

TERMELÉSI-KÉSZLETEZÉSI FOLYAMATOK OPTIMÁLIS IRÁNYÍTÁSA EGY VISSZUTAS LOGISZTIKAI MODELLBEN¹

DOBOS IMRE – KLAUS-PETER KISTNER – ZSIROS ÁDÁM JÁNOS

BME Közgazdaságtan Tanszék – Universität Bielefeld

Az egy termékre vonatkozó visszutas logisztikai modellek két készletraktárral és három tevékenységgel rendelkeznek: termelés, újrahasznosítás és hulladékártalmatlanítás. Az ilyen termelési-készletezési rendszerek célja a költségek minimalizálása. A visszutas logisztikai rendszerek másodlagos célja, hogy a visszaküldött és újrafelhasználható használt termékekből minél többet hasznosítsanak újra: alakítsanak át új termékké. A költségek készlet- és termelési költségekből állnak. A készletköltségek lineárisak, míg a termelési költségek általában konvexek. A kutatásban vizsgált modell egy korábban bemutatott modell [8] általánosítása. Az új modellben a visszatérő termékek a kereslet egy egynél kisebb szorzóval és állandó készlettel rendelkező részét képezik. A modell a termelésen és az újrahasznosításon kívül a hulladékártalmatlanítási tevékenységeket is bevezeti. A kutatás vizsgálja az optimális megoldásokban előforduló döntési változók viselkedését, például a termelés, az újrahasznosítás, illetve a hulladékártalmatlanítás szükségességének, valamint az optimális megoldás létezésének feltételeit. A modell nemcsak a költségminimalizálás lehetőségeit vizsgálja, hanem azt is előrevetíti, hogy általi beavatkozásokkal – például a környezetkárosító folyamatok (termelés, lerakás) megadóztatásával vagy a környezetbarát folyamatok (újrahasznosítás) ösztönzésével – eltolható a gazdasági optimum egy fenntarthatóbb irányba. A kutatás célja a hulladékkörforgást szemléltető modell tulajdonságainak feltárása az említett esetekre vonatkozóan. A tanulmány numerikus példákra keresztül illusztrálja a modell működését, és rávilágít annak gyakorlati jelentőségére, például a REpont visszaváltási rendszerben.

Kulcsszavak: újrahasznosítás, visszutas logisztika, optimális politika, optimális irányítás

1 Bevezetés

A visszutas logisztikának számtalan definíciója létezik. A következőkben a visszutas logisztikán olyan termelési-készletezési rendszert értünk, ahol az új nyersanyagokból történő új késztermék előállítás mellett a használt termékeket olyan új, újra felhasználható termékekké alakítják át, amelyek aztán újként értékesíthetők a piacon. Ez a termelési tevékenység azáltal, hogy

¹Beérkezett 2024. november 29. DOI: <https://doi.org/10.15170/SZIGMA.56.1267>. E-mail: zsiros@edu.bme.hu.

a piacról visszakerült termékeket újra használható állapotba hozza, fékezi a természeti erőforrások kitermelését és átalakítását, ezáltal olyan erőforrásokat takarít meg, amelyek a jövő nemzedékek számára is rendelkezésre állnak. A visszatás logisztikai rendszerek gyakorlati alkalmazása szempontjából kiemelkedő jelentőségű, hogy a különböző tevékenységek költségei – mint például a termelés, újrahasznosítás, hulladékártalmatlanítás vagy raktározás – egyaránt a fogyasztókat és az üzemeltetőket terhelik. Azonban állami beavatkozások, például adók vagy támogatások révén ezek a költségek befolyásolhatók, ami lehetővé teszi a gazdasági optimum környezetbarát irányba történő eltolását.

A szakirodalomban háromféle egytermékes, determinisztikus visszatás logisztikus modell ismert. E modellek közül az első az optimális rendelési tétele nagyság (EOQ) modellek két raktárral rendelkező kiterjesztésének tekinthető, ahol a piacon újként értékesített és a fogyasztási folyamatból visszavett termékeknek egy-egy raktára van ([4], [10], [11], [12], [13], [16] és [18]). A keresleti és megtérülési ráták ezekben a modellekben ismertek. Ezek a modellek arra a kérdésre keresik a választ, hogy milyen tétel méretet kell alkalmazni a termeléshez és az újratermeléshez. Az ilyen modellek feltételezik, hogy a termelési és az újrafeldolgozási tétel méretek külön-külön egyenlőek. Az optimális politika, azaz a költségminimalizáló termelési és újrahasznosítási tétel méretek meghatározása még nem ismert [7].

Egy másik alkalmazás a dinamikus tétel méret Wagner-Within modellje ([14], [15]). Ez a modell is ugyanazt az eredményt adja, mint az EOQ-n alapuló modellek, azaz egy időszakban vagy termelés vagy újrahasznosítás van. Az optimális megoldás a Bellman-féle dinamikus programozási algoritmuson alapul. Az optimális megoldáshoz jó közelítéseket lehet kapni az EOQ-n alapuló termelési-készletezési modellekkel.

A harmadik alkalmazási irány a folytonos idejű termelési-készletezési modelleken alapul. A költségek ekkor két csoportra bonthatók: termelési, illetve készlet tartási költségek. A két raktár tároló, illetve áramlási formulái a készlet mérleg egyenletei. Eddig mélyrehatóan vizsgálták a lineáris modelleket, és a rendszer egyszerűsége miatt könnyen értelmezhető megoldások születtek ([5], [9]). Konvex termelési költségekkel rendelkező Arrow-Karlin-modelleket is elemeztek ([3], [8]). Egy másik csoportba tartozik a kvadratikus költségű Holt-Modigliani-Muth-Simon (HMMS) modellen alapuló alkalmazás [2].

E modellek elméleti megközelítései mellett fontos megvizsgálni azok gyakorlati jelentőségét is. A költségminimalizáló politikák kialakítása során az állami ösztönzők kulcsszerepet játszhatnak a környezetkárosító tevékenységek (például termelés és hulladéklerakás) visszaszorításában, illetve a környezetbarát folyamatok, például az újrahasznosítás előmozdításában. A jelen tanulmány egy általánosított modellt mutat be, amely ezeket a lehetőségeket is figyelembe veszi.

Jelen tanulmány célja egy Arrow-Karlin-típusú visszatás logisztikai modell elemzése. A leírandó modell egy korábban közzétett modell két tényezővel történő kiterjesztése [8]. A kiterjesztés egyik tényezője a következő: a ter-

melés és az újrahasznosítás mellett bevezetjük a hulladékártalmatlanítási tevékenységet is, így optimális szabályozási modellünk a korábbi kettő helyett már három szabályozóváltozóval rendelkezik. A kiterjesztés másik eleme a visszaváltási/visszahozatali függvény a kereslet egynél kisebb értékkel történő szorzása. Ezen felül definiálunk egy fix késleltetést, mert a visszagyűjtési folyamat időt vesz igénybe: a mi feltételeink szerint ez írja le a késleltetést. A kutatás során megvizsgáljuk a termelés, az újrahasznosítás, illetve a hulladékártalmatlanítás szükségességének, valamint az optimális megoldás létezésének feltételeit különböző esetekre (különböző készlettartási feltételekre) vonatkozóan.

A vizsgált modell különösen releváns lehet az olyan gyakorlati rendszerek elemzésében, mint például a REpont visszaváltási rendszer, ahol a fogyasztók által fizetett betétdíj (például palackonként 50 forint) és annak visszatérítése közvetlen hatással van az újrahasznosítási arányokra. Az ilyen rendszerek működése során az üzemeltető által viselt költségek – raktározás, újrahasznosítás – optimalizálása, valamint az állami támogatások hatásának modellezése kritikus szerepet játszhat a fenntartható működés biztosításában. A tanulmány további célja, hogy bemutassa a költségminimalizálás módszereit egy általánosított visszutas logisztikai modell alapján, valamint rávilágítson arra, hogy az állami szabályozások hogyan befolyásolhatják a modellben szereplő tevékenységek költség szerkezetét. A bemutatott modell tehát nem csak elméleti jelentőségű, hanem alapot teremt a környezettudatos logisztikai rendszerek fejlesztéséhez és optimalizálásához is.

A cikk a következőképpen épül fel. A modell a 2. fejezetben kerül bemutatásra. A harmadik fejezetben egy „visszutas” Arrow-Karlin modellt mutatunk be. A 4. fejezet a modell néhány jellemzőjét mutatja be. Ezután az optimalitás szükséges és elégséges feltételeit mutatjuk be, majd megadjuk a modell megoldását a termelésre, az újrahasznosításra és a hulladékártalmatlanításra, valamint a készlet alakulását mindkét raktárra vonatkozóan. A 6. és 7. fejezetek egy Arrow-Karlin-típusú előremenő algoritmust ismertetnek az optimális megoldás kiszámítására. A 8. fejezet bemutatja az optimális megoldást adott adatokra, végül pedig összefoglaljuk az eredményeket.

2 A modell

Egy két készlettel (raktárral) rendelkező visszutas logisztikai modellt vizsgálunk folyamatos hulladékártalmatlanítással. A modellben a paraméterek és függvények a következők:

T :	a vizsgált időintervallum hossza,
h_1 :	fajlagos készletezési költség az első raktárban,
h_2 :	fajlagos készletezési költség a második raktárban,
$S(t)$:	a kereslet mértéke, folytonosan differenciálható függvény,
$R(t)$:	a használttermék-visszahozatal mértéke, folytonosan differenciálható függvény,

- $F_m(P_m(t))$: a termelés (gyártás) költségfüggvénye; konvex, monoton növekedő, kétszer folytonosan differenciálható függvény,
 $F_r(P_r(t))$: az újrahasznosítás költségfüggvénye; konvex, monoton növekedő, kétszer folytonosan differenciálható függvény,
 $F_d(P_d(t))$: a hulladékártalmatlanítás költségfüggvénye; konvex, monoton növekedő, kétszer folytonosan differenciálható függvény.

