

PARAMÉTERBECSLÉS WEIBULL-ELOSZLÁS ESETÉN¹

SZIDAROVSKY FERENC – MOLNÁR MÁRK

Corvinus Egyetem – ELTE GTK

Biztonsági szakemberek a rendszerek, berendezések és gépek karbantartásának és javításainak megfelelő szervezésében a meghibásodások időpontjára általában háromparaméteres Weibull-eloszlást feltételeznek. A paraméterek becslésére a maximum likelihood (ML) módszer tűnik a legalkalmasabb eljárásnak. Gyakorlati esetekben korábbi tapasztalatok alapján egy vagy két paraméter értéke ismert. Így hét különböző eset adódik, ezeket vizsgáljuk meg a módszer alkalmazhatósága szempontjából. A tanulmányt záró táblázatban foglaljuk össze az eredményeket.

1 Bevezetés

Az alkalmazott tudományok területén a valószínűségszámítási és statisztikai módszereknek alapvető szerepük van. Minden modell és módszer bizonyos valószínűségi eloszlásra alapozódik. A legegyszerűbb az exponenciális eloszlás, ahol az eloszlásfüggvény $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ és a sűrűségfüggvény $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ alakú, ahol λ egy pozitív paraméter. A gyakorlati esetek nagy részében a valószínűségi változó egy bizonyos esemény bekövetkeztének időpontját jelenti. Bármely t_0 időpontot is választunk ki, ha az esemény t_0 időpontig nem következett be, akkor a folyamat úgy írható le, mintha a folyamat a t_0 időpontban kezdődött volna. Ez azt jelenti, hogy a folyamat „nem öregszik”. Ez a tulajdonság az oka annak, hogy az exponenciális eloszlást csak nagyon ritkán használjuk a gyakorlatban. Ezért többféle általánosítást is kidolgoztak. Az egyik az, amikor $f(t)$ exponenciális tényezőjét még egy t hatvánnyal is megszorozzuk, így kapjuk a gamma-eloszlás sűrűségfüggvényét:

$$f(t) = \frac{\lambda^p t^{p-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(p)}.$$

Másik lehetőség szerint $F(t)$ második tagjának lineáris kitevőjét tesszük nemlineárisá:

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta}.$$

Ezt az eloszlást Weibull-eloszlásnak nevezzük. Ez az eloszlástípus nagyon sok alkalmazással rendelkezik, néhány közülük:

- túlélés-analízis,

¹Beérkezett 2024. szeptember 2. DOI: <https://doi.org/10.15170/SZIGMA.55.1249>. E-mail: molnar.mark@gtk.elte.hu.

- hibaanalízis,
- megbízhatóságelmélet,
- időjárás-előrejelzés,
- extrémérték-elmélet,
- biztosítási számítások,
- extrém hidrológiai események előrejelzése,
- technológiaváltozások elemzése,
- a makrogazdasági statisztikákban a fizikai tőke folyamatos leltározása,
- meghibásodások előrejelzése és kezelése.

A legutóbbi kérdéskör a megbízhatósági mérnöki gyakorlatban az egyik legfontosabb és leggyakrabban felmerülő probléma.

A műszaki és gazdasági szakemberek számára nagyon fontos, hogy az általuk működtetett rendszerek, berendezések és gépek minél gazdaságosabban működjenek. Ehhez az is szükséges, hogy a karbantartási és javítási munkákat a megfelelő időpontokban és a lehető legjobban végezzék el, valamint a felújításokat és végleges kicseréléseket is a leggazdaságosabb időpontokra tudják tervezni. Mindezek nagyban függenek az esetleges későbbi meghibásodások időpontjaitól és típusaitól, amelyeket nem lehet minden bizonyossággal előre tudni. Viszont ezekre igen gyakran számos korábbi adat áll rendelkezésre, amelyek alapján lehetőség kínálkozik bizonyos kvantitatív kapcsolatok megbecslésére.

