FOLYTONOS DINAMIKUS COURNOT MODELLEK ÉS KITERJESZTÉSÜK[1]

FEUER GÁBOR – SZIDAROVSZKY FERENC – TERRY A. BAHILL
G. Feuer Ges.m.b.H. – Arizonai Egyetem

Realisztikus oligopol modelleket tárgyalunk folytonos időskála mellett. A piaci árfüggvény változását, termékmennyiség növelési költségét, környezetszennyezés csökkentését, valamint a különböző termelők költségkölcsönhatásait is figyelembe vevő modellek aszimptotikus tulajdonságait vizsgáljuk meg. A megfelelő diszkrét modelleket egy korábbi dolgozatban vezettük be és tárgyaltuk (Feuer és Szidarovszky, 2007).

1 Bevezetés

Az oligopol modellek jelentős irodalommal rendelkeznek, és az egyik leggyakrabban tárgyalt témakört jelentik a matematikai közgazdaságtan területén. A legegyszerűbb modell Cournot (1838) munkásságához vezethető vissza, és őt követően kutatók egész sora tanulmányozta az oligopol modellek tulajdonságait.

Kezdetben az egyensúlypont létezése és egyértelműsége volt a központi probléma, majd a modellek különféle változatai kerültek előtérbe. Differenciált termékű, többtermékes, alkalmazott-tulajdonú és piacmegosztási modelleket vezettek be és tanulmányoztak. Ugyanakkor a modellek dinamikus kiterjesztéseit is vizsgálták, ahol az egyensúlypont aszimptotikus stabilitásának feltételeit keresték meg. A korábbi eredmények jó összefoglalását adja a Okuguchi (1976) monográfia, és ezek többtermékes általánosítását, valamint többféle alkalmazását tárgyalja Okuguchi és Szidarovszky (1999) könyve. A dinamikus modellek stabilitási vizsgálata Theocharis (1959) cikkével kezdődött, aki kimutatta, hogy a dinamikus modell lineáris költség és árfüggvények, valamint diszkrét időskála mellett akkor és csak akkor aszimptotikusan stabilis, ha csak két cég versenyez. A nemlineáris eset ennél sokkal bonyolultabb, a legfontosabb eredményeket a Bischi, Chiarella, Kopel és Szidarovszky (2007) monográfia tartalmazza. Nemlineáris esetekben a lokális és globális aszimptotikus stabilitás nem ekvivalens.

A korábbi modellek realitástartalma igen korlátozott volt, mert számos lényeges tényezőt nem vettek figyelembe. A Feuer és Szidarovszky (2009) dolgozat több modell kiterjesztést vezetett be és vizsgált diszkrét időskála mellett. Ezek a modellek figyelembe veszik a piaci árfüggvény időbeni változását, a kapacitásnövelés egyéb költségeit, környezetvédelmi kérdéseket, valamint

[1]Beérkezett: 2008. május 7. E-mail: `szidar@sie.arizona.edu`.

a különböző termelők költségkölcsönhatásait. Jelen dolgozatunkban ugyanezeknek a modelleknek a stabilitását vizsgáljuk meg folytonos időskála mellett. Vizsgálatunk a lokális aszimptotikus stabilitásra vonatkozik, amely nemlineáris esetekben nem garantálja a rendszer globális aszimptotikus stabilitását.

2 A klasszikus Cournot modell

A Cournot modellek legegyszerűbb változatában N termelőt, vagy szolgáltatót feltételezünk, akik azonos terméket termelnek, vagy azonos szolgáltatást ajánlanak ugyanazon a piacon. Ha x_k jelöli a k-adik termelő (vagy szolgáltató) által piacra bocsájtott mennyiséget és L_k a kapacitás korlátját, akkor nyilvánvalóan $0 \le x_k \le L_k$. A teljes piaci kínálat

$$s = \sum_{k=1}^{N} x_k,$$

az árfüggvény $p(s)$, és $c_k(x_k)$ a k-adik termelő vagy szolgáltató költségfüggvénye. Ezek alapján a k-adik termelő (vagy szolgáltató) profitja:

$$\varphi_k(x_1, \dots, x_N) = x_k p(s) - c_k(x_k)\ . \tag{1}$$

Ez a piaci szituáció egy N-személyes játék, ahol a termelők (vagy szolgáltatók) a játékosok, a k-adik játékos stratégiahalmaza a $[0, L_k]$ intervallum és φ_k a kifizetőfüggvénye.