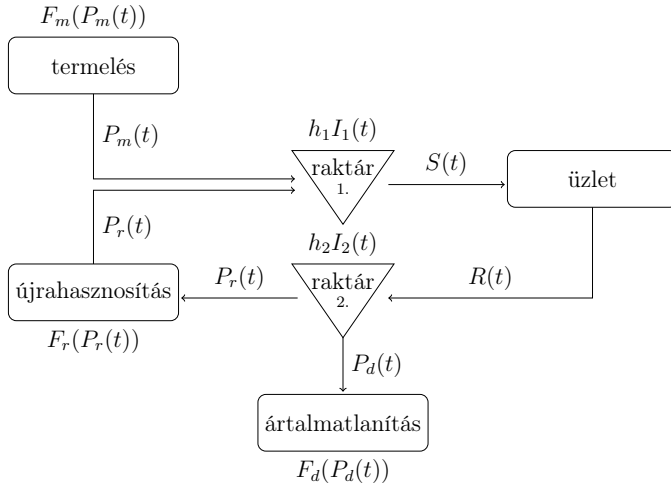
Döntési változók:

- $I_1(t)$: raktárkészlet szintje az első raktárban,
 $I_2(t)$: raktárkészlet szintje a második raktárban,
 $P_r(t)$: újrahasznosítás mértéke,
 $P_m(t)$: termelés (gyártás) mértéke,
 $P_d(t)$: hulladékártalmatlanítás mértéke.

Kezdeti feltételek:

- $I_1(0)$: kezdeti raktárkészlet szintje az első raktárban,
 $I_2(0)$: kezdeti raktárkészlet szintje a második raktárban.

A modell anyag- és költségáramlása az 1. ábrán látható.



1. ábra. A modell anyag- és költségáramlása

Fontos megjegyezni, hogy az újrahasznosítás mértéke azért lehet döntési változó, mert nem minden időpillanatban valósul meg 100%-os újrahasznosítás. Ennek oka, hogy a 2. raktár arra alkalmas, hogy a visszahozott termékeket tárolja, hogy későbbi időpillanatban valósuljon meg az újrahasznosítás (amikor gazdaságilag megéri). Ez többek között akkor fordulhat például elő,

ha az 1. raktár készlettartási költségei magasabbak, mint a 2. raktár esetében, valamint az 1. raktárban van elegendő késztermék. Azonban előfordulhat olyan eset is, hogy a termék egyáltalán nem kerül újrahasznosításra, hanem hulladéklerakóba kerül. Környezetvédelmi szempontból az ilyen eseteket célszerű gazdasági ösztönzők segítségével elkerülni. Azért van tehát szükség arra, hogy mind az újrahasznosítás, mind a lerakás döntési változó legyen, mivel egymástól függetlenül valósul meg a visszahozott termékek tárolása, újrahasznosítása és lerakása (ártalmatlanítása) hulladéklerakóban.

A modell az alábbi alakban írható fel:

$$\int_0^T h_1 I_1(t) + h_2 I_2(t) + F_m(P_m(t)) + F_r(P_r(t)) + F_d(P_d(t)) dt \rightarrow \min, \quad (1)$$

ahol

$$\begin{aligned} \dot{I}_1(t) &= P_m(t) + P_r(t) - S(t), & I_1(0) &= I_{10} \\ \dot{I}_2(t) &= -P_r(t) - P_d(t) + R(t), & I_2(0) &= I_{20} \end{aligned} \quad (2)$$

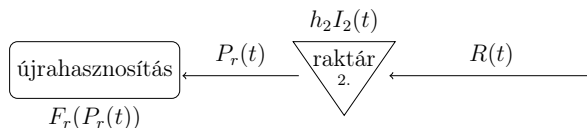
$$\begin{aligned} I_1(t) &\geq 0, \\ I_2(t) &\geq 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} P_m(t) &\geq 0, \\ P_r(t) &\geq 0, \\ P_d(t) &\geq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

A következő fejezetben az Arrow-Karlin-modell egy speciális alakját vizsgáljuk. Az Arrow-Karlin-modell egy termelő egység kibocsátási oldalát veszi figyelembe, és ismert kereslet esetén vizsgálja a termelési mennyiségeket (a termelési stratégiát). Az Arrow-Karlin-modell következő fejezetben vizsgált alakja input-modellként kezelhető: ismert a beszerzési mennyiség, és keresünk egy költségoptimalizált fogyasztási rátát.

3 A „visszutas” Arrow-Karlin modell

Egy módosított Arrow-Karlin modellt fogunk megoldani. Az Arrow-Karlin-modell feltételezése az, hogy a vállalat azért termel (beáramlási (input) változó), hogy egy ismert keresletet (kiáramlási (output) változó) kielégítsen. A visszutas logisztikai rendszerekben a beáramlás (a termékek visszaküldése) ismert, a kiáramlás (újrahasznosítás) pedig döntési változó. A 2. ábra a „visszutas” Arrow-Karlin-modell sematikus folyamatábráját mutatja be.



2. ábra. Anyag- és költségáramlás a „fordított” Arrow-Karlin-modellben

Ha feltételezzük, hogy a készletezési költségek lineárisak, és az újrahasznosítás költségei konvexek, akkor a következő termelési (hulladékártalmatlanítási)-készletezési probléma meghatározható – feltételezve, hogy a h_2 készletezési költség és az $I_2(t)$ készlet szint nemnegatív:

$$\int_0^T h_2 I_2(t) + F_r(P_r(t)) dt \rightarrow \min, \quad (5)$$

ahol

$$\dot{I}_2(t) = -P_r(t) + R(t), \quad I_2(0) = I_{20}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} I_2(t) &\geq 0, \\ P_r(t) &\geq 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Ebben a formájában a probléma az (1)–(4) modell részmodellje, azzal a feltételezéssel, hogy a hulladékártalmatlanítás nem releváns a döntéshozatali folyamatban. Az $R(t)$ visszahozatali mennyiség egy folytonos, kétszer differenciálható függvény.

Ez egy konvex optimális szabályozási probléma, ahol az állapotváltozó a készlet szint, a szabályozó-változó pedig az újrahasznosítás mértéke. A Pontrjagin-féle maximumelv segítségével oldjuk meg a problémát ([6], [17]). Ehhez az alábbi két új változót vezetjük be:

- $\psi(t)$: a Hamilton-függvényben szereplő adjungált változó,
 $\lambda(t)$: az állapotváltozó Lagrange-multiplikátora.

A probléma Hamilton-függvénye a következőképpen írható fel

$$\begin{aligned} H(I_2(t), P_r(t), \psi(t), t) &= \\ &= -h_2 I_2(t) + F_r(P_r(t)) + \psi(t)[-P_r(t) + R(t)]. \end{aligned} \quad (8)$$

A visszutas logisztikai probléma egy olyan optimális szabályozási probléma, amely tisztán állapotváltozói korlátozásokkal rendelkezik. Az optimalitás szükséges és elégséges feltételeinek meghatározásához szükségünk van a Lagrange-függvényre:

$$\begin{aligned} L(I_2(t), P_r(t), \psi(t), \lambda(t), t) &= \\ &= -h_2 I_2(t) + F_r(P_r(t)) + \psi(t)[-P_r(t) + R(t)] + \lambda(t)I_2(t). \end{aligned} \quad (9)$$

A probléma konvexitása miatt az optimalitás szükséges feltételei elégségesek is:

a) $\dot{\psi}(t) = h_2 - \lambda(t),$

b) $\max_{P_r(t) \geq 0} \{-\psi(t)P_r(t) - F_r(P_r(t))\} = -\psi(t)P_r^*(t) - F_r(P_r^*(t)),$ azaz

$$P_r^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } -\psi(t) \leq F_r'(0) \\ [F_r'(t)]^{-1}(-\psi(t)), & \text{ha } -\psi(t) = F_r'(P_r^*(t)) > F_r'(0), \end{cases}$$

c) $\left. \begin{aligned} \lambda(t)I_2^*(t) &= 0 \\ \lambda(t) &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad \forall t \in [0, T],$

$$d) \quad \psi(T)I_2^*(t) = 0, \quad \psi(T) \geq 0,$$

ahol $*$ az optimális döntési változók jelölésére szolgál. A különbség az Arrow-Karlin-modellhez képest az, hogy itt az újrahasznosítás mértéke monoton csökkenő.

Az optimális megoldás vizsgálata kapcsán megemlítjük, hogy a készlet-szintet vizsgálva két esetet különböztethetünk meg: pozitív, illetve nullával egyenlő.

$$1. \text{ eset.} \quad I_2^*(t) > 0, \quad \lambda(t) = 0$$

Ebben az esetben az a) és b) feltételek a következő alakot veszik fel – feltételezve, hogy az újrahasznosítás mértéke pozitív:

$$\dot{\psi}(t) = h_2 \quad (10)$$

$$-\psi(t) = F_r'(P_r^*(t)). \quad (11)$$

A második egyenletet deriválva az alábbi differenciálegyenlet adódik:

$$\dot{P}_r^*(t) = -\frac{h_2}{F_r''(P_r^*(t))}. \quad (12)$$

Az egyenlet jobb oldala negatív, mivel a számláló pozitív és az újrahasznosítás költségfüggvénye konvex. Ennek következtében az újrahasznosítás mértéke a visszatás Arrow-Karlin-modellben monoton csökkenő.

$$2. \text{ eset.} \quad I_2^*(t) = 0, \quad P_r^*(t) = R(t) \quad \lambda(t) \geq 0$$

Ebben az esetben az a) és b) feltételek a következő alakot veszik fel:

$$\dot{\psi}(t) = h_2 - \lambda(t) \quad (13)$$

$$-\psi(t) = F_r'(R(t)). \quad (14)$$

A második egyenletet deriválva az alábbi differenciálegyenlőtlenség adódik:

$$\lambda(t) = F_r''(R(t))\dot{R}(t) + h_2 \geq 0, \quad (15)$$

$$\dot{R}(t) \geq -\frac{h_2}{F_r''(R(t))}. \quad (16)$$

Azokon az intervallumokon, ahol az egyenlőtlenségek teljesülnek, a készlet-szint felveheti a nulla értéket.

