

A VISEGRÁDI ORSZÁGOK MORTALITÁSI RÁTÁINAK ELŐREJELZÉSE NEURÁLIS HÁLÓZATOKKAL¹

SZENTKERESZTI GÁBOR – VÉKÁS PÉTER
BCE Operáció és Döntés Intézet

Tanulmányunkban az utóbbi években számos területen nagy sikerrel alkalmazott visszacsatolt neurális hálózatokat használjuk fel Csehország, Lengyelország, Magyarország és Szlovákia 1970 és 2019 közötti, 18 és 99 év közötti korokhoz tartozó életkorfüggő halandósági rátáinak előrejelzésére, külön nőkre és férfiakra. A népszerű Recurrent Neural Network, Long-Short Term Memory és Gated Recurrent Unit architektúrákat mind megvizsgáljuk, és különös figyelmet fordítunk a hálók hiperparamétereinek optimalizására, melynek érdekében keresztvalidációt alkalmazunk, és a vizsgált időszakot tanuló és tesztelő periódusokra osztjuk fel. Előrejelzéseinket pontosság szempontjából a klasszikus Lee–Carter és a koherens multipopulációs Li–Lee modellekkel is összevetjük, és megállapítjuk, hogy az egyes országok, nemek és korcsoportok esetén melyik eljárások képesek a legmegbízhatóbb projekciókat generálni. Modelljeinket az élet-, nyugdíj- és egészségbiztosítási területeken dolgozó aktuáriusok és a demográfusok egyaránt alkalmazhatják a gyakorlatban.

Kulcsszavak: előrejelzés, neurális hálózatok, demográfia, biztosítás. *JEL-kódok:* J11, C53

1 Bevezetés

A halandósági ráták előrejelzése az aktuáriustudományban és a demográfiában egyaránt fontos feladat, amelynek eredményei a gyakorlatban többek között a nyugdíjrendszerek fenntarthatóságának vizsgálatára és népesség-előrejelzésre is felhasználhatók.

A visegrádi országok halandósága a szocializmus évtizedeiben stagnált, különösen a férfiak esetében, miközben a nyugat-európai országokban egyenletes javulás volt tapasztalható. Emiatt ezeket a hasonló történelemmel és társadalmi-gazdasági jellemzőkkel rendelkező országokat halandóságuk szempontjából indokolt a többi európai országtól elkülönülten vizsgálni.

¹Beérkezett 2024. február 27. DOI: <https://doi.org/10.15170/SZIGMA.55.1242>. A szerzők hálásan köszönik Dr. Kovács Erzsébet tanárnőnek, hogy az egyetemi képzés keretében megismerkedhettek az aktuáriustudomány és az adatelemzés szépségeivel, és 70. születésnapjára sok boldogságot, jó egészséget kívánnak. A szerzők munkahelye és e-mail címe: Szentkereszti Gábor, data scientist, Allianz Hungária Biztosító Zrt. és doktorjelölt, Budapesti Corvinus Egyetem, gabor.szentkereszti@uni-corvinus.hu. Dr. Vékás Péter, egyetemi docens, Budapesti Corvinus Egyetem, peter.vekas@uni-corvinus.hu. Jelen kutatást a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal (FK-132343) támogatta.

Az elmúlt évtizedben az élet számos területén a mesterséges intelligencia, a gépi tanulás, a neurális hálózatok és a mély tanulás diadalmenetének lehattünk szemtanúi, és ezek a módszerek a gazdasági, aktuáriusi és demográfiai területeken is sikeresen bizonyították létjogosultságukat. A visszacsatolt neurális hálózati architektúrák az idősoros természetű adatokra különösen jól alkalmazhatónak bizonyultak a gyakorlatban.

Indokolt tehát a hagyományos statisztikai módszereken túl ezekkel az eszközökkel is előrejelezni a visegrádi országok halandóságát, és megvizsgálni, hogy melyik technikák segítségével állíthatók elő a legpontosabb előrejelzések.

Tanulmányunk 2. fejezetében áttekintjük a vonatkozó szakirodalmat, melyet a 3. fejezetben a módszertan ismertetése követ. A 4. fejezetben a felhasznált adatokat és modellezési lépéseket írjuk le, majd az 5. fejezetben bemutatjuk az eredményeket. A 6. fejezetben röviden összefoglaljuk cikkünket és a lehetséges jövőbeli továbbfejlesztési irányokat.

2 Szakirodalmi áttekintés

2.1 Halandóság-előrejelzés gépi tanulással és neurális hálózatokkal

Ebben az alfejezetben a nemzetközi szakirodalomban megjelent legfontosabb olyan tanulmányokat ismertetjük, amelyek a halandóság-előrejelzés problémájára a gépi tanulás és a neurális hálózatok eszközeit használják fel, jellemzően az egyszerűbb, régebbi módszerek felől az újabb, összetett eljárások felé haladva. Ezzel kívánjuk bemutatni, hogy az ismert megoldások között hol helyezhető el az általunk alkalmazott módszertan.

Deprez és szerzőtársai [2017] döntési fákat használnak a klasszikus halandóság-előrejelző modellek továbbfejlesztésére, így lehetőséget biztosítva más társadalmi-gazdasági változók prediktorként történő bevonására. Levantesi és Pizzorusso [2019], valamint Bjerre [2022] a döntési fákon túl véletlen erdőket és gradient boosting módszereket alkalmaznak. Levantesi és Nigri [2020] P-spline függvények használatával javítják az előrejelzéseket.

Richman [2018] a mesterséges intelligencia és a gépi tanulási módszerek alkalmazási lehetőségeit ismerteti az aktuáriustudományban. A díj- és tartalékszámítások mellett a halálózási előrejelzést is kiemeli, mint lehetséges területet.

Richman és Wüthrich [2019] visszacsatolt neurális hálózatokat használnak a mortalitási ráták előrejelzésére. LSTM és GRU architektúrákat alkalmaznak, és az LC modellhez hasonlóan a központi halálózási ráta logaritmusát választják célváltozónak. A célváltozó késleltetett változatait táplálják bemeneti adatként a hálózatukba, és svájci halálózási adatokon bizonyítják, hogy az RNN hálózatok az LC modellnél pontosabb előrejelzéseket adnak. Megjegyzik, hogy a neurális hálózatok eredményei nem robusztusak; a különböző tanítások során jelentősen eltérő eredményeket adhatnak. Ezért ensemble módszerek alkalmazását javasolják az előrejelzés varianciájának meghatározására.

Előző tanulmányukkal ellentétben Richman és Wüthrich [2021] előrecsától neurális hálózatokat használnak multipopulációs előrejelzésre. Bemeneti változóik a naptári év, az életkor, a régió és a nem. Korábbi tanulmányukhoz hasonlóan a központi halálozási ráták logaritmusait modellezik, 41 ország adatait felhasználva. Megállapítják, hogy a neurális hálózatok előrejelzési pontosság tekintetében felülmúlják a hagyományos modelleket.

Nigri és szerzőtársai [2019] LSTM-hálózatokat illesztnek az LC modell időfüggő halálozási indexére a logaritmikus ráták közvetlen modellezése helyett, LSTM segítségével megragadva a nemlineáris trendeket. Modelljeiket hat ország adatain értékelik, és kimutatják, hogy az LC-LSTM modellek a hagyományos LC modellnél következetesen jobb előrejelzéseket adnak. Hálózataik csak a mortalitási index késleltetett értékét használják bemenetként.

LSTM hálózatok mellett Perla és szerzőtársai [2021] ugyanezre a célra konvolúciós neurális hálózat (CNN) architektúrákat is használnak. Schnürch és Korn [2022] szintén CNN-alapú megközelítést javasolnak a halálozás előrejelzésére. Eredményeiket az LC és LL modellekkel, valamint az előrecsától neurális hálózatokkal is összehasonlítják, és megállapítják, hogy az általuk javasolt CNN modell teljesít a legjobban.

