

LINEÁRIS, IDŐTŐL FÜGGŐ RENDSZEREK KÖZELÍTÉSE¹

MOLNÁR SÁNDOR – MOLNÁR MÁRK

HUN-REN SZTAKI, MATE – ELTE Összehasonlító Gazdaságtan Tanszék

1 Bevezetés

Gyakran alkalmazott eljárás a matematika számos területén, hogy egy nehezen megoldható problémát egyszerűbb struktúrájú feladatra, vagy azok sorozatára vezetünk vissza. Hasonló a helyzet nem lineáris közönséges differenciálegyenletek lokális aszimptotikus stabilitásvizsgálatában (Bellman, 1969), amikor az egyensúlyi állapot környezetében linearizáljuk az egyenletet, amelyek stabilitására könnyen ellenőrizhető kritériumok állnak rendelkezésre.

Ebben a dolgozatban LPV-rendszerek approximációjával foglalkozunk, a témát részletesen tárgyalja Molnár (2017) és Molnár et al. (2020).

A lineáris, időtől függő (Linear Time Varying – LTV) rendszerek olyan rendszerek, amelyek dinamikáját lineáris differenciál- vagy differenciaegyenletek írják le, és amelyek együtthatói időben változnak. A rendszer tulajdonságai időfüggők, tehát a viselkedése nem állandó.

A lineáris, paraméterváltozós rendszerek (Linear Parameter Varying – LPV) rendszerek olyan rendszerek, amelyek viselkedése adott időpillanatban lineáris, de együtthatói nem csak az időtől, hanem időben változó paramétereiktől is függenek (például állapottól, vagy külső vagy belső feltételektől).

2 Előzmények

Pontrjagin és tanítványai észrevették, hogy az optimális irányítás minőségi tulajdonságainak vizsgálatakor hasonlóságok találhatók a lineáris programozással.

Tekintsük az

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0$$

lineáris, időtől függő (LTV) rendszert, ahol $u(t)$ az $U = [0, 1]^n$ kockából vett irányítás. La Salle (1960)-ben kimutatta, hogy amennyiben $u : [0, T] \rightarrow U$ egy szakaszonként folytonos irányítás, akkor minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $v(t)$ irányítás, amely szakaszonként konstans és értékei az U kocka csúcspontjai, valamint az

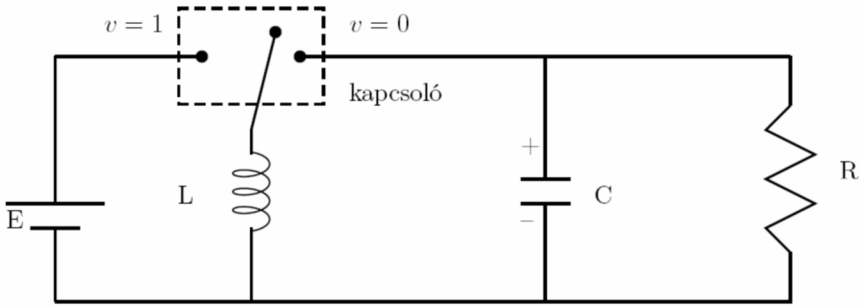
$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)v(t), \quad y(0) = x_0$$

¹Beérkezett 2025. március 9. DOI: <https://doi.org/10.15170/SZIGMA.56.1268>. E-mail: molnar.sandor.prof@uni-mate.hu, molnar.mark@gtk.elte.hu.

megoldása kielégíti az

$$\|x(t) - y(t)\| < \varepsilon$$

közelítést. Ez azért is érdekes, mert az $u(t)$ és $v(t)$ irányítások pontonként távol eshetnek egymástól, viszont az általuk generált trajektóriák az egész intervallumon közel kell essenek egymáshoz. Az eredményt Gamkrelidze et al. (1978) összefoglaló monográfiája részletesen ismerteti. Megjegyzendő, hogy a tétel általánosítása Filippov–Wazewski-féle relaxációs tételként ismertetes a szakirodalomban, amelynél az U irányítási halmaz már nem n -dimenziós kocka, hanem tetszőleges konvex halmaz, amelynek extrémális pontjaira szorítkozunk a vizsgálat során.