Elméletileg előfordulhat, hogy az újrahasznosítás mértéke nulla legyen. Ebben az esetben a készlet-szint pozitív és monoton növekedő lenne. Ez a tervezési horizont végén valósulhat meg. Megmutatjuk, hogy optimális megoldás esetén az újrahasznosítás mértéke mindig pozitív.

1. lemma. Az optimális megoldásnak nincs olyan intervalluma, amelyre $P_r^*(t) = 0$, és a készlet zárószintje nulla: $I_2^*(t) = 0$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy van egy olyan $[t_1, T]$ intervallum, ahol az újrahasznosítás mértéke nulla, és a készlet-szint ismert. A készlet-szint monotonitása miatt érvényes a következő összefüggés: $0 \leq I_2^*(t_1) < I_2^*(t)$. A

készletszint t_1 és T között maximális, ha az újrahazsnosítás mértéke nulla. Ekkor fel tudunk írni egy alacsonyabb költséggel rendelkező újrahazsnosítási politikát:

$$P_r(t) = \begin{cases} P_r^*(t), & \text{ha } t \in [0, t_1) \\ \bar{P}_r = \max_{P_r > 0} \left\{ P_r \mid I_2^*(t_1) - \int_{t_1}^t P_r(\tau) d\tau + \right. \\ \quad \left. + \int_{t_1}^t R(\tau) d\tau \geq 0, t \in [t_1, T] \right\}, & \text{ha } t \in [t_1, T] \end{cases} \quad (17)$$

amely esetén a készletszint az alábbi:

$$I_2(t) = \begin{cases} I_2^*(t), & \text{ha } t \in [0, t_1) \\ I_2^*(t_1) - \bar{P}_r(t - t_1) + \int_{t_1}^t R(\tau) d\tau, & \text{ha } t \in [t_1, T]. \end{cases} \quad (18)$$

Az alábbiakban azt fogjuk belátni, hogy az új készletezési stratégia esetén alacsonyabb költségekhez jutunk. Ezt az optimális és az új, általunk definiált költségek különbségének vizsgálatával tesszük meg:

$$\begin{aligned} & \int_0^T h_2 I_2^*(t) + F_r(P_r^*(t)) dt - \int_0^T h_2 I_2(t) + F_r(P_r(t)) dt = \\ & = \int_{t_1}^T h_2 I_2^*(t) + F_r(0) dt - \int_{t_1}^T h_2 I_2(t) + F_r(\bar{P}_r) dt, \end{aligned} \quad (19)$$

ahol az egyenlet jobb oldalán található kifejezés az $F_r(P_r)$ konvex tulajdonságát felhasználva a következő kifejezéssel alulbecsülhető:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^T h_2 I_2^*(t) + F_r(0) dt - \int_{t_1}^T h_2 I_2(t) + F_r(\bar{P}_r) dt \geq \\ & \geq \int_{t_1}^T h_2 (I_2^*(t) - I_2(t)) + F'_r(\bar{P}_r)(0 - \bar{P}_r) dt. \end{aligned} \quad (20)$$

A (20) egyenletben a készletek különbsége megegyezik a $\bar{P}_r$ újrahazsnosítás „elmaradása” miatti különbözettel:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^T h_2 (I_2^*(t) - I_2(t)) + F'_r(\bar{P}_r)(0 - \bar{P}_r) dt = \\ & = \int_{t_1}^T h_2 \bar{P}_r(t - t_1) dt - F'_r(\bar{P}_r) \bar{P}_r(T - t_1) = \\ & = h_2 \bar{P}_r \frac{T^2 - t_1^2}{2} - h_2 \bar{P}_r t_1(T - t_1) - F'_r(\bar{P}_r) \bar{P}_r(T - t_1) = \\ & = \left(h_2 \frac{T - t_1}{2} - F'_r(\bar{P}_r) \right) \bar{P}_r(T - t_1). \end{aligned} \quad (21)$$

A (20) egyenletben az integrál utolsó tagja felírható az alábbi módon:

$$\int_{t_1}^T F'_r(\bar{P}_r)(0 - \bar{P}_r) dt = F'_r(\bar{P}_r) \int_{t_1}^T (0 - R(t)) - (\bar{P}_r - R(t)) dt, \quad (22)$$

így a (20) egyenlet a következőképpen írható fel

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^T h_2(I_2^*(t) - I_2(t)) + F'_r(\overline{P}_r)(0 - \overline{P}_r) dt = \\ & = \int_{t_1}^T h_2(I_2^*(t) - I_2(t)) dt + F'_r(\overline{P}_r)(I_2^*(T) - I_2(T)) > 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Az utolsó integrál pedig nagyobb, mint nulla, tehát bebizonyítottuk az első állítást, azaz a hulladék-újrahasznosítás mértéke nem lehet nulla egy intervallumon. Ha a végkészlet szintje az optimális megoldásnál nem lenne nulla, akkor mindig található egy jobb (költséghatékonyabb) megoldás, tehát a lemma második tételét is bebizonyítottuk. $\square$

Összefoglalva, a „visszutas” Arrow-Karlin-modell ugyanazokkal a tulajdonságokkal rendelkezik, mint az „egyenes” modell. A különbség az, hogy ebben az esetben az újrahasznosítási ráta mindig pozitív és monoton csökkenő. Az optimális megoldáshoz hasonló, Arrow és Karlin által javasolt [14] előre-menő algoritmus konstruálható.

4 A modell jellemzői

Az (1)–(4) egyenletek megoldása előtt megadjuk a modell néhány jellemzőjét.

2. lemma. *Ha $I_{10} - \int_0^T S(t) dt \geq 0$, akkor a kereslet kielégítéséhez nincs szükség termelésre és újrahasznosításra: $P_m^*(t) = 0$, $P_r^*(t) = 0$, $\forall t \in [0, T]$, és az összes visszaküldött terméket ártalmatlanítjuk (kidobjuk): $I_2^*(T) = 0$.*

Bizonyítás. Ha $I_{10} - \int_0^T S(t) dt \geq 0$, akkor az 1. raktár készletszintje a termeléssel és újrahasznosítással megnő, tehát optimális, ha nem termelünk és nem hasznosítunk újra. Ahhoz, hogy optimális megoldást kapjunk az (1)–(4) problémákra, egy az (5)–(7) problémákhoz hasonló egyenletrendszert kell megoldanunk. Az 1. lemma eredményeit alkalmazva azt az eredményt kapjuk, hogy a második raktárban a záró készlet szint nulla: ez a lemma tétele. $\square$

A 2. lemma úgy értelmezhető, hogy az összes visszavitt termék ártalmatlanításra kerül, ha a kezdeti készlet szint elegendő a kereslet kielégítésére a tervezési horizonton keresztül.

3. lemma. *Ha $I_{10} - \int_0^T S(t) dt < 0$, akkor az 1. és 2. raktárban a záró készlet szint nulla: $I_1^*(T) = 0$, $I_2^*(T) = 0$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a termelés, az újrahasznosítás és a hulladékartalmatlanítás problémája megoldott, és az optimális megoldásnál a készlet szintek nagyobbak nullánál:

$$I_1^*(T) = I_{10} + \int_0^T P_m^*(\tau) + P_r^*(\tau) d\tau - \int_0^T S(\tau) d\tau > 0 \quad (24)$$

$$I_2^*(T) = I_{20} - \int_0^T P_r^*(\tau) + P_d^*(\tau) d\tau + \int_0^T R(\tau) d\tau > 0. \quad (25)$$

Megmutatjuk, hogy ebben az esetben olyan megoldást lehet találni, amelyhez alacsonyabb költségek társulnak. Először az 1-es raktár készlet szintjét vizsgáljuk. Ha a végső készlet szint pozitív, akkor választhatunk egy olyan t_1 időpillanatot, amelyre

$$I_1(t) = I_1^*(t_1) - \int_{t_1}^t S(\tau) d\tau > 0 \quad (26)$$

és

$$I_1(T) = I_1^*(t_1) - \int_{t_1}^T S(\tau) d\tau = 0. \quad (27)$$

Az új stratégia a nemtermelés és a nem-újrahasznosítás a $[t_1, T]$ intervallumon. Ez az új stratégia alacsonyabb készletezési, termelési és újrahasznosítási költségekkel jár.

Vizsgáljuk meg most a 2. raktárt. A $[t_1, T]$ intervallumon készíthetünk egy új selejtezési stratégiát, ahogyan azt az 1. lemmában is megtettük:

$$P_d(t) = \max_{P>0} \left\{ P \mid I_2^*(t_1) - \int_{t_1}^t P(t-t_1) d\tau + \int_{t_1}^t R(\tau) d\tau \geq 0, t \in [t_1, T] \right\} = \overline{P}, \quad (28)$$

és a készlet szintek ehhez a stratégiához

$$I_2(t) = I_2^*(t_1) - \int_{t_1}^t \overline{P}(t-t_1) d\tau + \int_{t_1}^t R(\tau) d\tau, \quad t \in [t_1, T], \quad (29)$$

és

$$I_2(T) = I_2^*(t_1) - \int_{t_1}^T \overline{P}(T-t_1) d\tau + \int_{t_1}^T R(\tau) d\tau = 0. \quad (30)$$

Feltételezzük, hogy ebben az intervallumban nincs újrahasznosítás. A 2. raktár esetében a teljes készletezési és selejtezési költségek alacsonyabbak, amint azt az 1. lemma bizonyítja. Az 1. és a 2. raktár összes költségei alacsonyabbak, így a végső készlet szintek nem lehetnek nagyobbak nullánál. $\square$

A 2. lemma értelmezése szerint a 2. raktárat optimális stratégia esetén ki kell üríteni – vagy újrahasznosítással, vagy hulladékártalmatlanítással.

