egy komplex vagy kaotikus dinamika is előállhat. Az alapkutatás szintjén maradva, eredményeinknek egy további kiterjesztése lehet, továbbra is a Harrod-Leontief modell keretek között maradva, a Rössler rendszer újabb nemlinearizálása a tőke és a ráfordítási koefficiensek tekintetében. Érdekes lehet itt a pénzpiac bevezetése is a modellünkbe változó kamatláb és árszínvonal mellett, és így vizsgálni a kiterjesztett rendszer dinamikus viselkedését. Ezek a vizsgálatok azonban már túlhaladnak a cikk eredeti célkitűzésein.

Irodalom

1. Aftalion, A. (1909): 'La Réalité des surproductions générales: Essai d'une théorie des crises générales et périodiques', *Revue d'économie politique.*
2. Bickerdike, C. F. (1914): 'A Non-Monetary Cause of Fluctuations in Employment', *Economic Journal.*
3. Becker, R. and E. Burmeister (ed.) (1991): *Growth Theory*, Edward Elgar Publ. Co.
4. Brock, W. A. and A. G. Malliaris (1989): *Differential Equations, Stability and Chaos in Dynamic Economics*, Amsterdam, North-Holland Publ. Co.
5. Bródy, A. (1979): *Proportions, Prices and Planning.* Amsterdam: North-Holland Publ. Co.
6. Chiarella, C. (1990): *The Elements of Nonlinear Theory of Economic Dynamics*, Berlin: Springer Verlag.
7. Chiarella, C. and P. Flaschel (2000): *The Dynamics of Keynesian Monetary Growth*, Cambridge, Cambridge University Press.
8. Cagan, P. (1956): The monetary dynamics of hyperinflation, in M. Friedman (ed.) *Studies in the Quantity Theory of Money*, Chicago, University of Chicago Press.
9. Clark, J. M. (1917): 'Business Acceleration and the Law of Demand', *Journal of Political Economy.*
10. Day, R. H. (1994): *Complex Economic Dynamics.* Vol. I. Cambridge, Massachusetts, London: The MIT Press.
11. Day, R. H., Chen, P. (eds.) (1993): *Nonlinear Dynamics and Evolutionary Economics*, New York, Oxford: Oxford University Press.
12. Eisner, R. and R. H. Strotz (1963) 'Determinants of Business Investment', in *Impacts of Monetary Policy.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
13. Friedman, M. (1957): *A Theory of the Consumption Function*, Princeton, Princeton University Press for National Bureau of Economic Research, Princeton.
14. Gale, D. (1963): 'A note on global instability of competitive equilibrium', *Naval Research Logistic Quarterly*, No. 10, pp. 81–87.
15. Goodwin, R. M. (1990): *Chaotic Economic Dynamics.* Oxford: Clarendon Press.
16. Granger, C. J. (1969): 'Investigating Causal Relationships by Econometrics Models and Cross Spectral Methods', *Econometrica*, pp. 425–435.
17. Guckenheimer, J. and P. Holmes (1991): *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, New York, Springer Verlag
18. Haavelmo, T. (1960): *A Study in the Theory of Investment.* Chicago: University of Chicago Press.
19. Hadjimichalakis, M. G. (1971): 'Equilibrium and Disequilibrium Growth with Money: The Tobin Models', *Review of Economic Studies*, pp. 457–479.