1. ábra. A Buck-Boost konverter áramköre

Példaként tekintettük a Buck-Boost konvertert, amit az 1. ábra mutat be (Sira-Ramirez, 2015). A $v(t)$ irányítás kétértékű, 0 vagy 1 a kapcsoló állásának megfelelően. Az ideális viselkedést egy szakaszonként folytonos $u : (0, t) \rightarrow [0, 1]$ függvény jellemzi az alábbi modell szerint:

$$\begin{aligned} L\dot{x}_1 &= (1 - u)x_2 + uE \\ C\dot{x}_2 &= -(1 - u)x_1 - \frac{x_2}{R}, \end{aligned} \quad (1)$$

ahol x_1 a tekercsen átmenő feszültség, és x_2 a kondenzátoron eső feszültség. A probléma az, hogy ezt az ideális viselkedést kétértékű irányítással nem lehet elérni, így csak valamilyen elfogadható közelítést kell keresnünk: például egy $\varepsilon > 0$ hibahatárhoz előállítottunk egy olyan kapcsolás-sorozatot leíró $v(t)$ függvényt, hogy az

$$\begin{aligned} L\dot{y}_1 &= (1 - u)y_2 + vE \\ C\dot{y}_2 &= -(1 - u)y_1 - \frac{y_2}{R} \end{aligned} \quad (2)$$

megoldásra fennálljon, hogy

$$|x_1(t) - y_1(t)| < \varepsilon \quad \text{és} \quad |x_2(t) - y_2(t)| < \varepsilon.$$

Az (1) rendszer nem lineáris, így nem lehet a Gamkrelidze et al. (1978) által ismertett eredményt és módszert közvetlenül alkalmazni.

3 Egy általános eredmény

Osszuk el az (1) egyenletet L és C állandókkal,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{1}{L}x_2 + \left(\frac{E}{L} - p_2\frac{1}{L}\right)u \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{RC}x_2 + \frac{1}{C}p_1u,\end{aligned}\tag{3}$$

ahol p_1 és p_2 is állapotváltozóként szerepel formailag. Így egy lineáris rendszerhez jutottunk, amelynek mátrixalakja:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & \frac{1}{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L}p_2 \\ \frac{1}{C}p_1 \end{pmatrix} u.\tag{4}$$

Erre a problémára azonban alkalmazható a Gamkrelidze-tétel következő általánosítása. Legyen $U \subset \mathbb{R}^{k_1}$ egy konvex poliéder, és $P \subset \mathbb{R}^{k_1}$ egy kompakt halmaz. Tegyük fel, hogy

$$A : P \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$B : P \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times k}$$

eleget tesznek a t -ben egyenletes Lipschitz-féle feltételnek L_A és L_B állandókkal.

Az

$$\dot{x} = A(p, t)x + B(p, t)u\tag{5}$$

LPTV-rendszer p paraméterét helyettesítsük egy állapot-idő függő paraméterrel $p : D \rightarrow P$, ahol $D \subset \mathbb{R}^n \times [0, T]$ nyílt halmaz. Azt is feltesszük, hogy p egyenletesen kielégíti a globális Lipschitz-féle feltételt egy L_p konstanssal.

1. Tétel. *Tegyük fel, hogy egy $u : [0, T] \rightarrow U$ szakaszonként folytonos irányítással az*

$$\dot{x}(t) = A(p(x(t), t), t)x(t) + B(p(x(t), t), t)u(t), \quad x(0) = \bar{x}_0\tag{6}$$

kezdetiérték-feladat rendelkezik megoldással. Ekkor létezik olyan $\varepsilon_0 > 0$, amelyre minden $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ esetén található egy $\delta > 0$ állandó és $v : [0, t] \rightarrow U$ szakaszonként konstans értékű irányítás, amelynek értékei az U csúcsai, valamint egy $q : D \rightarrow P$ szakaszonként konstans értékű paraméterfüggvény, hogy bármely olyan x_0 kezdeti érték mellett, amelyre $\|x_0 - \bar{x}_0\| < \delta$ teljesül, hogy az

$$\dot{y}(t) = A(q(y(t), t), t)y(t) + B(q(y(t), t), t)v(t), \quad y(0) = x_0\tag{7}$$

kezdetiérték-probléma megoldása a teljes $(0, T)$ intervallumon értelmezett, és ott

$$\|x(t) - y(t)\| < \varepsilon.\tag{8}$$

Ez az eredmény úgy értelmezhető, hogy a q paraméterfüggvény értékei a P poliéder csúcsai legyenek, ha a P kompakt halmazt poliédereként választjuk. Az approximációs tételek bizonyítása egy önmagában is érdekes lemmán alapszik (Molnár et al. 2016, 2017).