4. lemma. Ha $I_{10} + I_{20} + \int_0^t [R(\tau) - S(\tau)] d\tau \geq 0, \forall t \in [0, T]$, akkor a kereslet kielégítéséhez nincs szükség termelésre: $P_m^*(t) = 0, \forall t \in [0, T]$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az (1)–(4) probléma optimális megoldása ismert. A termelési mennyiség nulla, ha

$$I_{10} + \int_0^t P_r^*(\tau) d\tau - \int_0^t S(\tau) d\tau \geq 0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (31)$$

Ha a nemnegativitás teljesül (az 1. raktárra vonatkozóan), akkor a készlet szintet növeli a termelés, így az optimális döntés az, hogy nem termelünk.

A második raktár esetében a nemnegativitás feltételezése a következőképpen írható fel

$$I_{20} - \int_0^t P_r^*(\tau) d\tau + \int_0^t R(\tau) d\tau \geq \int_0^t P_d^*(\tau) d\tau, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (32)$$

Ha ezt a két egyenlőtlenséget összegezzük, akkor az alábbi egyenlőtlenség adódik:

$$I_{10} + I_{20} + \int_0^t R(\tau) - S(\tau) d\tau \geq \int_0^t P_d^*(\tau) d\tau \geq 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad (33)$$

és a lemma állítását igazoltuk. $\square$

A lemma eredménye a következő: ha a két raktár induló készletének mennyisége és a visszahozott, újrahasznosítható termékek összege nagyobb, mint a késztermékek iránti kereslet, akkor nincs szükség termelésre. Sőt, még egyszerűbben fogalmazva: nincs szükség új termékek előállítására, mert a késztermékek (1. raktár) induló készlete és a visszahozott, újrahasznosítható elemek elegendőek ahhoz, hogy kielégítsék a keresletet.

$$I_{10} + I_{20} + \int_0^t R(t) dt \geq \int_0^t S(t) dt. \quad (34)$$

Látható, hogy ez az eredmény a 2. lemma függvénye. Ha a 2. lemma feltételei teljesülnek, akkor

$$(I_{10} - \int_0^t S(t) dt) + (I_{20} + \int_0^t R(t) dt) \geq I_{20} + \int_0^t R(t) dt > 0, \quad (35)$$

ami azt mutatja, hogy a 4. lemma következik a 2. lemmából, fordítva viszont nem. Tehát a 2. lemma elégséges feltétele a 4. lemmának, a 4. lemma viszont szükséges feltétele a 2. lemmának.

5. lemma. Ha $I_{10} + I_{20} + \int_0^T R(\tau) - S(\tau) d\tau \leq 0$, akkor a modellben a hulladékártalmatlanítási mennyiség értéke nulla: $P_d^*(t) = 0, \forall t \in [0, T]$.

Bizonyítás. A 3. lemma alapján következik, hogy

$$I_{10} + \int_0^T P_m^*(\tau) d\tau + \int_0^T P_r^*(\tau) d\tau - \int_0^T S(\tau) d\tau = 0 \quad (36)$$

és

$$I_{20} - \int_0^T P_r^*(\tau) d\tau - \int_0^T P_d^*(\tau) d\tau + \int_0^T R(\tau) d\tau = 0. \quad (37)$$

Ha a két egyenlőséget összegezzük, akkor megkapjuk, hogy

$$I_{10} + I_{20} + \int_0^T P_m^*(\tau) d\tau + \int_0^T R(\tau) - S(\tau) d\tau = \int_0^T P_d^*(\tau) d\tau. \quad (38)$$

Ha a bal oldali kifejezés nem nagyobb, mint nulla, akkor a kumulált ártalmatlanított (ártalmatlanított) mennyiség is nulla, így a lemma teljesül. $\square$

A lemma értelmezése szerint az ártalmatlanítási tevékenységre nincs szükség, ha a végtermékek és az újrahasznosított tételek kezdeti készlet szintjeinek és a kumulált visszahozott tételeknek az összege nem nagyobb, mint a tervezési horizont alatt felhalmozott kereslet, azaz

$$I_{10} + I_{20} + \int_0^T R(t) dt \leq \int_0^T S(t) dt. \quad (39)$$

5 A modell megoldása

A feladat megoldására a Pontrjagin-féle maximumelvet alkalmazzuk ([6], [17]). Ehhez az alábbi új változókat vezetjük be:

ψ_1, ψ_2 : az adjungált változók,
 λ_1, λ_2 : az állapotváltozók Lagrange-multiplikátorai.

A probléma Hamilton-függvénye a következőképpen írható fel

$$\begin{aligned} H(I_1(t), I_2(t), P_m(t), P_r(t), P_d(t), \psi_1(t), \psi_2(t), t) = \\ - \left([h_1 \quad h_2] \begin{bmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \end{bmatrix} + F_m(P_m(t)) + F_r(P_r(t)) + F_d(P_d(t)) \right) + \\ + [\psi_1(t) \quad \psi_2(t)] \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_m(t) \\ P_r(t) \\ P_d(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -S(t) \\ R(t) \end{bmatrix} \right). \end{aligned} \quad (40)$$

A visszatás logisztikai probléma egy olyan optimális szabályozási probléma, amely tisztán állapotváltozói korlátozásokkal rendelkezik. Az optimalitás szükséges és elégséges feltételeinek meghatározásához szükségünk van a Lagrange-függvényre:

$$\begin{aligned} L(I_1(t), I_2(t), P_m(t), P_r(t), P_d(t), \psi_1(t), \psi_2(t), t) = \\ - \left([h_1 \quad h_2] \begin{bmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \end{bmatrix} + F_m(P_m(t)) + F_r(P_r(t)) + F_d(P_d(t)) \right) + \\ + [\psi_1(t) \quad \psi_2(t)] \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_m(t) \\ P_r(t) \\ P_d(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -S(t) \\ R(t) \end{bmatrix} \right) + \\ + [\lambda_1(t) \quad \lambda_2(t)] \begin{bmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (41)$$

Az optimalitás feltételei az alábbiak:

1. tétel. Ahhoz, hogy $\{I_1^*(t), I_2^*(t), P_m^*(t), P_r^*(t), P_d^*(t)\}$ optimális megoldása legyen az (1)–(4) problémának, annak szükséges és elégséges feltétele, hogy

létezzenek olyan folytonos $\psi_1(t)$ és $\psi_2(t)$ függvények, amelyekre minden $0 \leq t \leq T$ esetén érvényesek a következők

$$\begin{bmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{bmatrix} \not\equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a)

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \dot{\psi}_1(t) \\ \dot{\psi}_2(t) \end{bmatrix} = \\ &= - \frac{\partial L(I_1^*(t), I_2^*(t), P_m^*(t), P_r^*(t), P_d^*(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), t)}{\partial \begin{bmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \end{bmatrix}} = \\ &= \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} P_m(t) \\ P_r(t) \\ P_d(t) \end{bmatrix} \quad \{H(I_1^*(t), I_2^*(t), P_m(t), P_r(t), P_d(t), \psi_1(t), \psi_2(t), t)\} = \\ &= H(I_1^*(t), I_2^*(t), P_m^*(t), P_r^*(t), P_d^*(t), \psi_1(t), \psi_2(t), t), \end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq P_m(t)} \{ \psi_1(t) P_m(t) - F_m(P_m(t)) \} = \psi_1(t) P_m^*(t) - F_m(P_m^*(t)) \\ & \max_{0 \leq P_r(t)} \{ (\psi_1(t) - \psi_2(t)) P_r(t) - F_r(P_r(t)) \} = \\ &= (\psi_1(t) - \psi_2(t)) P_r^*(t) - F_r(P_r^*(t)) \\ & \max_{0 \leq P_d(t)} \{ -\psi_2(t) P_d(t) - F_d(P_d(t)) \} = -\psi_2(t) P_d^*(t) - F_d(P_d^*(t)), \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} \lambda_1(t) & \lambda_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^*(t) \\ I_2^*(t) \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix} \lambda_1(t) & \lambda_2(t) \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix},$$

(d)

$$\begin{bmatrix} \psi_1(t) & \psi_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^*(t) \\ I_2^*(t) \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix} \psi_1(t) & \psi_2(t) \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A (b) feltételekből egyszerűsíthető az optimális termelési, újrahasznosítási és ártalmatlanítási mennyiség:

$$P_m^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \psi_1(t) \leq F'_m(0) \\ [F'_m]^{-1}(\psi_1(t)), & \text{ha } \psi_1(t) = F'_m(P_m^*(t)) > F'_m(0), \end{cases} \quad (42)$$

$$P_r^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \psi_1(t) - \psi_2(t) \leq F_r'(0) \\ [F_r']^{-1}(\psi_1(t) - \psi_2(t)), & \text{ha } \psi_1(t) - \psi_2(t) = F_r'(P_r^*(t)) > F_r'(0) \end{cases} \quad (43)$$

és

$$P_d^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } -\psi_2(t) \leq F_d'(0) \\ [F_d']^{-1}(-\psi_2(t)), & \text{ha } -\psi_2(t) = F_d'(P_d^*(t)) > F_d'(0). \end{cases} \quad (44)$$

Az optimalitás szükséges és elégséges feltételei lehetővé teszik a kérdés megválaszolását: ha az újrahasznosítás nem szükséges, akkor a 2. lemma feltétele nem érvényesül.