A megbízhatósággal foglalkozó szakemberek a valószínűségszámítás módszereire alapozzák ezeket a vizsgálatokat. Ennek a szakterületnek hatalmas irodalma van, például Osaki (2002) tárgyalja a sztochasztikus módszereket, Barlow és Proschan (1996) összefoglalja a szükséges matematikai elméletet. Goodman et al. (2019) a gyakorlatban legtöbbször alkalmazott alapelveket és módszereket mutatja be.

Az egyik legfontosabb feladat a meghibásodások időbeli eloszlásának vizsgálata. A gyakorlatban többféle valószínűségi eloszlást is alkalmaznak, ezek közül a Weibull-eloszlás a legjelentősebb, amelyet egy általánosított exponenciális eloszlásnak tekinthetünk. Jelölje t az első meghibásodás véletlenszerű időpontját, akkor ennek eloszlásfüggvénye

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta} \quad (t \geq \gamma), \quad (1)$$

sűrűségfüggvénye pedig

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta^\beta} (t - \gamma)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta} \quad (t \geq \gamma). \quad (2)$$

A $\beta = 1$, $\gamma = 0$ speciális esetben ez a sűrűségfüggvény exponenciálissá egyszerűsödik. Az (1) és (2) függvények ismeretében meg tudjuk becsülni egy adott

időintervallum alatti meghibásodások számát, ami azért alapvetően fontos, hogy az esetleges javításokhoz szükséges anyagokat, alkatrészeket, munkacélt és egyéb erőforrásokat biztosítani lehessen. Az irodalomban a γ változót eltolásnak, a β változót skálának, az η változót pedig a görbe alakját meghatározó tényezőnek is nevezzük.

A gyakorlatban legtöbbször Weibull-eloszlást választanak, mivel az eloszlás típusát korábbi tapasztalatok alapján így feltételezik. Az eloszlás β , γ és η paramétereinek értékeit korábbi meghibásodások adatai alapján szokták becsülni. Paraméterek becslésére többféle módszer áll rendelkezésre, amelyek közül a maximum likelihood módszer rendelkezik a legjobb statisztikai tulajdonságokkal.

Tegyük fel, hogy korábbi tapasztalatok alapján egy $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_N$ minta áll rendelkezésre, ahol feltételezzük, hogy a mintaelemek nem azonosak. Az optimális paraméterértékeket az

$$f(t_1) \cdot f(t_2) \cdot \dots \cdot f(t_N) \quad (3)$$

szorzat maximalizálásával nyerhetjük. Minthogy $f(t)$ exponenciális tényezőt is tartalmaz, a (3) függvény helyett annak logaritmusát maximalizáljuk, ami az optimális megoldást nem befolyásolja.

Esetünkben a likelihood-függvény alakja

$$\begin{aligned} L(t_1, \dots, t_N) &= \ln \left(\prod_{k=1}^N \frac{\beta}{\eta^\beta} (t_k - \gamma)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t_k - \gamma}{\eta}\right)^\beta} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^N \left(\ln \beta - \beta \ln \eta + (\beta - 1) \ln(t_k - \gamma) - \left(\frac{t_k - \gamma}{\eta}\right)^\beta \right) = \\ &= N \ln \beta - N \beta \ln \eta + (\beta - 1) \ln \left(\prod_{k=1}^N x_k \right) - \sum_{k=1}^N \left(\frac{x_k}{\eta} \right)^\beta, \end{aligned} \quad (4)$$

ahol $x_k = t_k - \gamma$ ($1 \leq k \leq N$). Ez egy háromváltozós függvény optimalizálását igényli, azonban a gyakorlati esetek jelentős részében hisztogramok segítségével egy vagy két paraméter értékére elfogadhatóan jó becslést tudunk kapni. Így a változók száma 2-re vagy 1-re is csökkenhet.

Ebben a dolgozatban a (4) függvény optimalizációjával fogunk foglalkozni különböző feltételek mellett.

2 Egyetlen ismeretlen változó esete

Ezt a szakaszt három részre bontjuk fel attól függően, hogy melyik változó az ismeretlen, feltételezve, hogy a másik kettő értéke ismert.

