A HITELPORTFÓLIÓK MAXIMÁLIS BEDŐLÉSI VALÓSZÍNŰSÉGÉNEK MEGHATÁROZÁSA I. AZ EGYTERMÉKES VASICEK-MODELL EGY MAGYARÁZÓ VÁLTOZÓVAL[1]

VÖRÖS JÓZSEF – SCHEPP ZOLTÁN
Pécsi Tudományegyetem, Közgazdaságtudományi Kar

Hitelezési veszteségek a befolyásoló tényezők jövőbeni állapota ismeretének hiányából erednek, és e tényezőket a belső sajátosságokat kifejező, úgynevezett idioszinkratikus, illetve a külső, úgynevezett makró okok csoportjába sorolja az irodalom. Kedvező külső körülmények fennállása esetén is 2-4%-ra tehető a hitelek bedőlési aránya, melyre fel lehet készülni. Viszont a külső környezetben létezhetnek olyan kedvezőtlen makró állapotok, melyeknek bekövetkezése a bedőlések arányának növekedését vonja maga után. Fontos ezért annak elemzése, hogy milyen makró tényezők, és azok milyen mértékben okozzák a bedőlések arányának változását. A Vasicek-modell használata ismert a pénzügyi szférában: a Vasicek-modell egyetlen hitelterméktípus bedőlési valószínűségének meghatározását tűzi ki célul, és a külső, úgynevezett makróhatásokat egyetlen magyarázó változóban sűríti össze. E tanulmány megállapítja, hogy a Vasicek-modell bedőlési valószínűségre adott becslése nagyon érzékeny az input paraméterekre, melyek száma egyébként is nagy, továbbá gyakran valós értékük nehezen mérhető. Fontos azt is megjegyezni, hogy a modell nehezen bizonyítható összefüggéseket tételez fel. A modell értékeit megtartva e tanulmány alapvetően két irányban indított modellcsaládot enged útjára, melyek kidolgozásánál alapvető cél volt, hogy egy banki felső vezetés, vagy felügyeleti szerv számára könnyen áttekinthető (pl. egy ábrában összefoglalható), hasznos módszertant javasoljunk, ahol az inputok a lehető legegyértelműbbek és mérhetők.

E tanulmánynak folytatását szánjuk, mely publikációban több hiteltermékre vonatkozóan, szimultán módon határozzuk meg a maximális veszteségek nagyságát, amikor több külső (makró) tényezőt is felhasználhatunk magyarázó változóként.

Kulcsszavak: hitelezés, bedőlési valószínűség, nemkonvex programozás

1 Bevezetés

Veszteségek várható nagyságának megállapítása minden egyes hiteltermék vonatkozásában, továbbá a teljes hitelportfólión is, fontos feladat a hitelintézetek számára, hiszen az ehhez kapcsolódó bedőlési valószínűségek helyes

[1]Beérkezett 2023. december 8. DOI: https://doi.org/10.15170/SZIGMA.54.1205. E-mail: voros.jozsef@ktk.pte.hu, schepp.zoltan@ktk.pte.hu.

megállapítása tompíthatja a kritikus helyzetek hatását, segíti egy hiteltermék profitabilitását befolyásoló tényezők megismerését, és elősegítheti az egészséges hitelportfólió kialakítását. Számviteli szempontból is nagy jelentőséggel bír, hogy különböző makróállapotok függvényeként megismerjük a várható veszteségeket, hiszen a várható veszteségekre fedezetet kell biztosítani, és ez nagy hatással bír az eredménykimutatásra. Különösen a 2008-as válság hatására, de akár a világjárványra, a háborús helyzetre tekintettel is, a felügyeleti szervek figyelmében nagyobb hangsúllyal szerepel annak igénye, hogy a pénzügyi szervezetek gondosabban készüljenek fel a kritikus állapotok kezelésére, és ismerjék fel azokat az extrém makróállapotokat, melyek hatása a tőkekövetelményre rendkívüli lehet. Garcia-Céspedes és Moreno (2017) kifejtik, hogy a felügyeleti szervek előszeretettel használnak feltétel nélküli kockázatkezelési modelleket a tőkekövetelmények meghatározására, és ennek következményeként a pénzügyi intézmények is nagyobb intenzitással használnak kockázati tényezőkkel módosított megtérülési mutatókat.

Hitelek folyósítása során a hitelezőknek figyelembe kell venni a makróállapotoknak mind a jelenlegi, mind pedig a jövőbeni várható alakulását. Ilyen makrótényezők lehetnek például a reáljövedelmek, a GDP, vagy a kamatlábak várható alakulása, hogy említsünk néhányat. Legalább ennyire fontos egy befektetés jövőbeni értékének alakulása, hiszen ez alapját képezi a felvett hitelek visszafizethetőségének. Az elképzelés Merton (1974) gondolataiból ered, mely szerint egy kockázatos hitel értéke a vállalat értékének alakulásától függ, és így a bedőlési kockázat összefüggésben áll a vállalati értékkel, mely viszont közös piaci jegyek alakulásával korrelál. Egy hitel akkor dől be, amikor a vállalat értéke az adott időpontban a fennálló hitel mennyisége alá kerül. Vasicek (1987) formulázta meg az első, egy makrófaktoros modellt, melyet később Finger (1999), majd Gordy (2003) módosított. E modellben a vállalati értéket két véletlen tényező alakítja: az egyik a vállalati sajátosságokat kifejező, úgynevezett idioszinkratikus véletlen tényező, a másik pedig a rejtett, szunnyadó (látens) makró faktor.

Mára gyakorlatilag a Vasicek (1987)-féle modell a Basel-típusú szabályozói tőkekövetelmény meghatározásának alapjává vált, és a pénzügyi intézmények széles körben használják. E modell segítségével homogén pénzügyi eszközök bedőlési valószínűségét határozzák meg azon feltétel mellett, hogy e csoporthoz tartozó bármely két eszközérték alakulása közötti korreláció azonos, továbbá a bedőlés valószínűsége feltételes a makróállapot függvényében. A modellnek fontos tulajdonsága, hogy lineáris kapcsolatot tételez fel a bedőlési valószínűség inverz értéke és a makróállapot között, azaz az $N^{-1}(PD)$ és a makróállapot között, ahol N^{-1} a standard normális eloszlásfüggvény (N) inverz függvényét jelöli, és PD a bedőlés valószínűsége (probability of default). Az elképzelés kiterjeszthető arra az esetre is, amikor nem csak egy változóval jellemezzük a makróállapotot. Ezt a problémát e tanulmány folytatásaként, egy következő cikkben tárgyaljuk. Az általunk javasolt eljárás előnye igazán majd akkor mutatkozik, amikor a külső, makró állapotot több változóval jellemezzük. Vizsgálatunkban így azt tételezzük majd fel, hogy az $N^{-1}(PD)$ érték és a makróállapotot meghatározó változók közötti viszonyt egy többváltozós, lineáris regressziós függvénnyel írhatjuk le, mely rendelkezésünkre áll, és ráadásul magas determinációs együtthatóval bír. Ennek részletesebb kifejtése megtalálható Vörös (2023) alatti tanulmányában is.