20. Hahn, H. F. (1985): *Money, growth and stability*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts
21. Harris, R. (1997): 'Stock Markets and Development', *European Economic Review*, pp. 139–146.
22. Harrod, R. F. (1936): *The Trade Cycle: An Essay*, Clarendon Press, Oxford.
23. Harrod, R. F. (1939): 'An essay in dynamic theory', *Economic Journal*, vol. 49. pp. 13–33.
24. Hawkins, D. (1952): 'Some conditions of macroeconomic stability', *Econometrica*, 16, pp. 309–322.
25. Hayashi, F. (1982): 'Tobin's Marginal q and Average q: A neoclassical interpretation', *Econometrica*, Vol. 50, pp. 213–224.
26. Keynes, J. M. (1936): *The General Theory of Employment, Interest and Money*. 1964, reprint, New York: Harcourt Brace.
27. Kornai, J. (1972): *Rush versus Harmonic Growth*. Amsterdam: North-Holland Publ. Co.
28. Lahiri, S. (1976): 'Input-output analysis with scale-dependent coefficients', *Econometrica*, 44, pp. 947–961.
29. Li, T., Yorke, J. (1975): 'Period 3 implies chaos', *American Mathematical Monthly*, 82, pp. 985–992.
30. Lorenz, E. N. (1963): 'Deterministic non-period flows', *Journal of Atmospheric Sciences*, 20, pp. 130–141.
31. Lucas, R. E., Jr. (1967): 'Optimal Investment Policy and the Flexible Accelerator', *International Economic Review*, Vol. 8.
32. Lucas, R. E., Jr. (1976): 'Economic policy evaluation: a critique'. in K. Brunner and A. H. Meltzer, eds., *The Phillips Curve and the Labor market*, Amsterdam, New York and Oxford: North-Holland Publ. Co.
33. Matsuyama, K. (1999) 'Growing Through Cycles', *Econometrica*, 67, pp. 335–347.
34. May, R. (1976): 'Simple mathematical models with very complicated dynamic', *Nature*, 261, pp. 459–467.
35. McKenzie, L. W. (1976): Turnpike Theory, *Econometrica*, 31, pp. 841–865.
36. Metzler, L. A. (1941): The Nature and Stability of Inventory Cycles, *Review of Economic Studies*, 23, pp. 113–129.
37. Móczár, J. (1997): 'Non-uniqueness through duality in the von Neumann growth models' *Metroeconomica*, 48, pp. 280–299.
38. Móczár, J. (1997): 'Growth paths developed by international trade in Leontief-type dynamic models', *Japan and the World Economy*, pp. 17–36.
39. Móczár, J. (1995): 'Reducible von Neumann models and uniqueness', *Metroeconomica*, 46, pp. 1–15.
40. Móczár J. (1991): 'Irreducible balanced and unbalanced growth paths (Business cycles and structural changes)', *Structural Change and Economic Dynamics*, 2, pp. 159–176.
41. Móczár, J. and Tsukui, J. (1992): 'Balanced and unbalanced growth paths in a decomposable economy: contributions to the theory of multiple turnpikes' *Economic Systems Research*, 3, pp. 211–222.
42. Morishima, M. (1964): *Equilibrium, Stability and Growth*, Oxford, Oxford University Press.

43. Mukerji, V. (1964): 'Output and investment for exponential growth in consumption – the general solution and some comments', *The Review of Economic Studies*, 31, pp. 77–82.

44. Ramsey, F. P. (1928): A mathematical theory of saving, *Economic Journal*, 38, pp. 543–559.

45. Rose, H. (1969): 'Real and Monetary Factors in the Business cycle', *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 1, No. 2. pp. 138–152.

46. Rössler, O. E. (1976): 'Chemical turbulence: chaos in a small reaction-diffusion system', *Z. Naturforsch*, 316, pp. 1168–72.

47. Scarf, H: (1960): 'Some examples of global instability of the competitive equilibrium', *International Economic Review*, No. 1, pp. 57–72.

48. Schumpeter, J. A. (1939): *Business Cycles*, McGraw-Hill Publ. Co. New York.

49. Sidrauski, M. (1967): 'Inflation of Economic Growth', *Journal of Political Economy*, pp. 796–810.

50. Sen, A. (ed.) (1970): *Growth Economics*, Penguin Books Ltd.

51. Stein, J. L. (1966) 'Money and Capacity Growth', *Journal of Political Economy*, pp. 451–465.

52. Summers, L. H. (1981): 'Taxation and corporate investment: A q-theory approach', *Brookings papers an Economic Activity*, pp. 47–127.

53. Taylor, J. B. and M. Woodford (ed.) (1999): *Handbook of Macroeconomics*, Amsterdam, North-Holland Publ. Co.

54. Tobin, J. (1965): Money and economic growth, *Econometrica*, 33, pp. 671–684.

55. Tobin, J. (1969): 'A general equilibrium approach to monetary theory', *Journal of Money, Credit and Banking*, pp. 15–29.

56. Tsukui, J. (1961): On a theorem of relative stability, *International Economic Review*, Vol. 2. pp. 229–230.

57. Tsukui, J. and Y. Murakami (1979): *Turnpike optimality in input-output systems* (Theory and application for planning), North-Holland, Amsterdam.

58. Uzawa, H. (1961): On a Two-Sector Model of Economic Growth, *Review of Economic Studies*, 29, pp. 40–47.

59. Uzawa, H. (1969): 'Time Preference and the Penrose Effect in a Two-Class Model of Economic Growth', *Journal of Political Economy*, Vol. 77, pp. 628–652.

NONLINEAR DYNAMICS IN CLASSICAL ECONOMIC GROWTH MODELS

In this paper the classical Harrodian growth model is transformed into a representative agent model by its nonlinear extensions and the Keynesian and Schumpeterian traditions. For the proof of the celebrated Lucas critique it is shown that the trajectories of intrinsic economic growth rates either are scattered into a turbulent chaos or lead to a large scale order. It depends on the type of the appropriate consumption function, and the market values of some parameters are playing only secondary role.Another surprising result is empirical: the international trade sufficit may generate strange attractors under some exchange rate values.