A HITELPORTFÓLIÓK MAXIMÁLIS BEDŐLÉSI VALÓSZÍNŰSÉGÉNEK MEGHATÁROZÁSA II. TÖBBTERMÉKES HITELPORTFÓLIÓK VIZSGÁLATA[1]

VÖRÖS JÓZSEF – KOMLÓSI SÁNDOR
Pécsi Tudományegyetem, Közgazdaságtudományi Kar

Előző, egytípusú hitelterméket vizsgáló tanulmányunkban, amikor egyetlen külső, úgynevezett makró magyarázó változót használtunk, arra jutottunk, hogy becslő, a management képességeit is tükröző függvények kidolgozásával vélhetően közelebb jutunk a valós bedőlési valószínűségek meghatározásához. E tanulmányban abból indulunk ki, hogy gondos elemzés után rendelkezésünkre áll hiteltermékenként a bedőlési arányokat a makróállapotok függvényeként leíró összefüggés. Viszont egy makróállapot másként és másként hathat különböző típusú hiteltermékek bedőlési arányaira, így a keletkező veszteségekre. Adódik ezért annak feladata, hogy elemezzük a lehetséges makróállapotokat annak céljából, hogy szimultán módon határozzuk meg a teljes portfólióra ható kritikus makróállapotokat. Különösen fontos a legrosszabb kimenetre történő felkészülés, hiszen a csőd állapot ily módon kikerülhető lehet. A problémát megfogalmazó modell bonyolultsága szimulációs eljárások alkalmazását helyezi előtérbe, ennek ára viszont, hogy az extrém veszteségek okainak megismerése nehezebbé válik a szimulációs megközelítések ismert hátrányai miatt. E tanulmány az említett három tényező: a szóba jöhető lényeges makrótényezők halmaza meghatározásának, a bedőlési arányok és makróállapotok közötti összefüggés megállapításának, a maximális hitelportfólió veszteséget okozó makróállapotok meghatározásának módszertanába ad betekintést.

Kulcsszavak: hitelveszteségek, makrótényezők, előrejelzés, maximum veszteség, nemkonvex programozás

1 Bevezetés

A témához kapcsolódó előző tanulmányunkban a Vasicek (1987) modell elemzése során arra jutottunk, hogy annak output értékei nagyon élesen reagálnak az inputokban bekövetkező változásokra, vagyis a Vasicek-modell nehezen lenne robusztusnak nevezhető. A gyakorlati tapasztalatokat felhasználva, visszamérést alkalmazva azt találtuk, hogy többféle regressziós megközelítést alkalmazva jobban megismerhető egy hitelezési gyakorlat reagálása a külső tényezőkben bekövetkező változásokra. A mostani, a témához kapcsolódó második tanulmányunkban az előző modellünket két irányban szélesítjük:

[1] Beérkezett 2024. március 19. DOI: https://doi.org/10.15170/SZIGMA.55.1246. E-mail: `voros.jozsef@ktk.pte.hu`, `komlosi.sandor@ktk.pte.hu`.

egyrészt több külső tényező mint magyarázó változó felhasználását tesszük lehetővé, másrészt egy hitelportfóliót tekintünk, melyben több típusú hiteltermék létezhet, és az egyes hitelterméktípusok másként és másként reagálhatnak külső tényezőkre. Előző tanulmányunkban egytípusú hitelterméket tekintettünk, melynek szerkezete homogén, például minden kiadott személyi kölcsön azonos módon függ egy külső tényezőtől.

Abból indulunk ki, hogy egy hitelterméktípus bedőlési valószínűségét jól leíró (lineáris) regressziós függvény rendelkezésünkre áll, melyben véges számú magyarázó változó szerepelhet. Bhat és szerzőtársai (2018) például egy lineáris regressziós függvényt használnak, melyben a magyarázó változók egyike az egy periódusban felmerült hitelezési veszteségek aránya az előző periódusban nyújtott hitelek nagyságához. Más modellek mellett Breuer és szerzőtársai (2012) is használtak egy módosított Vasicek-típusú, többváltozós modellt annak céljából, hogy bemutassák a különbséget a bekövetkezési valószínűség és a legrosszabb esetben bekövetkező veszteség között, adott kockázati szint mellett. A Mahalanobis-távolságot használták, mely a makróváltozók halmazon belüli mozgásának erősségét méri, és e mozgás függvényében határozták meg a maximális veszteséget. Intuitív módon, a több dimenzióban történő mozgás intenzitásának mértéke a Mahalanobis-távolság, mely erős megközelítéssel valami olyat fejez ki, hogy a központtól hány egységnyi szórást tettünk meg a többdimenziós térben (Breuer és társai, 2009). A maximális veszteségek becslésére természetesen más módszerek is léteznek. Chan és Kroese (2010) például t-kopula modelleket használnak a nagy veszteségek bekövetkezési valószínűségének meghatározására. Aszimmetrikus megközelítést alkalmazva a rendkívül ritkán bekövetkező események leírására, feltételes Monte Carlo szimulációs eljárást dolgoztak ki a rendkívül magas veszteségek valószínűségének meghatározására. Bassamboo és szerzőtársai (2008) mintavételi algoritmus segítségével ugyancsak Monte Carlo módszert alkalmaznak a maximális hitelezési veszteségek felderítésére. Véges időhorizontú modelljükben azt is figyelembe vették, amikor az adósok hitelminősítései között nagyon erős az összefüggés.

Míg a Monte Carlo módszerek elengedhetetlen eszközei maradnak a hitelezési veszteségek megállapításának, egyszerűen azért, mert a fennálló matematikai problémára nincs hatékonyabb eljárás, fontosak azon kutatási erőfeszítések is, melyek a veszteségeket okozó tényezőket igyekeznek feltárni. Természetesen hosszan kitartó munka után ezek megvalósíthatók Monte Carlo szimulációs módszerekkel is, mégis az explicit formákkal történő magyarázás előbbre viszi a probléma viselkedésének megértését. Miként majd látni lehet, az egytermékes portfólióra könnyen adunk explicit formát, melyből következően a szimulációra semmi szükség. Több hiteltermék esetén már nem ez a helyzet. Egy közgazdaságilag ártalmatlannak ítélt feltételezés azonban matematikailag fontos áttörést hoz létre az explicit megfogalmazhatóság elérésében, és így a többtermékes hitelportfóliók vizsgálata is könnyebben elvégezhető. Ez a feltételezés azt takarja, hogy portfóliókban nincs olyan hiteltermék, melynek bedőlési valószínűsége 50%-nál magasabb lenne. Amennyiben ez így van, javasolt módszerünk a t-kopulákkal dolgozó szimulációs algoritmusokat is felgyorsíthatja, azonban e tanulmány elsődleges célja nem algoritmusok hatékonyságának tárgyalása, hanem a közgazdasági alkalmazhatóság, és a betekinthetőség növelése. Megjegyezzük még, hogy az összefüggések alapját képező fő tételnek egy másik bizonyítása megtalálható Vörös (2023)-as munkájában.

Az explicit formákra való igény, mely világosabbá teszi a közgazdasági kategóriák tárgyalását, már korábban is felmerült. Garcia-Céspedes és Moreno (2017) modelljükben másod- és harmadrendű Taylor-polinomokat használnak, hogy vizsgálni tudjanak több periódusos veszteség-eloszlásfüggvényeket. Ezt az ötletet mi is fel fogjuk használni abból a célból, hogy gyakorlatilag egy pontos megoldási algoritmussal rendelkezzünk. Ez azért hasznos, mert a javasolt explicit képletekkel dolgozó eljárásunk eredményeit ekkor össze tudjuk hasonlítani a valóban optimális megoldásokkal. A 20-ad fokú Maclaurin-polinomunk még a negyedik tizedesjegy helyén is pontosan közelíti a sztenderd normális eloszlásfüggvényt az általunk használt intervallumban, vagyis megbízható következtetéseink lesznek.

Dolgozatunk szerkezete a bevezetést követve az alábbi lesz: a következő fejezetben fogalmazzuk meg a hitelportfólió veszteségét meghatározó modellt, a harmadik fejezetben pedig kimutatjuk a maximális veszteséget okozó állapotok meghatározásának módját. A negyedik fejezet eljárásokat ajánl hatékony induló megoldások előállításához, és vizsgálja e megoldások közelségét az optimális megoldáshoz. Az ötödik fejezet az előző és e tanulmány következtetéseit fogalmazza meg.