Marino és szerzőtársai [2021] bootstrap módszerrel becsülik az LC-LSTM előrejelzések varianciáit.

Wüthrich és Merz [2022] könyvükben a halandóság neurális hálózatok segítségével történő előrejelzését tárgyalják. Két megközelítést mutatnak be: a közvetlen megközelítés az LC-modellen, míg a közvetett megközelítés a logaritmikus ráták közvetlen modellezésén alapul. Az LC mortalitási index előrejelzéséhez több ország adatait használják, és az elmúlt három év mortalitási indexeit alkalmazzák az LSTM modell bemenetként. A mortalitási indexeken túl a nemzet és az országot is bemeneti változóként szerepeltetik, amelyeket először egy beágyazó rétegen (embedding layer) vezetnek át.

2.2 Hazai szakirodalom

Ebben az alfejezetben a vonatkozó hazai szakirodalmat ismertetjük röviden. Petneházi és Gáll [2019] LSTM-hálózatokat alkalmaznak halandóságmodellezésre több ország adatain, multipopulációs megközelítésben. LSTM modelljük előrejelzési pontosság tekintetében jobb teljesítményt nyújt az LC modellnél.

Szentkereszti és Vékás [2022] magyarországi adatokra LSTM hálókat és LC modelleket illesztnek, és összehasonlítják egymással a két módszer segítségével készített előrejelzések pontosságát. A szerzők megállapítják, hogy az LSTM az LC modellnél jelentősen pontosabb predikcióra képes.

Gépi tanulási módszert mutatnak még be Ágoston és szerzőtársai [2019], akik klaszterelemzési eljárásokat javasolnak halandósági adatokra.

Vékás [2018, 2020] írásaiban a halandóságjavulás rotációjának problémáját mutatja be, és egy mutatószámot javasol annak számszerűsítésére, melyet az Európai Unió tagországának adatain szemléltet. A rotáció je-

lensége az LC modell egyik legfontosabb alapfeltevésének sérülésével jár, és jelentősen torzítja a nyugdíjszámítások szempontjából fontos hosszú távú előrejelzéseket.

Varga [2023] tanulmányában multipopulációs halandóság-előrejelző modelleket alkalmaz hazai regionális adatokon.

A halandóság-előrejelzés fontos aktuáriusi alkalmazási területe a nyugdíjrendszer modellezése (Kovács és szerzőtársai, 2015), valamint fenntarthatóságának vizsgálata, melyet Bajkó és szerzőtársai [2015] LC modell segítségével végeznek el. A szerzők a kedvezőtlen demográfiai folyamatok miatt sötét képet festenek a nyugdíjrendszer jövőjéről. Németh és szerzőtársai [2020a, 2020b], valamint Vékás [2021] a munkapiac és demográfia hatásait egyaránt figyelembe véve jelzik előre a gazdasági időskori függőségi rátát, így szemléltetve a magyar nyugdíjrendszerre háruló egyre nehezebb terhet.²

Egy másik fontos aktuáriusi alkalmazási terület az élettartam-kockázat (Kovács és Vékás, 2017, valamint Vékás, 2019), azaz a vártnál hosszabb emberi élettartamokból fakadó biztosítási kockázat számszerűsítése. Májér és Kovács [2011] magyar adatokon az LC modellt, Vékás [2017] szintén magyar adatokon annak számos kiterjesztését, Gogola és Vékás [2020] pedig cseh és magyar adatokon az LC modellt alkalmazzák erre a célra.

3 Módszertan

Ebben a fejezetben röviden bemutatjuk a későbbiekben alkalmazott módszereket. Először két, nagy népszerűségnek örvendő hagyományos előrejelző eljárást, majd a visszacsatolt neurális hálózatokra épülő újabb módszertanokat egy-egy különálló szakaszban ismertetjük.

3.1 A Lee–Carter és Li–Lee modellek

Lee és Carter [1992] népszerű modellje az életkortól és naptári évtől függő logaritmikus mortalitási ráták előrejelzésére leggyakrabban alkalmazott extrapolatív statisztikai eljárás, amely a logaritmikus mortalitási rátákat három komponens összegére bontja fel. A paraméterek legkisebb négyzetes becslései szingulárisérték-felbontással állíthatók elő. A modell egyetlen időfüggő paraméterét, az ún. mortalitási indexet autoregresszív integrált mozgóátlagolású (ARIMA) folyamatokkal – jellemzően eltolásos véletlen bolyongással – jelzik előre, amelyből megkapható a logaritmikus mortalitási ráták projekciója is.

Az eljárásnak a klasszikus verzió túl számos további változata van. Brouhns, Denuit és Vermunt [2002] az ún. Poisson LC modellt javasolják, amelynek keretében az LC paraméterek maximum likelihood eljárással becsülhetők. Ez a módszer automatikusan figyelembe veszi a korcsoportok létszáma szerinti súlyozást, és megfelelően képes kezelni a hibatagok heteroszkedaszticitását. A továbbiakban ezt a modellváltozatot ismertetjük.

²E fenntarthatósági problémák megoldására például Banyár [2011, 2012, 2017] javasol reformelképzeléseket.

Jelölje $D_{x,t}$ az $x \in \{1, 2, \dots, X\}$ korcsoportban és $t \in \{1, 2, \dots, T\}$ időszakban elhalálozottak számát, valamint $E_{x,t}$ ugyanitt az adott időszakban átlagosan élők számát, vagyis a központi kitettséget. Ezekből az $m_{x,t} = \frac{D_{x,t}}{E_{x,t}}$ képlet alapján meghatározhatjuk a központi mortalitási rátákat. A Brouhns, Denuit és Vermunt [2002] által javasolt Poisson LC modell feltevései és egyenletei:

$$D_{x,t} \sim \text{Poisson}(E_{x,t}m_{x,t}),$$

ahol

$$m_{x,t} = \exp(a_x + b_x k_t),$$

vagy ezzel ekvivalens módon

$$\ln m_{x,t} = a_x + b_x k_t,$$

valamint a_x , b_x , k_t valós paraméterek, melyeket maximum likelihood módszerrel becsülnek numerikus módszerek felhasználásával, a k_t idősort (ún. mortalitási index) pedig ARIMA modellel, általában ARIMA(0,1,0) eltolásos véletlen bolyongással jelzik előre a halandósági ráták projekciója érdekében.

Több populációra egymástól függetlenül illesztett LC modellek esetén az azonos életkorokhoz, de különböző populációkhoz tartozó mortalitási ráták hányadosai időben jellemzően nullához vagy végtelenhez konvergálnak, ami az empirikus tapasztalatok alapján nem elfogadható feltételezés. A probléma kiküszöbölésére Li és Lee [2005] az LC modell koherens multipopulációs kiterjesztését javasolják úgy, hogy a közös hosszú távú trendet közös paraméterek jelenítik meg, és az e körüli rövid távú ingadozást populációspecifikus paraméterek teszik lehetővé. A Li–Lee (LL) modell egyenlete az alábbi formában írható fel:

$$\ln m_{x,t,i} = a_{x,i} + B_x K_t + b_{x,i} k_{t,i} + e_{x,t,i},$$

ahol B_x és K_t közös, $a_{x,i}$, $b_{x,i}$ és $k_{t,i}$ pedig populációspecifikus paraméterek. Az előbbieket ARIMA, utóbbiakat pedig konstans határértékhez konvergáló ARMA folyamatokkal jelzik előre. Így biztosítják a koherenciát: az egyes populációk rátáinak hányadosai a modellben nem divergálnak a végtelenbe, miközben a modell rövid távon megengedi az ingadozást a hosszú távú trend körül.

3.2 Visszacatolt neurális hálók

A visszacsatolt neurális hálók általunk alkalmazott három népszerű típusa az RNN, LSTM és GRU hálózatok, melyek matematikáját az áttekinthetőség kedvéért három külön alszakaszban mutatjuk be röviden. Részletes leírást a hálók működéséről és struktúrájuk okairól nem kívánunk adni, ez megtalálható például Goodfellow, Bengio és Courville [2015] tankönyvében.