Az $s_k = \sum_{l \neq k}^{N} x_l$ jelöléssel nyilvánvalóan

$$\varphi_k(x_1, \dots, x_N) = x_k p(s_k + x_k) - c_k(x_k)\ , \tag{2}$$

azaz a k-adik játékos kifizető függvénye csak a többi játékos együttes kínálatától függ. A k-adik játékos válaszfüggvényét úgy kapjuk meg, hogy rögzített s_k mellett maximalizáljuk φ_k értékét:

$$R_k(s_k) = \operatorname*{argmax}_{0 \le x_k \le L_k} \{x_k p(s_k + x_k) - c_k(x_k)\}\ . \tag{3}$$

Az oligopol játékok irodalmában általában felteszik, hogy a p és c_k függvények kétszer folytonosan diferrenciálhatók, valamint

(A) $p' < 0;\ c_k' > 0;$

(B) $p' + x_k p'' \le 0;$

(C) $p' - c_k'' < 0;$

minden megengedett $x_1, \dots, x_N$ érték mellett.

A fenti feltételek teljesülése esetén

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k} = p + x_k p' - c_k'$$

és

$$\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_k^2} = 2p' + x_k p'' - c_k'' < 0 \,, \tag{4}$$

így φ_k szigorúan konkáv az x_k változóban. Így $R_k(s_k)$ egyértelmű és a következőképpen kapható meg:

$$R_k(s_k) = \begin{cases} 0, & \text{ha } p(s_k) - c_k'(0) \leq 0; \\ L_k, & \text{ha } L_k p'(s_k + L_k) + p(x_k + L_k) - c_k'(L_k) \geq 0; \\ z_k & \text{egyébként,} \end{cases} \tag{5}$$

ahol z_k a

$$z_k p'(z_k + s_k) + p(z_k + s_k) - c_k'(z_k) = 0 \tag{6}$$

egyenlet egyértelmű megoldása a $(0, L_k)$ intervallumban. Vegyük észre, hogy (6) bal oldala szigorúan csökkenő, $z_k = 0$ esetén pozitív és $z_k = L_k$ esetén negatív. Így az egyértelmű megoldás létezése biztosított. Az implicit függvények tétele alapján R_k is folytonosan differenciálható, és R_k' értéke a (6) egyenletből implicit differenciálással kapható meg:

$$R_k' p' + z_k p''(1 + R_k') + p'(1 + R_k') - c_k'' R_k' = 0$$

amelyből

$$R_k' = -\frac{p' + z_k p''}{2p' + z_k p'' - c_k'} \in (-1, 0] \,. \tag{7}$$

A statikus oligopol-játék egyensúlya olyan $x_1^*, \ldots, x_N^*$ stratégiavektor, amelyre minden k mellett teljesül, hogy

$$0 \leq x_k^* \leq L_k \quad \text{és} \quad x_k^* = R_k\left(\sum_{l \neq k} x_l^*\right) .$$

Nem-egyensúlyi állapotok esetén feltételezzük, hogy a játékosok a válaszfüggvény által biztosított legjobb profit irányába mozdítják el stratégiáikat, amely folytonos időskála feltételezése mellett az

$$x_k'(t) = K_k \left(R_k \left(\sum_{l \neq k} x_l(t) \right) - x_k(t) \right) \tag{8}$$

differenciálegyenlettel írható le, ahol $K_k > 0$ a játékos által választott paraméter. Érdemes megjegyeznünk, hogy a (8) dinamikus rendszer és a statikus N-személyes oligopol-játék egyensúlypontjai egybeesnek. Az irodalomból ismert (lásd Bischi, Chiarella, Kopel és Szidarovszky, 2009), hogy a fenti (A)–(C) feltételek mellett a (8) rendszer egyensúlypontja lokálisan aszimptotikusan stabilis, ami azt jelenti, hogy ha a kezdeti $x_k(0)$ stratégiák elég közel vannak az egyensúlyi stratégiákhoz, akkor $t \to \infty$ esetén a stratégiák az egyensúlyponthoz konvergálnak. A dolgozat további részeiben a modell többféle kiterjesztését és a megfelelő dinamikus rendszerek stabilitását vizsgáljuk meg.