E tanulmány célja a Vasicek-modell tulajdonságainak feltárása. Ennek céljából a következő fejezet a modellmegfogalmazást írja le, a harmadik elvégzi a modell érzékenységvizsgálatát, a negyedik fejezet pedig a bedőlési arányok eloszlásfüggvényének meghatározásával foglalkozik. Az ötödik fejezet a Vasicek-modell vélt hiányosságainak orvoslása céljából javasol eljárásokat. E tanulmányt követő cikkünk innen fog indulni, és többtermékes, nem homogén portfóliók maximális veszteségtartamának meghatározásával foglalkozik, amikor a külső körülményeket több, véges számú magyarázó változó írhatja le. A következő tanulmány foglalja össze a következtetéseket is.

2 A Vasicek-modell leírása

A hitelek bedőlési valószínűségének meghatározására használt Vasicek-féle eljárás a pénzügyi irodalomban jól ismert, eszközérték alakulására alkalmazott modellből indul ki, nevezetesen azt állítja, hogy egy pénzügyi eszköz értéke, ami a jelenben legyen B, T periódus (év) elteltével az alábbi értékkel bír:

$$Be^{(x-0.5s^2)T+\varepsilon s\sqrt{T}},$$

ahol x jelölje az eszköz várható értéknövekményét (pl. évi 5%, akkor $x = 0.05$), s e növekmény szórását, és ε az úgynevezett meglepetés faktor, aminek értéke véletlenszerű, de azt tételezzük fel, hogy standard normális eloszlású, azaz várható értéke nulla, szórása pedig 1. Ezt úgy jelöljük, hogy ε eloszlása $N(0,1)$.

Tegyük fel, hogy a felvett hitel nagysága D. A T-edik évben akkor következik be a bedőlés, ha az eszközérték kisebb lesz, mint D. Keressük tehát az olyan kimeneteket, amikor az eszközérték kisebb D-nél. Azaz, mikor lesz

$$Be^{(x-0.5s^2)T+\varepsilon s\sqrt{T}} < D.$$

Osszuk el mindkét oldalt D-vel. Ekkor

$$\frac{B}{D}e^{(x-0.5s^2)T+\varepsilon s\sqrt{T}} < 1.$$

Vegyük mindkét oldal logaritmusát, és mivel a természetes alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő, az egyenlőtlenség iránya nem változik. Azaz, következik, hogy

$$\ln\Big(\frac{B}{D}e^{(x-0.5s^2)T+\varepsilon s\sqrt{T}}\Big) < \ln 1,$$

ami nem más, mint

$$\ln\frac{B}{D} + (x-0.5s^2)T + \varepsilon s\sqrt{T} < 0.$$

Ebből ε-t kifejezve

$$\varepsilon < \frac{\ln \frac{D}{B} - (x - 0.5s^2)T}{s\sqrt{T}}.$$

Vagyis, ha a sors úgy hozza, hogy ε (ami a meglepetésfaktor, valószínűségi változó, értéke különböző valószínűségekkel bármi lehet a mínusz és plusz végtelen között, normális eloszlással, 0 várható értékkel és 1 szórással) kisebb lesz, mint $\frac{\ln \frac{D}{B} - (x-0.5s^2)T}{s\sqrt{T}}$, a bedőlés bekövetkezik.

A Vasicek-modell egy másik (erős) feltételezése, hogy az eszközérték alakulása speciális módon korrelál makrógazdasági mutatókkal, mondjuk a GDP %-os alakulásával. Tételezzük fel, hogy a GDP %-os alakulása normális eloszlást követ. Illesszünk a GDP %-os alkulásására egy eloszlásfüggvényt, konvertáljuk ezt egy standard normális eloszlássá, és mutassa m a makrogazdaság állapotát. Ekkor, ha $m = 0$, akkor átlagos növekedés következett be, ha $m = -1$, akkor a GDP az átlag alatt egy szórásnyival kevesebbel növekedett, hasonlóan, ha $m = 1$, akkor az átlag fölött egy szórásnyival növekedett. Itt jegyezzük meg, hogy ha $m = -3$, azaz a makrógazdaság a bázisállapotnál három szórásnyinál kevesebbet növekedett (esetleg már csökkent), ezen eset bekövetkezésének valószínűsége mindössze 0,1%, vagyis 1:1000-hez. Annak valószínűsége, hogy a GDP az átlag + a szórás 1.28-szorosa alatt lesz 90%, és kb. 10% a valószínűsége, hogy GDP %-os növekménye az átlag − 1.28(szórás) alatt lesz.

A Vasicek-modellben az eszköz meglepetésfaktor (ε) két tényező eredője: a külső hatásoktól mentes, a pénzügyi eszközhöz köthető meglepetésfaktor (v) (például, hitelfelvétel esetén a vállalati management által nem látott hatások eredménye a beruházással kapcsolatban), továbbá a makrógazdasági állapotfaktor (m) (például egy kormány monetáris politikája vagy a GDP alakulása) közötti speciális kapcsolat. Formálisan az alábbi:

$$\varepsilon = m\sqrt{n} + v\sqrt{1-n},$$

ahol $\sqrt{n}$ a makrogazdaság és az eszközérték alakulása közötti korrelációs együttható, ami csak pozitív lehet, továbbá a portfólióba tartozó bármely két eszközérték alakulása közötti korreláció n (vagyis a portfólióba tartozó eszközértékek közötti korrelációból következik az eszközérték–makróállapot korreláció nagysága). A v az eszközérték sajátosságát kifejező, makróállapottól független véletlen tényező. Fontos leszögezni, hogy mind az m, mind a v standard normális eloszlású valószínűségi (véletlen) változók, vagyis nulla a várható érték, és egy a szórás ($N(0,1)$). Tehát három (az ε, a v és az m) standard normális eloszlással bíró valószínűségi változónk van, ezek mindegyike a mínusz és plusz végtelen között bármely értéket felvehet. A változók bázisállapotának a nulla tekinthető, és egy konkrét realizáció tulajdonképpen a bázisállapottól való távolságot fejezi ki. Mivel a szórás pedig egy, ez a konkrét realizáció úgy is felfogható, hogy az hány szórásnyi távolságra van a bázisállapottól.

