# N-SZEMÉLYES OLIGOPOL JÁTÉK KÖRNYEZET-SZENNYEZŐ JÁTÉKOSOKKAL[1]

SZIDAROVSZKY FERENC – AKIO MATSUMOTO – MOLNÁR SÁNDOR
*Corvinus Egyetem – Chuo University, Tokyo – HUN-REN MTA SZTAKI*

Klasszikus oligopol játékot vizsgálunk olyan feltétel mellett, hogy a játékosok a termeléssel környezetszennyező anyagokat is létrehoznak és kibocsátanak. Figyelembe vesszük a termék egységárán és a termelési költségeken kívül a szennyező anyag egy része közömbösítésének költségeit és a megmaradó rész kibocsátásáért járó büntetés mértékét. Alkalmas feltételek mellett igazoljuk az egyetlen egyensúlyi pont létezését, annak aszimptotikus stabilitását gradiens dinamika esetén. A lineáris esetben az egyensúlypontot analitikusan is meghatározzuk.

## 1 Bevezetés

A környezet védelme az egyik legfontosabb feladata a mai generációknak. A szén és a fűtőolaj elégetése, az ipari termelés stb. mind szennyezőanyag kibocsátással jár. Egyes esetekben a kormány meg tudja állapítani a kibocsátás pontos forrását és felelősét, számos esetben ez sajnos nem lehetséges. Az első típusú szennyezők esetén büntetés vagy ösztönzés egyedileg lehetséges. A másik típus esetében csak egy kisebb-nagyobb régió összes szennyezése mérhető. Segerson (1988) a kollektív büntetés (ösztönzés) alkalmazását javasolta ilyen esetekben, amikor az egyes szennyezők azonos büntetést (ösztönzést) kapnak attól függetlenül, hogy egyedileg mennyi szennyeződést bocsátottak ki, ami egyébként sem ismerhető meg a kormány döntéshozói számára.

Tekintsünk példaként egy $n$-személyes oligopol játékot, ahol az előállított azonos termékeiket a játékosok egy közös piacon értékesítik. Legyen az $x_k$ a $k$-adik játékos termékmennyisége, $S = \sum_{k=1}^{n} x_k$ az együttesen előállított termékmennyiség, $p(S)$ a termék egységára, valamint $c_k(x_k)$ a $k$-adik játékos termelési költsége, akinek a profitfüggvénye

$$\varphi_k(x_1, \dots, x_n) = x_k p(S) - c_k(x_k)\,. \tag{1}$$

A játékosok válaszfüggvényei alapján a nemlineáris esetben is egy $n$-dimenziós fixpont-problémára vezethető vissza az egyensúlypontok meghatározása. Selten (1970) és Szidarovszky (1970) egymástól függetlenül egydimenziós fixpont-problémára redukálták a problémát, amelyet a „Selten–Szidarovszky technikának” is neveznek. Számos statikus kiterjesztést vezettek

[1] Beérkezett 2024. február 27. DOI: https://doi.org/10.15170/SZIGMA.55.1243. E-mail: `molnar.sandor@gek.szie.hu`.

be az irodalomba, többek között megkülönböztetett termékek, többtermékes modellek, alkalmazotti tulajdonosú esetek, hiperbolikus árfüggvények stb. vizsgálatát (Okuguchi és Szidarovszky, 1999), valamint dinamikus kiterjesztések is készültek (Bischi et al., 2010). Legújabban időkésleltetésű modellek vizsgálata került előtérbe (Matsumoto és Szidarovszky, 2018).

Oligopol játékok és a környezetvédelem kapcsolatának vizsgálatakor a kormány által kiszabott büntetések és ösztönzések mértékét is beépítették a játékosok profitfüggvényeibe. Ha a $k$-adik játékos $g(x_k)$ ismert mennyiségű szennyezést bocsát ki, akkor egy $\varepsilon_k g(x_k)$ tagot kell az (1) profitfüggvényből kivonni. Amennyiben az egyéni kibocsátások mennyiségei nem ismertek, akkor Segerson (1988) a következőt javasolta. A kormány meghatároz egy $E$ együttes elviselhető szennyezésmennyiséget, és ha ezt együttesen túllépik a játékosok, akkor azonos büntetésben részesülnek, ha az együttes kibocsátás ennél kevesebb, akkor azonos jutalmat (pl. adóengedményt) kapnak.