3.2.1 RNN hálózat

Rumelhart és szerzőtársai [1986] vezetik be a szakirodalomba a szekvenciális adatok modellezésére alkalmazható egyszerű Recurrent Neural Network

(RNN) struktúráját, és a tanítására alkalmazható időbeli hibavisszaterjesztés (backpropagation through time) módszerét.

Az adott időszak input vektorát jelölje $\mathbf{x}^{(t)}$, a háló előző állapotát $\mathbf{h}^{(t-1)}$, illetve a kimeneti értéket $y^{(t)}$. \mathbf{W}_x , \mathbf{W}_h és \mathbf{W}_y jelöljék a modell ezen komponenseihez tartozó súlymátrixokat, \mathbf{b}_x és \mathbf{b}_y a be- és kimenetekhez tartozó additív konstansokat, f_h és f_y pedig legyenek aktivációs függvények. Ezeket a jelöléseket felhasználva az RNN struktúra az alábbiak szerint írható le:

$$\begin{aligned}\mathbf{h}^{(t)} &= f_h(\mathbf{W}_h \mathbf{h}^{(t-1)} + \mathbf{W}_x \mathbf{x}^{(t)} + \mathbf{b}_x), \\ y^{(t)} &= f_y(\mathbf{W}_y \mathbf{h}^{(t)} + \mathbf{b}_y).\end{aligned}$$

Az ún. eltűnő és felrobbanó gradiens jelenségek miatt nehéz ezeket a hálózatokat a gyakorlatban tanítani, és Bengio és szerzőtársai [1994] felhívják a figyelmet arra, hogy a klasszikus RNN hálók a hosszú távú hatásokat nem tudják figyelembe venni. A következőkben leírunk két olyan RNN struktúráját, amelyeket szélesebb körben alkalmaznak ezen problémák kiküszöbölésére.

3.2.2 LSTM hálózat

Hochreiter és Schmidhuber [1997] javasolnak egy alternatív architektúrát, amely „kapus” kialakításának köszönhetően képes elraktározni a hasznos hosszú távú információt. Ezt nevezzük Long Short-Term Memory (LSTM) hálónak. Megtartva az előbbi jelöléseket az LSTM modell a következő egyenletekkel írható le:

$$\begin{aligned}\text{forget gate: } \quad \mathbf{f}^{(t)} &= \sigma(\mathbf{W}_{f,h} \mathbf{h}^{(t-1)} + \mathbf{W}_{f,x} \mathbf{x}^{(t)} + \mathbf{b}_f), \\ \text{input gate: } \quad \mathbf{i}^{(t)} &= \sigma(\mathbf{W}_{i,h} \mathbf{h}^{(t-1)} + \mathbf{W}_{i,x} \mathbf{x}^{(t)} + \mathbf{b}_i), \\ \text{output gate: } \quad \mathbf{o}^{(t)} &= \sigma(\mathbf{W}_{o,h} \mathbf{h}^{(t-1)} + \mathbf{W}_{o,x} \mathbf{x}^{(t)} + \mathbf{b}_o), \\ \mathbf{c}'^{(t)} &= \tanh(\mathbf{W}_{c,h} \mathbf{h}^{(t-1)} + \mathbf{W}_{c,x} \mathbf{x}^{(t)} + \mathbf{b}_c), \\ \mathbf{c}^{(t)} &= \mathbf{f}^{(t)} * \mathbf{c}^{(t-1)} + \mathbf{i}^{(t)} * \mathbf{c}'^{(t)}, \\ \mathbf{h}^{(t)} &= \mathbf{o}^{(t)} * \tanh(\mathbf{c}^{(t)}),\end{aligned}$$

ahol $*$ jelöli az elemenkénti ún. Hadamard-szorzatot, $\sigma(\cdot)$ a szigmoid és $\tanh(\cdot)$ a hiperbolikus tangens függvényt.

3.2.3 GRU hálózat

Cho és szerzőtársai [2014] a hosszú távú összefüggések megragadása céljából az LSTM-hez hasonló kapus kialakítású visszacsatolt hálót ismertetnek, amelyet Gated Recurrent Unit-nak (GRU) neveznek. A GRU hálózat egyenletei:

$$\begin{aligned}\text{update gate: } \quad \mathbf{z}^{(t)} &= \sigma(\mathbf{W}_{z,h} \mathbf{h}^{(t-1)} + \mathbf{W}_{z,x} \mathbf{x}^{(t)} + \mathbf{b}_z), \\ \text{reset gate: } \quad \mathbf{r}^{(t)} &= \sigma(\mathbf{W}_{r,h} \mathbf{h}^{(t-1)} + \mathbf{W}_{r,x} \mathbf{x}^{(t)} + \mathbf{b}_r), \\ \mathbf{c}'^{(t)} &= \tanh(\mathbf{W}_{c,h} (\mathbf{h}^{(t-1)} * \mathbf{r}^{(t)}) + \mathbf{W}_{c,x} \mathbf{x}^{(t)} + \mathbf{b}_c), \\ \mathbf{h}^{(t)} &= (1 - \mathbf{z}^{(t)}) * \mathbf{h}^{(t-1)} + \mathbf{z}^{(t)} * \mathbf{c}'^{(t)}.\end{aligned}$$

3.3 Biztosítási díjak számítása

Ebben a fejezetben röviden vázoljuk azokat a módszereket, amelyeket a későbbiekben alkalmazni fogunk biztosítási díjszámítás szempontjából. Leírásunk közel sem lesz teljes, átfogó képet például Banyár [2003]-ból lehet kapni.

Az előrejelzések készítésénél központi mortalitási rátákkal dolgoztunk, aktuáriusi számítások esetén a szakemberek halálozási valószínűségeket alkalmaznak. A központi mortalitási ráta halálozási valószínűséggé transzformálható a következő formulával (Ágoston és Kovács, 2000):

$$q_x = 1 - e^{-m_x}.$$

Felhasználva ezeket a halálozási valószínűségeket, az ekvivalencia elv alapján az x éves korú, azonnal induló, évente 1 Ft összegű életjáradékának az egy-szeri nettó díja statikus megközelítés esetén:

$$\ddot{a}_x = \sum_{i=0}^{\omega-x} \left(v^i \prod_{j=0}^{i-1} (1 - q_{x+j}) \right) \quad (x = 0, 1, \dots, \omega),$$

ahol $\omega = 99$ maximális életkor, v technikai kamatlábból számított diszkont-faktor (Banyár, 2003 és Vékás, 2017).

Dinamikus díjszámítás esetében a képlet az alábbiak szerint módosul:

$$\ddot{a}_{x,T} = \sum_{i=0}^{\omega-x} \left(v^i \prod_{j=0}^{i-1} (1 - q_{x+j,T+j}) \right) \quad (x = 0, 1, \dots, \omega),$$

ahol T a járadék indulására vonatkozó naptári év.

4 Adatok és a modellezés lépései

A visegrádi országok halandósági adatait a Human Mortality Database [2024] honlapjáról töltöttük le, ahol életkoronként és nemenként éves halálesszámok és központi kitétségek állnak rendelkezésre a négy országra. Naptári évek tekintetében 1970-től használtuk az adatokat 2019-ig, és a felnőtt populáció adatait vizsgáltuk 18–99 éves életkorok között. Azért ezt a korcsoportot választottuk, mert a gyermekekre nagyon ritkán kínálnak életbiztosítási konstrukciókat a vállalatok, valamint a gyermekhalandósági mutatók javulása jelentősen eltér a többi korcsoporttól, a 99 év felettiekre pedig nagyon kevés adat áll rendelkezésre, emiatt bizonytalanok lennének az előrejelzések.