Lemma. *Tegyük fel, hogy $U \subset \mathbb{R}^{k_1}$ egy korlátos poliéder, $u : (0, t) \rightarrow U$ szakaszonként folytonos függvény, továbbá $B : (0, t) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times k_1}$ szakaszonként folytonos mátrixfüggvény. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan szakaszonként konstans $v : (0, t) \rightarrow U$ approximáló függvény, amely értékeit U csúcspontjaiban veszi fel, és*

$$\left\| \int_0^t B(\tau)(u(\tau) - v(\tau)) d\tau \right\| < \varepsilon. \quad (9)$$

Bizonyítás. Jelölje d_U az U poliéder átmérőjét,

$$d_U = \max \|u_{l_1} - u_{l_2}\|, \quad \text{ahol } u_{l_1} \text{ és } u_{l_2} \text{ csúcspontok.}$$

Mint hogy u és B szakaszonként folytonosak, minden $\bar{\varepsilon} > 0$ -hoz találhatóak olyan $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = T$ osztópontok, hogy minden $[t_{i-1}, t_i] \subset (0, t)$ részintervallumon az u és B függvény folytonos, valamint

$$\begin{aligned} \|u(t) - u(t_{i-1})\| &< \frac{\bar{\varepsilon}}{3T|B|}, \quad \text{ha } t \in [t_{i-1}, t_i) \\ \|B(t) - B(t_{i-1})\| &< \frac{\bar{\varepsilon}}{3Td_U}, \quad \text{ha } t \in [t_{i-1}, t_i) \\ |t_i - t_{i-1}||B|d_U &< \frac{\bar{\varepsilon}}{3T}, \end{aligned} \quad (10)$$

ahol $|B| = \sup_{\tau \in (0, t)} \|B(\tau)\|$, itt a norma a spektrumból adódó szokásos norma. Jelölje U csúcspontjait $u_1, u_2, \dots, u_L$, és tekintsünk egy $u(t_{i-1}) \in U$ pontot. Abból a feltevésből, hogy U konvex poliéder, következik az, hogy alkalmas $\lambda_1^i, \lambda_2^i, \dots, \lambda_L^i$ együtthatókkal

$$u(t_{i-1}) = \sum_{l=1}^L \lambda_l^i u_l \quad (\lambda_l^i \geq 0, \quad \sum_{l=1}^L \lambda_l^i = 1). \quad (11)$$

Osszuk fel a $[t_{i-1}, t_i]$ intervallumot $\lambda_1^i, \lambda_2^i, \dots, \lambda_L^i$ arányban részintervallumokra, amelyek között 0 hosszúságú is lehet,

$$t_{il} = t_{i-1} + (t_i - t_{i-1}) \sum_{j=1}^l \lambda_j^i. \quad (12)$$

Definiáljuk ezután a $v : (0, t) \rightarrow U$ függvényt a $t \in [t_{i,l-1}, t_{il}] \subset (t_{i-1}, t_i)$ helyeken a $v(t) = u_l$ értékkel. Legyen ezután $t \in [0, T]$ tetszőleges érték, ekkor $t \in [t_{i-1}, t_i]$ valamilyen i esetén. Ha $t < T$, akkor

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t B(\tau)(u(\tau) - v(\tau)) d\tau \right\| &\leq \left\| \int_{t_{i-1}}^t B(\tau)(u(\tau) - v(\tau)) d\tau \right\| + \\ &+ \sum_{j=1}^{i-1} \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} B(\tau)(u(\tau) - v(\tau)) d\tau \right\|. \end{aligned}$$

Az első, és az összegben szereplő tagok a következőképpen becsülhetők:

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t_{i-1}}^t B(\tau)(u(\tau) - v(\tau)) d\tau \right\| &\leq \int_{t_{i-1}}^t \|B(\tau)\| \|u(\tau) - v(\tau)\| d\tau \leq \\ &\leq (t - t_{i-1})|B|d_U \leq (t_i - t_{i-1})|B| \leq \frac{\bar{\varepsilon}}{3}, \end{aligned}$$