2 Modellalkotás

Előző tanulmányunkban addig jutottunk, hogy a Vasicek (1987) modell megfogalmazásából az következik, hogy

$$PD_x = N\left(\frac{\frac{\ln\frac{D}{B}-(y-0.5s^2)}{s} - \rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) = N\left(\frac{DTD - \rho DFE}{\sqrt{1-\rho^2}}\right), \tag{1}$$

ahol most y a befektetett eszköz egységnyi idő alatti %-os várható értéknövekedése, az értéknövekedés szórása pedig s. Az (1) alatti kifejezésben most x a makróállapotot kifejező, szintén sztenderd normális eloszlású valószínűségi változó ($x \sim N(0,1)$), továbbá ρ a korrelációs együttható a pénzügyi eszköz értéke és a makróállapot között (mint korábban, B a hitel felvételekor tekintett eszközérték, melyből D a hitel nagysága). Az irodalomban nagyon gyakran az (1)-ben szereplő

$$\frac{\ln\frac{D}{B} - (y - 0.5s^2)}{s} \tag{2}$$

kifejezést a *feltétel nélküli bedőléstől mért távolságnak* nevezik, és DTD-vel jelölik (distance to default), míg az x-et a *gazdaságtól való távolságnak* (distance from economy) nevezik, és DFE-vel jelölik. PD_x-szel a bedőlés valószínűségét jelöljük, amikor a bekövetkező makróállapot x. $N^{-1}(PD_x)$ kifejezés ily módon a bedőléstől mért távolságot hivatott kifejezni, feltéve, hogy a makrógazdaság x állapotban van. Erre pedig a DTDE kifejezést használjuk majd.

Az (1) alatti összefüggést a bevezetett, közismert jelölésekkel ezért így is írhatjuk:

$$DTDE = \frac{DTD - \rho DFE}{\sqrt{1-\rho^2}}\,. \tag{3}$$

A Vasicek-modellnek egy fontos vonása az az idea, hogy amennyiben portfóliónk homogén hiteltermékekből áll, és ezek számossága elégségesen magas, akkor a DFE egy adott értékére a portfólión belül a bedőlő hitelek aránya PD_{DFE}-hez fog konvergálni. Ezért a pénzügyi eszközök osztályozása alapvetően fontos eljárás, és erre Doumpos társaival (2002) ajánlanak egy többcélkritériumos többszintű osztályozási eljárást abból a célból, hogy a hitelkérő vállalatokat homogén csoportokba tereljék. Megjegyezzük még, hogy a szélsőséges, közös sokkok problémája fontos szerepet játszik sok modellben, lásd például Bassamboo és társai (2008). Míg a Vasicek (1987) elképzelés szerint az eszközértéket befolyásoló véletlen tényezőt az $\varepsilon = \rho x + \sqrt{1-\rho^2}v$ összefüggés írja le, modelljükben a

$$\varepsilon = \frac{\rho x + \sqrt{1-\rho^2}v}{w}$$

kifejezést használják, ahol w egy nemnegatív valószínűségi változó, mely független v-től és x-től, és sűrűségfüggvénye eleget tesz az $\alpha w^{k-1} + o(w^{k-1})$ előírásnak, amikor $w \downarrow 0$, továbbá $\alpha > 0$, $k > 0$ és konstans értékűek (v az egyéni sajátosságokat kifejező, úgynevezett idioszinkratikus valószínűségi változó, mely szintén sztenderd normális eloszlású valószínűségi változó, $v \sim N(0,1)$).

Életszerű, hogy a gazdasági-pénzügyi életben nem csak egy makróállapotot kell tekinteni, hanem számosat. Az összefüggéseket lineáris modellel számszerűsítik, gyakran az alábbi formában például:

$$\varepsilon = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n + cv,$$

ahol $x_1, \ldots, x_n$ változók fejezik ki a makró jellemzésére kijelölt valószínűségi változókat, melyek mindegyike sztenderd normális eloszlású valószínűségi változó, és kifejezhetnek globális, ország-, vagy iparági specifikumokat, melyek a vállalkozásra hatnak. Változatlanul, v a már említett idioszinkratikus sztenderd normális eloszlású valószínűségi változó, továbbá a $c_1, \ldots, c_n$ paraméterek a terhelési tényezők (Bassamboo és társai 2008).

E lineáris kapcsolatra alapozva, a (3) formulát felhasználva azt tételezzük fel, hogy létezik egy lineáris kapcsolat a feltételes bedőlési távolságok és a makróállapotok között. Ez a forma az alábbi:

$$DTDE = a_0 + \mathbf{a}'\mathbf{x}\,, \tag{4}$$

ahol a_0 egy konstans, $\mathbf{a}$ és $\mathbf{x}$ vektorok, melyek n elemből állnak, a felső vessző pedig sorvektort jelöl, azaz $\mathbf{a}' = [a_1, \ldots, a_n]$ és $\mathbf{x}' = [x_1, \ldots, x_n]$. E regressziós összefüggésben a_i az i-edik makróállapothoz (x_i) tartozó együttható, és természetesen feltételezhetjük, hogy $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.

B	a befektetés kezdeti értéke
D	a befektetéshez felvett hitel nagysága
y	az értéknövekedés várható értéke %-ban kifejezve
s	a %-ban kifejezett értéknövekedés szórása
v	az egyéni sajátosságokat kifejező, idioszinkratikus valószínűségi változó
x	a makróállapotot kifejező valószínűségi változó
n	a makróváltozók száma
ρ	az eszköz/vállalat értéke és a makróállapot közötti korreláció
N, N^{-1}	a sztenderd normális eloszlás eloszlásfüggvénye és annak inverze
DTD	a feltétel nélküli bedőléstől való távolság
DFE	a gazdaságtól való távolság
DFI	a kamatlábtól való távolság
DTDE	feltételes bedőléstől való távolság
δ	Mahalanobis-távolság
Λ	veszteség nagysága portfóliókon vagy egyedi terméken
LGD	bedőlés esetén a veszteség nagysága,
EAD	bedőlés esetén a kitettség mértéke
$a_{0j}, \mathbf{a}_j$	a lineáris regressziós függvény komponensei a j-edik pénzügyi termékre, $\mathbf{a}'_j = (a_{1j}, \ldots, a_{nj})$, ahol n a makróváltozók száma, k a termékek száma a portfólióban, $j = 1, \ldots, k$
$\mathbf{x}$	$\mathbf{x}' = (x_1, \ldots, x_n)$, ahol x_i az i-edik makróállapot, és a makróállapotot n változóval azonosítjuk
$\mathbf{V}, \mathbf{V}^{-1}$	a makróállapotok kovariancia-variancia mátrixa és annak inverze, nemszinguláris
F	a célfüggvény
L, λ	a Lagrange-függvény és a Lagrange-szorzó
u	kiegészítő változó
φ_j	a j-edik pénzügyi termék súlya a portfólióban

1. táblázat. Jelölések összefoglalása

Jelöljük egy adott termék becsült veszteségének mértékét Λ-val, melyet három tényező határoz meg: a bedőlés valószínűsége (PD), veszteség mértéke bedőlés esetén (LGD), a harmadik tényező pedig a kitettség mértéke bedőlés esetén (EAD). Az alábbi kifejezés maximális értékét keressük ekkor:

$$\Lambda = PD \times LGD \times EAD \tag{5}$$

Bár e tanulmány a bedőlések valószínűségével foglalkozik, a másik két tényezőnek is fontos jelentősége van. Somers és Whittaker (2007) kvantilis regressziós eljárást javasol például bedőlési veszteségek meghatározására lakáshitelekkel kapcsolatban, mely bedőléseket egyébként asszimptotikus folyamatnak tekintenek. Találkozhatunk kvantilisek használatával hitelminősítésekkel kapcsolatban is, továbbá Verbraken társaival (2014) profitalapú mértékeket használtak fogyasztói hitelek minősítésére. Figyelmünket a bedőlési valószínűségekre fókuszálva, az irodalomban általános feltevés, hogy az LGD és EAD értékeket adottnak tekintik, és arra törekednek, hogy meghatározzák a bedőlési valószínűségek maximális értékét. Portfóliókra vonatkozóan Gotoh és Takeda (2012) kifejlesztettek egy portfólió optimalizálási modellt, mely a bedőlési valószínűségek alsó és felső korlátait keresi. Ezen alsó és felső korlátokra alapozva feltételes nemkonvex optimalizálási feladatokat hoznak létre, melyekhez algoritmusokat is terveztek.