Felhasználva az ε-ra kapott új kifejezést, bedőlés akkor következik be, amikor

$$m\sqrt{n} + v\sqrt{1-n} < \frac{\ln\frac{D}{B} - (x - 0.5s^2)T}{s\sqrt{T}}.$$

Ebből pedig az ered, hogy egy eszköz akkor dől be a makrogazdasági állapot (m) függvényében, amikor a véletlenszerű eszközszintű meglepetésfaktor (v) szintjére az

$$v < \frac{\frac{\ln\frac{D}{B} - (x-0.5s^2)T}{s\sqrt{T}} - m\sqrt{n}}{\sqrt{1-n}}$$

összefüggés érvényesül.

A kérdés, mi annak a valószínűsége, hogy ez bekövetkezik. Ez a kulcsválasza a Vasicek-modellnek, ugyanis m adott értéke mellett, amikor egy portfólión belül az azonos típusú hitelek számossága nagyon magas (elméletileg a végtelen felé kell tartson), akkor a bedőlő hitelek részaránya a bedőlés valószínűségéhez konvergál.

3 A Vasicek-modell érzékenységvizsgálata

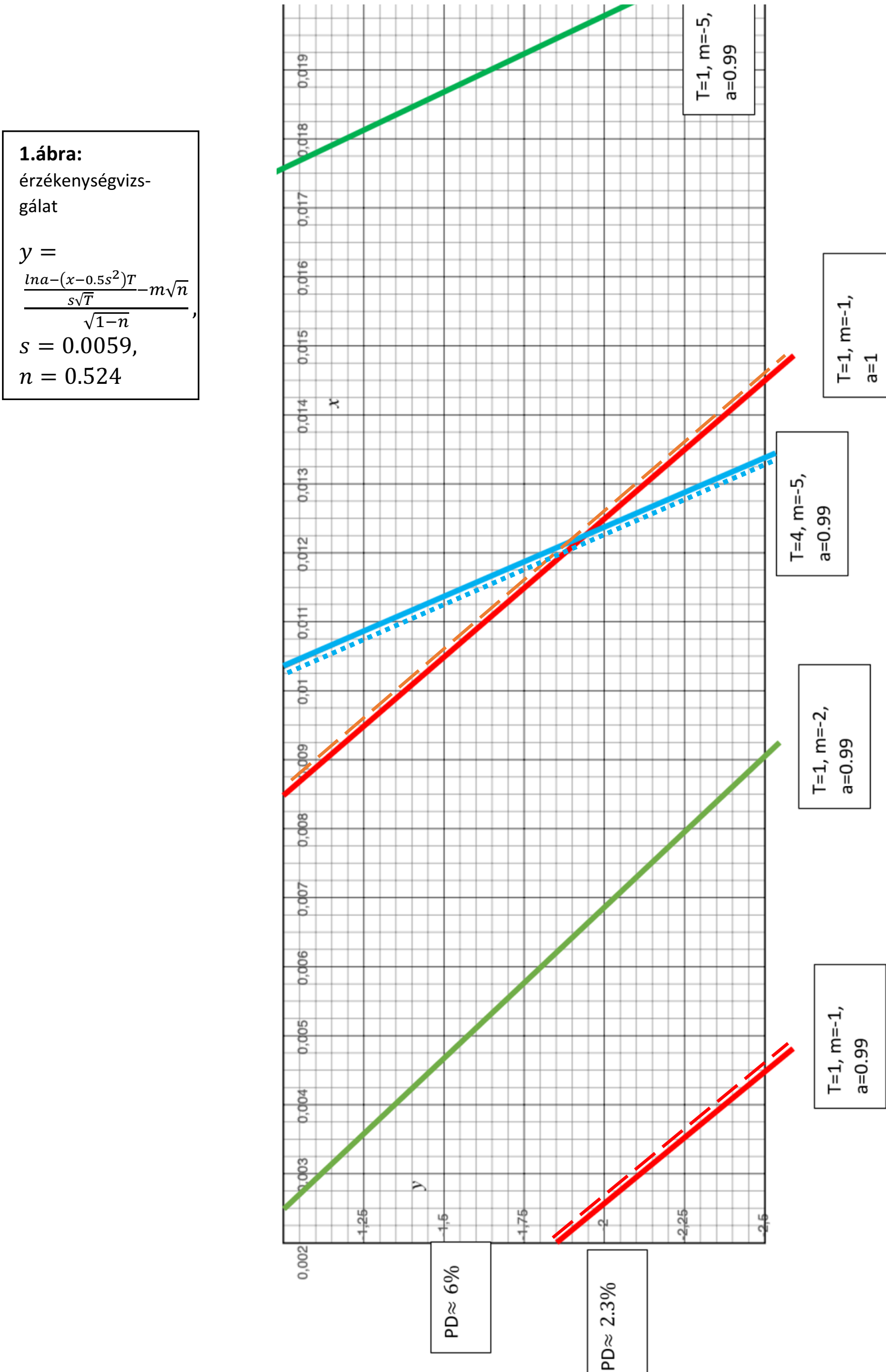
A Vasicek-modellnek a bedőlések valószínűségére adott válasza nagyon érzékeny néhány input paraméterre, ráadásul e paraméterek meghatározása nem szűkíthető le eléggé vékony sávokra ahhoz, hogy ezek alapján megfontolt döntést lehessen hozni.

Illusztrációként a személyi kölcsönök bedőlési valószínűségének meghatározására használjuk a Vasicek-modellt. Mint minden Vasicek-modellnek, ennek kulcsfontosságú input paraméterei közé tartozik a befektetés értékének alakulása, és ezen érték, valamint valamiféle makrógazdasági mutató közötti korrelációs mutató. Elfogadható, hogy személyi kölcsönök esetén a hitelek visszafizetésének forrása a reáljövedelmek alakulása, és ezt felfoghatjuk az eszközérték alakulásaként. Jelölje ennek évi %-os várható növekményét x, ennek évi becsült szórását pedig s. Ha az x értéket változónak tekintjük, figyelemmel követhetjük, hogy a PD mennyire érzékeny x változására (az *1. ábrán* a vízszintes tengely mutatja az x értékeit). Az x értékének alakulására majd a döntéshozónak kell becslést adni. A döntéshozó által meghatározott x értéket (vagyis a reáljövedelmek %-os alakulásának vélt értékét) kell függvényünkbe behelyettesíteni, és ebből következtetünk majd a bedőlés valószínűségére. A KSH adataiból kiszűrhető például, hogy a 2018-cal záruló utóbbi öt évben a reáljövedelmek %-os (előző év %-ában mért) növekményének éves átlagos szórása $s = 0{,}00594$, így modellünk egyik feltételezése lehet, hogy a reáljövedelmek éves átlagos szórása kb. 0,6% (az utóbbi öt évben). A portfólión belüli eszközértékek közötti korrelációt $n = 0{,}524$-ben határoztuk meg (következésképpen a reáljövedelmek és a GDP volumen alakulása közötti korreláció értéknek a Vasicek-modellben 0,72-nek *kell* lennie).