valamint

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{i-1} \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} B(\tau)(u(\tau) - v(\tau)) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{i-1} \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} (B(\tau) - B(t_{j-1}))(u(\tau) - v(\tau)) d\tau \right\| + \\ &\quad + \sum_{j=1}^{i-1} \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} B(t_j)(u(\tau) - v(\tau)) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{i-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|(B(\tau) - B(t_{j-1}))\| \|(u(\tau) - v(\tau))\| d\tau + \\ &\quad + \sum_{j=1}^{i-1} \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} B(t_j)u(\tau) d\tau - \sum_{l=1}^L \int_{t_{j,l-1}}^{t_{j,l}} B(t_{j-1})v(\tau) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{i-1} (t_j - t_{j-1})d_U \frac{\bar{\varepsilon}}{3Td_U} + \\ &\quad + \sum_{j=1}^{i-1} \left\| B(t_{j-1}) \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} u(\tau) d\tau - \sum_{l=1}^L \int_{t_{j,l-1}}^{t_{j,l}} u_l d\tau \right) \right\| \leq \\ &\leq \frac{\bar{\varepsilon}t_{i-1}}{3T} + \sum_{j=1}^{i-1} \left\| B(t_{j-1}) \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} u(\tau) d\tau - (t_j - t_{j-1}) \sum_{l=1}^L \lambda_l^j u_l \right) \right\| \leq \\ &\leq \frac{\bar{\varepsilon}}{3} + |B| \sum_{j=1}^{i-1} \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} u(\tau) - u(t_{i-1}) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \frac{\bar{\varepsilon}}{3} + |B| \sum_{j=1}^{i-1} (t_j - t_{j-1}) \frac{\bar{\varepsilon}}{3T|B|} \leq \frac{\bar{\varepsilon}}{3} + |B|t_{i-1} \frac{\bar{\varepsilon}}{3T|B|} \leq \frac{2\bar{\varepsilon}}{3}. \end{aligned}$$

Összevetve ezt a maradék $[t_{i-1}, t)$ intervallumon kapott becsléssel, megkapjuk a bizonyítandó állítást:

$$\left\| \int_0^t B(\tau)(u(\tau) - v(\tau)) d\tau \right\| < \bar{\varepsilon}.$$

4 Approximációs rendszerek irányíthatósága

Tekintsük az

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu & (A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}) \\ \dot{y} &= Cx + Du & (C \in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{R}^{p \times m}) \end{aligned} \tag{13}$$

rendszert, ahol A, B, C, D konstans mátrixok. A Kalman-féle feltétel szerint annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a (13) rendszer irányítható legyen (ld. pl. Szidarovszky és Bahill, 1998) az, hogy a

$$K = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$$

mátrix rangja n legyen.

Hasonlóan a (13) rendszer megfigyelhetőségének az a feltétele, hogy az

$$L = (C^T, A^T C^T, \dots, (A^{n-1})^T C^T)$$

mátrix rangja is n legyen. Valamint ismert, hogy a rendszer akkor és csak akkor minimális, ha irányítható és megfigyelhető.

Időtől függő struktúramátrixok esetén az

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m})$$

rendszer irányíthatóságának az a feltétele, hogy a

$$W(0, T) = \int_0^T \Phi(T, t)B(t)B^T(t)\Phi^T(T, t) dt$$

Gram-féle mátrix rangja n legyen, ahol $\Phi(T, \tau)$ a rendszer fundamentális mátrixa. Hasonlóan a rendszer elérhetőségének feltétele az, hogy a

$$W(T, 0) = \int_0^T \Phi(0, t)B(t)B^T(t)\Phi^T(0, t) dt$$

mátrix rangja n legyen. Egy $n \times n$ mátrix rangja akkor és csak akkor n , ha a mátrix invertálható. Tekintsük ezután a $C(t) = W(0, t)$ mátrixot $t \in [0, T]$ esetén. Könnyen kimutatható, hogy $C(t)$ kielégíti a

$$\dot{C}(t) = A(t)C(t) + C(t)A^T(t) + B(t)B^T(t), \quad C(0) = 0$$

Riccati-féle kezdetiérték-feladatot, amely egy inhomogén mátrix-differenciál-egyenlet.

Tekintsük végül az

$$\dot{x} = A(p, t)x + B(p, t)u$$

LPV-rendszert a p időfüggő paraméterrel,

$$\dot{x}(t) = A(p(t), t)x(t) + B(p(t), t)u(t), \quad (14)$$

amely egy LTV-rendszer.