Az adatelőkészítést és a modellezést az R programozási nyelv (R Core Team, 2024) segítségével végeztük el. Az LC modelleket az *StMoMo* (Villegas és szerzőtársai, 2016), az LL modelleket a *MultiMoMo* (Robben, 2022), a neurális hálózatokat pedig a *Keras* (Allaire és Chollet, 2022) kiegészítő csomag segítségével készítettük.

A kiválasztott időszakot tanuló és tesztelő halmazra osztottuk. Előbbi az 1970 és 2009 közötti periódus, utóbbi pedig a 2009 utáni időszak volt, mivel

úgy gondoljuk, hogy az utolsó időszak a legrelevánsabb az előrejelzések szempontjából. A gépi tanulási módszerek hiperparamétereinek optimalizálásához ötszörös egyszerű (keresztmetszetben is alkalmazott) keresztvalidációt alkalmaztunk, majd az optimális hiperparaméterek megtalálása után a teljes tanuló halmazon tanítottuk a legjobbnak bizonyult hiperparaméterekkel rendelkező modelleket.

Az adatokat az LC modell és a gépi tanulási módszerek esetén országként és nemenként elkülönítve kezeltük, így építettük fel minden ország és nem párosra a modelleket. Az LL modell esetén annak multipopulációs jellege miatt nem szerint választottuk szét a 4-4 populációt, tehát két multipopulációs modellt kaptunk.

A neurális hálós modellek esetén a logaritmikus halandósági rátákat normalizáltuk, majd a legjobb modell megtalálása érdekében rácsalapú hiperparaméter-keresést (grid search) hajtottunk végre. Mivel alapvetően kis problémákról van szó, ezért csak egyrétegű hálókat alkalmaztunk. Az egyes hiperparaméterek halmazát a probléma nagysága, valamint szakmai és szakirodalmi megfontolások alapján szűkítettük az alábbiakra:

- k : a célváltozó késleltetéseinek száma, $k \in \{3, 5, 8\}$.
- b : a tanuló halmaz kötegeinek mérete, $b \in \{64, 128, 256\}$.
- u : a neurális hálók neuronjainak a száma, $u \in \{5, 6, 7\}$, RNN esetében $u \in \{10, 12, 14\}$.

Minden háló esetén a célváltozó az adott korhoz és naptári évhez tartozó logaritmikus halandósági ráta, míg az input értékek pusztán a célváltozó késleltetett értékei voltak.

Az epoch-ok számát $e = 2000$ -re állítottuk, valamint korai megállítást (early stopping) is alkalmaztunk $p = 100$ türelmi hiperparaméter-beállítással a számítási idő rövidítése érdekében. A háló visszacsatolt rétegében a szakirodalomban elterjedt hiperbolikus tangens aktivációs függvényt, az RNN háló kimeneti rétegében pedig a sztenderdnek számító identitás aktivációs függvényt használtuk. A tanítást a népszerű Adaptive Moment Estimation (Adam, Kingma és Ba, 2014) sztochasztikus optimalizációval³ végeztük $\lambda = 0,001$ -es tanulási ráta és átlagos négyzetes hiba (MSE) veszteségfüggvény mellett.

A tanítás sztochasztikus jellege miatt a végső paraméterekkel 50–50 modellt építettünk: az 50 tanítás közül kiválasztottuk a legjobb modellt, illetve kiszámítottuk az összes modell előrejelzéseinek átlagát, amit ensemble modellnek nevezünk. A neurális hálós előrejelzések során Richman és Wütrich [2019] nemzetközi szakirodalomban megjelent módszertanát követtük.

³Sztochasztikus optimalizációs problémával foglalkozik még Vékás és szerzőtársai [2012] munkája.

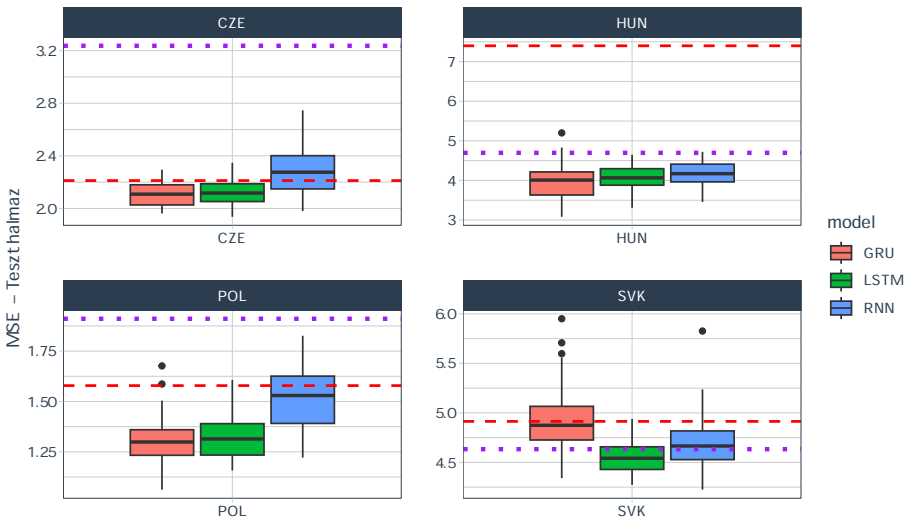
5 Eredmények

A modellek nők adatain nyújtott teljesítményét az 1. táblázatban foglaljuk össze. A táblázat aggregált adatokat tartalmaz a tesztelő halmazon, minden életkort figyelembe véve.

Ország	LC	LL	LSTM best	LSTM ensemble	GRU best	GRU ensemble	RNN best	RNN ensemble
CZE	2,21	3,24	1,94	2,07	1,96	2,02	1,98	2,20
HUN	7,40	4,70	3,31	3,91	3,08	3,78	3,46	4,08
POL	1,58	1,91	1,16	1,29	1,06	1,25	1,22	1,46
SVK	4,91	4,63	4,27	4,46	4,34	4,82	4,22	4,57

1. táblázat. A vizsgált modellek teljesítményei a női adatok teszhalmazán (MSE, 10^{-2})

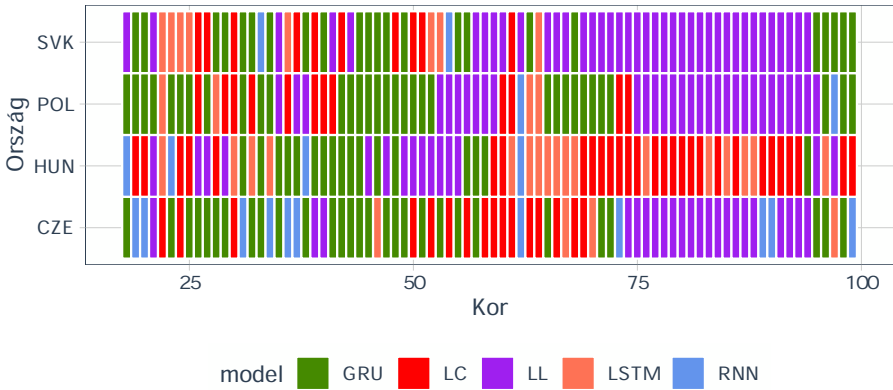
Az 50–50 betanított modell tesztidőszakon mért hibáit az 1. ábra foglalja össze modellenként és országonként. A szaggatott piros vonal szintje az LC modell teljesítményét mutatja, míg a pöttyözött lila vonal az LL modellét.



1. ábra. Teszthalmazon mért hiba a nők adatain országonként és modellenként

Az 1. ábrán látható, hogy Szlovákia esetén a klasszikus módszerek jól teljesítettek a neurális hálókhoz viszonyítva, és nincs nagy különbség az LC és LL modellek között. Magyarország esetében az LL modell összességében sokkal jobb, mint az LC. Csehország esetén épp az ellenkezője látható: az LC modell sokkal jobb eredményt ért el az LL-nél. Lengyelország esetében sincs nagy különbség a két klasszikus modell között, de a gépi tanulási módszerek jobbnak bizonyulnak. Tehát a női adatokon azt látjuk, hogy a gépi tanulási modellek teljesítménye felülmúlja az LC és LL modellekét, és ez akkor is fennáll, ha nem a legjobb tanítást nézzük, hanem a robusztusabb ensemble előrejelzéseket.