Valamennyi kalkuláció során e két legfontosabb input paraméter azonos marad, viszont a makróállapot (melyet az m paraméter azonosít), a tőkestruktúra (a paraméter, $a = D/B$) és az időhorizont értékeire (T paraméter) különböző kimeneteket használunk, hogy lemérjük a PD alakulását. Ezen inputokra, amikor az y értéke (lásd az 1. ábra tetején a képletszerű meghatározását, a függőleges tengely pedig az y értékeket mutatja) például $-1{,}55$, akkor a PD 6%-os, amikor -2, akkor a PD 2,3%-os (a személyi kölcsönök PD-jei az utóbbi 10-12 évben e sávban mozogtak az OTP-nél).

Az 1. ábrán tekintsük például a $T = 1$, $m = -1$, $a = 1$ esetet, melynek kimenetét a reáljövedelmek %-os alakulásának függvényében az ábra közepén futó piros/szaggatott egyenes adja. Az időhorizont tehát egy év ($T = 1$), a hitelnek nincs fedezete ($a = 1$, nincs saját tőke a befektetésben), és a makróállapot $m = -1$. A makróállapotról így azt tételezzük fel, hogy a GDP átlagos növekménye alatt egy szórásnyival nő csak. Tekintettel arra, hogy a GDP az említett években átlagosan 3,92%-kal nőtt volumenértékben, évi átlagos szórása pedig 0.958 volt, gyakorlatilag azt tételezzük fel, hogy a GDP növekedése 3% lesz. Ekkor a függőleges tengelynél, amikor a $-1{,}5$ értéknél (a PD ekkor kb 6%-os) vízszintesen elkezdünk jobbra haladni, a piros/szaggatott egyeneshez az $x = 1{,}05\%$ pontba jutunk. Ha a döntéshozó úgy ítéli meg, hogy 3%-os GDP (volumen)növekmény (makró állapot $= -1$) mellett a reáljövedelmek 1,05%-kal nőnek, akkor a PD 6%-ra becsülhető. Amikor viszont a -2-nél (PD ekkor 2,3%) haladunk jobbra, az $x = 1{,}25\%$-os reálnövekménynél jutunk el a piros/szaggatott egyeneshez. Tehát, ha a döntéshozó úgy ítéli meg, hogy 3%-os GDP növekedés mellett a reáljövedelmek 1,25%-kal nőnek, akkor 2,3%-os lesz a tervezett PD. A piros/szaggatott vonal haladási irányából kiolvasható, ha a reáljövedelmek 1,5-1,6%-kal nőnek, akkor 3%-os GDP növekedés mellett a bedőlésnek kb 1:1000 (ezer évente egy) az esélye. *Ebből az egy analízisből is jól látható, hogy a Vasicek-modell alkalmazása rendkívül körültekintően történhet, gyakorlatilag egy 0,2%-os hiba a reáljövedelmek becslésében a PD-ben 4%-os változást eredményez, melynek következményeit nehéz felvállalni.* Mondhatnánk: a reáljövedelmek alakulását 0,2%-os pontosságon belül képtelenség megbecsülni.

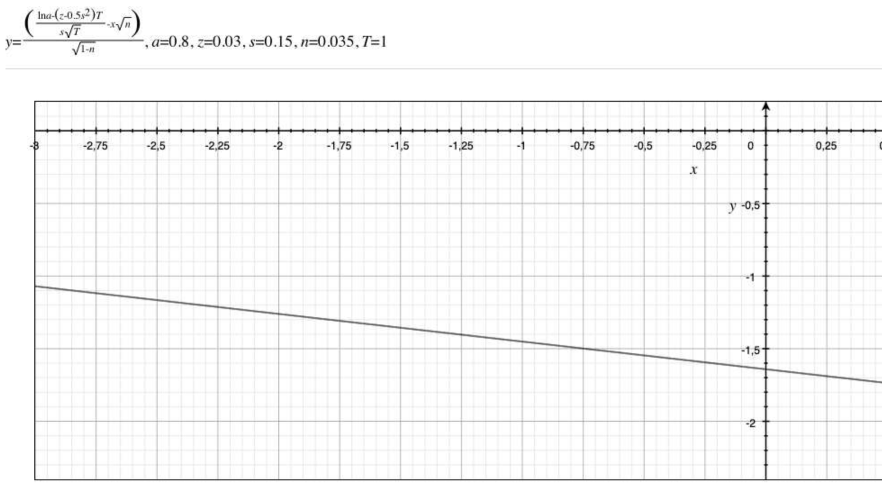
A középső piros/szaggatott vonallal jól összehasonlítható a bal oldali első piros/szaggatott vonal. A feltételezésekben csupán annyi a különbség, hogy a személyi kölcsönt felvevő 1%-kal beszáll a befektetésbe. Azt lehet mondani, a hatás dramatikus, a bedőlésnek nincs valószínűsége. Azért ebből is levonható tanulság: egy rövid ideig tartó, akár jelentős válság áthidalható, ha vannak tartalékok. Például, amikor az előző évek reáljövedelem-növekménye magas volt, valamennyi tartalék összejött a háztartásokban, egy ideig ez a puffer felhasználható a hitelek visszafizetésére (ez megfigyelhető az OTP bedőlési rátáján is 2012-ben. Annak ellenére, hogy a reáljövedelmek csökkentek, a bedőlés mértéke sokkal kisebb volt, mint 2009-ben, mert a 2009 előtti közvetlen években is reáljövedelem-csökkenés volt). *A tőkestruktúra (jelen esetben: a háztartások milyen mértékben használják fel korábban felhalmozott jövedelmüket) nehezen becsülhető paraméter, változásának hatása ismét olyan jelentős, hogy a PD-t alapvetően befolyásolja* (a két piros/szaggatott vonal nagyon messze van egymástól, pedig csak annyi történt, hogy a felvett hitel 1%-a saját tőkéből történik).



1. ábra. Érzékenységvizsgálat.