Egy adott makróállapot esetében (melyet az n-változós $\mathbf{x}$ vektor ír le) a bedőlés valószínűségét (melyet PD_x jelöl) az eloszlásfüggvény $DTDE$ helyen vett értéke határozza meg, és a DTDE értékét (4) adja. Tehát:

$$PD_x = N(DTDE) = N(a_0 + \mathbf{a}'\mathbf{x})\,. \tag{6}$$

Célunk, hogy a lehetséges makróállapotok adott halmazán azonosítsuk be azon makróállapotokat, melyek a maximális bedőlési valószínűségeket adják meg. A lehetséges makróállapotok halmazának meghatározásához a Mahalanobis (rövidítve Maha) távolságot használjuk fel. Mint említettük a bevezetőben, a Mahalanobis-távolság megközelítőleg azt írja le, hogy a központtól (ez a 'gazdaság' átlagos állapota) hány egységnyi szórást tettünk meg a többdimenziós térben. De Maesschalck et al. (2000) alapján, a Mahalanobis-távolság a többdimenziós általánosítása annak, hogy egy pont hány szórásnyira van a várható értéktől. Amennyiben a tengelyek mindegyikét úgy skálázzuk újra, hogy egységnyi szórásuk legyen, akkor a Mahalanobis-távolság a sztenderd euklideszi távolságot jelenti a transzformált térben.

Ekkor az alábbi matematikai programozási feladatot fogalmazhatjuk meg:

$$\max_{x_1,\ldots,x_n} N(a_0 + \mathbf{a}'\mathbf{x})\,, \tag{7a}$$

feltéve, hogy

$$\sqrt{\mathbf{x}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}} \le \delta\,. \tag{7b}$$

(7b)-ben $\mathbf{V}$ a makróváltozók $n \times n$-es kovariancia-variancia mátrixát jelöli. Feltételezzük, hogy e mátrix pozitív definit (mint ismert, e mátrix legalább pozitív szemidefinit), és $\mathbf{V}^{-1}$ e mátrix inverzét jelöli. δ lehetséges értékeit mérlegelve azt kell figyelembe vennünk, hogy a Maha-távolság négyzete, $\mathbf{x}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{x} \le \delta^2$, mely azonos tartalmú (7b)-vel, chi-négyzet eloszlást követ. Például, kettes szabadságfok mellett, egy chi-négyzet eloszlás táblájába nézve (két komponensű normál vektorra) a 13,3, 9,2, 4,6 kvantiliseket kapjuk (következésképpen a δ értéke rendre 3,65, 3,03 és 2,15) a 0,1%, 1% és 10% valószínűségi értékekre (rendjében).

Bár a (7) alatti matematikai programozási feladat megoldása könnyű, célszerű rögzíteni az alábbi tulajdonságot.

1. Tulajdonság. *A bedőlés maximális valószínűsége meghatározott δ Mahalanobis-távolságra az alábbi makróállapot szerint lesz:*

$$\mathbf{x} = \frac{\delta}{\sqrt{\mathbf{a}'\mathbf{V}\mathbf{a}}}\mathbf{V}\mathbf{a}\,,$$

és ez a maximális bedőlési valószínűség (melyet $PD_{\max}$-szal jelölünk), az alábbi kifejezés által adott:

$$PD_{\max} = N(a_0 + \delta\sqrt{\mathbf{a}'\mathbf{V}\mathbf{a}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a_0+\delta\sqrt{\mathbf{a}'\mathbf{V}\mathbf{a}}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

(N a sztenderd normális valószínűségeloszlás eloszlásfüggvénye).

Tekintettel arra, hogy a sztenderd normális eloszlás eloszlásfüggvénye szigorúan növekvő, (7) azonos az alábbi programozási feladattal:

$$\max_{x_1,\ldots,x_n} \left(a_0 + \mathbf{a}'\mathbf{x}\right), \tag{8a}$$

feltéve, hogy

$$\mathbf{x}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{x} = \delta^2 \,. \tag{8b}$$

Bár úgy tűnik, hogy (7b) és (8b) feltételek különböznek, tartalmilag nem. Ugyanis a célfüggvény lineáris, a lehetséges megoldások halmaza pedig konvex. Lineáris függvények maximális értékeiket a konvex halmaz határpontjaiban vehetik fel, vagyis elegendő csupán azon makróállapotok keresése, melyek a feltételi halmaz határpontjain helyezkednek el. (8) alapján a feladathoz kapcsolható Lagrange-függvényt az alábbi módon írhatjuk:

$$L(\mathbf{x},\lambda) = (a_0 + \mathbf{a}'\mathbf{x}) + \lambda(\delta^2 - \mathbf{x}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}) \,, \tag{9}$$

ahol λ a (8) feladathoz tartozó Lagrange-szorzó.

A maximumpont kereséséhez kapcsolódó elsőrendű feltételeket az alábbi feltételrendszer foglalja össze:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a} - 2\lambda\mathbf{V}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{10a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \delta^2 - \mathbf{x}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{x} \geq 0 \tag{10b}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}\lambda = 0, \qquad \lambda \geq 0 \tag{10c}$$

Miként fent indokoltuk, (10b) egyenlőség formájában kell teljesüljön, következésképpen (10c) is rendben van.

Balról szorozzuk meg (10a) mindkét oldalát a $\mathbf{V}$ mátrixszal, és akkor a következőhöz jutunk:

$$\mathbf{V}\mathbf{a} - 2\lambda\mathbf{x} = \mathbf{0} \,. \tag{11}$$

Ennek mindkét oldalát az $\mathbf{a}'$ vektorral szorozva az alábbi eredményhez jutunk:

$$\mathbf{a}'\mathbf{V}\mathbf{a} - 2\lambda\mathbf{a}'\mathbf{x} = \mathbf{0} \,. \tag{12}$$

Most szorozzuk meg az $\mathbf{x}$ vektorral (10a) mindkét oldalát balról, és azt kapjuk, hogy:

$$\mathbf{x}'\mathbf{a} - 2\lambda\mathbf{x}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{x}'\mathbf{a} - 2\lambda\delta^2 = 0 \,,$$

melyből az következik, hogy

$$\mathbf{x}'\mathbf{a} = 2\lambda\delta^2 \,,$$

melyet (12)-ben használva rendelkezésünkre áll λ értéke:

$$\lambda^2 = \frac{1}{4\delta^2}\mathbf{a}'\mathbf{V}\mathbf{a}, \qquad \text{i.e.} \quad \lambda = \pm\frac{1}{2\delta}\sqrt{\mathbf{a}'\mathbf{V}\mathbf{a}} \,. \tag{13}$$

Most, hogy rendelkezésünkre áll a Lagrange-szorzó értéke, meghatározhatjuk a maximális bedőlési valószínűséget adó makróállapotot. (12) egyenletben $\mathbf{a}'\mathbf{V}\mathbf{a} > 0$, mivel $\mathbf{V}$ pozitív definit. Ekkor sem a λ, sem az $\mathbf{a}'\mathbf{x}$ érték nem lehet zérus, így (11)-ből:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2\lambda}\mathbf{V}\mathbf{a}\,. \tag{14}$$

(13)-ban látható eredményt felhasználva a maximum, illetve minimum értékeket az alábbi kifejezés adja meg:

$$\mathbf{x} = \pm\frac{\delta}{\sqrt{\mathbf{a}'\mathbf{V}\mathbf{a}}}\mathbf{V}\mathbf{a}\,, \tag{15}$$

továbbá (15)-ből nyerjük, hogy:

$$\mathbf{a}'\mathbf{x} = \pm\frac{\delta}{\sqrt{\mathbf{a}'\mathbf{V}\mathbf{a}}}\mathbf{a}'\mathbf{V}\mathbf{a} = \pm\delta\,\sqrt{\mathbf{a}'\mathbf{V}\mathbf{a}}\,.$$