Tegyük fel, hogy a $k$-adik játékos $x_k$ mennyiségű termék előállításához $g(x_k) = e_k x_k$ szennyezést bocsát ki, és így a teljes kibocsátás mennyisége $\overline{S} = \sum_{k=1}^{n} e_k x_k$. A játékosok azonos büntetést (jutalmat) kapnak, $\varepsilon(\overline{S} - E)$. Vagyis az (1) profitfüggvény a következőképpen módosul:

$$\varphi_k = x_k p(S) - c_k(x_k) - \varepsilon(\overline{S} - E). \tag{2}$$

Az elmúlt néhány évtized során számos tanulmány foglalkozott a (2) típusú modellekkel és azok különféle változataival (Barnett, 1980; Okuguchi, 2003; Simpson, 1995; Matsumoto et al., 2021). A (2) modell legnagyobb problémája az, hogy nem veszi figyelembe azt, hogy a büntetés elkerülése érdekében a termelt szennyeződés egy részét, vagy az összeset a játékos saját maga közömbösíti.

# 2 Egy modellváltozat

Tekintsünk most egy játékost, mondjuk a $k$-adikat. Az általa előállított $x_k$ termékmennyiség mellett egyúttal $e_k x_k$ szennyezést is termel. Ennek egy részét, $\alpha_k e_k x_k$ $(0 \leq \alpha_k \leq 1)$ mennyiséget saját maga közömbösíti, és a megmaradó $(1-\alpha_k)e_k x_k$ mennyiséget kibocsátja a környezetbe. Ha feltételezzük, hogy a termelt szennyeződés feldolgozása $\gamma_k$ egység költségbe kerül, akkor a játékos profitja a következő:

$$\varphi_k = x_k p(S) - c_k(x_k) - \varepsilon(\overline{S} - E) - \gamma_k \alpha_k e_k x_k\,, \tag{3}$$

ahol most $\overline{S} = \sum_{l=1}^{n}(1-\alpha_l)e_l x_l$. A jobb oldal első tagja a termékek eladásából származó bevétel, a második tag a termelési költség, a harmadik tag a büntetés vagy jutalom mértéke, a negyedik tag pedig a szennyezés egy részének közömbösítési költsége. Tegyük fel, hogy a játékos $L_k$ kapacitáskorláttal rendelkezik, azaz $0 \leq x_k \leq L_k$. Tegyük fel azt is, hogy a $p$ árfüggvény és az összes $c_k$ termelési költségfüggvény kétszer folytonosan differenciálható, valamint

a) $p'(S) < 0$

b) $x_k p'' + p'(S) \le 0$

c) $p'(S) - c_k''(x_k) < 0$

minden $k$, $S \in [0, \sum_{l=1}^{n} L_l]$ és $x_k \in [0, L_k]$ esetén.

Az *a*) feltétel azt jelenti, hogy az árfüggvény szigorúan csökken, ha a kínálat növekszik, ami egy természetes gazdasági követelmény. A *b*) feltétel biztosan teljesül, ha az árfüggvény konkáv, azonban ez nem követelmény, hiszen $p'$ negatív értéke erősebb is lehet, mint $p''$ esetleges pozitív értéke. Hasonló a helyzet a *c*) feltétellel, amely biztosan teljesül, ha a költségfüggvények konvexek.

Minthogy

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k} = p(S) + x_k p'(S) - c_k'(x_k) - \varepsilon(1-\alpha_k)e_k - \gamma_k \alpha_k e_k$$

és

$$\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial {x_k}^2} = 2p'(S) + x_k p''(S) - c_k''(x_k) < 0\,,$$

az a), b), c) feltételek mellett $\varphi_k$ szigorúan konkáv $x_k$-ban.