A két zöld/folytonos vonalat azért érdemes összehasonlítani, mert csak a makróállapotok különböznek. A legutolsó jobb oldali (zöld/folytonos) vonal olyan makróállapot elemez, mely még az 1:1000-nél is sokkal rosszabb, mert $m = -5$. Ez egy közel 4%-os átlagos GDP növekedés után kb. 1%-os csökkenést jelent. Amikor csak rövid távra tekintünk ($T = 1$), a magas bedőlési arány elkerülhetetlen, mert a reáljövedelmek több mint 2%-os növekedése eredményezne elviselhető mértékű, kb. 3-4%-os PD-t, azonban a reáljövedelmek ilyen mértékű növekedése elképzelhetetlen, mikor a GDP abszolút volumenben is csökken. A balról második (zöld/folytonos) vonal esetében $m = -2$, ami az előbbi okfejtés szerint kb. 2%-os GDP-növekedésnek felel meg az átlagos 4 helyett. Gyakorlatilag 1%-os reáljövedelem-emelkedés felett már nincs bedőlés. 2%-os GDP-növekedés mellett 1%-os reáljövedelem-növekedés tervezhető, de 0,7%-os növekedés mellett is csak kb. 2%-os PD valószínűsíthető. Az időhorizont kiterjesztésével kedvezőbb képet kapunk (középső kék/pontozott vonal). Látható az utolsó jobb oldali (piros/szaggatott) vonal összevetésével, hogy a jelentősen rossz makrogazdasági hatás ($m = -5$) ellenére, az időhorizont kiterjesztésével némileg stabilizálódik a helyzet, amennyiben a reáljövedelmek stabilan magasan maradnának. Ekkor viszont a makrogazdaság adósodik el.

A fentiekben az eszközérték alakulása függvényében láttuk a bedőlési valószínűségek alakulását, a vízszintes tengelyen az x az eszközérték alakulását mérte. Most a *2. ábrán* mérje az x, azaz a vízszintes tengely a makróállapot alakulását (a jelölést csak átmenetileg használjuk, hiszen x, mint az előző esetben, az eszközérték alakulásának várható értéke), és mint előzőleg, a függőleges tengely a bedőlési valószínűségekhez tartozó inverz értéket. A vállalkozás állapotát az alábbi input paraméterek írják le: az eszközérték 100, ebből a hitel nagysága 80. Az értéknövekedés 3%-os, az eszközérték szórása 15%, a makróállapot és az eszközérték közötti korrelációs együttható 0,18, vagyis a portfólióba tartozó eszközök között nem tételezünk fel gyakorlatilag korrelációt, mert ekkor $n = 0{,}035$. Mivel a korrelációs együttható négyzete a determinációs együttható, ez azt is jelenti, hogy a makrófaktor mindössze 3,5%-ban magyarázza az eszközérték alakulását. A bedőlési valószínűségekhez tartozó inverz értékeket a 2. ábra egyenese mutatja. Ezek alapján például, amikor a makrógazdaság bázisállapotban van, melyet úgy jellemzünk, hogy $m = 0$, akkor a bedőlés valószínűsége 4,9%-os (a függőleges tengelyt a vonalunk a $-1{,}65$ pontban metszi, ez a 4,9% bedőlési valószínűség inverz értéke). Figyelemre méltó, hogy ezen állapotra az OTP 3,6%-os bedőlést produkált átlagosan. Érdemes még megfigyelni az $m = -2{,}7$-es makróállapothoz tartozó bedőlési valószínűség inverzértéket. Az ábra alapján ez $-1{,}12$, amihez 13,6%-os bedőlési valószínűség tartozik. Az OTP teljesítménye ekkor 6% volt 2009-ben.



2. ábra. A Vasicek-modell érzékenysége a makróállapot függvényében

4 A bedőlési arányok eloszlásfüggvénye

A fentiekben tehát arra a következtetésre jutottunk, hogy amikor az eszközspecifikus, v-vel jelölt valószínűségi változó értéke az $\frac{\frac{\ln a-(x-0.5s^2)T}{s\sqrt{T}}-m\sqrt{n}}{\sqrt{1-n}}$ érték alá csökken (az itt szereplő jelöléseket a modellmeghatározás elején definiáltuk), akkor a bedőlés bekövetkezik. Kérdés, mi ennek a valószínűsége. Ezt így fejezzük ki:

$$P\left(v<\frac{\frac{\ln a-(x-0.5s^2)T}{s\sqrt{T}}-m\sqrt{n}}{\sqrt{1-n}}\right),$$

amit verbálisan megfogalmazva: mi annak a valószínűsége (P = probability), hogy a v értéke kisebb lesz, mint a fenti törtkifejezés értéke. A v-ről tudjuk, hogy standard normális eloszlású valószínűségi változó. A valószínűséget úgy kapjuk meg, hogy a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényébe behelyettesítjük ezt a kifejezést. Jelölje $\Theta(m)$ ezt az értéket, vagyis

$$\Theta(m)=\frac{\frac{\ln a-\left(x-0.5s^2\right)T}{s\sqrt{T}}-m\sqrt{n}}{\sqrt{1-n}},$$

érzékeltetve, hogy a Θ értéke a makróállapotot kifejező értéktől, az m-től függ, továbbá jelölje $F(\cdot)$ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét. Ekkor az eddigi összefüggéseket az alábbi módon írhatjuk fel:

$$P\left(v<\frac{\frac{\ln a-(x-0.5s^2)T}{s\sqrt{T}}-m\sqrt{n}}{\sqrt{1-n}}\right)=P(v<\Theta(m))=F(\Theta(m))=PD_m\,, \quad (1)$$

ahol PD_m-mel jelöljük az m makróállapothoz tartozó bedőlési valószínűséget. Jelölje F^{-1} az F függvény inverzét. Ekkor írhatjuk, hogy:

$$\Theta(m) = F^{-1}(PD_m)\,,$$

vagyis,

$$F^{-1}(PD_m) = \frac{\frac{\ln a-(x-0.5s^2)T}{s\sqrt{T}} - m\sqrt{n}}{\sqrt{1-n}} = \frac{\ln a-(x-0.5s^2)T}{s\sqrt{T}\sqrt{1-n}} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1-n}}m\,. \tag{2}$$

Állítás: *PD_m, azaz a bedőlési valószínűség a makróállapot (m) függvényében csökkenő.*

Mivel v standart normális eloszlású valószínűségi változó, (1) alapján írhatjuk, hogy