6. lemma. *Az optimális stratégia az újrahasznosítás mellőzése, ha a termelés és az ártalmatlanítás határköltségeinek összege optimális termelési és ártalmatlanítási mennyiség mellett nem nagyobb, mint az újrahasznosítás határköltségeinek összege a nulla értéknél.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az optimális megoldást elérjük. Ekkor

$$\psi_1(t) \leq F_m'(P_m^*(t)) \leq \max_{0 \leq t \leq T} F_m'(P_m^*(t)), \quad (45)$$

és

$$-\psi_2(t) \leq F_d'(P_d^*(t)) \leq \max_{0 \leq t \leq T} F_d'(P_d^*(t)). \quad (46)$$

Ha ezt a két egyenlőtlenséget összeadjuk

$$\psi_1(t) - \psi_2(t) \leq \max_{0 \leq t \leq T} F_m'(P_m^*(t)) + \max_{0 \leq t \leq T} F_d'(P_d^*(t)) \leq F_r'(0), \quad (47)$$

így az állítást bebizonyítottuk. $\square$

A lemma eredményének ellenőrzésének egyszerű módja, ha két független feladatot oldunk meg azzal a feltételezéssel, hogy az újrahasznosítás nulla. A termelésre vonatkozó probléma egy klasszikus Arrow-Karlin modell, az ártalmatlanításra vonatkozó pedig egy a 3. szakaszban bemutatott „visszutas” Arrow-Karlin modell. Ha a költségek összege a maximális termelési és ártalmatlanítási mennyiségnél nem nagyobb, mint az újrafeldolgozás határköltsége a nullánál, akkor elértük a probléma minimális költségű megoldását. Ha nem, akkor alkalmazhatjuk a következőkben bemutatott eredményeket.

6 Az optimális pálya területi lehatárolása

Az optimális pálya megalkotásának első lépésében megadjuk a modell területi lehatárolását.

3. eset. $I_1^*(t) > 0, \quad I_2^*(t) > 0, \quad t \in [t_1, t_2]$

Ebben az esetben a $\lambda_1(t)$ és $\lambda_2(t)$ változók értéke nulla. Az adjungált változók differenciálegyenlet-alakja a következő:

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}_1(t) \\ \dot{\psi}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}. \quad (48)$$

Feltételezzük, hogy a termelési és az ártalmatlanítási mennyiség nagyobb, mint nulla. Ekkor az optimális mennyiségeket a következőképpen kell kiszámítani

$$\begin{bmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_1(t) - \psi_2(t) \\ -\psi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F'_m(P_m^*(t)) \\ F'_r(P_r^*(t)) \\ F'_d(P_d^*(t)) \end{bmatrix}. \quad (49)$$

Ha deriváljuk az egyenleteket, akkor három differenciálegyenletet kapunk, amelyek megadják az optimális megoldásokat a mennyiségekre vonatkozóan.

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}_1(t) \\ \dot{\psi}_1(t) - \dot{\psi}_2(t) \\ -\dot{\psi}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F''_m(P_m^*(t))\dot{P}_m^*(t) \\ F''_r(P_r^*(t))\dot{P}_r^*(t) \\ F''_d(P_d^*(t))\dot{P}_d^*(t) \end{bmatrix}, \quad (50)$$

vagy

$$\dot{P}_m^*(t) = \frac{h_1}{F''_m(P_m^*(t))}, \quad (51a)$$

$$\dot{P}_r^*(t) = \frac{h_1 - h_2}{F''_m(P_r^*(t))}, \quad (51b)$$

$$\dot{P}_d^*(t) = \frac{-h_2}{F''_d(P_d^*(t))}. \quad (51c)$$

A t_1 időpillanat értékeinek (kezdeti értékek) ismeretében a differenciálegyenletek megoldhatók.

4. eset. $I_1^*(t) = 0$, $I_2^*(t) > 0$, $t \in [t_1, t_2]$

A $\lambda_1(t)$ változó nagyobb, mint nulla, és $\lambda_2(t)$ egyenlő nullával. Az adjungált változók a következő differenciálegyenletek megoldásai:

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}_1(t) \\ \dot{\psi}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 - \lambda_1(t) \\ h_2 \end{bmatrix}. \quad (52)$$

A kereslet egyenlő a termelési és az újrahasznosítási mennyiségek összegével. Feltételezve az arányok nemnegativitását, az optimális mennyiségeket a következőképpen számítjuk ki

$$\begin{bmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_1(t) - \psi_2(t) \\ -\psi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F'_m(S(t) - P_r^*(t)) \\ F'_r(P_r^*(t)) \\ F'_d(P_d^*(t)) \end{bmatrix}, \quad (53)$$

ahol

$$S(t) - P_r^*(t) = P_m^*(t). \quad (54)$$

Ha az utolsó egyenletet deriváljuk, két differenciálegyenletet kapunk, amelyek meghatározzák a termelés, az újrahasznosítás és az ártalmatlanítás optimális mennyiségeit.

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}_1(t) \\ \dot{\psi}_1(t) - \dot{\psi}_2(t) \\ -\dot{\psi}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 - \lambda_1(t) \\ h_1 - h_2 - \lambda_1(t) \\ -h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F''_m(S(t) - P_r^*(t))(\dot{S}(t) - \dot{P}_r^*(t)) \\ F''_r(P_r^*(t))\dot{P}_r^*(t) \\ F''_d(P_d^*(t))\dot{P}_d^*(t) \end{bmatrix} \quad (55)$$

vagy

$$\dot{P}_d^*(t) = -\frac{h_2}{F_d''(P_d^*(t))}, \quad (56)$$

és

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &= (h_1 - h_2) - F_r''(P_r^*(t))\dot{P}_r^*(t) = \\ &= h_1 - F_m''(S(t) - P_r^*(t))(\dot{S}(t) - \dot{P}_r^*(t)) \geq 0. \end{aligned} \quad (57)$$

Ez utóbbi kifejezés a következő differenciálegyenlethez vezet az újrahasznosítási mennyiségre vonatkozóan

$$\dot{P}_r^*(t) = \frac{F_m''(S(t) - P_r^*(t))\dot{S}(t) - h_2}{F_m''(S(t) - P_r^*(t)) + F_r''(P_r^*(t))}. \quad (58)$$

A t_1 időpillanat értékeinek (kezdeti értékek) ismeretében a differenciálegyenlet megoldható.

5. eset. $I_1^*(t) > 0$, $I_2^*(t) = 0$, $t \in [t_1, t_2]$

Ebben az esetben a $\lambda_2(t)$ változó nem kisebb nullánál, és $\lambda_1(t)$ egyenlő nullával. Az adjungált változókra vonatkozó differenciálegyenletek az alábbiak:

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}_1(t) \\ \dot{\psi}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 - \lambda_2(t) \end{bmatrix}. \quad (59)$$

A visszahozatali mennyiség megegyezik az újrahasznosítási és az ártalmatlanítási mennyiségek összegével a második raktár esetén. Ha feltételezzük, hogy a termelési, az újrahasznosítási és az ártalmatlanítási mennyiségek nagyobbak nullánál, akkor az optimális mennyiségek a következőképpen számíthatók ki:

$$\begin{bmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_1(t) - \psi_2(t) \\ -\psi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_m'(P_m^*(t)) \\ F_r'(P_r^*(t)) \\ F_d'(R(t) - P_r^*(t)) \end{bmatrix}, \quad (60)$$

ahol

$$P_d^*(t) = R(t) - P_r^*(t). \quad (61)$$

Ha az utolsó egyenleteket deriváljuk, akkor két differenciálegyenletet is kapunk, amelyek meghatározzák a mennyiségeket.

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}_1(t) \\ \dot{\psi}_1(t) - \dot{\psi}_2(t) \\ -\dot{\psi}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_1 - h_2 + \lambda_2(t) \\ -h_2 + \lambda_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_m''(P_m^*(t))\dot{P}_m^*(t) \\ F_r''(P_r^*(t))\dot{P}_r^*(t) \\ F_d''(R(t) - P_r^*(t))(\dot{R}(t) - \dot{P}_r^*(t)) \end{bmatrix} \quad (62)$$

vagy

$$\dot{P}_m^*(t) = \frac{h_1}{F_m''(P_m^*(t))}, \quad (63)$$

és

$$\begin{aligned} \lambda_2(t) &= F_r''(P_r^*(t))\dot{P}_r^*(t) - (h_1 - h_2) = \\ &= F_d''(R(t) - P_r^*(t))(\dot{R}(t) - \dot{P}_r^*(t)) - h_1 \geq 0. \end{aligned} \quad (64)$$

Ez utóbbi kifejezés adja az újrahasznosítási mennyiség következő differenciálegyenletét

$$\dot{P}_r^*(t) = \frac{F_d''(R(t) - P_r^*(t))\dot{R}(t) - h_2}{F_r''(R(t) - P_r^*(t))}. \quad (65)$$

A t_1 időpillanat értékeinek (kezdeti értékek) ismeretében a differenciálegyenlet megoldható.

7 Előrelépő algoritmus az optimális pálya kiszámításához

Mielőtt ismertetnénk az előrelépő algoritmust, ki kell zárunk a speciális eseteket. Ez azt jelenti, hogy ellenőrizni kell a 2., 3., 4., 5. és 6. lemma teljesülését. Ha a kiindulási adatokra bármelyik lemma teljesül, akkor megtaláltuk az optimális megoldást: nincs további teendőnk. Ezért feltételezzük, hogy egyik lemma sem teljesül, így elkezdhetjük az algoritmus leírását.