Az eredmények elemzése során az összesítő hibamutató mellett fontos lehet részleteiben is vizsgálni a modellek erősségeit és gyengeségeit. A 2. ábra megmutatja, hogy a nők adatain életkoronként és országonként melyik modell teljesített a legjobban, tehát hogy az életkoronkénti MSE melyik modell esetében a legkisebb. A robusztusság érdekében itt már az ensemble modellek eredményeit használjuk. Az eredmények alapján elmondható, hogy az LL modell a női adatok esetében Magyarország kivételével az idősebb korcsoportban nagyon jól teljesített, míg a gépi tanulási modellek a középkorú és a fiatal népesség körében érték el a legjobb eredményt. Az LC modell az idősebb magyar populációban bizonyult a legjobbnak.



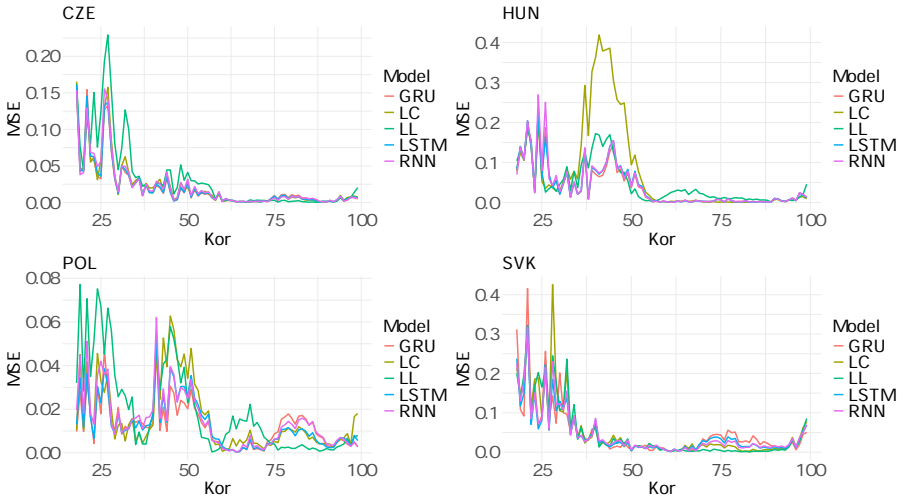
2. ábra. A legjobb modellek a nők adatain életkoronként és országonként

A 2. táblázatban összesítjük a 2. ábrán látható eredményeket. Összességében a nők adatain a legtöbb korcsoportban Csehországban és Lengyelországban a GRU ensemble, Magyarországon az LC, Szlovákiában pedig az LL modell nyújtotta a legjobb teljesítményt. Ugyanakkor az ensemble modellekben gyengén sikerült tanítások eredményei is benne vannak, és mint az 1. táblázatban láthattuk, a legjobb tanítás használatával a gépi tanulási modellek teljesítménye jóval kedvezőbb.

Modell	CZE	HUN	POL	SVK
LC	16	29	12	10
LL	22	15	31	39
RNN ensemble	11	4	2	2
LSTM ensemble	4	17	4	8
GRU ensemble	29	17	33	23

2. táblázat. Az egyes modellek a nők adatain hány korcsoportban teljesítettek a legjobban országonként

A darabszámok mellett fontos bemutatni, hogy a hibák mértéke egymáshoz viszonyítva miképp alakul. Ezért a tesztelő halmazon ábrázoltuk életkoronként az átlagos négyzetes hibákat minden modell és ország esetén (3. ábra).

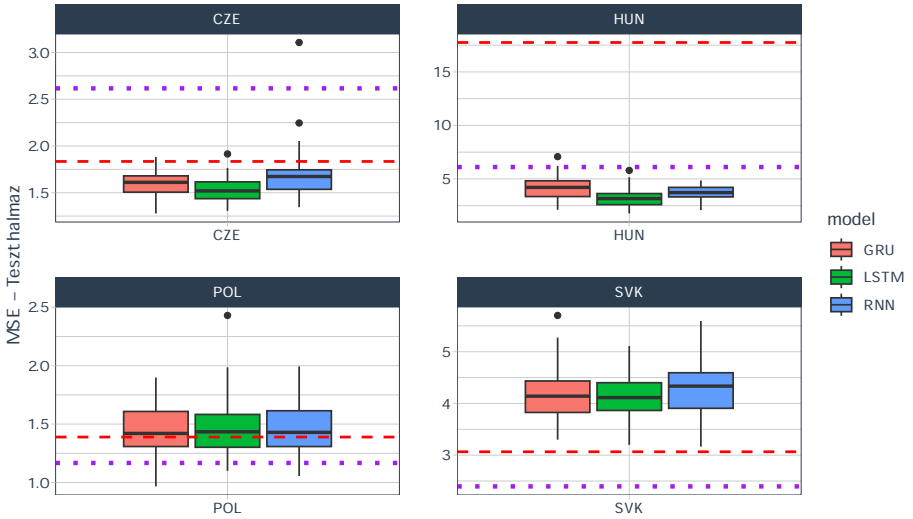


3. ábra. MSE értékek koronként a női adatok tesztalmazán

A férfi adatok esetében a modellezés folyamata megegyezett a női adatokon végrehajtott számításokkal. A 3. táblázatban és a 4. ábrán a rájuk vonatkozó eredményeket közöljük. Csehország és Lengyelország esetén a GRU, Magyarország esetén pedig az LSTM teljesített a legjobban, míg Szlovákia esetében a Li–Lee modell jelezte előre a legjobban a férfi halandósági rátákat. Az eredmények sok esetben hasonló képet mutatnak a női adatokon tapasztaltakhoz. Csehország esetében az LC modell pontosabb volt, mint az LL, viszont Magyarország adatain az LL modell sokkal jobban teljesített, mint az LC, de összesítve mindkét ország esetében a neurális hálós módszerek adják a legjobb előrejelzéseket. A Lengyelország esetében szorosabb volt a verseny, az LL modell teljesítménye megközelítette a legjobb neurális hálós előrejelzéseket, az ensemble modellekét pedig felül is múlta. Szlovákia esetében pedig a klasszikus modellek jobbak voltak, mint ez a fajta neurális hálós megközelítés. Teljesítmény és robusztusság szempontjából jó kompromisszum lehet a gyakorlatban pl. a legjobb 10 tanítás eredményeinek átlagolása.

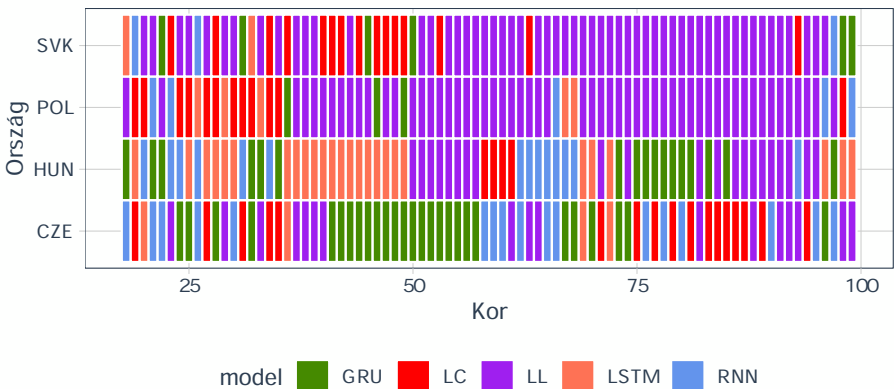
Ország	LC	LL	LSTM		GRU	GRU	RNN	RNN
			best	ensemble				
CZE	1,83	2,62	1,31	1,49	1,28	1,52	1,35	1,57
HUN	17,75	6,11	1,77	2,99	2,11	3,91	2,07	3,44
POL	1,39	1,17	1,10	1,41	0,97	1,39	1,05	1,38
SVK	3,07	2,40	3,20	4,02	3,30	4,08	3,16	4,15

3. táblázat. A vizsgált modellek teljesítményei a férfi adatok tesztalmazán (MSE, 10^{-2})



4. ábra. Tesztalmazon mért hiba a férfiak adatain országonként és modellenként

Az 5. ábra megmutatja, hogy a férfiak adatain életkoronként és országonként melyik modell teljesített a legjobban (a robusztusság érdekében a 2. ábrához hasonlóan itt is az ensemble modellek eredményeit tüntetjük fel). Szlovákia és Lengyelország adatain 50 és 40 éves kor felett az LL modell nagyon jól teljesít, míg Magyarországon 35–50 éves korok között az LSTM ensemble, valamint 70–80 éves korok között a GRU ensemble, Csehországban 40–65 éves korok között pedig a GRU ensemble modell jó teljesítménye szembeötlő.