Vezessük be az $S_k = \sum_{l \ne k} x_l$ és az $\overline{S}_k = \sum_{l \ne k}(1-\alpha_l)e_l x_l$ jelöléseket, amelyek már nem függnek $x_k$-tól, ekkor

$$\varphi_k(x_k) = x_k p(x_k + S_k) - c_k(x_k) - \varepsilon\big((1-\alpha_k)e_k x_k + \overline{S}_k - E\big) - \gamma_k \alpha_k e_k x_k\,. \quad (4)$$

A játékos ezt a függvényt maximalizálja a $[0, L_k]$ intervallumon. Minthogy $\varphi_k$ szigorúan konkáv, a maximális megoldás (amit válaszfüggvénynek is neveznek) a következőképpen adódik:

$$R_k(S_k) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \frac{\partial \varphi_k(0)}{\partial x_k} \le 0 \\ L_k, & \text{ha } \frac{\partial \varphi_k(L_k)}{\partial x_k} \ge 0 \\ x_k^*, & \text{egyébként,} \end{cases} \quad (5)$$

ahol $x_k^*$ az alábbi egyenlet megoldása a $[0, L_k]$ intervallumon:

$$g_k(x_k) = p(x_k + S_k) + x_k p'(x_k + S_k) - c_k'(x_k) - \big(\varepsilon(1-\alpha_k) + \gamma_k \alpha_k\big)e_k = 0\,. \quad (6)$$

A harmadik esetben $\frac{\partial \varphi_k(0)}{\partial x_k} > 0$, $\frac{\partial \varphi_k(L_k)}{\partial x_k} < 0$, valamint $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k}$ szigorúan csökken, így a (6) egyenletnek egyértelmű megoldása van.

Vegyük észre, hogy (5) ekvivalens a következővel:

$$\overline{R}_k(S) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \overline{g}_k(0) \le 0 \\ L_k, & \text{ha } \overline{g}_k(L_k) \ge 0 \\ x_k^{**}, & \text{egyébként,} \end{cases} \quad (7)$$

ahol

$$\overline{g}_k(x_k) = p(S) + x_k p'(S) - c_k'(x_k) - \big(\varepsilon(1-\alpha_k) + \gamma_k \alpha_k\big)e_k$$

és $x_k^{**}$ a $\overline{g}_k(x_k) = 0$ egyenletnek a $[0, L_k]$ intervallumon való megoldása.

Minthogy a harmadik esetben rögzített $S$ mellett $\overline{g}_k(0) > 0$ és $\overline{g}_k(L_k) < 0$, valamint $\overline{g}_k(x_k)$ szigorúan csökken $x_k$-ban, a $\overline{g}_k(x_k) = 0$ egyenletnek egyértelmű megoldása van. Tehát $x_k^{**}$ az $S$ változó egyértelmű függvénye. A $\overline{g}_k(x_k(S)) \equiv 0$ egyenlet $S$ szerinti differenciálásából láthatjuk, hogy

$$p'(S) + x_k' p'(S) + x_k p''(S) - c_k''(x_k) \cdot x_k' = 0\,,$$

azaz

$$x_k'(S) = -\frac{p'(S) + x_k p''(S)}{p'(S) - c_k''(x_k)}\,. \tag{8}$$

A b) és c) feltétel alapján $x_k'(S) \leq 0$, azaz $x_k(S)$ csökken $S$-ben. Tekintsük ezután a

$$h(S) = \sum_{k=1}^{n} x_k(S) - S = 0 \tag{9}$$

egyenletet, ahol $h(S)$ szigorúan csökkenő folytonos függvény, valamint $h(0) \geq 0$ és $h(\sum_{k=1}^{n} L_k) \leq 0$. Tehát a (9) egyenletnek egyetlen megoldása van, $S^*$. A megfelelő egyensúlyi termékmennyiségeket az $\overline{R}_k(S^*)$ értékei adják.