Az előző fejezetek eredményeit felhasználjuk az előrelépő Arrow-Karlin algoritmushoz. Ez azt jelenti, hogy a visszahozott (használt) termékeket először új termékekké kell alakítani. Az algoritmus megegyezik az Arrow és Karlin [1] kutatásban leírtakkal, csupán itt növekvő függvényt kell használnunk, azaz a visszahozatali függvényt alulról kell közelíteni az újrahasznosítási függvénnyel. Ezután alkalmazhatjuk a klasszikus Arrow-Karlin előrelépő algoritmust az új termékek iránti kereslet kielégítésére. Az algoritmus tehát szakaszonkénti definiálással adható meg.

Az első lépésben egy kezdeti megoldást választunk a raktárak raktározási költségeinek függvényében. Először megoldjuk az (51) differenciálegyenleteket az alábbi kezdeti értékekkel.

$$P_m(0) = P_{m0} \quad (66a)$$

$$P_r(0) = P_{r0} \quad (66b)$$

$$P_d(0) = [F_d']^{-1}(F_r'(P_{r0}) - F_m'(P_{m0})) = P_{d0}. \quad (66c)$$

A P_{d0} kezdeti értékhez felhasználtuk azt a tényt, hogy a problémának két adjungált változója van, és az adjungált változó $\psi_2(0)$ kezdeti értéke kifejezhető a $\psi_1(0)$ és $\psi_2(0) - \psi_1(0)$ értékekkel. Először is úgy választjuk meg az az 1. raktárhoz a P_{m0} és P_{r0} kezdeti értékeket, hogy legyen olyan időpillanat, amelyre az egyenlőség teljesül. Legyen $P_m^*(\tau, 0, P_{m0})$ a termelés optimális megoldása a 0 időpillanattól kezdődően P_{m0} kezdeti értékkel, hasonlóan $P_r^*(\tau, 0, P_{r0})$ és $P_d^*(\tau, 0, P_{r0})$, τ pedig az időváltozó. Ekkor

$$\begin{aligned} I_1(t) &= I_{10} + \int_0^t P_m^*(\tau, 0, P_{m0}) d\tau + \\ &+ \int_0^t P_r^*(\tau, 0, P_{r0}) d\tau - \int_0^t S(\tau) d\tau \geq 0 \end{aligned} \quad \forall t \in [0, T]. \quad (67)$$

Ezután teszteljük a 2. raktár nemnegativitását. Ha a 2. raktár készlet-szintje pozitív,

$$\begin{aligned} I_2(t) &= I_{20} - \int_0^t P_d^*(\tau, 0, P_{d0}) d\tau + \\ &+ \int_0^t R(\tau) - P_r^*(\tau, 0, P_{r0}) d\tau > 0 \end{aligned} \quad \forall t \in [0, T], \quad (68)$$

akkor új kezdeti értéket választunk P_{m0} és P_{r0} számára. Ha létezik olyan időpillanat, amelyre az egyenlőség a 2. raktárban teljesül, akkor folytathatjuk az algoritmust a P_{m0} és P_{r0} kezdeti értékkel.

A kezdeti termelési, újrahasznosítási és ártalmatlanítási mennyiségek meghatározása után nem tudunk különbséget tenni azon esetek között, amelyekben a készlettartási költségek magasabbak. Így a készletszinteket ezekhez a kezdeti értékekhez a következőképpen határozzuk meg:

$$\begin{aligned} I_1(t) &= I_{10} + \int_0^t P_m^*(\tau, 0, P_{m0}) d\tau + \\ &+ \int_0^t P_r^*(\tau, 0, P_{r0}) d\tau - \int_0^t S(\tau) d\tau \geq 0 \\ I_2(t) &= I_{20} - \int_0^t P_r^*(\tau, 0, P_{r0}) d\tau - \\ &- \int_0^t P_d^*(\tau, 0, P_{d0}) d\tau + \int_0^t R(\tau) d\tau \geq 0 \end{aligned} \quad \forall t \in [0, T], \quad (69)$$

ahol a $P_m^*(t, 0, P_{m0})$, $P_r^*(t, 0, P_{r0})$ és $P_d^*(t, 0, P_{d0})$ függvények a differenciálegyenletek megoldásai. A P_{m0} , P_{r0} és P_{d0} kezdeti értékek 0 időpillanatban ismertek. Kiválasztjuk a legkésőbbi t_1 időpillanatot, amelyre az egyik készletszint nulla, de a készletszintek nem negatívak, azaz vagy $I_1(t_1) = 0$, vagy $I_2(t_1) = 0$. Ha ez a kiválasztott időpillanat a T tervezési időszak vége, akkor elértük az optimális megoldást. Ha nem, akkor folytatjuk az algoritmust, és az optimális megoldás a $[0, t_1]$ intervallumra a következő

$$\begin{aligned} P_r^*(t) &= P_r^*(t, 0, P_{r0}) \\ P_m^*(t) &= P_m^*(t, 0, P_{m0}) \\ P_d^*(t) &= P_d^*(t, 0, P_{d0}) \\ I_1^*(t) &= I_{10} + \int_0^t P_m^*(\tau, 0, P_{m0}) d\tau + \\ &+ \int_0^t P_r^*(\tau, 0, P_{r0}) d\tau - \int_0^t S(\tau) d\tau \geq 0 \\ I_2^*(t) &= I_{20} - \int_0^t P_r^*(\tau, 0, P_{r0}) d\tau - \\ &- \int_0^t P_d^*(\tau, 0, P_{d0}) d\tau + \int_0^t R(\tau) d\tau \geq 0 \end{aligned} \quad \forall t \in [0, t_1]. \quad (70)$$

A következő, második lépésben megkeressük a következő legkésőbbi t_2 idő-

pontot a $[t_1, T]$ intervallumon, amelyre az alábbiak egyike teljesül:

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \int_{t_2}^t P_m^*(\tau, t_2, S(t_2) - P_r^*(t_2)) d\tau + \\ &+ \int_{t_2}^t P_r^*(\tau, t_2, P_r^*(t_2)) d\tau - \int_{t_2}^t S(\tau) d\tau \geq 0 \\ I_2(t) &= I_2^*(t_2) - \int_{t_2}^t P_r^*(\tau, t_2, P_r^*(t_2)) d\tau - \\ &- \int_{t_2}^t P_d^*(\tau, t_2, P_d(t_2)) d\tau + \int_{t_2}^t R(\tau) d\tau \geq 0 \end{aligned} \quad \forall t \in [t_2, T], \quad (71)$$

vagy

$$\begin{aligned} I_1(t) &= I_1^*(t_1) + \int_{t_2}^t P_m^*(\tau, t_1, P_m^*(t_1)) d\tau + \\ &+ \int_{t_2}^t P_r^*(\tau, t_2, R(t_2)) d\tau - \int_{t_2}^t S(\tau) d\tau \geq 0 \\ I_2(t) &= - \int_{t_2}^t P_r^*(\tau, t_2, R(t_2)) d\tau - \\ &- \int_{t_2}^t P_d^*(\tau, t_2, R(t_2) - P_r^*(t_2)) d\tau + \int_{t_2}^t R(\tau) d\tau \geq 0 \end{aligned} \quad \forall t \in [t_2, T]. \quad (72)$$

Az optimális megoldás az első esetben a $[t_1, t_2]$ intervallumon van.

$$\begin{aligned} P_r^*(t) &= P_r^*(t, t_1, S(t_1) - P_r^*(t_1)) \\ P_m^*(t) &= S(t) - P_r^*(t) \\ P_d^*(t) &= P_d^*(t, 0, P_{d0}) \\ I_1^*(t) &= 0 \\ I_2^*(t) &= I_2^*(t_1) - \int_{t_1}^t P_r^*(\tau, t_1, S(t_1) - P_r^*(t_1)) d\tau - \\ &- \int_{t_1}^t P_d^*(\tau, 0, P_{d0}) d\tau + \int_{t_1}^t R(\tau) d\tau \geq 0 \end{aligned} \quad \forall t \in [t_1, t_2], \quad (73)$$

ahol a $P_r^*(t, t_1, S(t_1) - P_r^*(t_1))$ függvény az (58) egyenlet megoldása az $S(t_1) - P_r^*(t_1)$ kezdeti értékkel a t_1 időpillanatban, és ebben az esetben

$$\begin{aligned} P_r^*(t) &= P_r^*(t, t_1, R(t) - P_r^*(t_1)) \\ P_d^*(t) &= R(t) - P_r^*(t) \\ P_m^*(t) &= P_m^*(t, 0, P_{m0}) \\ I_1^*(t) &= I_1^*(t_1) + \int_{t_2}^t P_m^*(\tau, 0, P_{m0}) d\tau + \\ &+ \int_{t_2}^t P_r^*(\tau, t_1, R(t) - P_r^*(t_1)) d\tau - \int_{t_2}^t S(\tau) d\tau \\ I_2^*(t) &= 0 \end{aligned} \quad \forall t \in [t_1, t_2], \quad (74)$$

ahol a $P_r^*(t, t_1, R(t_1) - P_r^*(t_1))$ függvény a (65) egyenlet megoldása $R(t_1) - P_r^*(t_1)$ kezdeti értékkel a t_1 időpillanatban.