A negatív λ értéktől eltekinthetünk, mivel maximális értéket keresünk, melyet egyébként az alábbi kifejezés ad meg:

$$DTDE = a_0 + \delta\sqrt{\mathbf{a}'\mathbf{V}\mathbf{a}}\,. \tag{16}$$

Ezen fontos kifejezés pedig elvezet bennünket a maximális bedőlési valószínűség (illetve veszteség) meghatározásához. (6)-ra alapozva:

$$PD_{\max} = N(a_0 + \delta\sqrt{\mathbf{a}'\mathbf{V}\mathbf{a}})\,. \tag{17}$$

Példa. *Tekintsünk egy esetet, amikor két makróváltozónk van, és*

$$DTDE = -1.815 + 0.177x_1 - 0.0084x_2\,,$$

továbbá a kovariancia/variancia mátrix az alábbi:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & -0.95 \\ -0.95 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Megemlítjük, hogy ezen adatok egy bank fogyasztási hiteleivel kapcsolatosak, és egy valós eset, melyet az A Függelék ír le.) A DTDE értékeket leíró regressziós függvény magyarázó változói (a makróállapotok) a kamatláb és a GDP növekedése (rendre). A determinációs együttható 92%-os. Igy x_1 a kamatlábat, míg x_2 a GDP növekedését azonosítja (ezek a DFI és a DFE értékek, lásd A Függelék). Tekintsük a Maha 3 távolságot, azaz $\delta = 3$. A kovariancia/korrelációs együttható értéke a két változóra -0.95. Következésképp inputjaink: $a_0 = -1.815$, $\mathbf{a}' = [0.177, -0.0084]$, $\delta = 3$, és $\mathbf{V}$ fentebb adott. Felhasználva ezen inputokat, sorban kalkuláljuk a szükséges kifejezéseket: $\mathbf{V}\mathbf{a} = [0.185, -0.176]'$ és $\mathbf{a}'\mathbf{V}\mathbf{a} = 0.0342$. Ekkor $\lambda^2 = 0.0342/36$, így $\lambda = \pm 0.031$. (15)-re alapozva, a makróállapotok, melyek a maximális bedőlési valószínűséget/veszteséget adják, az alábbiak lesznek: $x_1 = 3$ és $x_2 = -2.85$. Ekkor meghatározhatjuk DTDE-t (16)-ból:

$$DTDE = a_0 + \delta\sqrt{\mathbf{a}'\mathbf{V}\mathbf{a}} = -1.815 + 3\sqrt{0.0342} = -1.26.$$

Így a (17) kifejezést használva, a maximális bedőlési valószínűség/veszteség: $PD_{\max} = N(-1.26) = 10.5\%$*. Egy még szigorúbb esetre, amikor a kvantilis 13.3, így* $\delta = 3.65$*, azt kapjuk, hogy* $DTDE = -1.815 + 3.65\sqrt{0.0342} = -1.14$*, melyre* $PD_{\max} = N(-1.14) = 12.5\%$*.*

3 A maximális veszteség jellemzése portfóliók esetén

A probléma megoldása jelentősebb erőfeszítéseket igényel, melynek oka, hogy egy adott makróállapot különbözőképpen hathat az egyes pénzügyi eszközökre. Ugyanaz a makróállapot egyik termékre kedvezőtlen, másra esetleg kedvező hatással bír. E fejezet célja néhány új tulajdonság feltárása, melyek elősegíthetik ismert eljárások hatékonyságának növelését.

Tételezzük fel, hogy most k különböző pénzügyi termékünk van a portfólióban. (5) módosítására van ekkor szükség. A j-edik típusú termékre ekkor a $PD_j \times LGD_j \times EAD_j$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ kifejezésünk van, és a teljes portfólió-állományunkra a teljes veszteség ekkor az alábbi lesz:

$$\Lambda = \sum_{j=1}^{k} PD_j \times LGD_j \times EAD_j\,. \tag{18}$$

Tekintettel arra, hogy az $LGD_j \times EAD_j$ értékek ismeretét adottnak tételezzük fel valamennyi termék esetén, (18)-ban a maximális veszteség csak az egyes termékek bedőlési valószínűségeitől függnek, melyek viszont termékenként más és más értéket vehetnek fel azonos makróállapot esetén. Legyen $\varphi_j = LGD_j \times EAD_j$, és itt az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy $\sum_{j=1}^{m} \varphi_j = 1$, és $0 < \varphi_j < 1$ valamennyi termék esetében. A $\varphi_j = 1$ esetre az előző fejezet megadja a válaszokat.

Hasonlóan (7)-hez, a maximális veszteség problémája portfóliók esetén az alábbi módon fogalmazható meg:

$$\max_{x_1,\ldots,x_n} F(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^{k} \varphi_j N(a_{0j} + \mathbf{a}_j'\mathbf{x}) \tag{19a}$$

feltéve, hogy

$$\sqrt{\mathbf{x}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}} \le \delta\,. \tag{19b}$$

Itt az $(a_{0j} + \mathbf{a}_j'\mathbf{x})$ kifejezés a DTDE értéket határozza meg a portfólióban levő, egy adott j termékre, melyre használni fogjuk a $DTDE_j$ jelölést. (19b) helyett most a vele azonos tartalmú $\mathbf{x}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{x} \le \delta^2$ feltételt használjuk. Így (19)-hez az alábbi Lagrange-függvényt csatolhatjuk:

$$L(x, \lambda) = F(\mathbf{x}) + \lambda(\delta^2 - \mathbf{x}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{x})\,. \tag{20}$$

Az L stacionárius pontjának meghatározásához Sydsaeter és Hammond (1995) nyomán írjuk fel a Kuhn-Tucker feltételeket:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^{k} \varphi_j a_{ji} e^{-\frac{(a_{0j} \;\; + \mathbf{a}_j' \mathbf{x})^2}{2}} - 2\lambda \mathbf{v}_i^{-1\prime} \mathbf{x} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{21a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \delta^2 - \mathbf{x}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{x} \geq 0\,, \tag{21b}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} \lambda = 0, \qquad \lambda \geq 0\,. \tag{21c}$$

ahol $\mathbf{v}_i^{-1\prime}$ a $\mathbf{V^{-1}}$ mátrix i-edik sora, a_{ji} az $\mathbf{a}_j$ vektor i-edik komponense, melyek egyébként szerepet játszanak a $DTDE_j$ értékek meghatározásában.

Elsőként jegyezzük meg, hogy a (19b) által definiált lehetséges megoldások halmaza egy zárt konvex halmaz, továbbá a célfüggvény folytonos, ezért (19)-nek lesz megoldása, így (21)-nek is. Jelöljön $\mathbf{x}^0$ egy stacionárius pontot, vagyis a (21)-nek egy megoldását.

2. Tulajdonság. *Egy belső stacionárius* $\mathbf{x}^0$ *pont nem lehet optimális megoldás, amikor legalább egy i-re a*

$$\sum_{j=1}^{k} \varphi_j a_{ji}^2 (a_{0j} + \mathbf{a}_j' \mathbf{x}^0) e^{-\frac{(a_{0j} + \mathbf{a}_j' \mathbf{x}^0)^2}{2}}$$

kifejezés negatív.

Bizonyítás. Egy belső stacionárius pontra a Lagrange-szorzó zérus, vagyis $\lambda = 0$. Azonban amikor $\lambda = 0$, a (21a) x_i szerinti deriváltját véve azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^{k} -\varphi_j {a_{ji}}^2 (a_{0j} + \mathbf{a}_j' \mathbf{x}) e^{-\frac{(a_{0j} + \mathbf{a}_j' \mathbf{x})^2}{2}}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{22}$$

Ha $\mathbf{x}^0$ egy belső maximumpont lenne, F elérné feltétel nélküli lokális maximumát ezen $\mathbf{x}^0$ pontban. Azonban F Hesse mátrixának negatív szemidefinitnek kell lenni a belső lokális maximumpontban. A 2. Propozíció feltétele szerint azonban e feltétel sérül (Sydsaeter and Hammond, 1995).