2.1 Az egyetlen ismeretlen változó: η

Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \eta} &= -\frac{N\beta}{\eta} - \sum_{k=1}^N \beta \left(\frac{x_k}{\eta}\right)^{\beta-1} \left(-\frac{x_k}{\eta^2}\right) = -\frac{N\beta}{\eta} + \frac{\beta}{\eta^{\beta+1}} \sum_{k=1}^N x_k^\beta = \\ &= \frac{\beta N}{\eta^{\beta+1}} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k^\beta - \eta^\beta\right) = \frac{\beta N}{\eta^{\beta+1}} (\eta(\beta)^\beta - \eta^\beta),\end{aligned}\quad (5)$$

ahol $\eta(\beta) = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}$. Ha $\eta < \eta(\beta)$, akkor $\frac{\partial L}{\partial \eta} > 0$, $\eta > \eta(\beta)$ esetén pedig $\frac{\partial L}{\partial \eta} < 0$, így $\eta^* = \eta(\beta)$ adja az optimális értéket.

Természetesen η^* értéke γ -tól is függ, hiszen $x_k = t_k - \gamma$.

2.2 Az egyetlen ismeretlen változó: β

Ebben az esetben

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = \frac{N}{\beta} - N \ln \eta + \ln \left(\prod_{k=1}^N x_k \right) - \sum_{k=1}^N \left(\frac{x_k}{\eta} \right)^\beta \ln \frac{x_k}{\eta} \quad (6)$$

és

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^2} = -\frac{N}{\beta^2} - \sum_{k=1}^N \left(\frac{x_k}{\eta} \right)^\beta \ln^2 \frac{x_k}{\eta} < 0, \quad (7)$$

így L szigorúan konkáv β -ban. Vegyük észre, hogy $\frac{\partial L}{\partial \beta} \rightarrow \infty$ ha $\beta \rightarrow +0$. A $\frac{\partial L}{\partial \beta}$ derivált végtelenben vett határértékének meghatározásában több esetet kell tekintenünk:

(i) legalább egy k esetén $x_k > \eta$. Ekkor $\frac{x_k}{\eta} > 1$, így $\frac{\partial L}{\partial \beta} \rightarrow -\infty$.

(ii) $x_k < \eta$ az összes k esetén. Ekkor $\beta \rightarrow \infty$ esetén

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} \rightarrow -N \ln \eta + \ln \left(\prod_{k=1}^N x_k \right) = \ln \left(\prod_{k=1}^N \frac{x_k}{\eta} \right) < 0.$$

(iii) $x_{k_i} = \eta$ ($i = 1, \dots, p$), és a többi (legalább egy) k esetén $x_k < \eta$. Ekkor

$$\left(\frac{x_{k_i}}{\eta} \right)^\beta \ln \frac{x_{k_i}}{\eta} = 0 \quad \text{és} \quad \left(\frac{x_k}{\eta} \right)^\beta \ln \frac{x_k}{\eta} \rightarrow 0,$$

így $\frac{\partial L}{\partial \beta}$ végtelenben vett határértéke ugyanaz, mint az előző esetben.

Tehát az (i), (ii), (iii) esetben egyértelmű optimális β érték létezik, amit egy monoton egyenlet megoldásával lehet megkapni.

2.3 Az egyetlen ismeretlen változó: γ

Vegyük most észre, hogy

$$L = N \ln \beta - N \beta \ln \eta + (\beta - 1) \sum_{k=1}^N \ln(t_k - \gamma) - \sum_{k=1}^N \left(\frac{t_k - \gamma}{\eta} \right)^\beta, \quad (8)$$