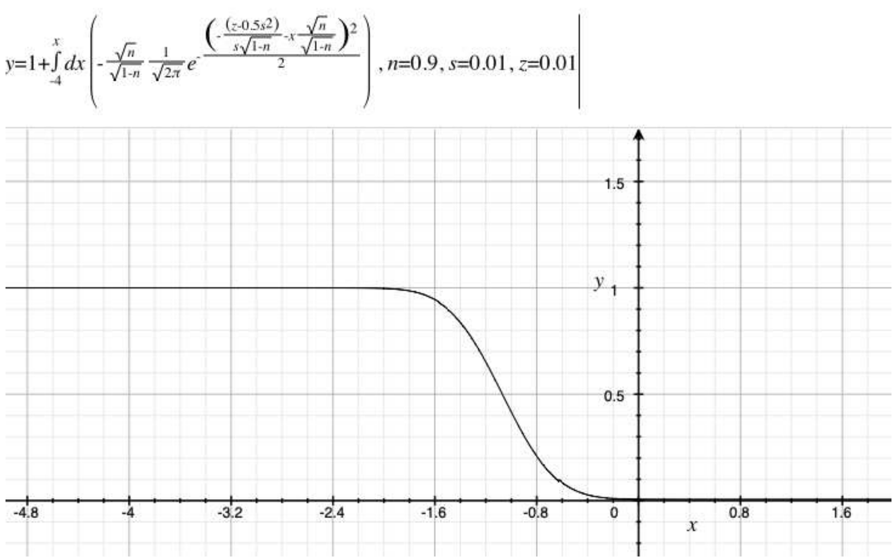
$$P(v < \Theta(m)) = F(\Theta(m)) = PD_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\Theta(m)} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du\,, \tag{3}$$

amely alapján

$$\frac{d(PD_m)}{dm} = -\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1-n}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\Theta(m)^2}{2}}\,,$$

és mivel a (4) jobb oldala mindig negatív, ezért valóban igaz a fenti állítás. □

A bedőlési valószínűségeknek (függőleges tengely) a (3) általi eloszlását mutatja a *3. ábra* a makróállapot függvényében (vízszintes tengely), amikor az eszközérték és a makróállapot között 0,95-ös korrelációt tételezünk fel ($n = 0{,}9$) 1%-os átlagos eszközérték növekedés mellett, 1%-os szórással.



3. ábra. Bedőlési valószínűségek a makróállapot függvényében

Az ábrából az olvasható ki, hogy ilyen inputok mellett szinte minden bedől, amikor előre nem vártan a makrógazdasági állapot a -2-es értéket veszi fel (a vízszintes tengelyen kb. -2 állapothoz a bedőlési valószínűség 1). Ez kb. ötven évente egyszer fordul elő ekkor. Ha minden úgy megy tovább, mint amikor a hitelt kiadtuk (makróállapot 0), a bedőlésnek elenyésző a valószínűsége. A bedőlési valószínűségek intenzíven növekednek a makróállapot romlásával, és a (4) képletből is kiolvasható, hogy ez akkor a leggyorsabb, amikor $\Theta(m) = 0$, azaz közelítőleg akkor, amikor a makrógazdaság -1-nél is rosszabb állapotba kerül (kb. 8 évente egyszer).

Eddig abból indultunk ki, hogy a makróállapot adott, és a makróállapot ismeretét feltételezve meghatároztuk a bedőlések valószínűségét. Most azonban a (2) egyenletben gondolkodjunk fordítva: tételezzük fel, hogy a bedőlés valószínűsége adott, és jelöljük ezt az értéket β-val. Kérdésünk most az, hogy milyen makró sokkhatás kell ahhoz, hogy ez bekövetkezzen. Jelöljük ezt a makró sokkszintet $m(\beta)$-val, érzékeltetve, hogy a független változó most a bedőlési szint, amihez a makróállapot küszöböt keressük. A (2) egyenletet újraírva, érzékeltetve, hogy felcseréltük a függő-független változók szerepét, azt kapjuk, hogy

$$F^{-1}(\beta) = \frac{\ln a - (x - 0.5s^2)T}{s\sqrt{T}\sqrt{1-n}} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1-n}} m(\beta),$$

ebből pedig egyszerű átalakítással explicitté tesszük a szükséges makró sokkszintet:

$$m(\beta) = \frac{-F^{-1}(\beta)\sqrt{1-n} + \frac{\ln a - (x-0.5s^2)T}{s\sqrt{T}}}{\sqrt{n}}.$$

Most jelölje L a bedőlő hitelek arányát. Mivel (4) alapján állíthatjuk, hogy a bedőlési valószínűség csökken, amint a makróállapot javul, azt írhatjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy a bedőlő hitelek aránya (L) kisebb lesz, mint a bedőlések adott valószínűsége β:

$$P(L < \beta) = P(m > m(\beta)) = P\Big(m > \frac{-F^{-1}(\beta)\sqrt{1-n} + \frac{\ln a - (x-0.5s^2)T}{s\sqrt{T}}}{\sqrt{n}}\Big) =$$

$$= F\Big(\frac{F^{-1}(\beta)\sqrt{1-n} - \frac{\ln a - (x-0.5s^2)T}{s\sqrt{T}}}{\sqrt{n}}\Big).$$

A jobb oldali kifejezés tehát a bedőlő hitelek arányának eloszlását írja le, melyhez a korrelációs együttható ismerete kell, továbbá a portfólió egységes bedőlési valószínűségének inverz értéke (a számláló jobb oldali része).

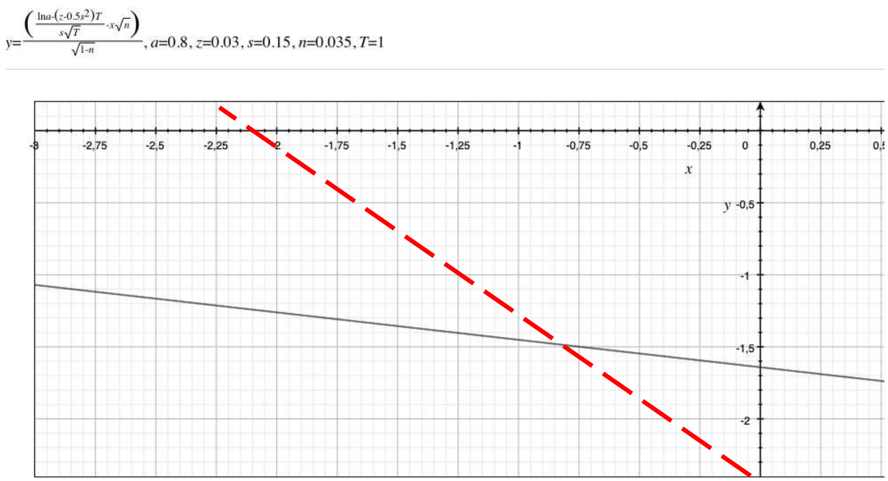
5 A gyakorlati alkalmazhatóság megvalósítása

A (3) alapján

$$PD_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\Theta(m)} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du\,, \tag{5}$$