3. Tulajdonság. *Amikor a portfólió valamennyi termékére igaz, hogy a bedőlés valószínűsége 50% alatt van adott Mahalanobis-távolság esetén, feltéve, hogy létezik ilyen makróállapot, a maximális veszteséget okozó makróállapot a Maha-távolság határpontjában van.*

Bizonyítás. Amikor a j-edik pénzügyi eszköz bedőlésének valószínűsége 50% alatti, akkor $a_{0j} \;\; + \mathbf{a}_j' \mathbf{x} < 0$. Tekintsük ekkor az alábbi nyílt félteret:

$$S_j = \{ \mathbf{x} \mid a_{0j} + \mathbf{a}_j' \mathbf{x} < 0 \}\,.$$

Az $N(t)$ függvény (a sztenderd normális eloszlás eloszlásfüggvénye) növekvő és konvex a $t \leq 0$ féltéren. Ismert, hogy egy $t = a_{0j} + \mathbf{a}'_j\mathbf{x}$ lineáris transzformációra az N függvény ugyanúgy konvex marad (Sydsaeter and Hammond, 1995). Vagyis, az

$$f_j(\mathbf{x}) = N(a_{0j} + \mathbf{a}'_j\mathbf{x})$$

függvény konvex lesz az S_j halmaz felett. Vegyük most e halmazok közös részét, melyet jelöljünk $\mathbf{S}$-sel, és feltevésünk értelmében nem üres. Vagyis

$$\mathbf{S} = \cap_{j=1}^{k}\mathbf{S}_j\,.$$

Az $\mathbf{S}$ halmazon valamennyi $f_j(\mathbf{x})$ függvény konvex. A (19)-ben definiált célfüggvény, az $F(\mathbf{x})$, az $f_j(\mathbf{x})$ függvények összege. Konvex függvények összege is konvex, viszont konvex függvények a maximumukat határpontban veszik fel. A (19b) feltétel tehát egyenlőség formájában kell teljesüljön a maximumpontban.

Az A Függelék adatait vizsgálva, melyek egy valós eset számai, azt figyelhetjük meg, hogy a legnagyobb válság esetén is a bedőlési valószínűségek 6% közelében mozogtak, meglehetősen messze az 50%-tól (több pénzügyi eszköz viselkedését is megfigyeltük, ezekre is hasonló megállapítást tehetünk). Érdekes kérdés lehet még, hogy valóságos esetekben előfordulhat-e hogy az $\mathbf{S}$ halmaz üres. Mivel valamennyi makróállapot mérése normalizált, a 0 tulajdonképpen az átlagos állapotot reprezentálja. Az a_{0j} értékek amennyiben pozitív értéket vennének fel, azt jelentené, hogy már normál esetben is 50% felett lenne a bedőlés valószínűsége, mely állapot gazdasági szemmel elképzelhetetlen. 2009-ben, a válság közepette $DFE = -2.7$ volt, mely átlagosan egy megjelenést jelent 300 évente. A 2021-es év első félévben a szóban forgó bank beszámolóiban 5.4% bedőlési rátát mutatott a hitelekre, alapvetően a pandémia harmadik hulláma alatt. Ezért úgy gondoljuk, van értelme a zárt formulákkal foglalkozni, melyek struktúrája egyébként is sok mindenre világít rá.

4. Tulajdonság. *Amikor a (21) feltételrendszerben*

$$\nabla F(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{j=1}^{k}(\varphi_j e^{-\frac{(a_{0j}+\mathbf{a}'_j\mathbf{x})^2}{2}})\mathbf{a}_j \neq \mathbf{0}\,,$$

a λ értéke pozitív, mégpedig

$$\lambda^2 = \frac{1}{4\delta^2}\nabla F(\mathbf{x})\mathbf{V}\nabla F(\mathbf{x})\,. \tag{23}$$

Bizonyítás. A (21a) által adott feltételrendszer az alábbi formában írható:

$$\nabla F(\mathbf{x}) - 2\lambda\mathbf{V}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{0}\,. \tag{24}$$

Mivel a Mahalanobis-távolság pozitív, azaz $\delta > 0$, és $\mathbf{V}^{-1}$ nem szinguláris, $\mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}$ nem lehet zérus. (21c) miatt $\lambda \geq 0$. Ha λ zérus lenne, akkor

(21a) vagy (24) akkor teljesül, ha $\nabla F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Ezért $\lambda > 0$, $\lambda \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ amikor $\nabla F(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$. Megjegyezzük, hogy a $\nabla F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, $\delta^2 = \mathbf{x}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}$ egyenletrendszer megoldása reprezentálhat maximumpontot abban az esetben, amikor a maximumpont egyébként is a határponton van. Így $\lambda = 0$ lehetséges. Közelebb kerültünk tehát λ értékének meghatározásához, amikor $\nabla F(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$. (24) mindkét oldalát balról megszorozva a $\mathbf{V}$ mátrixszal, azt kapjuk, hogy

$$2\lambda \mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{V} \nabla F(\mathbf{x})\,. \tag{25}$$

Szorozzuk meg most ezen egyenlőség mindkét oldalát balról a $\nabla F(\mathbf{x})'$ sorvektorral, és ekkor:

$$2\lambda(\nabla F(\mathbf{x})'\mathbf{x} = \nabla F(\mathbf{x})'\mathbf{V}\nabla F(\mathbf{x})\,. \tag{26}$$

Tekintsük most a (23) kifejezést, és szorozzuk meg mindkét oldalt ismét balról az $\mathbf{x}'$ sorvektorral

$$\mathbf{x}'\nabla F(\mathbf{x}) = 2\lambda \mathbf{x}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{x} = 2\lambda\delta^2\,. \tag{27}$$

A (26) bal oldalán levő kifejezést hasznosítva azt kapjuk, hogy

$$2\lambda \cdot \lambda\delta^2 = 4\lambda^2\delta^2 = \nabla F(\mathbf{x})'\mathbf{V}\nabla F(\mathbf{x})\,,$$

melyből állításunk helyessége következik.

5. Tulajdonság. *Ha az optimális megoldásban a bedőlési valószínűségek, azaz a $DTDE_j = a_{0j} + \mathbf{a}_j'\mathbf{x}$ értékek azonosak lennének valamennyi pénzügyi eszközre, $j = 1, \ldots, k$, akkor az optimális megoldás az alábbi lenne:*

$$\mathbf{x} = \frac{\delta}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^k \varphi_j \mathbf{a}_j\right)' \mathbf{V} \left(\sum_{j=1}^k \varphi_j \mathbf{a}_j\right)}} \mathbf{V}\Big(\sum_{j=1}^k \varphi_j \mathbf{a}_j\Big)\,. \tag{28}$$

Bizonyítás. (23)-ból,

$$\lambda = \frac{1}{2\delta}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\Big(\sum_{j=1}^k (\varphi_j e^{-\frac{(a_{0j}+\mathbf{a}_j'\mathbf{x})^2}{2}})\mathbf{a}_j\Big)' \mathbf{V} \sum_{j=1}^k (\varphi_j e^{-\frac{(a_{0j}+\mathbf{a}_j'\mathbf{x})^2}{2}})\mathbf{a}_j}\,,$$

és ezen értékeket helyettesítve (25)-be, átrendezés után azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{x} = \frac{\delta}{\sqrt{\sum_{j=1}^k (\varphi_j e^{-\frac{(a_{0j}+\mathbf{a}_j'\mathbf{x})^2}{2}})\mathbf{a}_j' \mathbf{V} \sum_{j=1}^k (\varphi_j e^{-\frac{(a_{0j}+\mathbf{a}_j'\mathbf{x})^2}{2}})\mathbf{a}_j}} \mathbf{V} \sum_{j=1}^k (\varphi_j e^{-\frac{(a_{0j}+\mathbf{a}_j'\mathbf{x})^2}{2}})\mathbf{a}_j \tag{29}$$

Legyen

$$e^{-\frac{(DTDEj)^2}{2}} = e^{-\frac{(a_{0j}+\mathbf{a}_j'\mathbf{x})^2}{2}} = e^{-\frac{(DTDE)^2}{2}} = z\,,$$

akkor (29) nem más, mint

$$\mathbf{x} = \frac{\delta}{\sqrt{(z)^2 \sum_{j=1}^k (\varphi_j \mathbf{a}_j)' \mathbf{V} \sum_{j=1}^k (\varphi_j \mathbf{a}_j)}} z\mathbf{V}\sum_{j=1}^k (\varphi_j \mathbf{a}_j)\,, \tag{30}$$

melyből állításunk helyessége következik.