Mint láthatjuk, az utolsó lépésben ellenőriztük, hogy az egyik készletszint nulla-e. Ha a záró készletszintek nullák, akkor az optimumot elértük. Ha nem, akkor megkeressük a legkésőbbi t_3 időpillanatot, amelynél az egyik készletszint nulla, és megismételjük a második lépést. Ebben az esetben az optimális megoldás a $[t_2, t_3]$ intervallumban van.

$$\begin{aligned}
 P_r^*(t) &= P_r^*(t, t_2, P_r^*(t_2)) \\
 P_m^*(t) &= P_m^*(t, t_2, P_m^*(t_2)) \\
 P_d^*(t) &= P_d^*(t, t_2, P_d^*(t_2)) \\
 I_1^*(t) &= I_1^*(t_2) + \int_{t_2}^t P_m^*(\tau, t_2, P_m^*(t_2)) d\tau + \\
 &+ \int_{t_2}^t P_r^*(\tau, t_2, P_r^*(t_2)) d\tau - \int_{t_2}^t S(\tau) d\tau \geq 0 \\
 I_2^*(t) &= I_2^*(t_2) - \int_{t_2}^t P_r^*(\tau, t_2, P_r^*(t_2)) d\tau - \\
 &- \int_{t_2}^t P_d^*(\tau, t_2, P_d^*(t_2)) d\tau + \int_{t_2}^t R(\tau) d\tau \geq 0
 \end{aligned}
 \quad \forall t \in [t_2, t_3]. \quad (75)$$

Az algoritmus ezen módon történő folytatásával elérhetjük az optimumot.

8 Numerikus példa

Ebben a fejezetben egy numerikus példát mutatunk be a modell megoldására. A különböző anyagműveletek költségeit kvadratikusnak feltételezzük:

$$F_m(P_m(t)) = a_m P_m^2(t), \quad (76)$$

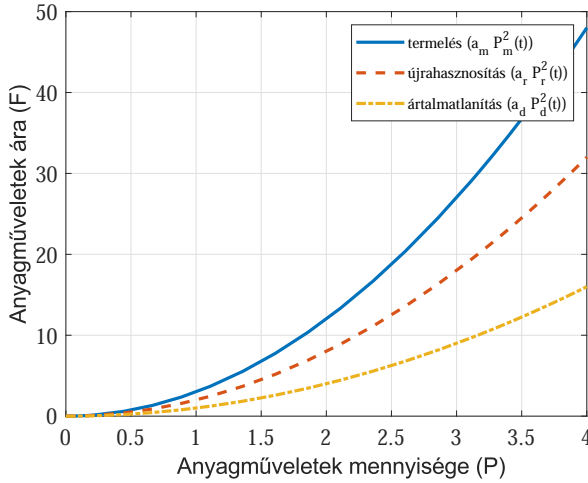
$$F_r(P_r(t)) = a_r P_r^2(t), \quad (77)$$

$$F_d(P_d(t)) = a_d P_d^2(t). \quad (78)$$

A 3. ábra a kvadratikus költségfüggvényeket szemlélteti. Az 1. táblázat a modell specifikációs paramétereit mutatja.

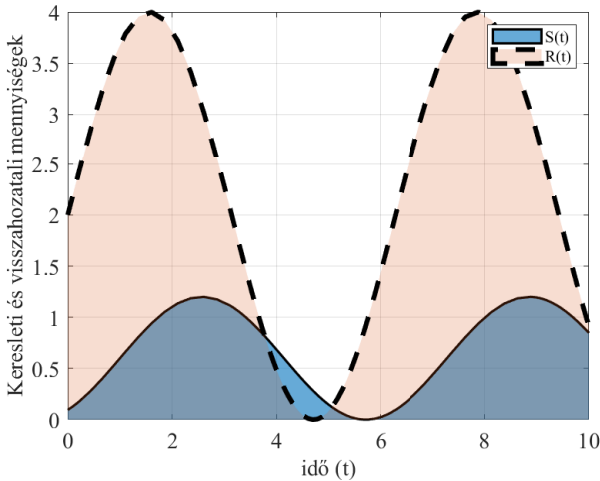
Megnevezés	Jelölés és érték
Kereslet	$S(t) = 2 + 2 \sin(t)$
Visszahozatal	$R(t) = 0.3 \cdot S(t - 1)$
Az 1. raktár készletezési költsége	$h_1 = 0.5$
A 2. raktár készletezési költsége	$h_2 = 0.1$
A termelés költség-együtthatója	$a_m = 3$
Az újrahaznosítás költség-együtthatója	$a_r = 2$
A hulladékártalmatlanítás költség-együtthatója	$a_d = 1$
A raktárak kezdeti (kiindulási) készletszintjei	$I_1(0) = I_2(0) = 1$
Tervezési horizont	$t \in [0, 10]$

1. táblázat. A numerikus példa paramétereit



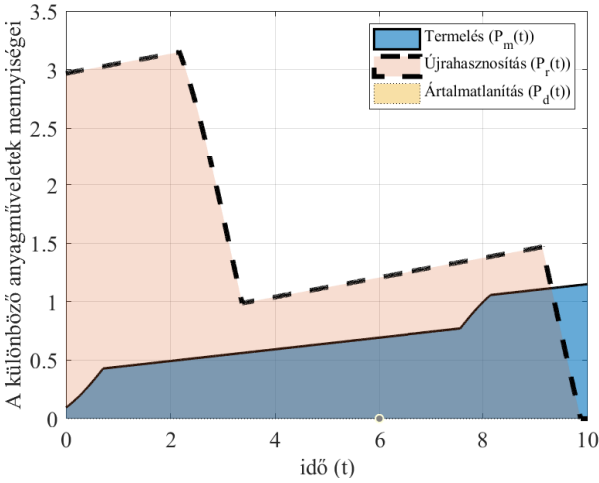
3. ábra. A kvadrátikus költségfüggvények – $F_m(P_m(t))$, $F_r(P_r(t))$, $F_d(P_d(t))$ – a numerikus példa esetében.

A 4. ábra az $S(t)$ keresleti szintet és az $R(t)$ visszahozatali szintet mutatja be a numerikus példa esetében. Megfigyelhető, hogy vannak olyan időszakok, amikor a keresleti szint magasabb, mint a visszahozatal, de van olyan intervallum, amikor a tényleges visszahozatali szint nagyobb, mint a tényleges keresleti szint.



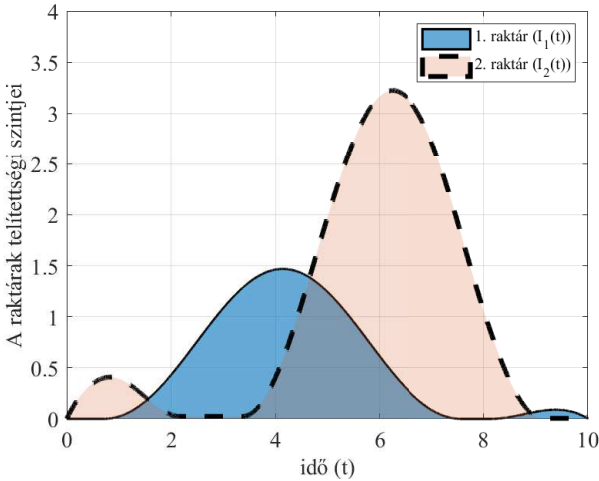
4. ábra. A keresleti szint $S(t)$ és a visszahozatali szint $R(t)$ a numerikus példában

Látható, hogy a hulladékártalmatlanítási mennyiség a teljes tervezési horizont alatt nulla. A 4. és 5. ábrákon látható, hogy a $P_r(t) + P_d(t) \leq R(t)$ korlátozás egyes időszakokban aktív.



5. ábra. A termelési $P_m(t)$, az újrahasznosítási $P_r(t)$ és a hulladék-ártalmatlanítási $P_d(t)$ mennyiségek a numerikus példában

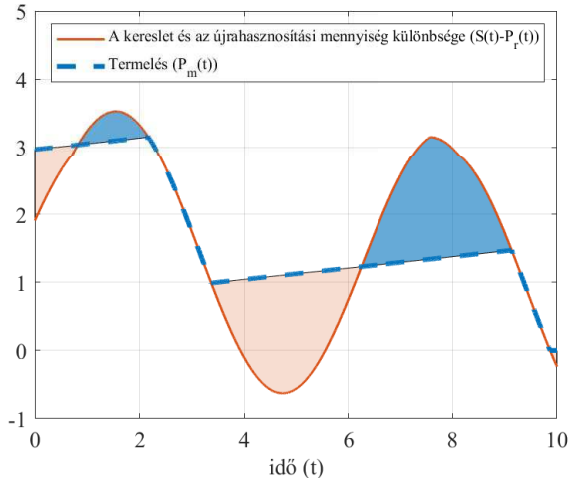
A 6. ábra az $I_1(t)$ és az $I_2(t)$ készlet szinteket mutatja be a numerikus példa esetében. Látható, hogy optimális esetben készletezés csak alacsony kereslet esetén történik. Az idő nagy részében a készletek nulla szinten vannak, és a kereslet kielégítése a termelés növelésével történik.