Az elméleti elképzelés alapja, hogy a jobb oldalon egyetlen ismeretlen van, a $\Theta(m)$, mely értéket, ha meghatározunk, megkapjuk a bedőlési valószínűséget (PD_m -et). Hogy meghatározzuk $\Theta(m)$ értékét, annak inputjait kell előállítani. Ezek: a makróállapot, az eszköz várható értéknövekedésének %-os alakulása, ennek éves szórása, az eszközérték alakulása és a makrógazdaság alakulása közötti korrelációs együttható, a tőkeösszetétel aránya és a befektetés óta eltelt idő. Ezen input értékek jövőbeni értékét meghatározva (5) alapján meg tudnánk határozni a bedőlés jövőbeni (becsült) értékét. Csakhogy az eltelő idő kivételével valamennyi felsorolt kategória meghatározása nehézkes, és mint az érzékenységvizsgálat mutatja, néha néhány tized %-os tévedés rendkívül nagy hatást gyakorol a bedőlési mutatóra. De vannak további problémák is. Tekintsük újra a 2. ábra inputjait, de változtassuk most a makróállapot és az eszközérték közötti korrelációt. Például, ha mint megközelítést elfogadjuk a reálbérek alakulását a személyi kölcsönök értéke alapjaként, a reálbérek és a GDP mint makróállapot közötti korrelációs együttható 80% fölötti a 2019-et megelőző 12 évre. Mást nem változtatva, legyen akkor most $n = 0{,}6$, és a *4. ábrán* piros/szaggatott vonallal feltüntetjük az új bedőlési inverzeket mutató egyenest. A vízszintes tengelyt a piros/szaggatott vonal már $-2{,}1$-nél átszeli, vagyis az előrejelzés az, hogy a személyi hitelek fele már bedől, pedig a saját tőkerész 20%! Az OTP gyakorlata például ennél rosszabb esetre sem igazol 6%-nál többet.

Másként fogalmazva: az elméleti Vasicek-modell nem húzható rá példásul az OTP gyakorlatára. Megoldásként két módszertípust javaslunk, bár néhány ponton ezek hasonlítanak egymásra.



4. ábra. A bedőlési valószínűségek érzékenysége a korrelációs együtthatóra

5.1 Az inverz Vasicek-eljárás

Az eddigi elemzésekből is látható, a Vasicek-modell direkt alkalmazása számos problémát vet fel. Az alkalmazási nehézségek könnyítése céljából született meg az elgondolás, hogy inverz módon közelítsünk a feladathoz: ne a modell inputjainak értékét határozzuk meg, hanem figyeljük meg a valós bedőlési eseményeket, és ezekből következtessünk az inputok aggregátumaira (tehát nem az eredetileg listázott egyedi inputokra). Ez egyébként közönséges regressziószámításnak tekinthető.

Mielőtt továbbmennénk, szükséges fontos fogalmak tisztázása, melyek egyébként eddig is a szemünk előtt hevertek. Lényegileg csak az elnevezés lesz más. Ilyen fogalom a *bedőléstől való távolság,* melyet a DTD (distance to default – követve az általánosan használt jelöléseket) tömörítéssel jelölünk, és azt fejezi ki, hogy az eszköz jelenlegi értéke hány eszközérték-szórásnyira van a hitelkötelezettség nagyságától. E fogalom azért is volt szem előtt, mert ez nem más, mint az eddigi ábráink függőleges tengelye. *Példa:* Legyen egy eszköz jelenlegi értéke 10 millió, és az eszköz értékének szórása 2 millió, a hitel nagysága pedig 6 millió. Ekkor az eszköz értékének távolsága a hitel nagyságától 2 szórásnyira van. Ilyenkor azt mondjuk, hogy $DTD = -2$, mert az eszköz értékének két szórásnyit kell csökkennie, hogy elérje a hitelszintet. Amikor $DTD = -2$, akkor a standard normális eloszlás táblából a -2 értékhez kiolvassuk a hozzátartozó valószínűséget, ami 2,3%. Ezért azt gondoljuk, hogy $PD = 2{,}3\%$.

A másik, ehhez hasonló fogalom a *,,gazdasági bázistól való távolság",* melyet DFE-vel tömörítünk (distance from economy). Ez azt fejezi ki, hogy egy adott évben a makrógazdaság hány szórásnyira van a gazdaság bázis állapotától (ő a ,,Gazdasági bázis"). *Példa:* a 2019 előtti kb. 12-13 évben a magyar gazdaság átlagosan 1,54%-kal nőtt. Ez a ,,Gazdasági bázis" állapot. A GDP növekedésének átlagos szórása 3%-volt ugyanezen időszak alatt. 2009-ben a GDP 6,7%-kal csökkent, ami a +1,54-es állapottól a szórás 2,7-szeresével kisebb. Ezért azt mondjuk, hogy $DFE = -2{,}7$.

Amikor ránézünk a személyi kölcsönök empirikus bedőlési adatsorára, az mind az eszköz értékének szórásából, mind a makrógazdasági állapot változásából ered. Ezen %-okhoz tartoznak a távolsági értékek, amit $DTD + E$-vel jelölünk. *Példa:* 2009-ben a személyi kölcsönök megfigyelt bedőlési rátája 6%-volt, melyhez tartozó (standard normális táblából kiolvasott) távolság $-1,55$. Ezért írhatjuk, hogy $DTD + E = -1{,}55$.

Az inverz Vasicek-eljárás kiindulópontja ismét a (2) egyenlet, ami:

$$F^{-1}(PD_m) = \frac{\ln a - (x - 0.5s^2)T}{s\sqrt{T}\sqrt{1-n}} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1-n}}m\,.$$

Ez nem más (az időt egységnyinek véve, $T = 1$), mint

$$DTD{+}E = \frac{DTD}{\sqrt{1-n}} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1-n}}\,DFE\,. \tag{6}$$

Ezen formula az alapja egy regressziós illesztésnek, mely abból indul ki, hogy a $DTD{+}E$ és DFE jelenségeket empirikusan megfigyeljük. Legyen egy időszak alatt egy eszköz megfigyelt $DTD{+}E$ értéke az i-edik évben d_i, ugyanebben az évben a ,,gazdaságtól" mért távolság m_i. A megfigyelt

d_i értékek szórását jelöljük $\sigma(d)$-vel, a megfigyelt d_i és m_i értékek közötti korrelációt pedig $\mathrm{corr}(d,m)$-mel. A megfigyelt időszak hossza legyen T év $(t = 1, 2, \ldots, T)$.

Ekkor a (6)-ban:

$$\frac{DTD}{\sqrt{1-n}} = \frac{\sum_1^T d_i}{T}, \qquad \text{továbbá} \qquad -\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1-n}} = \mathrm{corr}(d,m)\frac{\sigma(d)}{\sigma(m)} . \tag{7}$$

(A regressziós illesztés elméleti alapját az irodalomjegyzékben hivatkozott Canavos, 1984 könyv adja. Jegyezzük meg, hogy $\sigma(m) = 1$.)