4 Hatékony induló megoldások előállítása

Amikor a figyelembe vett befolyásoló makróállapotok száma nagy, a (19) alatti feladat megoldása különösen nehéz. Ruane és társai (2022) szerint egy spanyol bank (BBVA) a probléma bonyolultsága okán kvantumrendszerek gyakorlati alkalmazását tervezi hiteltermékek értékelése céljából, melyhez Monte Carlo szimulációt alkalmaznak. A fent megállapított tulajdonságokat felhasználva, a jelentős számítási igény csökkentésének céljából hozunk létre egy kezdő megoldást generáló algoritmust, melynek hatékonyságvizsgálata még további kutatásokat igényel, és szívesen ajánljuk kutatók figyelmébe e feladatot. A B Függelékben mi csak két makróváltozóra hoztunk létre egy közel optimális megoldást adó algoritmust, mely a sztenderd normális eloszlás Maclaurin polinomiális megközelítésére épít:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{l=1}^{K}\frac{z^{2l-1}(-1)^{l-1}}{(2l-1)2^{l-1}(l-1)!} + residuum\,. \tag{31}$$

Úgy találtuk, hogy a K értékét 10-re állítva, mely a 19-ik hatványig vezet, meglehetősen pontos közelítését adja a szóban forgó eloszlásfüggvénynek. Egészen $z = 2.5$-ig mind a négy karakter száma pontosan adja az eloszlásértékeket, a 3 felé haladva az ötödik karakterben figyelhetünk meg kisebb eltéréseket.

A B Függelékben leírt algoritmust használva a lent meghatározott példáinkra megállapítottuk az optimális megoldást.

Példa: *Tekintsünk három pénzügyi terméket egy hitelportfólióban. Az első termék legyen a már említett személyi kölcsön, és előző példánkból tudjuk, hogy* $DTDE_1 = -1.815 + 0.177x_1 - 0.0084x_2$. *Két Maha-távolságot vegyünk, melyek legyenek* $\delta = 3$ *és* $\delta = 2.15$. *E chi-négyzet kvantilisek a 99, illetve a 90 százalékos valószínűségeknek felelnek meg, sorrendben. Ekkor az alábbi inputokkal rendelkezünk:* $a_{01} = -1.815$, $\mathbf{a}_1 = [0.177, -0.0084]$, $\delta = 3$ *vagy* $\delta = 2.15$, *és a kovariancia-variancia mátrixunk az alábbi:*

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & -0.95 \\ -0.95 & 1 \end{bmatrix}.$$

További tulajdonságok megismerése céljából megadunk egy másik, mesterséges kovariancia-variancia mátrixot is, hogy arra is kiterjesszük a vizsgálatot:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & -0.4 \\ -0.4 & 1 \end{bmatrix}.$$

A következő két termék inputjait mesterségesen megadott számok, melyeket igyekeztünk úgy definiálni, hogy hozzák ki ajánlott algoritmusunk gyenge pontjait. A második termék inputjai: $(a_{02}, a_{12}, a_{22}) = (-1.815, 0.177, -0.084)$, *a harmadik termék hiányzó adatai:* $(a_{03}, a_{13}, a_{23}) = (-1.815, 0.05, -0, 1)$. *Kezdetként az egyedi termékek tulajdonságait vizsgáljuk, melyekhez az 1. Propozícióban megadott kifejezéseket használjuk. A* 2. táblázat *összegezi az inputokat, a* 3. táblázat *pedig megadja a bedőlési valószínűségeket termékenként különböző Maha-távolságokra.*

	a_{0j}	a_{1j}	a_{2j}
1. termék	-1.815	0.177	0.0084
2. termék	-1.815	0.177	0.084
3. termék	-1.815	0.05	-0.1

2. táblázat. Az egyedi termékek regressziós koefficiensei

	Maha = 3			Maha = 2.15		
	Max PD %	x_1 értékek	x_2 értékek	Max PD %	x_1 értékek	x_2 értékek
1. termék	10	2.99	-1.34	8	2.15	-0.97
2. termék	12.7	2.65	-2.35	8.8	2	-1.5
3. termék	7.6	2.11	-2.8	6	1.5	-2

3. táblázat. A makróállapotok, melyek külön-külön, termékenként maximalizálják a bedőlési valószínűségeket különböző Maha-távolságok esetén, amikor a korrelációs együttható -0.4.

A B Függelékben megadott Maclaurin-approximációra épített algoritmust használva a *4. táblázat* a maximális bedőlési valószínűségeket mutatja különböző portfólió struktúrákra, az *5. táblázat* ugyanezt mutatja, azonban ott a korrelációs együttható -0.95.

A portfolió kompozíciója: $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$	Maha = 3 Max Λ (=Loss)	x_1 értékek	x_2 értékek	Maha = 2.15 Max Λ (=Loss)	x_1 értékek	x_2 értékek
(0.1, 0.1, 0.8)	8.28	2.45	-2.6	6.54	1.64	-1.7
(0.2, 0.1, 0.7)	8.42	2.63	-2.4	6.59	1.75	-1.58
(0.2, 0.2, 0.6)	8.9	2.65	-2.3	6.84	1.8	-1.5
(0.1, 0.6, 0.3)	10.8	2.78	-2.12	7.76	1.85	-1.44
(0.6, 0.2, 0.2)	9.9	2.94	-1.7	7.35	1.96	-1.15

4. táblázat. Makróállapotok, melyek maximális bedőlési valószínűséget eredményeznek különböző portfólió struktúrákra és Maha-távolságokra. A korrelációs együttható értéke -0.4.

A portfolió kompozíciója: $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$	Maha = 3 Max Λ (=Loss)	x_1 értékek	x_2 értékek	Maha = 2 Max Λ (=Loss)	x_1 értékek	x_2 értékek
(0.1, 0.1, 0.8)	9.43	2.96	-2.965	7.1	1.975	-1.97
(0.2, 0.1, 0.7)	9.6	2.96	-2.965	7.18	1.98	-1.96
(0.2, 0.2, 0.6)	10.2	2.97	-2.96	7.5	1.98	-1.96
(0.1, 0.6, 0.3)	12.6	2.98	-2.93	8.6	1.99	-1.95
(0.6, 0.2, 0.2)	10.9	2.995	-2.87	7.83	1.99	-1.95

5. táblázat. Makróállapotok, melyek maximális bedőlési valószínűséget eredményeznek különböző portfólió struktúrákra és Maha távolságokra. A korrelációs együttható értéke -0.95.

A számítási eredmények azt mutatják, hogy az erős korreláció nem enged nagy teret a változók önálló, szabad mozgásának. Például 3-as Maha-távolságra az első változó értéke mindig 3 körül forog, és amikor a Maha-távolság 2, akkor e változó értéke ismét 2-höz nagyon közeli.

A következőkben egy algoritmust definiálunk, mely kompakt formákat használ, és úgy gondoljuk, hatékony (az optimális megoldáshoz közeli) induló megoldást generál. Nagyszámú makróváltozó esetére erre nem tudunk igazolást nyerni nagyteljesítményű számítógépek hiányában, és ezen űr betöltésére szívesen invitálunk kutatókat. Viszont két változó esetén szép eredményeket kapunk. Íme az algoritmus lépései:

- egy termék portfolión belüli súlyát használva egy egytermékes maximum bedőlési feladatot hozunk létre az alábbi inputokat meghatározva:

$$\alpha_0 = \sum_{j=1}^{k} \varphi_j a_{0j}, \qquad \alpha = \sum_{j=1}^{k} \varphi_j \mathbf{a}_j \tag{32}$$

  (jegyezzük meg, hogy $\sum_{j=1}^{k} \varphi_j = 1$, és $\varphi_j > 0$ minden j-re);

- az 1. Propozícióra alapozva, a makróállapot, mely maximális bedőlési valószínűséget hoz létre, az alábbi:

$$\mathbf{x} = \frac{\delta}{\sqrt{\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{V}\boldsymbol{\alpha}}}\mathbf{V}\boldsymbol{\alpha}\,; \tag{33}$$

- továbbá a bedőléstől mért távolság, mely a maximális bedőlési valószínűséget adja meg, az alábbi:

$$DTDE = \alpha_0 + \delta\sqrt{\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{V}\boldsymbol{\alpha}}\,.$$

- Következésképpen, a maximális veszteséget/bedőlési valószínűséget a

$$\Lambda = N(\alpha_0 + \delta\sqrt{\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{V}\boldsymbol{\alpha}})$$

  kifejezés adja, ahol N a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye.