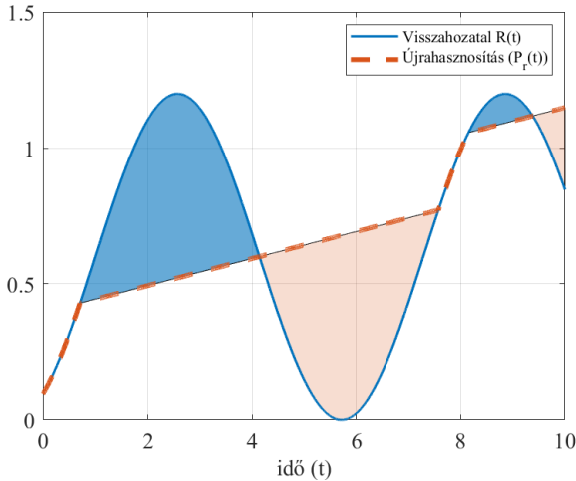
6. ábra. Az $I_1(t)$ és $I_2(t)$ készlet szintek a numerikus példában

A 7. ábra a $P_m(t)$ termelési szintet, valamint az $S(t)$ keresleti szint és a $P_r(t)$ újrahasznosítás közötti különbséget mutatja be a numerikus példa esetében. Azokban az időszakokban, amikor a $P_m(t)$ termelési szint nem egyenlő az $S(t) - P_r(t)$ keresleti és újrahasznosítási szintek különbségével, az első raktár $I_1(t)$ szintje megváltozik. Azokban az esetekben, amikor a $P_m(t)$ termelés nagyobb, mint az $S(t) - P_r(t)$ kereslet és az újrahasznosítás

közötti különbség, az első készlet $I_1(t)$ szintje növekszik (kék színnel jelölve). Azokban az esetekben, amikor a $P_m(t)$ termelés kisebb, mint az $S(t) - P_r(t)$ kereslet és az újrahasznosítás közötti különbség, az első készlet $I_1(t)$ szintje csökken (piros színnel jelölve). A kék és a piros terület minden egyes tárolási intervallum esetében egyenlő.



7. ábra. A $P_m(t)$ termelési mennyiség, valamint az $S(t) - P_r(t)$ különbség a numerikus példa esetében



8. ábra. A $P_r(t)$ újrahasznosítási mennyiség, valamint az $R(t)$ visszahozatali mennyiség a numerikus példa esetében

A 8. ábra a $P_r(t)$ újrahasznosítási szintet és az $R(t)$ visszahozatali szintet mutatja a numerikus példára. Azokban az időszakokban, amikor a $P_r(t)$ újrahasznosítási szint nem egyenlő az $R(t)$ visszahozatali szinttel, a második

raktár $I_2(t)$ szintje megváltozik. Azokban az esetekben, amikor a $P_r(t)$ újrahasznosítás kisebb, mint az $R(t)$ visszahozatali szint, a második raktár $I_2(t)$ szintje növekszik (kék színnel jelölve). Azokban az esetekben, amikor a $P_r(t)$ újrahasznosítás nagyobb, mint az $R(t)$ visszahozatali szint, a második készlet $I_2(t)$ szintje csökken (piros színnel jelölve). A kék és a piros terület minden egyes tárolási intervallum esetében egyenlő.

9 Következtetések

A tanulmány egy korábban publikált visszutas logisztikai modell általánosítását tartalmazza [8], amely kiterjeszti a meglévő megközelítéseket a hulladék-ártalmatlanítási tevékenységek és a visszahozatali folyamat modellezésével. Az új modell figyelembe veszi a visszahozott termékek késleltetését, amelyet a keresleti mennyiség lineáris függvényeként kezel. Az optimális termelési-készletezési politika folytonos függvényként határozható meg, mivel a költségfüggvény minden változójában konvex.

A tanulmány megállapítja, hogy gazdaságilag racionális optimális megoldás érhető el a speciális esetek kizárásával – például, ha a kezdeti készletek nullák. Az eredmények alapján minden visszahozott terméket először ellenőrizni kell, hogy felhasználható-e új termékként. Az újrahasznosításnak mindig prioritást kell élveznie, és az új termékek gyártását csak akkor kell elindítani, ha a meglévő készletek nem elegendőek a kereslet kielégítésére. A hulladékártalmatlanítás kizárólag akkor válik szükségessé, ha a készletek magas szinten vannak, és a termelés elkerülhető.

A modell nemcsak a költségminimalizálás lehetőségeit vizsgálja, hanem közvetetten előrevetíti az állami ösztönzők szerepét is. Például a környezetkárosító folyamatok (termelés, hulladéklerakás) megadóztatása, illetve a környezetbarát tevékenységek (újrahasznosítás) támogatása révén a gazdasági optimum fenntartható irányba tolható el. Az állami szabályozások hatásainak modellezése jelentős lépés lehet a fenntartható logisztikai rendszerek kialakítása felé.

További kutatási lehetőséget jelent a modell kiterjesztése többtermékes rendszerekre, valamint a költségfüggvények általánosításának vizsgálata, amelyek nemcsak konvex, hanem konkáv formát is ölthetnek. Ezáltal a modell még szélesebb körű gyakorlati alkalmazhatóságot nyerhetne, például a RE-pont visszaváltási rendszerhez hasonló ipari rendszerekben.

Köszönetnyilvánítás

A tanulmány a LOGMASTER támogatásával, az Erasmus+ program keretében, különösen a „Szervezetek és intézmények közötti együttműködés” és az „Együttműködési partnerségek a felsőoktatásban” programrészek támogatásával valósult meg. A finanszírozást a 2022-1-RO01-KA220-HED-000088037 számú pályázat biztosította.

Irodalom

1. Arrow, Kenneth J. and Karlin, Samuel (1958). *Production over time with increasing marginal costs*. Studies in the mathematical theory of inventory and production, 1:61.
2. Dobos, Imre (2003). Optimal production-inventory strategies for a HMMS-type reverse logistics system. *International Journal of Production Economics*, 81, 351–360. DOI: 10.1016/S0925-5273(02)00277-3.
3. Dobos, Imre (2005). The effects of emission trading on production and inventories in the Arrow-Karlin model. *International Journal of Production Economics*, 93-94, 301–308. DOI: 10.1016/j.ijpe.2004.06.028.
4. Dobos, Imre (2011). An alternative solution to an economic order quantities for recoverable item inventory systems. *Periodica Polytechnica Social and Management Sciences*, 19(2), 87–96. DOI: 10.3311/pp.so.2011-2.05.
5. Dobos, Imre (2022). Production-inventory strategies for a linear reverse logistics system. *Pure Mathematics and Applications*, 30(3), 120–147. DOI: 10.2478/puma-2022-0030.
6. Feichtinger, Gustav and Hartl, Richard F. (1986). *Optimale Kontrolle ökonomischer Prozesse: Anwendungen des Maximumprinzips in den Wirtschaftswissenschaften*. De Gruyter.
7. Fleischmann, Moritz, Bloemhof-Ruwaard, Jacqueline M, Dekker, Rommert, Van der Laan, Erwin, Van Nunen, Jo AEE, and Van Wassenhove, Luk N. (1997). Quantitative models for reverse logistics: A review. *European Journal of Operational Research*, 103(1), 1–17.
8. Kistner, K. P. and Dobos, I. (2000). Optimal production-inventory strategies for a reverse logistics system. In Dockner, E. J. et al. (eds.) *Optimization, dynamics, and economic analysis*. Physica-Verlag HD. 246–258.
9. Minner, Stefan and Kleber, Rainer (2001). Optimal control of production and remanufacturing in a simple recovery model with linear cost functions. *OR Spektrum*, 23(1), 3–24. DOI: 10.1007/pl00013344.
10. Richter, Knut (1996). The EOQ repair and waste disposal model with variable setup numbers. *European Journal of Operational Research*, 95(2), 313–324.
11. Richter, Knut (1996). The extended EOQ repair and waste disposal model. *International Journal of Production Economics*, 45(1-3), 443–447.
12. Richter, Knut (1997). Pure and mixed strategies for the EOQ repair and waste disposal problem. *OR Spektrum*, 19, 123–129.
13. Richter, Knut and Dobos, Imre (1999). Analysis of the EOQ repair and waste disposal problem with integer setup numbers. *International Journal of Production Economics*, 59(1-3), 463–467.
14. Richter, Knut and Sombrutzki, Mirko (2000). Remanufacturing planning for the reverse Wagner/Whitin models. *European Journal of Operational Research*, 121(2), 304–315.
15. Richter, Knut and Weber, Jens (2001). The reverse Wagner/Whitin model with variable manufacturing and remanufacturing cost. *International Journal of Production Economics*, 71(1-3), 447–456. DOI: 10.1016/S0925-5273(00)00142-0.
16. Schrad, David A. (1967). A deterministic inventory model for reparable items. *Naval Research Logistics Quarterly*, 14(3), 391–398.
17. Seierstad, Atle and Sydsaeter, Knut (1986). *Optimal control theory with economic applications*. Elsevier North-Holland, Inc.

18. Teunter, Ruud H. (2001). Economic ordering quantities for recoverable item inventory systems. *Naval Research Logistics*, 48(6), 484–495. DOI: 10.1002/nav.1030.

DETERMINATION OF THE OPTIMAL STRATEGY OF A CIRCULAR MANUFACTURING-INVENTORY LOGISTICS MODEL WITH CONTINUOUS TIME

The study examines a single-product circular logistics system. The logistics system has two warehouses for new and returning used products. Products in the system can be divided into three categories: new products, reworked products and waste products. In the logistics system, the demand is known, and it is assumed that not all of the reflowing used products are returned, but the rate of reflow is constant and follows the demand with a known time delay. Manufacturing, rework and disposal costs are convex, as well as production costs known in microeconomics. The inventory costs of the two warehouses are linear. The planning time horizon is also given, e.g. one year. Total costs must be minimized in the optimization problem. After specifying the optimality conditions, some properties of the optimal trajectory are presented, and then the optimal solution is illustrated with a numerical example. The research investigates the behaviour of decision variables in optimal solutions, such as the need for production, recycling or waste disposal, and the conditions for the existence of an optimal solution. The model not only explores the possibilities of cost minimisation, but also predicts that public interventions, such as taxing environmentally damaging processes (production, landfilling) or encouraging environmentally friendly processes (recycling), can shift the economic optimum towards a more sustainable direction. The aim of the research is to explore the properties of a model of the waste cycle for these cases. The paper illustrates the functioning of the model through numerical examples and highlights its practical relevance, for example in the REpont recycling scheme.

Keywords: Circular Logistics System, Recycling, Optimal Policy, Optimal Control