## 3 Dinamikus kiterjesztés

Az egyensúlypontban az összes játékos egyensúlyi termékmennyisége megegyezik válaszfüggvénye értékével. A válaszfüggvény-alapú dinamika az

$$\dot{x}_k(t) = K_k\big(R_k(S_k(t)) - x_k(t)\big) \qquad (K_k > 0)$$

differenciálegyenletekkel írható le, amit a következőképpen tudunk értelmezni. Ha egy időpontban $x_k(t) < R_k(S_k(t))$, akkor a $t$ időpontban $x_k(t)$ lokálisan növekszik, és ha $x_k(t) > R_k(S_k(t))$ akkor $x_k(t)$ lokálisan csökken. Mindkét esetben $x_k(t)$ értéke közeledik $R_k(S_k(t))$ értékéhez. Ha viszont $x_k(t) = R_k(S_k(t))$, akkor a játékos azt hiszi, hogy nem kell változtatnia, hiszen kielégíti az egyensúlypont alapfeltételét. Nyilvánvalóan aszimptotikusan stabilis rendszer esetében az $x_k(t)$ stratégiák egyensúlyponthoz tartanak $t \to \infty$ esetén.

A gradiens-alapú dinamika a következőképpen írható le és értelmezhető. Tegyük fel, hogy egy adott pillanatban a játékosok által előállított termékmennyiségek nem alkotnak egyensúlypontot. Ilyenkor legalább egy játékos növelheti profitját a termékmennyiség megváltoztatásával. Vegyük észre, hogy ha $\frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x_k} > 0$, akkor a megnövekedett termékmennyiség emeli a játékos profitját. Hasonlóan, a $\frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x_k} < 0$ esetben a játékos érdeke, hogy csökkentse a termelését, és ha $\frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x_k} = 0$, akkor a játékos azt hiheti, hogy $x_k$ optimumot ad. Az előzőekből az is következik, hogy $\dot{x}_k$ és $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k}$ azonos előjelű kell legyen, hogy a játékos érdekeit szolgálja. Ezt az elvet az

$$\dot{x}_k(t) = K_k \frac{\partial \varphi_k(x(t))}{\partial x_k} \qquad (K_k > 0) \tag{10}$$

dinamika írja le. A következőkben a (10) dinamika stabilitását vizsgáljuk meg. A (6) reláció alapján

$$\dot{x}_k = K_k\big(p(S) + x_k p'(S) - c_k'(x_k) - \big(\varepsilon(1-\alpha_k) + \gamma_k\alpha_k\big)e_k\big)\ ,$$

ahol $K_k > 0$ egy állandó. A rendszer Jacobi-mátrixának $k$-adik sora a következő:

$$J_{kk} = K_k(x_k p'' + 2p' - c_k''), \qquad J_{kl} = K_k(p' + x_k p'')\,,$$

ahol $J_{kl}$ független $l$ értékétől. A Jacobi-mátrix karakterisztikus egyenlete

$$f(\lambda) = \prod_{k=1}^{n}\big(K_k(p' - c_k'') - \lambda\big)\Big[1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{K_k(p' + x_k p'')}{K_k(p' - c_k'') - \lambda}\Big] = 0 \tag{11}$$

(Bischi et al., 2010, Appendix E). Az első tényezőkből $\lambda < 0$. A második tényezőben a számlálók nem pozitívak, úgyhogy ha a nevezők között lennének azonosak is, ezeket közös nevezővel összevonva a számláló továbbra is nempozitív maradna. Így nyugodtan feltehetjük, hogy a nevezők különbözőek. A második tényező pólusai szintén negatívak. Ha $\lambda$ a pólushoz tart jobbról (balról), akkor a második tényező határértéke a $+\infty$ $(-\infty)$, valamint $\lambda$ szerinti deriváltja

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{K_k(p' + x_k p'')}{\big[K_k(p' - c_k'') - \lambda\big]^2} < 0\,.$$

Vegyük észre, ha $\lambda$ $+\infty$-hez ($-\infty$-hez) tart, akkor a második tényező határértéke $+1$, így $n-1$ gyök található a pólusok között, és még egy a legkisebb pólus előtt. Tehát mind az $n$ gyök negatív, tehát a (10) dinamika lokálisan aszimptotikusan stabilis.