Példa. *Tekintsük a 2. táblázatban megadott regressziós együtthatókat. A fenti approximációs algoritmust használva állapítsuk meg a maximális veszteségeket és az ezt létrehozó makróállapotot minden portfólió struktúrára és a 2,15-ös Maha-távolságra. A 6. táblázat összegezi az eredményeket. Tekintettel arra, hogy valamennyi termékre az* a_{0j} *értékek ugyanazok* (-1.815)*, a súlyozott számtani átlag ugyanaz az érték lesz, azaz* $\alpha_0 = -1.815$.

a_{1j} értékek	a_{2j} értékek	Portfólió struktúrák				
0.177	-0.0084	0.1	0.2	0.2	0.1	0.6
0.177	-0.084	0.1	0.1	0.2	0.6	0.2
0,05	-0.1	0.8	0.7	0.6	0.3	0.2
	$\alpha_1 =$	0.0754	0.088	0.1	0.139	0.1516
	$\alpha_2 =$	-0.089	-0.08	-0.0776	-0.081	-0.042
	Macro state 1, $x_1 =$	1.75	1.85	1.9	2	2.1
	Macro state 2, $x_2 =$	-1.86	-1.76	-1.68	-1.56	-1.3
	Max loss $\Lambda \approx$	*6.7*	*6.3*	*6.6*	*8*	*7.4*
	Maclaurin $\Lambda =$	*6.75*	*6.8*	*7.14*	*8.2*	*7.7*

6. táblázat. A maximális veszteségek kalkulálása a (32-33) alatti algoritmussal (Max loss $\Lambda \approx$), továbbá az optimális megoldás értékei (Maclaurin $\Lambda =$) a Maha=2.15 távolságra.

A két utolsó sor a maximális bedőlési valószínűségeket mutatja a (32-33) képletek, illetve a B. Függelékben megadott (optimális) algoritmus szerint. Összehasonlítva az adatsorokat, a javasolt kezdő megoldás meglepően közel esik az optimális értékekhez, gyakorlatilag a különbség nem szignifikáns. Az eredmény egyrészt akár döntésre is felhasználható, másrészt a maximális bedőlést befolyásoló tényezők ismertté váltak.

Említést érdemel, hogy a (32-33) alatti képletek sugallatát az 5. Propozíció adja, ugyanis ebben az $e^{-\frac{(a_{0j}+\mathbf{a}_j'\mathbf{x})^2}{2}}$ értékek azonosak valamennyi termékre, és a (32-33)-ban alkalmazott megközelítés az 5. Propozíció eredményeit hasznosítja a (30) alatti kifejezésben. A kezdő megoldás generálásának ez a lelke. A potenciális kezdő megoldások számát növelhetjük iteráció indításával optimális megoldást kereső algoritmusok számára oly módon, hogy a (33) képlet eredményeként kapott makróállapotot, az $\mathbf{x}$ vektort felhasználjuk (29) jobb oldalának kalkulálásához, melynek eredményeként új $\mathbf{x}$ vektort kapunk. A 6. táblázat szerint a (32-33) alapján javasolt kezdő megoldás és az optimális megoldás közötti legnagyobb eltérés a (0.2, 0.2, 0.6) portfólióstruktúrára jött ki (6.6, illetve 7.14, sorrendben). Az ehhez tartozó $x_1 = 1.9$, illetve $x_2 = -1.68$ értéket felhasználva ekkor az

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{j=1}^{k} \varphi_j e^{-\frac{(a_{0j}+\mathbf{a}_j'\mathbf{x})^2}{2}} \mathbf{a}_j$$

vektort használjuk (32)-ben. E lépéssel az optimális megoldáshoz fogunk érkezni.

5 Következtetések

A Vasicek-modell egy lineáris összefüggést fogalmaz meg a bedőléstől való távolság (DTDE) és egy makróállapot között, melyet az átlagos gazdasági állapottól mért távolsággal jellemzünk (DFE). A feltételes bedőléstől mért távolság és az átlagos gazdasági állapottól mért távolság közötti összefüggést leíró lineáris regresszió megállapítása azért fontos, mert egyedi pénzügyi terméket vizsgálva a bedőlési valószínűség növekszik a bedőléstől mért távolsággal, azaz a bedőlés valószínűsége a DTDE függvényében növekszik. A DTDE koncepció azért is fontos, mert explicit, kompakt formákat tudunk felépíteni a lineáris regresszió paramétereinek felhasználásával a maximális bedőlési valószínűség meghatározásához. A kidolgozott kompakt forma meghatározza az összefüggést a maximális bedőlési valószínűség és a makrógazdaság állapota között, és láthatóvá válik a maximális bedőlést okozó makróállapota adott Mahalanobis-távolság esetén. E formulát vizsgálva láthatjuk az egy makróváltozós Vasicek-modell kiterjesztését többváltozós esetre: a Maha-távolságot jelölő δ kifejezi a makrógazdaság állapotát, melynek együtthatója $\sqrt{\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{V}\boldsymbol{\alpha}}$.

Az egytermékes modell azért játszik fontos szerepet, mert a maximális bedőlési valószínűség meghatározása több termék esetére az egytermékes problémára lesz visszavezetve az input paraméterek adott módosításával. Ezzel explicit, kompakt formulák kínálkoznak a többtermékes pénzügyi probléma elemzéséhez. A felvetett módszertani eszközünk újabb kutatási irányokra hívja fel a figyelmet, ugyanis javasolt módszerünk előnyei akkor érvényesülnek igazán, amikor a makróállapot leírására sok változót, ismeretlent vezetünk be. Ekkor viszont nincs optimális megoldást adó módszertanunk, melynek felhasználásával meghatározhatnánk az optimális eredményt. Arra az esetre viszont, amikor a makrógazdaság állapotát két változóval írjuk le, kidolgoztunk egy (gyakorlatilag) optimális megoldást adó algoritmust, és így javasolt eljárásunk jóságát vizsgálhatjuk.

Ezen kétváltozós, gyakorlatilag optimális megoldást adó eljárásunk a polinomiális Maclaurin megközelítésen alapul, mely nagyon pontosnak bizonyult, így valóban jogot nyer az összehasonlításhoz. Amit ezen optimálisnak tekinthető megoldással összehasonlítunk, egy mesterségesen létrehozott egytermékes modell eredménye, melynek paramétereit a többtermékes probléma inputjaiból állítottunk össze: a többtermékes modell inputjainak konvex lineáris kombinációja lesz az egytermékes modell inputja. Ez természetesen alulbecsli az optimális maximális veszteségek mértékét, viszont eredményeink azt mutatják, ennek mértéke jelentéktelen. Ezen eredményt ugyanakkor óvatosan kell kezelni, de reméljük, további kutatások ugyanerre az eredményre jutnak. Ha ez így lesz, eredményeink jelentősen felgyorsíthatják a szimulációs eljárásokat, mindemellett képleteink betekintést engednek abba, hogy milyen erők alakítják a maximális veszteségek alakulását. Mindemellett azt hisszük, a mesterségesen generált néhány példa elemzésének van előnye is, hiszen a véletlenszerűen generált sok példa elemzése néha eltakarja egy módszertan gyenge pontjait.

Köszönetnyilvánítás

A szerzők köszönik Csányi Sándor úrnak, az OTP Bank NyRT elnök-vezérigazgatójának támogatását, inspirációit, és kitartását a téma fontossága mellett, továbbá az adatokhoz való hozzáférést. A kutatás a TKP2021-NKTA-19 számú projekt keretében készült, mely az Innovációs és Technológiai Minisztérium Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alapból nyújtott támogatásával, a TKP2021-NKTA pályázati program finanszírozásában valósult meg.

Irodalom

1. Bassanboo, A., S. Juneja and A. Zeevi, 2008, Portfolio credit risk with extremal dependence: Asymptotic analysis and efficient simulation, *Operations Research,* 56(3), 593–606.

2. Bhat, G., S. G. Ryan and D. Vyas, 2018, The implications of credit risk modeling for banks' loan loss provisions and loan-origination procyclicality, *Management Science,* 65(5), 2116–2141.

3. Breuer, T., M. Jandacka, K. Rheinberger and M. Summer, 2009, How to find plausible, severe and useful stress scenarios, *International Journal of Central Banking,* 3, 205–224.