3 Árfüggvények időbeli kölcsönhatása

Piacok telítettségét a korábbi modellek általában nem veszik figyelembe, hasonlóan elhanyagolják a vásárlók ízlésének változását, vásárlási szokások befolyásolását. Mindezek azt eredményezik, hogy az ár a korábbi fogyasztásoktól is függ. Matematikailag feltesszük tehát, hogy a korábbi értékesítések összhatása egy időfüggő Q változóval írható le, amely egy

$$Q'(t) = H\left(\sum_{k=1}^{N} x_k(t), Q(t)\right) \tag{9}$$

dinamikával változik. Például a piac telítődése a speciális

$$Q'(t) = \sum_{k=1}^{N} x_k(t) - \alpha Q(t)$$

egyenlőséggel jellemezhető, ahol az első tag a jelenlegi fogyasztást, a második pedig az utolsó periódusban elhasználódott termékmennyiséget jelenti. Feltettük továbbá, hogy az árfüggvény nemcsak az értékesített termékmennyiségtől, hanem Q aktuális értékétől is függ. Így a k-adik termelő profitja:

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_N, Q) = x_k p(x_k + s_k, Q) - c_k(x_k)\ .$$

Feltesszük most, hogy

(A) $p' < 0$; $c_k' > 0$;

(B) $p' + x_k p_{xx}'' \leq 0$;

(C) $p_x' - c_k'' < 0$;

(D) $p_Q' + x_k p_{xQ}'' \leq 0$

minden megengedett $x_1, \ldots, x_N$ és Q mellett. A k-adik termelő válaszfüggvénye:

$$R_k(s_k, Q) = \begin{cases} 0, & \text{ha } p(s_k, Q) - c_k'(0) \leq 0; \\ L_k, & \text{ha } L_k p_x'(s_k + L_k, Q) + p(s_k + L_k, Q) - c_k'(L_k) \geq 0; \\ z_k & \text{egyébként,} \end{cases} \tag{10}$$

ahol z_k a

$$p(z_k + s_k, Q) + z_k p_x'(z_k + s_k, Q) - c_k'(z_k) = 0 \tag{11}$$

egyenlet egyetlen megoldása a $(0, L_k)$ intervallumban.

Implicit deriválással

$$r_k = \frac{\partial R_k}{\partial s_k} = -\frac{p_x' + x_k p_{xx}''}{2p_x' + x_k p_{xx}'' - c_k''} \in (-1, 0] \tag{12}$$

és

$$\check{r}_k = \frac{\partial R_k}{\partial Q} = -\frac{p'_Q + x_k p''_{xQ}}{2p'_x + x_k p''_{xx} - c''_k} \in (-\infty, 0] \ . \tag{13}$$

Hasonlóan a (8) dinamikához, ebben az esetben az

$$\begin{aligned} x'_k(t) &= K_k \left(R_k \left(\sum_{l \neq k} x_l(t), Q(t) \right) - x_k(t) \right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N) \\ Q'(t) &= H \left(\sum_{k=1}^{N} x_k(t), Q(t) \right) \end{aligned} \tag{14}$$

rendszert kapjuk, ahol $K_k > 0$ egy konstans. A rendszer Jacobi mátrixa a következő:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} -K_1 & K_1 r_1 & \ldots & K_1 r_1 & K_1 \check{r}_1 \\ K_2 r_2 & -K_2 & \ldots & K_2 r_2 & K_2 \check{r}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K_N r_N & K_N r_N & \ldots & -K_N & K_N \check{r}_n \\ h & h & & h & \hat{h} \end{bmatrix} \tag{15}$$

ahol

$$h = \frac{\partial H}{\partial s} \quad \text{és} \quad \hat{h} = \frac{\partial H}{\partial Q} \ .$$