5. ábra. A legjobb modellek a férfiak adatain életkoronként és országonként

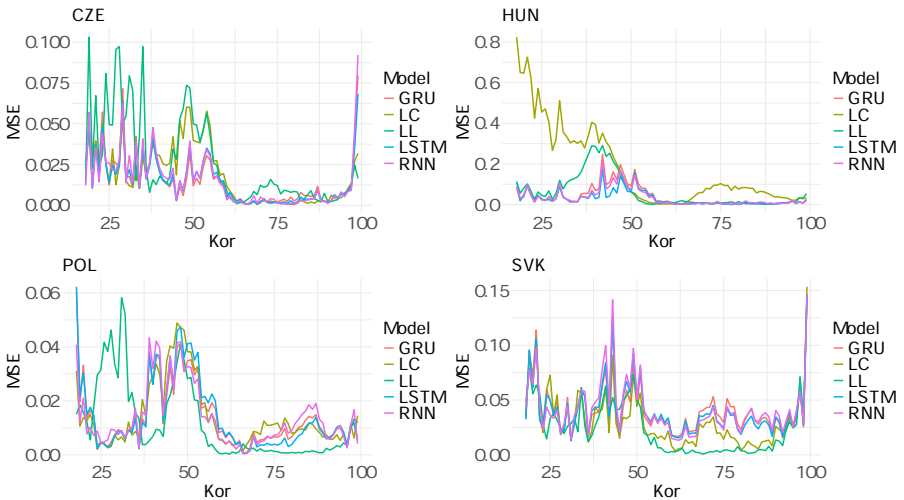
A 4. táblázatban az 5. ábrán látható eredményeket számszerűsítjük. Látható, hogy a férfiak adatain az LL modell Szlovákia és Lengyelország esetében nagyon sokszor a legjobb modellnek bizonyul. Magyarországon az LSTM

ensemble modellek bizonyultak a legjobbnak. Csehország vonatkozásában a legtöbb életkorban a GRU ensemble modell teljesít legjobban, mivel itt a középkoriúak adatain ez a módszer nagyon jól működött, az idősebb korosztályban viszont vegyesebb képet tapasztalunk. Fontos megjegyezni, hogy ezek az ensemble modellek eredményei, és ahogyan a 3. táblázatban is láthattuk, a legjobb tanításokat figyelembe véve a neurális hálózatok teljesítménye ennél jóval kedvezőbb képet mutat.

Modell	CZE	HUN	POL	SVK
LC	17	4	12	15
LL	17	21	57	56
RNN ensemble	17	14	5	3
LSTM ensemble	4	26	5	2
GRU ensemble	27	17	3	6

4. táblázat. Az egyes modellek a férfiak adatain hány korcsoportban teljesítettek a legjobban országoként

A női adatokhoz hasonlóan itt is bemutatjuk, hogy a modellek életkoronként egymáshoz viszonyítva átlagos négyzetes hiba alapján miképp teljesítettek (6. ábra).



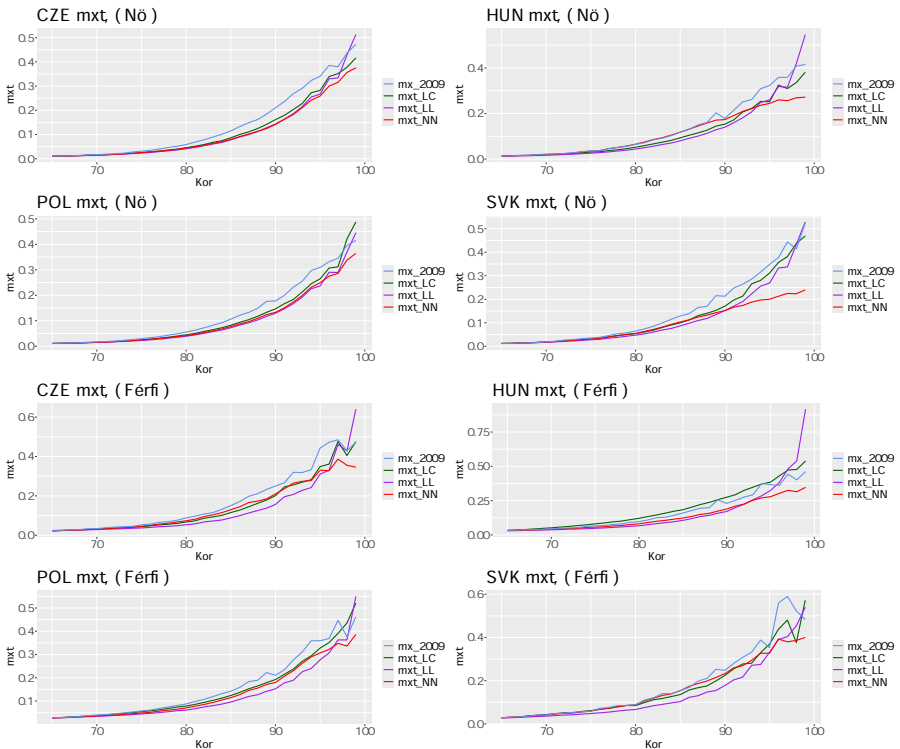
6. ábra. MSE értékek koronként a férfi adatok tesztalmazán

Fontos megjegyezni, hogy mivel a neurális hálózatok nem sztochasztikus modellek, ezért az ezek segítségével készített előrejelzések nem tartalmaznak konfidenciaintervallumokat⁴, bár az átlagos négyzetes hibák megközelítőleg jellemzik a pontbecslések pontosságát.

⁴Schnürch és Korn [2022] speciálisan az itt nem tárgyalt konvolúciós neurális hálózatok, Marino és szerzőtársai [2021] pedig speciálisan az LC-LSTM modell esetére mutatnak be egy-egy olyan technikát, amellyel konfidenciaintervallumok is becsülhetők. Ez a probléma kör azonban túlmutat a jelen tanulmány keretein.

A tesztelő halmazon kívül elkészítettünk hosszabb távú előrejelzéseket is, hogy vizsgálhassuk a neurális hálós módszerek stabilitását, valamint kiszámítottuk különböző módszerekkel a 65 éves korban évente 1 Ft-ot fizető életjáradékok egyszeri nettó díját, hogy bemutathassunk egy gyakorlati szempontból relevánsnak nevezhető példát. Neurális hálós modellek esetén minden ország és nem kombinációra a legjobb modellt választottuk a fent bemutatottak közül. Az életjáradék esetében a maximális kort 99 évnek, a technikai kamatlábat 3%-nak választottuk meg. A predikciót ebben az esetben is 2010-től indítottuk – ahol a tanuló és tesztelő halmaz határa volt.

A 7. ábra bemutatja, hogy az egyes nemek és országok esetén a különböző megközelítésekkel milyen mortalitási rátákat kapunk a 2009-ben 65 éves kohorsz tagjaira 65 éves kortól 99-ig. A viszonyítási alap a tanuló tesztelő halmaz határán a 2009-es periódus halandósági tábla mortalitási rátái.