így

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \gamma} &= -(\beta - 1) \sum_{k=1}^N \frac{1}{t_k - \gamma} - \sum_{k=1}^N \beta \left(\frac{t_k - \gamma}{\eta} \right)^{\beta-1} \left(-\frac{1}{\eta} \right) = \\ &= -(\beta - 1) \sum_{k=1}^N \frac{1}{t_k - \gamma} + \frac{\beta}{\eta^\beta} \sum_{k=1}^N (t_k - \gamma)^{\beta-1}, \end{aligned} \quad (9)$$

amiből következik, hogy

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \gamma^2} = -(\beta - 1) \sum_{k=1}^N \frac{1}{(t_k - \gamma)^2} - \frac{\beta}{\eta^\beta} \sum_{k=1}^N (\beta - 1)(t_k - \gamma)^{\beta-2}.$$

Tegyük fel, hogy $\beta < 1$. Ha $\gamma \rightarrow t_1 = \min\{t_k\}$, akkor $L \rightarrow \infty$, így nincs véges optimum.

Ha $\beta = 1$, akkor

$$L = -N \ln \eta - \sum_{k=1}^N \frac{t_k - \gamma}{\eta} = -N \ln \eta - \sum_{k=1}^N \frac{t_k}{\eta} + \frac{N\gamma}{\eta},$$

amely γ legnagyobb megengedhető értékénél optimális: $\gamma^* = t_1 = \min\{t_k\}$.

Amennyiben $\beta > 1$, akkor $\frac{\partial^2 L}{\partial^2 \gamma} < 0$, L szigorúan konkáv γ -ban, és $\frac{\partial L}{\partial \gamma}$ szigorúan csökken. Ha $\gamma = 0$, akkor

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma}(0) = -(\beta - 1) \sum_{k=1}^N \frac{1}{t_k} + \frac{\beta}{\eta^\beta} \sum_{k=1}^N t_k^{\beta-1}.$$

Ha $\gamma \rightarrow t_1 = \min\{t_k\}$, akkor $\frac{\partial L}{\partial \gamma} \rightarrow -\infty$. Ezek alapján látható, hogy $\frac{\partial L}{\partial \gamma}(0) \leq 0$ esetén $\gamma = 0$ az optimális megoldás, ellenkező esetben is egyértelmű az optimális megoldás, amit egy monoton egyenlet megoldásával kaphatunk meg.

3 Két ismeretlen változó esete

Ebben az esetben azt vizsgáljuk meg, hogy működik-e a módszer két ismeretlen mellett.

3.1 Az ismeretlen változó β és η

Az optimális megoldásban rögzített β mellett az optimális η érték (5) alapján $\eta(\beta)$. Ha $\eta = \eta(\beta)$, akkor

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{x_k}{\eta} \right)^\beta = \frac{1}{\eta^\beta} \sum_{k=1}^N x_k^\beta = N \cdot \frac{1}{\eta^\beta} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k^\beta = \frac{N}{\eta^\beta} \eta^\beta = N,$$

így

$$L = N \ln \beta - N \beta \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k^\beta \right) + (\beta - 1) \ln \left(\prod_{k=1}^N x_k \right) - N \quad (10)$$

és

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = \frac{N}{\beta} - N \frac{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k^\beta \ln x_k}{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k^\beta} + \ln \left(\prod_{k=1}^N x_k \right) = N \left(\frac{1}{\beta} - f(\beta) \right), \quad (11)$$

ahol

$$f(\beta) = \frac{\sum_{k=1}^N x_k^\beta \ln x_k}{\sum_{k=1}^N x_k^\beta} - \frac{1}{N} \ln \left(\prod_{k=1}^N x_k \right). \quad (12)$$

Nyilvánvalóan

$$f(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ln x_k - \frac{1}{N} \ln \left(\prod_{k=1}^N x_k \right) = 0.$$

A $\beta \rightarrow \infty$ esetre az $f(\beta)$ határérték a következőképpen adódik. Tegyük fel, hogy a maximális x_N érték K -szor szerepel az x_k értékek között. Ekkor (12) első tagjának végtelenben vett határértéke

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{x_N^\beta \sum_{k=1}^N \left(\frac{x_k}{x_N} \right)^\beta \ln x_k}{x_N^\beta \sum_{k=1}^N \left(\frac{x_k}{x_N} \right)^\beta} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{K x_N^\beta \ln x_N}{K x_N^\beta} = \ln x_N,$$