A diszkrét esethez (lásd Feuer és Szidarovszky, 2007) hasonlóan tekintsük a szimmetrikus esetet, amikor $r_1 = \ldots = r_N = r$, $\check{r}_1 = \ldots = \check{r}_N = \check{r}$ és $K_1 = \ldots = K_N = K$. Ekkor (15) sajátértékfeladata a következőképpen egyszerűsödik:

$$-Ku_k + Kr \sum_{l \neq k} u_l + K\check{r}v = \lambda u_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, N) \tag{16}$$

$$h \sum_{k=1}^{N} u_k + \hat{h}v = \lambda v \ . \tag{17}$$

Vezessük be az $U = \sum_{k=1}^{N} u_k$ változót, akkor (16) átírható a

$$KrU + K\check{r}v - (K + Kr + \lambda)u_k = 0 \tag{18}$$

alakba. Tegyük fel először, hogy $\lambda = -K(1 + r)$. A (12) egyenlőtlenség alapján ez az érték negatív, így nem befolyásolja a rendszer aszimptotikus stabilitását. Különben $u_1 = \ldots = u_N = u$ és így

$$\begin{aligned} ((N-1)Kr - K - \lambda)u + K\check{r}v &= 0 \\ Nhu + (\hat{h} - \lambda)v &= 0 \ . \end{aligned} \tag{19}$$

Nemtriviális megoldás akkor és csak akkor létezik, ha

$$\det \begin{bmatrix} (N-1)Kr - K - \lambda & K\check{r} \\ Nh & \hat{h} - \lambda \end{bmatrix} = 0 \ , \tag{20}$$

azaz

$$\lambda^2 - \lambda(\hat{h} + (N-1)Kr - K) + \hat{h}((N-1)Kr - K) - K\check{r}Nh = 0\,. \qquad (21)$$

Tegyük most fel, hogy $h > 0$ és $\hat{h} < 0$ (ami mindenképpen teljesül a piaci telítődés esetén), akkor mind a lineáris együttható és mind a konstans tag pozitív. A rendszer aszimptotikus stabilitása pedig a következő segédtétel egyszerű következménye.

Lemma. *A $\lambda^2 + \lambda p + q = 0$ másodfokú egyenlet (p, q valós együtthatók) gyökeinek valós része akkor és csak akkor negatív, ha p és q pozitív értékű.*

Ez az eredmény azt jelenti, hogy az árfüggvények időbeli kölcsönhatásának figyelembevétele pontosabb modell a stabilitás elvesztése nélkül.

4 Termékmennyiség növelési költségek figyelembevétele

Tegyük most fel, hogy a termelési menyiség növelésének költségét is figyelembe veszik a termelők. A k-adik termelő profitja:

$$x_k p(s_k + x_k) - c_k(x_k) - A_k(x_k, x_k') \qquad (22)$$

ahol az utolsó tag a termékmennyiség növelési többletköltséget jelöli. A válaszfüggvény (5)-höz hasonlóan

$$R_k(s_k, x_k') = \begin{cases} 0, & \text{ha } p(s_k) - c_k'(0) - A_{kx}'(0, x_k') \le 0; \\ L_k, & \text{ha } L_k p'(L_k + s_k) + p(L_k + s_k) - c_k'(L_k) - A_{kx}'(L_x, x_k') \ge 0; \\ z_k & \text{egyébként}, \end{cases} \qquad (23)$$

ahol z_k a

$$z_k p'(z_k + s_k) + p(z_k + s_k) - c_k'(z_k) - A_{kx}'(z_k, x_k') = 0 \qquad (24)$$

egyenlet egyértelmű megoldása. Az egyértelmű megoldás biztosítása érdekében a klasszikus Cournot modell (A), (B) és (C) feltételein kívül azt is feltételeznünk kell, hogy A_k konvex z_k-ban bármely rögzített x_k' mellett. Implicit deriválással,

$$r_k = \frac{\partial R_k}{\partial s_k} = -\frac{p' + x_k p''}{2p' + x_k p'' - c_k'' - A_{kxx}''} \in (-1, 0] \qquad (25)$$

és

$$\check{r}_k = \frac{\partial R_k}{\partial x_k'(t)} = -\frac{A_{kxx'}''}{2p' + x_k p'' - c_k'' - A_{kxx}''} \le 0 \qquad (26)$$

ha a fentieken kívül feltesszük, hogy $A_{kxx'}'' \ge 0$. A dinamikus egyenletek implicitek ebben az esetben:

$$x_k'(t) = K_k \left(R_k \left(\sum_{l \ne k} x_l(t), x_k'(t) \right) - x_k(t) \right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N)\,. \qquad (27)$$