7. ábra. Halandósági ráta előrejelzések különböző módszerekkel országonként és nemenként

Az 5. táblázatban láthatók a női adatokra vonatkozó egyszeri nettó díjak 65 éves korban induló évente 1 Ft-ot fizető életjáradékok esetén.

Modell	CZE	HUN	POL	SVK
Statikus (2009)	14,23	13,78	14,43	13,82
LC	14,97	14,40	15,07	14,29
LL	15,23	14,92	15,43	14,78
NN	15,14	13,87	15,23	14,40

5. táblázat. Életjáradékok egyszeri nettó díjai női adatokra, Ft

Általánosságban az mondható el, hogy a LC modell adja a legkisebb díjat a statikus megközelítés után, a neurális hálós modellek a középsőt, míg a LL modell a legmagasabbat. Magyarország az egyetlen kivétel, ennek oka a fenti ábrán is látható, hogy 85-90 éves kor környékére a neurális háló magasabb mortalitási rátákat becsül, mint a klasszikus módszerek.

Férfi adatokra szintén elkészítettük ezeket a számításokat, az alábbi eredményeket kaptuk:

Modell	CZE	HUN	POL	SVK
Statikus (2009)	12,10	11,17	11,77	11,40
LC	12,82	10,48	12,04	11,52
LL	13,43	12,31	12,80	12,46
NN	12,61	11,71	12,39	11,52

6. táblázat. Életjáradékok egyszeri nettó díjai férfi adatokra, Ft

6 Összefoglalás

Tanulmányunkban a visegrádi országok halandósági adatainak elemzésével és előrejelzésével foglalkozunk, a hagyományosan széles körben alkalmazott LC modell mellett a multipopulációs LL modellel és visszacsatolt neurális hálózatokkal. A vizsgált országok halandósági mintázata a szocializmus idején tapasztalt sajátosságok miatt eltér a nyugat-európai országok halandósági trendjétől, ezért fontos külön elemezni azokat. Elemzésünk során a visegrádi országokra direkt megközelítésen alapuló RNN, LSTM és GRU modelleket készítettünk. Optimalizáltuk a hiperparamétereiket, kiválasztottuk a legjobb modelleket, majd előrejeleztük a mortalitási rátákat egy előre definiált tesztelő halmazon, végül összességében és korcsoportonként is összehasonlítottuk egymással a modellek eredményeit a négy ország és mindkét nem adatain.

Az összesített eredmények alapján a legjobban tanított neurális hálós modellek érték el minden esetben a legjobb teljesítményt a tesztelő halmazon. Fontosnak tartjuk az előrejelzések robusztusságát, így ensemble modelleket is készítettünk. A vizsgált nyolc populációban, a szlovák férfi és lengyel adatok kivételével összességében mindenhol az ensemble neurális hálók érték el a legjobb eredményt. Az említett két populáció adatain az LL modell hibája volt a legkisebb. Életkorok szerint vizsgálva a modelleket az volt tapasztalható, hogy az idősebb korosztályban legtöbbször az LL modell volt a legjobb, míg a neurális hálók inkább a középkorú és a fiatalabb korcsoportokban érték el a legjobb eredményeket. Az eredményeinket azonban a nemzetközi szakirodalomban publikált eredményekhez nem lehet hasonlítani. Egyrészt a szerzők sokszor másfajta modelleket és más megközelítéseket alkalmaztak. Másrészt

külön a visegrádi országokat vagy konkrétan Magyarországot nem vizsgálták korábban.

A jelen tanulmányban Szentkereszti és Vékás [2022] cikkéhez képest vizsgálatunkat Magyarországon túlra, a hasonló múltbeli trendeket mutató visegrádi országok csoportjára terjesztjük ki. Számos visszacsatolt neurális hálózati architektúrát kipróbáltunk: a korábbi LSTM háló mellett RNN és GRU modellek eredményeit is ismertettük. Ezenkívül a robusztusabb eredmény érdekében a tesztelő halmazon legjobban teljesítő hálóval szemben az ugyanazon hiperparaméterekkel készített modellek előrejelzéseinek az átlagát is bemutatottuk. Továbbá a legjobban tanított neurális hálókkal készítettünk hosszabb távú előrejelzéseket is, valamint vizsgáltuk a statikus és a különböző előrejelző módszerekkel készített dinamikus díjszámítással kapott életjáradékok nettó díjait.

További kutatási irány lehet, hogy a közép-kelet-európai országok halandósági adatait a szakirodalomban már megjelent egyéb gépi tanulási módszerekkel is megvizsgáljuk, és elemzésünket további országokra terjesztjük ki. Különálló modellek helyett lehet készíteni egy egységes modellt is, amely az összes vizsgált ország adatait tartalmazza. Fontos lehet még vizsgálni a neurális hálók közép- és hosszú távú előrejelzéseinek az eredményeit. Eredményeinket felhasználva újragondolhatók bizonyos demográfiai előrejelzések és nyugdíjszámítások mögötti feltételezések, emellett az életbiztosítási díjkalkuláció is pontosabbá tehető a statikus (periódus) vagy az LC modellen alapuló kohorsz halandósági táblák használatával szemben.

Irodalom

1. Ágoston, K. Cs., Burka, D., Kovács, E., Vaskóvi, Á. & Vékás, P. (2019). Klaszterelemzési eljárások halandósági adatokra. *Statisztikai Szemle*, 97(7), 629–655. <https://doi.org/10.20311/stat2019.7.hu0629>
2. Ágoston K. Cs. – Kovács E. (2000): *Halandósági modellek. Aktuárius jegyzetek*. 3. köt. Budapesti Corvinus Egyetem. Budapest.
3. Allaire, J. & Chollet, F (2022). keras: R Interface to 'Keras'. R package version 2.9.0, <https://CRAN.R-project.org/package=keras> .
4. Bajkó, A., Maknics, A., Tóth, K. & Vékás, P. (2015). A magyar nyugdíjrendszer fenntarthatóságáról. *Közgazdasági Szemle*, 62(12), 1229–1257. <https://doi.org/10.18414/ksz.2015.12.1229>
5. Banyár, J. (2011). Javaslat az optimális járadékfüggvényre. *Sigma*, 42(3-4), 105–124.
6. Banyár, J. (2012). *A kötelező öregségi életjáradékok lehetséges modelljei*. Gondolat Kiadó. ISBN 978 963 693 422 4.
7. Banyár, J. (2017). Conflict or Fair Deal Between the Generations? Alternative Economics for Pensions. *Review of Sociology*, 27(4), 61–82.
8. Bengio, Y., Simard, P. & Frasconi, P. (1994). Learning long-term dependencies with gradient descent is difficult. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 5(2), 157–166. <https://doi.org/10.1109/72.279181>
9. Bjerre, D. S. (2022). Tree-based machine learning methods for modeling and forecasting mortality. *ASTIN Bulletin*, 52(3): 765–787. <https://doi.org/10.1017/asb.2022.11>