így

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} f(\beta) = \ln x_N - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ln x_k > 0. \quad (13)$$

Vegyük észre továbbá, hogy

$$\frac{\partial f(\beta)}{\partial \beta} = \frac{\sum_{k=1}^N x_k^\beta (\ln x_k)^2 \sum_{k=1}^N x_k^\beta - \left(\sum_{k=1}^N x_k^\beta \ln x_k \right)^2}{\left(\sum_{k=1}^N x_k^\beta \right)^2}.$$

Könnyen belátható a Cauchy-egyenlőtlenséggel az $a_k = x_k^{\frac{\beta}{2}}$, $b_k = x_k^{\frac{\beta}{2}} \ln x_k$ választással, hogy a számláló pozitív. Így $f(\beta)$ növekszik β -ban. Tekintsük végül az

$$f(\beta) - \frac{1}{\beta} = 0$$

egyenletet. Ha $\beta \rightarrow 0$, akkor a bal oldal $-\infty$ -hez tart, valamint $\beta \rightarrow \infty$ esetén (13) alapján a határérték pozitív. Így az egyértelmű optimális β érték meghatározható egy monoton egyenlet megoldásával, és akkor $\eta = \eta(\beta)$.

3.2 Az ismeretlen változó β és γ

Ebben az esetben nincs véges optimum, mert $\gamma \rightarrow t_1$ és $\beta < 1$ esetén (4) a végtelenbe tart.

3.3 Az ismeretlen változó η és γ

A 2.1 részből tudjuk, hogy adott β és γ mellett az optimális esetben $\eta = \eta(\beta)$, és az L függvényt ismét (10) írja le. Az L függvény akkor maximális, ha

$$\begin{aligned}\bar{L} &= -N \ln \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k^\beta \right) + (\beta - 1) \ln \left(\prod_{k=1}^N x_k \right) = \\ &= -N \ln \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k^\beta \right) + (\beta - 1) \sum_{k=1}^N \ln x_k\end{aligned}\quad (15)$$

maximális. Ekkor $0 \leq \gamma \leq t_1$, és $\bar{L}$ csak γ -tól függ.

Nyilvánvalóan $\beta > 1$ esetén $\bar{L} \rightarrow -\infty$, ha $\gamma \rightarrow t_1$. Így létezik olyan γ_0 , hogy $\gamma_0 < \gamma < t_1$ esetén $\bar{L}(\gamma) \leq \bar{L}(0)$. Minthogy $\bar{L}$ folytonos, rendelkezik optimális megoldással a $[0, \gamma_0]$ intervallumon, amely megkeresésére többféle módszert lehet alkalmazni (Yakowitz és Szidarovszky, 1989).

A $\frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial \gamma^2}$ előjele határozatlan, így semmilyen monotonitás nem igazolható a $\frac{\partial \bar{L}}{\partial \gamma}$ deriváltról. Így az optimális megoldás egyértelműsége sem garantált.

Ha $\beta = 1$, akkor

$$\bar{L} = -N \ln \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \right),$$

amely akkor maximális, ha

$$\sum_{k=1}^N x_k = \sum_{k=1}^N (t_k - \gamma) = \sum_{k=1}^N t_k - N\gamma$$

minimális, vagyis ott, ahol γ maximális, amely $\gamma = t_1$ esetben valósul meg.

Ha $\beta < 1$, akkor $\gamma \rightarrow t_1$ esetén $\ln x_1 \rightarrow -\infty$, így $\bar{L}$ végtelenhez tart, azaz nincs véges optimum.

4 Mindhárom paraméter változó

Ebben az esetben nincs véges optimum, mert $\gamma \rightarrow t_1$ és $\beta < 1$ esetén (4) a végtelenbe tart.