Minthogy a jobboldal csökken $x'_k(t)$-ben, az egyensúlypont környezetében $x'_k(t)$ egyértelmű és egyértelmű függvénye $x_k(t)$-nek és $\sum_{l\neq k} x_l(t)$-nek. Implicit deriválással kaphatjuk meg a Jacobi mátrix elemeit, az eredmény:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} -\frac{K_1}{1-K_1\check{r}_1} & \frac{K_1 r_1}{1-K_1\check{r}_1} & \cdots & \frac{K_1 r_1}{1-K_1\check{r}_1} \\ \frac{K_2 r_2}{1-K_2\check{r}_2} & -\frac{K_2}{1-K_2\check{r}_2} & \cdots & \frac{K_2 r_2}{1-K_2\check{r}_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{K_N r_N}{1-K_N\check{r}_N} & \frac{K_N r_N}{1-K_N\check{r}_N} & \cdots & -\frac{K_N}{1-K_N\check{r}_N} \end{bmatrix}. \tag{28}$$

A szimmetrikus esetben $r_1 = \ldots = r_N = r$, $\check{r}_1 = \ldots = \check{r}_N = \check{r}$ és $K_1 = \ldots = K_N = K$.

A Jacobi mátrix sajátérték-feladata a következő:

$$-\frac{K}{1-K\check{r}} u_k + \frac{Kr}{1-K\check{r}} \sum_{l\neq k} u_l = \lambda u_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, N)\,. \tag{29}$$

Ha ismét bevezetjük az $U = \sum_{k=1}^{N} u_k$ jelölést, akkor ezt a

$$\frac{Kr}{1-K\check{r}} U - \left(\frac{K(1+r)}{1-K\check{r}} + \lambda \right) u_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, N) \tag{30}$$

alakba tudjuk átírni. Ha $\lambda = -\frac{K(1+r)}{1-K\check{r}} < 0$, akkor a sajátérték nem befolyásolja a stabilitást. Ellenkező esetben $u_1 = \ldots = u_N = u$ és (29) alapján akkor

$$\left(\frac{-K + Kr(N-1)}{1-K\check{r}} - \lambda \right) u = 0 \tag{31}$$

azaz

$$\lambda = \frac{-K + Kr(N-1)}{1-K\check{r}} < 0 \tag{32}$$

a sajátérték. Minthogy ez is negatív értékű, a rendszer aszimptotikusan stabilis. Ez az eredmény is azt mutatja, hogy a reálisabb modellel a rendszer aszimptotikus stabilitása nem veszik el.

5 Ipari szennyeződés csökkentésének figyelembe vétele

Ebben a modellben feltesszük, hogy a termelők közös telepen tisztítják az ipari szennyeződést, és a felmerülő költséget a termékmennyiségek arányában osztják el. Ekkor a k-adik termelő profitja:

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_N) = x_k p(x_k + s_k) - c_k(x_k) - x_k \frac{T(x_k + s_k)}{(x_k + s_k)}\,. \tag{33}$$

Ha bevezetjük a

$$P(x_k + s_k) = p(x_k + s_k) - \frac{T(x_k + s_k)}{(x_k + s_k)} \tag{34}$$

jelölést, akkor (33) a klasszikus Cournot modellel írható le, amikor az árfüggvényt P helyettesíti. Feltéve, hogy P is kétszer folytonosan differenciálható, (7) alapján

$$r_k = \frac{\partial R_k}{\partial s_k} = -\frac{P' + x_k P''}{2P' + x_k P'' - c_k''} \ . \tag{35}$$

Ha garantálni tudjuk, hogy $-1 < r \leq 0$, akkor az egyensúlypont aszimptotikusan stabilis marad. Ez biztosan teljesül, ha

$$P' + x_k P'' \leq 0 \qquad \text{és} \qquad P' - c_k'' < 0 \ .$$

Egyszerű differenciálással látható, hogy

$$P' = p' - \frac{T's - T}{s^2} \tag{36}$$

és

$$P'' = p'' - \frac{T''s^2 - 2T's + 2T}{s^3} \ . \tag{37}$$

A rendszer aszimptotikusan stabilis marad, ha p szigorúan csökken és konkáv, c_k konvex minden k esetén, valamint

$$T's - T \geq 0 \tag{38}$$

és

$$T''s^2 - 2T's + 2T \geq 0 \ . \tag{39}$$

A (38) feltétel teljesül, ha a $T(s)/s$ fajlagos költség növekszik és konvex.