2. Tétel. *Tegyük fel, hogy A és B folytonosak, és t változóban eleget tesznek az egyenletes globális Lipschitz-féle feltételnek. A p paraméter t -ben szakaszanként folytonos. Így a (14) rendszer kielégíti az 1. Tétel feltételeit egy*

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}(t)\bar{x}(t) + \bar{B}(t)u(t) \quad (15)$$

approximációval, és az abban szereplő ε_0 és δ paraméterek úgy is megválaszthatók, hogy a (15) rendszer irányítható legyen, ha a (14) rendszer irányítható volt.

Ez az eredmény tovább élesíthető a következőképpen.

3. Tétel. Tegyük fel, hogy $B(p, t)$ független t -től, továbbá

- a) P paramétermátrix egy konvex poliéder $p_1, p_2, \dots, p_M$ csúcspontokkal;
- b) az $A(p, t)$ és $B(p)$ függvények lineárisak a p változójukban, és a $t \mapsto A(p_m, t)$ függvények szakaszosan folytonosak ($1 \leq m \leq M$);
- c) a $t \mapsto p_t$ függvény is szakaszosan folytonos.

Ekkor adott $\varepsilon_0 > 0$ -hoz található $\delta_0 > 0$, hogy minden δ_0 -nál finomabb, az $A(p_m, t)$ szakadási pontjait is tartalmazó $t_0, t_1, \dots, t_I$ felosztáshoz az 1. Tétel élesítéséhez konstruált $\bar{A}(t), \bar{B}(t)$ mátrixok (amelyek szakaszonként rendre az $A(p_m, t_{i-1})$, illetve $B(p_m)$ értékeket veszik fel) által előállított

$$\dot{x}(t) = \bar{A}(t)x(t) + \bar{B}(t)u(t) \quad (16)$$

rendszerhez tartozó

$$\dot{\bar{C}}(t) = \bar{A}(t)\bar{C}(t) + \bar{C}(t)\bar{A}^T(t) + \bar{B}(t)\bar{B}^T(t) \quad (17)$$

mátrix Riccati-egyenlet megoldása invertálható legyen, ha $C(T)$ irányítható volt.

Ez a tétel úgy is megfogalmazható, hogy ha a (14) rendszer irányítható, akkor a (16) rendszer is irányítható.

5 Következtetések

A konverteres példánk jól illusztrálja az approximációs tételeink lehetőségeit éppen a konkrét alkalmazások terén. További rendszerelméleti vizsgálatok tekintetében is sokat ígérnek ezek a tételek, így a stabilitási, irányítási és megfigyelési vizsgálatokban, abban az esetben, ha egy P konvex poliéder csúcsaihoz rendelt állandó együtthatós lineáris rendszerek kapcsolgatásával közelítjük a rendszertulajdonságokat.

Irodalom

1. Bellman R. (1969): *Stability Theory of Differential Equations*. Dover, Mineola, New York.
2. Gamkrelidze, R. (1978): *Principles of Control Theory*. Plenum, New York.
3. LaSalle J. P. (1959): Time Optimal Control Systems, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 45(4), 573–577.

4. Molnár, Sándor és Molnár, Márk: (2016) A new approach for the estimation of non-linear switching-type systems, *Mechanical Engineering Letters*, 14, 54–62.
5. Molnár, Sándor és Molnár, Márk (2017): Approximation of LPV-Systems with Constant-Parametric Switching Systems In: Akio Matsumoto (szerk.) *Optimization and Dynamics with Their Applications : Essays in Honor of Ferenc Szidarovszky*, Springer Netherlands, 127–154.
6. Molnár, Sándor (2017): Strukturált rendszerek kvalitatív vizsgálata, MTA.
7. Molnár, S. és M. Molnár (2020): Properties of Linear Time-Dependent Systems in Bischi, Gian Italo; Szidarovszky, Ferenc (szerk.) *Games and Dynamics in Economics: Essays in Honor of Akio Matsumoto*. Springer Singapore, 271–290.
8. Pontryagin, L. S., V. G. Boltyanskii, R. S. Gamkrelidze és E. F. Mischenko (1964): *Mathematical Theory of Optimal Processes*. Pergamon Press, New York.
9. Sira-Ramirez, H. (2015): *Sliding Mode Control*. Birkhäuser, Basel, Switzerland.
10. Szidarovszky, F. és T. Bahill (1998): *Linear Systems Theory* (2. kiadás), CRC Press, Boca Raton, Florida.

APPROXIMATION OF LINEAR TIME-VARYING SYSTEMS

We have analysed conditions for the existence of piecewise constant control for linear time-varying (LTV) systems. Under certain conditions the controllability of the original system results in the controllability of the approximating system.