# 4 A lineáris eset

Tegyük fel, hogy $p(S) = A - B\cdot S$ $(A, B > 0)$, és $k = 1, 2, \ldots, n$ esetén $c_k(x_k) = a_k x_k + b_k$ $(a_k > 0)$. Ekkor

$$\varphi_k = x_k(A - Bx_k - BS_k) - (a_k x_k + b_k) - \varepsilon\big(1-\alpha_k)e_k x_k + \overline{S}_k - E\big) - \gamma_k\alpha_k e_k x_k \tag{12}$$

és

$$\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_k} = A - 2Bx_k - BS_k - a_k - \varepsilon(1-\alpha_k)e_k - \gamma_k\alpha_k e_k\,.$$

Könnyen kimutatható, hogy a lineáris esetben a válaszfüggvény- és gradiensalapú dinamikák ekvivalensek egymással, ahol a különbség csak a $K_k$ együtthatókban jelentkezik.

Ha a válaszfüggvény a $[0, L_k]$ intervallum belső pontja, akkor

$$A - Bx_k - BS - a_k - \big(\varepsilon(1-\alpha_k) + \gamma_k\alpha_k\big)e_k = 0\,,$$

azaz

$$x_k = \overline{R}_k(S) = \frac{1}{B}\big[A - BS - a_k - \big(\varepsilon(1-\alpha_k) + \gamma_k\alpha_k\big)e_k\big]\,. \tag{13}$$

Az egyszerűbb jelölés érdekében legyen $C_k = \big(\varepsilon(1-\alpha_k)+\gamma_k\alpha_k\big)e_k$. A (13) egyenlőségnek a $k$ összes értékére való összeadásából adódik, hogy

$$S = \frac{1}{B}\Big(nA - nBS - \sum_{k=1}^{n}(a_k + C_k)\Big),$$

amiből láthatjuk, hogy

$$S = S^* = \frac{1}{B(n+1)}\Big[nA - \sum_{k=1}^{n}(a_k + C_k)\Big], \tag{14}$$

és a $k$-adik játékos egyensúlyi termékmennyisége (13) alapján

$$\begin{aligned} x_k^* &= \frac{1}{B}\Big[A - \frac{nA - \sum_{l=1}^{n}(a_l + C_l)}{n+1} - a_k - C_k\Big] = \\ &= \frac{1}{(n+1)B}\Big[A + \sum_{l=1}^{n}(a_l + C_l) - (n+1)(a_k + C_k)\Big]. \end{aligned} \tag{15}$$

Ez a kifejezés akkor az egyensúlypont, ha az összes játékos esetén $0 \le x_k^* \le L_k$. Az egyensúlyi egységár a következő:

$$\begin{aligned} p^* &= A - BS^* = A - \frac{1}{n+1}\Big[nA - \sum_{l=1}^{n}(a_l + C_l)\Big] = \\ &= \frac{1}{n+1}\Big[A + \sum_{l=1}^{n}(a_l + C_l)\Big]. \end{aligned} \tag{16}$$

A $k$-adik játékos szennyezőanyag-kibocsátása

$$(1-\alpha_k)e_k x_k^* = \frac{(1-\alpha_k)e_k}{(n+1)B}\Big[A + \sum_{l=1}^{n}(a_l + C_l) - (n+1)(a_k + C_k)\Big]. \tag{17}$$

Vegyük észre, hogy $C_k = \big(\varepsilon + (\gamma_k - \varepsilon)\alpha_k\big)e_k$, ahol feltehetjük, hogy $\gamma_k < \varepsilon$, különben a játékosnak nem érdeke, hogy szennyeződést tisztítson. Ezért $C_k$ értéke növekszik, ha a kormány emeli a büntetés (jutalom) mértékét ($\varepsilon$), vagy a $k$-adik játékos növeli szennyezőanyag-kibocsátását ($e_k$), vagy növekszik a tisztítási költsége ($\gamma_k$), vagy a játékos csökkenti a szennyezőanyag-tisztítási rátáját ($\alpha_k$). A (14), (15) és (16) kifejezésekből látható, hogy $a_k$ és/vagy $C_k$ növelésével csökken a $k$-adik játékos egyensúlyi termékmennyisége ($x_k$), de a többi játékosé növekszik. Az összes játékos együttes termékmennyisége ($S$) viszont csökken. Hasonlóan a $k$-adik játékos szennyezőanyag-kibocsátása csökken, ha $a_k$ és/vagy $C_k$ növekszik, ekkor viszont a többi játékosé nagyobb lesz.