6 Költségkölcsönhatások figyelembevétele

A korábbi modellekben feltettük, hogy az egyes termelők költségei egymástól függetlenek. Ez a feltételezés gyakran irreális, hiszen a kutatási eredményeket a konkurens termelők is hasznosíthatják, valamint a közös mukaerő, energia, tőke stb. piac is összekapcsolja a termelők költségtényezőit. Ez az általánosabb feltétel legegyszerűbben úgy modellezhető, hogy egy $c_k(x_k, s_k)$ költségtényezőt feltételezünk. Így a k-adik termelő profitja a következő alakú:

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_N) = x_k p(x_k + s_k) - c_k(x_k, s_k) \ . \tag{40}$$

Egyszerű számolás mutatja, hogy

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k} = p + x_k p' - c_{kx}'$$

és

$$\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_k^2} = 2p' + x_k p'' - c_{kxx}'' < 0 \ .$$

Ha feltesszük, hogy

(A) $p' < 0$; $c'_{kx} > 0$;

(B) $p' + x_k p'' \leq 0$;

(C) $p' - c''_{kxx} < 0$

minden megengedett $x_1, \ldots, x_N$ mellett, akkor φ_k szigorúan konkáv x_k –ban, így a válaszfüggvény egyértelmű. Implicit differenciálás mutatja, hogy

$$r_k = \frac{\partial R_k}{\partial s_k} = -\frac{p' + x_k p'' - c''_{kxs}}{2p' + x_k p'' - c''_{kxx}} . \tag{41}$$

A rendszer aszimptotikusan stabilis, ha $r_k \in (-1, 0]$, amely feltétel biztosan teljesül, ha

$$0 \geq p' + x_k p'' - c''_{kxs} > 2p' + x_k p'' - c''_{kxx} ,$$

amely átírható a következő alakba:

$$c''_{kxx} - p' > c''_{kxs} \geq p' + x_k p'' . \tag{42}$$

Vegyük észre, hogy a baloldal pozitív és a jobboldal nem pozitív. Tehát a rendszer aszimptotikusan stabilis, ha a c''_{kxs} másodrendű vegyes parciális derivált a zérus megfelelő környezetébe esik.

7 Következtetések

Ebben a dolgozatban dinamikus oligopol modelleket vizsgáltunk meg a Cournot klasszikus modellnél reálisabb feltételek mellett. Folytonos időskála mellett kimutattuk, hogy alkalmas feltételek teljesülése esetén a modellek aszimptotikus stabilitása megmarad. A stabilitás azonban elvész időkésleltetések mellett, mint ahogy azt a klasszikus modellre kimutatta Chiarella és Szidarovszky (2001). Az itt bemutatott modellek megfelelő vizsgálata egy további dolgozatunk tárgya lesz.

Irodalom

1. Bischi, G-I., C. Chiarella, M. Kopel, F. Szidarovszky (2009): *Nonlinear Oligopolies: Stability and Bifurcations.* Springer-Verlag, Berlin.
2. Chiarella, C., F. Szidarovszky (2001): The Birth of Limit Cycles in Nonlinear Oligopolies with Continuously Distributed Information Lags, in M. Dror, P. L'Ecyer, F. Szidarovszky (szerk.): *Modelling Uncertainty*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 249–268.
3. Cournot, A. (1838): *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie de Richesses.* Hachette, Paris (Angol fordítás (1960): Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. Kelley, New York.)
4. Feuer G., F. Szidarovszky (2007): Dinamikus Cournot modellek és kiterjesztésük. *Szigma*, 38 (1-2), 1–13.
5. Okuguchi, K. (1976): *Expectations and Stability in Oligopoly Models.* Springer-Verlag, Berlin, New York.

6. Okuguchi, K., F. Szidarovszky (1999): *The Theory of Oligopoly with Multi-Product Firms*. Springer-Verlag, Berlin, New York.
7. Theocharis, R. D. (1959): On the Stability of the Cournot Solution on the Oligopoly Problem. *Review of Econ. Studies*, 27, 133–134.

CONTINUOUS COURNOT MODELS AND THEIR EXTENSIONS

Realistic Cournot Models are examined with continuous time scales. The asymptotic properties of models with intertemporal demand interaction, output adjustment costs, environmental considerations and with cost externalities are investigated. The corresponding discrete models were discussed in our earlier paper (Feuer and Szidarovszky, 2007).