10. Brouhns, N., Denuit, M. & Vermunt, J. K. (2002). A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables. *Insurance: Mathematics and Economics*, 31(3), 373–393. [https://doi.org/10.1016/S0167-6687\(02\)00185-3](https://doi.org/10.1016/S0167-6687(02)00185-3)
11. Cho, K., van Merriënboer, B., Bahdanau, D., Bougares, F., Schwenk, H. & Bengio, Y. (2014). Learning Phrase Representations using RNN Encoder-Decoder for Statistical Machine Translation (preprint). arXiv:1406.1078. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1406.1078>
12. Deprez, P., Shevchenko, P. V. & Wüthrich, M. V. (2017). Machine Learning Techniques for Mortality Modeling. *SSRN Electronic Journal*. <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2921841>
13. Goodfellow, I., Bengio, Y., & Courville, A. (2016). *Deep Learning*. MIT Press.
14. Gogola, J. & Vékás, P. (2020). Élettartam-kockázat Csehországban és Magyarországon. *Biztosítás és Kockázat*, 7(3-4), 14–26. <http://dx.doi.org/10.18530/BK.2020.3-4.14>
15. Human Mortality Database (2024). University of California, Berkeley (USA), and Max Planck Institute for Demographic Research (Germany). Available at www.mortality.org or www.humanmortality.de (letöltés dátuma: 2024.01.05.).
16. Kovács, E. & Vékás, P. (2017). Mortality and Longevity Risk. In: Maurizio, Pompella; Nicos, A Scordis (szerk.) *The Palgrave Handbook of Unconventional Risk Transfer*. New York, Amerikai Egyesült Államok, Palgrave Macmillan. 269–297. ISBN 978-3319592961.
17. Kingma, D. P. & Ba, J. (2014). Adam: A method for stochastic optimization (preprint). arXiv, arXiv:1412.6980. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1412.6980>
18. Kovács, E., Réthallér, O. & Vékás, P. (2015). Modellpontok szerepe a nyugdíjhatásvizsgálatban. *Közgazdasági Szemle*, 62(12), 1328–1342. <http://dx.doi.org/10.18414/KSZ.2015.12.1328>
19. Lee, R. D. & Carter, L. R. (1992). Modeling and Forecasting U. S. Mortality. *Journal of the American Statistical Association*. 87(419), 659–671. <https://doi.org/10.2307/2290201>
20. Levantesi, S. & Nigri, A. (2020). A random forest algorithm to improve the Lee–Carter mortality forecasting: Impact on q-forward. *Soft Computing*, 24(12), 8553–8567. <https://doi.org/10.1007/s00500-019-04427-z>
21. Levantesi, S. & Pizzorusso, V. (2019). Application of machine learning to mortality modeling and forecasting. *Risks*, 7(1), 26. <https://doi.org/10.3390/risks7010026>
22. Li, N. & Lee, R. (2005). Coherent mortality forecasts for a group of populations: An extension of the Lee–Carter method. *Demography*, 42(3), 575–594. <https://doi.org/10.1353/dem.2005.0021>
23. Májer, I., & Kovács, E. (2011). Élettartam-kockázat – a nyugdíjrendszerre nehezedő egyik teher. *Statisztikai Szemle*, 89(7-8), 790–812.
24. Marino, M., Nigri, A. & Levantesi, S. (2021). Deepening Lee-Carter for longevity projections with uncertainty estimation (preprint). arXiv:2103.10535. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2103.10535>
25. Németh, A. O., Németh, P. & Vékás, P. (2020a). Demographics, labour market, and pension sustainability in Hungary. *Society and Economy*, 42(2), 146–171. <https://doi.org/10.1556/204.2019.015>

26. Németh, A. O., Németh, P. & Vékás, P. (2020b). Gyermekvállalás és nyugdíjak a visegrádi országokban. *Köz-Gazdaság*, 15(2), 120–129. <http://doi.org/10.14267/RETP2020.02.16>
27. Nigri, A., Levantesi, S., Marino, M., Scognamiglio, S. & Perla, F. (2019). A Deep Learning Integrated Lee-Carter Model. *Risks*, 7(1), 33. <https://doi.org/10.3390/risks7010033>
28. Perla, F., Richman, R., Scognamiglio, S., & Wüthrich, M. V. (2021). Time-series forecasting of mortality rates using deep learning. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2021(7), 572–598. <https://doi.org/10.1080/03461238.2020.1867232>
29. Petneházi G., & Gáll J. (2019): Mortality rate forecasting: can recurrent neural networks beat the Lee–Carter model? (preprint). arXiv, arXiv:1909.05501. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1909.05501>
30. R Core Team (2024). R: A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. www.r-project.org
31. Richman, R. (2018). AI in Actuarial Science. *SSRN Electronic Journal*. <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3218082>
32. Richman, R. & Wüthrich, M. V. (2019). Lee and Carter go Machine Learning: Recurrent Neural Networks. *SSRN Electronic Journal*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.3441030>
33. Richman, R. & Wüthrich, M. V. (2021). A neural network extension of the Lee–Carter model to multiple populations. *Annals of Actuarial Science*, 15(2), 346–366. <https://doi.org/10.1017/S1748499519000071>
34. Robben J. (2022). MultiMoMo: Multi-population mortality models. R package version 0.0.0.9000. <https://rdr.io/github/RobbenJ/MultiMoMo/#vignettes>
35. Rumelhart, D., Hinton, G. & Williams, R. (1986). Learning representations by back-propagating errors. *Nature*, 323, 533–536. <https://doi.org/10.1038/323533a0>
36. Schnürch, S., & Korn, R. (2022). Point and interval forecasts of death rates using neural networks. *ASTIN Bulletin*, 52(1):333–360. <https://doi.org/10.1017/asb.2021.34>
37. Szentkereszt, G. & Vékás, P. (2022). Magyar halandósági ráták előrejelzése visszacsatolt neurális hálózatokkal. *Statisztikai Szemle*, 100(10), 905–922. <https://doi.org/10.20311/stat2022.10.hu0905>
38. Varga, L. (2023). Fitting and forecasting multi-population mortality models based on Hungarian regional data. *Regional Statistics*, 13(5), 863–898. <https://doi.org/10.15196/RS130504>
39. Vékás, P., van der Vlerk, M. H. & Klein, Haneveld W. K. (2012). Optimizing existing railway timetables by means of stochastic programming (working paper). <https://edoc.hu-berlin.de/handle/18452/9080>
40. Vékás, P. (2017). Nyugdíjcélú életjáradékok élettartam-kockázata az általánosított korcsoport-időszak-kohorsz modellkeretben. *Statisztikai Szemle*, 95(2), 139–165. <https://doi.org/10.20311/stat2017.02.hu0139>
41. Vékás, P. (2018). Változások a halandóságjavulás mintázatában Magyarországon. *Biztosítás és Kockázat*, 5, 34–47. <https://doi.org/10.18530/bk.2018.3.34>
42. Vékás, P. (2019). Az élettartam-kockázat modellezése. Budapest, Magyarországi. Budapesti Corvinus Egyetem. ISBN: 9789635037681.

43. Vékás, P. (2020). Rotation of the age pattern of mortality improvements in the European Union. *Central European Journal of Operations Research*, 28(3), 1031–1048. <https://doi.org/10.1007/s10100-019-00617-0>
44. Vékás, P. (2021). A nyugdíjrendszer fenntarthatósága a munkapiaci folyamatok függvényében – jelenlegi körkép és kitekintés 2030-ig (preprint). Corvinus Kutatások. <https://unipub.lib.uni-corvinus.hu/6238/>
45. Villegas, A. M., Kaishev, V. & Millossovich, P. (2016). StMoMo: An R package for stochastic mortality modelling. *SSRN Electronic Journal*. <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2698729>
46. Wüthrich, M. V. & Merz, M. (2022). *Statistical Foundations of Actuarial Learning and its Applications*. Springer. ISBN 978-3-031-12408-2.

FORECASTING MORTALITY RATES OF VISEGRÁD GROUP COUNTRIES BY NEURAL NETWORKS

In our paper, we apply recurrent neural networks, which have been used with great success in many fields in recent years, to predict age-specific mortality rates for ages 18 to 99 years for the Czech Republic, Poland, Hungary and Slovakia between 1970 and 2019, separately for women and men. We investigate the popular Recurrent Neural Network, Long-Short Term Memory and Gated Recurrent Unit architectures, and put a special emphasis on the optimization of the hyperparameters of the networks by applying cross-validation and splitting the base period into learning and testing subsets. We compare our predictions with those of both the classical Lee–Carter and the coherent Li–Lee multipopulation models in terms of accuracy, and determine which procedures are able to generate the most reliable projections for each country, gender and age group. Our models can be applied in practice by life, pension and health actuaries as well as demographers.

Key words: forecasting, neural networks, demography, insurance. *JEL codes:* J11, C53