5 Egy alkalmazás

Tegyük fel, hogy egy berendezés meghibásodásai Weibull-eloszlás szerint történnek. Azt is feltételezzük, hogy minden meghibásodás esetén minimális javítás történik, amely visszaállítja a berendezést a meghibásodás előtti állapotba. Ismert (ld. pl. Goodman et al., 2019), hogy a meghibásodások sűrűségfüggvénye

$$\rho(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{\beta}{\eta^\beta} (t - \gamma)^{\beta-1}, \quad (16)$$

és egy (t_1, t_2) időintervallumon bekövetkező meghibásodások várható száma

$$\begin{aligned} M(t_1, t_2) &= \int_{t_1}^{t_2} \rho(\tau) d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\beta}{\eta^\beta} (\tau - \gamma)^{\beta-1} d\tau = \left[\frac{(\tau - \gamma)^\beta}{\eta^\beta} \right]_{t_1}^{t_2} = \\ &= \frac{1}{\eta^\beta} ((t_2 - \gamma)^\beta - (t_1 - \gamma)^\beta). \end{aligned} \quad (17)$$

A $\beta = 1$ esetben exponenciális eloszlást kapunk, amikor

$$M(t_1, t_2) = \frac{1}{\eta} (t_2 - t_1),$$

vagyis a meghibásodások várható száma csak az időintervallum hosszától függ, függetlenül attól, hogy az intervallum a számegyenesen hol helyezkedik el.

Érdekes még a $t_1 = \gamma$ és $t_2 = t$ eset, amikor feltesszük, hogy a γ időpont előtt biztosan nem lesz meghibásodás. Ekkor

$$M(\gamma, t) = \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^\beta,$$

amely növekszik t -ben, csökken γ -ban és η -ban, $t - \gamma < \eta$ esetén csökken β -ban, $t - \gamma > \eta$ esetén pedig növekszik β -ban. A $t - \gamma = \eta$ esetében $M(\gamma, t) = 1$, a β értékétől függetlenül.

6 Következtetések

A cikkben Weibull-eloszlások esetére vizsgáltuk meg a maximum likelihood módszer alkalmazhatóságát. Minthogy az eloszlásfüggvényben három paraméter szerepel általában, viszont gyakorlati esetekben egy vagy két paraméter értéke ismert, az így adódó hét esetben néztük meg az optimális paraméterek megbecslését. Az alábbi táblázat mutatja a vizsgálat eredményeit.

Ismeretlenek	Feltétel	Eredmény
η	mindig	$\eta = \eta(\beta)$
β	mindig	egyértelmű megoldás
γ	$\beta < 1$	nincs véges optimum
	$\beta = 1$	$\gamma = t_1$
	$\beta > 1$	egyértelmű megoldás
β és η	mindig	egyértelmű megoldás
β és γ	mindig	nincs véges optimum
η és γ	$\beta < 1$	nincs véges optimum
	$\beta = 1$	egyértelmű megoldás
	$\beta > 1$	véges optimum
η, β és γ	mindig	nincs véges optimum

1. táblázat. Optimális paraméterek becslése az egyes esetekben

Irodalom

1. Osaki, S. (2002): *Stochastic Methods in Reliability and Maintenance*, Springer, London.
2. Barlow, R., F. Proschan (1996): *Mathematical Theory of Reliability*, Wiley, New York.
3. Goodman D., J. P. Hofmeister, F. Szidarovszky (2019): *Prognostics and Health Management*, Wiley, Hoboken, N. J.
4. Yakowitz S., F. Szidarovszky (1989): *An Introduction to Numerical Computations* (2nd edition), Macmillan, New York.

PARAMETER ESTIMATION FOR THE WEIBULL DISTRIBUTION

In reliability engineering usually three-parameter Weibull distributions are assumed for the occurrences of failures in systems, equipment, and machines. They are used for proper scheduling of maintenance and repairs. The parameters are estimated by applying the maximum likelihood (ML) method. In many practical cases the values of one or two parameters are known from previous observations. So there are seven cases for which the applicability of the method is examined. Our findings are summarised in the concluding table of the paper.