4. Breuer, T., M. Jandacka, J. Mencia and M. Summer, 2012, A systematic approach to multi-period stress testing of portfolio credit risk, *Journal of Banking and Finance,* 36, 332–340.

5. Chan, J. C. C. and D. P. Kroese, 2010, Efficient estimation of large portfolio loss probabilities in *t*-copula models, *European Journal of Operational Research,* 205, 361–367.
6. De Maesschalck, R., Jouan-Rimbaud, D., and Massart, D. L., 2000, The Mahalanobis distance, *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems,* 50 (1): 1–18. doi:10.1016/s0169-7439(99)00047-7
7. Doumpos, M., K. Kosmidou, G. Baourakis and C. Zopounidis, 2002, Credit risk assessment using a multi criteria hierarchical discrimination approach: A comparative analysis, *European Journal of Operational Research,* 138, 392–412.
8. Garcia-Céspedes, R. and M. Moreno, 2017, An approximate multi-period Vasicek credit risk model, *Journal of Banking and Finance,* 81, 105–113.
9. Gotoh, J. and A. Takeda, 2012, Minimizing loss probability bounds for portfolio selection, European *Journal of Operational Research,* 217, 371–380.
10. Ruane, J., A. McAfee and W. D. Oliver, 2022, Quntum computing for business leaders, *Harvard Business Review,* Jan-Feb, 113–121.
11. Somers, M. and J. Whittaker, 2007, Quantile regression for modelling distributions of profit and loss, *European Journal of Operational Research,* 183, 1477–1487.
12. Sydsaeter, K. and P. J. Hammond, 1995, *Mathematics for Economic Analysis,* Prentice Hall, N. J.
13. Verbraken, T., C. Bravo and B. Baesens, 2014, Development and application of consumer credit scoring models using profit-based classification measures, *European Journal of Operational Research,* 238, 505–513.
14. Vörös, J., 2023, Some properties of the maximum loss on loan portfolios, *Central European Journal of Operations Research,* to appear.

A. Függelék

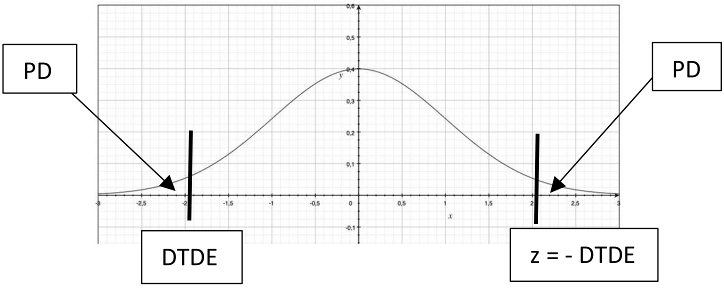
	GDP volumenének alakulása az előző év %-ában	DFE	bedőlések aránya empirikus megfigyelés, OTP Bank Plc, %	DTDE	MNB alapkamat, %	DFI
2009	-6,7	-2,7	6	-1,55	7,6	1,57
2010	0,7	-0,27	5,5	-1,6	5,6	0,77
2011	1,8	0,086	4,6	-1,68	6,5	1,13
2012	-1,5	-1	4,8	-1,65	6,25	1
2013	2,0	0,167	4,6	-1,68	4,2	0,2
2014	4,2	0,9	3,3	-1,83	2,5	-0,48
2015	3,8	0,77	2,6	-1,94	1,65	-0,82
2016	2,2	0,23	2,4	-1,98	0,95	-1,1
2017	4,3	0,93	2	-2,05	0,95	-1,1
2018	5,1	1,2	1,7	-2,1	0,95	-1,1

A1. táblázat. Néhány kamatlábbal, növekedési rátával kapcsolatos adat, továbbá a bedőlési valószínűségek empirikus megfigyelése

DFE (távolság a gazdaság átlagos állapotától) értékek a GDP %-os növekedési rátájára vonatkoznak: a %-os növekedési ráta átlagát, továbbá szórását kalkuláltuk, majd az átlagot egyenként kivontuk a növekedési rátákból, és ezt a szórással osztva megkaptuk a távolságokat. Vagyis azt számítottuk ki, hogy egy adott évben a gazdaság hány szórásnyira van az átlagtól. A DTDE és a DFI sztenderd normalizált adatokat hasonlóan származtattuk. A GDP és alapkamatlábakat a Központi Statisztikai Hivatal kimutatásaiból nyertük.

B. Függelék

Visszatérve (31)-hez, az a B1. ábrán megjelenített sztenderd normális eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye görbe alatti területének nagyságát adja meg a $(0, z)$ intervallumban, viszont mi a $(-\infty, DTDE)$ szakasz feletti terület nagyságát szeretnénk ismerni, ugyanis ez adja meg a bedőlési valószínűséget – mely ebben az esetben a veszteség nagyságát is adja. Hogy ezt megkapjuk, a $DTDE$ értéket kell tükröznünk a függőleges tengelyre, és a kapott valószínűségi értéket 0.5-ből ki kell vonni. Az eredmény a $DTDE$ értékhez tartozó bedőlési valószínűség (PD).



B1. ábra. A sztenderd normális eloszlás sűrűségfüggvénye

Felhasználva (31)-et a (19) alatt definiált maximális veszteség megállapítására, feladatunk az, hogy megoldjuk az alábbi feladatot:

$$\max_{x_1,\ldots,x_n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^{k} \varphi_j (0.5 - \sum_{l=1}^{10} \frac{(-a_{0j} - \mathbf{a}_j'\mathbf{x})^{2l-1}(-1)^{l-1}}{(2l-1)2^{l-1}(l-1)!}) \tag{B1a}$$

s.t.

$$\sqrt{\mathbf{x}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}} = \delta\,. \tag{B1b}$$

Gyakorlatilag (B1)-et fel lehetne használni akárhány véges termékből álló portfólió maximális veszteségének becslésére tetszőleges számú makróváltozóval, azonban két makróváltozó esetén egy egyszerű megoldás kínálkozik, melyet az alábbiakban írunk le:

- Mindegyik pénzügyi termékre határozzuk meg a lineáris regresszió paramétereit. A j-edik termékre legyenek ezek az értékek az alábbiak:

$$(a_{0j}, \mathbf{a}_j') = (a_{0j}, a_{1j}, a_{2j}), \qquad j = 1, \ldots, k\,.$$

- Mindegyik termékre állapítsuk meg annak súlyát a portfólión. Legyenek ezek: φ_j, $j = 1, \ldots, k$.

- Állítsuk elő a kovariancia/variancia mátrixot és annak inverzét. Ezek: $\mathbf{V}$, illetve $\mathbf{V}^{-1}$, sorjában.
- Határozzuk meg a vizsgálni kívánt Maha-távolságot, jelölje ezt δ. Mivel két változónk van, (B1b) alapján egyiket kifejezhetjük a másik függvényeként, és helyettesítsük a (B1a) kifejezésbe e függvényt.
- (B1a) ily módon egy egyváltozós függvény, melyet rajzoltassunk fel egy alkalmas szoftverrel.
- Határoljuk be pontosan a maximumpontot.

THE MAXIMUM LOSS ON LOAN PORTFOLIOS WITH MULTIPLE PRODUCTS

In our previous study of one type of credit product, when we used a single external, so-called macro explanatory variable, and concluded that by developing estimators that also reflect management capabilities, we are likely to get closer to determining the true probabilities of default. In this paper we assume that, after careful analysis, we have a correlation describing default rates by loan product as a function of macro conditions. However, a macro state may have different effects on default rates, and hence on the resulting losses, for different types of credit products. The task therefore arises to analyse the possible macro states in order to simultaneously identify the critical macro states affecting the whole portfolio. In particular, it is important to prepare for the worst outcome, as a bankruptcy can be avoided in this way. The complexity of the model formulation of the problem favours the use of simulation techniques, but at the cost of making it more difficult to understand the causes of extreme losses due to the known drawbacks of simulation approaches. This paper provides insights into the methodology for these three factors: the identification of the set of relevant macro factors at stake, the identification of the relationship between default rates and macro states, and the identification of the macro states that cause maximum loan portfolio losses.

Key words: loan losses, macro factors, forecasting, maximum losses, non-convex programming