# 5 Összefoglalás

Ebben a tanulmányban $n$-személyes klasszikus oligopol játékot vizsgáltunk, amikor a termeléskor keletkező szennyeződést is figyelembe vettük, következményeivel együtt. Feltételeztük, hogy az egyes játékosok egyéni szennyezéskibocsátása nem áll a kormányzat rendelkezésére, ilyenkor az a kollektív büntetés (jutalmazás) elvét alkalmazza. Figyelembe vettük azt is, hogy a termelt szennyeződés egy részét a játékosok saját maguk közömbösítik. Az oligopol irodalomban megszokott feltételek mellett igazoltuk, hogy

(A) az $n$-személyes játék egyetlen egyensúlyponttal rendelkezik, amely

(B) lokálisan aszimptotikusan stabilis gradiens dinamika mellett, valamint

(C) belső egyensúlypont esetén lineáris esetben meghatároztuk a játékosok egyensúlyi termékmennyiségét és szennyezéskibocsátását, valamint az egyensúlyi egységárat.

Érdemes megjegyeznünk, hogy az (A) és (B) tulajdonság a klasszikus oligopoljáték esetén is érvényes, azaz a szennyezőanyag-kibocsátás és részleges közömbösítése miatt ezek a kedvező tulajdonságok nem tűnnek el.

A tanulmány eredményei több irányban is továbbvihetőek. Az egyensúlyi pontnak a modell paramétereitől és függvényeitől való függését a nem-lineáris esetben is meg lehetne vizsgálni. Érdekes lenne azt is feltételezni, hogy az $\alpha_k$ szennyezés-közömbösítési együtthatók is a játékosok döntési változói. Ekkor természetesen a megfelelő közömbösítési technológia bevezetésének költségeit is figyelembe kell venni. Ugyancsak érdekes problémát jelent időkésleltetés bevezetése a dinamikába, ugyanis a legmegfelelőbb döntés meghatározása és megvalósítása időbe telik, valamint a kormány sem abban a pillanatban tűzi ki a büntetéseket (jutalmakat), amikor a méréseket végzik.

## Irodalom

1. Barnett, H. (1980). The Pigouvian tax rule under monopoly. *American Economic Review,* 70, 1037–1041.
2. Bischi, G. I., Chiarella C., Kopel M., Szidarovszky F. (2010) *Nonlinear Oligopolies. Stability and Bifurcations.* Springer Verlag, Berlin/Heidelberg.
3. Matsumoto, A., Nonaka Y., Szidarovszky F. (2021) Emission charge controllability in Cournot duopoly: Static and dynamic effects. *Journal of Differential Equations and Applications,* https://doi.org/10.1080/10236198.2021.2020264
4. Matsumoto, A., Szidarovszky F. (2018). *Dynamic Oligopolies with Time Delays.* Springer Nature, Singapore.
5. Okuguchi, K. (2003). Optimal pollution tax in Cournot oligopoly. *Keio Economic Studies,* 40, 85–89.
6. Okuguchi, K., Szidarovszky F. (1999) *The Theory of Oligopoly with Multi-Product Firms,* (2. kiadás). Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.
7. Segerson, K. (1988). Uncertainty and incentives for nonpoint pollution control. *Journal of Environmental Economics and Management,* 15, 87–98.
8. Selten R. (1970). *Preispolitik der Mehrproduktunternehmung in der Statischen Theorie.* Springer-Verlag, Berlin.
9. Simpson, R. (1995) Optimal pollution taxation in a Cournot oligopoly. *Environmental and Resource Economics,* 6, 359–369.

10. Szidarovszky, F. (1970) *On the Oligopol Game.* 1970-1, Dept. of Math., K. Marx Univ. of Economics, Budapest, Hungary.

## $N$-PERSON OLIGOPOLY WITH POLLUTING FIRMS

The classical oligopoly game is examined with polluting firms. In addition to the unit price and production costs we consider the ambient taxes and individual abatement costs by the firms. Under realistic assumptions the existence of the unique equilibrium and its asymptotical stability under gradient dynamics are proved. In the linear case analytic expressions are derived for the equilibrium production levels of the firms as well as for their pollution emissions.