Példa: *Az OTP személyi kölcsönökre vonatkozó bedőlési valószínűségeit határozzuk meg különböző makrógazdasági kimenetekre a fenti (6–7) képletek alapján. Az 1. tábla második oszlopa az OTP személyi kölcsönökre vonatkozó bedőlési %-ait mutatja 2009–2018 között. Ezen adatok alapján kiszámolhatók a megfigyelt PD_m-ekhez tartozó DTD+E értékek (ők a d_i értékek), melyeket a harmadik oszlop mutat. A KSH által kiadott reál GDP %-os alakulásából megállapítható (negyedik oszlop), hogy ugyanezen időszak alatt a GDP átlagos növekedése 1,54% volt, szórása pedig 3%. Ebből adódnak a megfigyelt DFE értékek (ők az m_i-k), melyeket az 1. tábla ötödik oszlopa összegez.*

	PD%/empirikus megfigyelés	$DTD + E$	GDP volumene előző év %-ában/KSH	DFE
2009	6,0	-1,55	-6,7	-2,70
2010	5,5	-1,60	0,7	-0,27
2011	4,6	-1,68	1,8	0,086
2012	4,8	-1,65	-1,5	-1
2013	4,6	-1,68	2,0	0,167
2014	3,3	-1,83	4,2	0,90
2015	2,6	-1,94	3,8	0,77
2016	2,4	-1,98	2,2	0,23
2017	2,0	-2,05	4,3	0,93
2018	1,7	-2,10	5,1	1,20

1. táblázat. Személyi kölcsönökkel kapcsolatos adatok

Ezen adatsorok alapján a harmadik oszlop adatainak (megfigyelt DTD+E értékek) szórása, azaz $\sigma(d) = 0{,}189$, átlaga $-1{,}806$. A makróállapot standard normális, szórása 1, tehát $\sigma(m) = 1$, továbbá az első és második oszlop alapján a korrelációs együttható: $\mathrm{corr}(d,m) = -0{,}77$. Ezek alapján tehát azt állíthatjuk, hogy az OTP személyi kölcsönökre vonatkozó bedőlési valószínűségeket az alábbi regressziós egyenes értékeiből származtathatjuk:

$$DTD{+}E = -1,8 - 0,1455(DFE)\,.$$

1. Kimenet: 1:1000-hez válságeset. Ekkor $DFE = -3$ (mely kb. 7,5%-os éves GDP csökkenésnek felel meg), következésképpen $DTD{+}E = -1{,}363$, amihez 8,9%-os bedőlési valószínűség tartozik.

2. Kimenet: 'business as usual', a gazdaság 1,5%-kal nő. Ekkor $DFE = 0$, következésképpen $DTD{+}E = -1{,}8$, amihez 3,6%-os PD_m tartozik.

3. Kimenet: jó kilátások, a gazdaság 4,5%-kal nő. Ekkor $DFE = +1$, következésképpen $DTD{+}E = -1,95$, tehát $PD_m = 2{,}56\%$.

4. Kimenet: a döntéshozó mindhárom kimenetnek egyenlő esélyt ad (pl. rákérdez három kutatóintézetnél a GDP előrejelzésre). Ekkor $DTD{+}E = (-1{,}365 - 1{,}8 - 1{,}95)/3 = -1{,}7$, amihez 4,46%-os PD tartozik.

5.2 Az inverz Vasicek-eljárás, amikor a makróállapotot az utolsó három év reálbéralakulásának átlaga jelzi

Nem kötelező, hogy a magyarázó változó a GDP legyen. Ennél lehet néha jobbat is találni. Tekintsük például makró magyarázó változónak az utóbbi három év reálbér alakulásának %-os átlagát. A *2. táblázat* ad közre ezzel kapcsolatban újabb adatokat. Hasznosítjuk az 1. tábla $DTD + E$ adatait is.

	Reálbérek előző év %-ban/KSH	Utóbbi három év mozgóátlaga	DFE/mozgóátlag alapján	Reáljövedelmek előző év %-ban/KSH
2009	97,7	98,0	-1,360	96,0
2010	101,8	100,1	-0,757	98,0
2011	102,4	100,6	-0,576	103,9
2012	96,6	100,3	-0,667	97,0
2013	103,1	100,7	-0,545	101,9
2014	103,2	101,0	-0,455	104,2
2015	104,4	103,6	0,330	102,9
2016	107,4	105,0	0,758	103,8
2017	110,3	107,4	1,485	104,1
2018	108,3	108,7	1,879	104,9

2. táblázat. Személyi kölcsönökkel kapcsolatos adatok mozgó reálbérátlaggal

A reálbérek alakulását az előző év %-ában a 2. tábla második oszlopa adja, a harmadik oszlop pedig az ebből származtatott mozgóátlag az utóbbi három év alapján, ismét a 2009–2018-as évekre. Ebből az derül ki, hogy a mozgó reálbér átlaga ezen tíz évben 2,5%-os növekedést mutat 3,32%-os szórással. Ezek alapján a DFE adatsort ki lehet számolni, amit egyébként a negyedik oszlop ad közre.

Mint az előbbi esetből tudjuk, a megfigyelt $DTD{+}E$ adatok szórása 0,189 volt, átlaga pedig −1,806. Csupán az új korrelációs együtthatót kell kiszámítani, ami $\mathrm{corr}(DTD + E, DFE) = -0{,}96$. A mozgó reálbérek alakulása szinte teljes mértékben (92%-ban) megmagyarázza a bedőlések arányát. Az új egyenlet tehát ($\mathrm{corr}(DTD{+}E, DFE) \times 0{,}189 = -0{,}1818$):

$$DTD{+}E = -1{,}8 - 0{,}1818(DFE)\,.$$

Végezzünk egy tesztet 2009-re. Ekkor az utolsó három év átlagbér ,,emelkedése” 98% volt, ami −1,36 szórásnyira van az átlagtól (ami 2,5%-os növekedés). Így $DTD{+}E = -1,559$, ami pontosan 6%-os PD-nek felel meg, vagyis a 2009-ben megfigyelt PD érték.

Az 1:1000-es bekövetkezési valószínűséghez tartozó becslési eljárás (ekkor $DFE = -3$): $DTE + E = -1{,}8 + 0{,}1818 \times 3 = -1{,}26$, ami 10,8%-os PD-nek felel meg. Ennek bekövetkezéséhez viszont az kell, hogy a reálbérek kb.

10%-kal csökkennek három egymás utáni év mindegyikében, amire még nem volt példa (háborús időszaktól eltekintve). $DFE = -2$ esetén (kb. 5-6%-os reálbércsökkenés három egymás utáni évben): $DTE{+}E = -1{,}8{+}0{,}1818{\times}2 = -1{,}44$, ami 7,3%-os PD-nek felel meg.

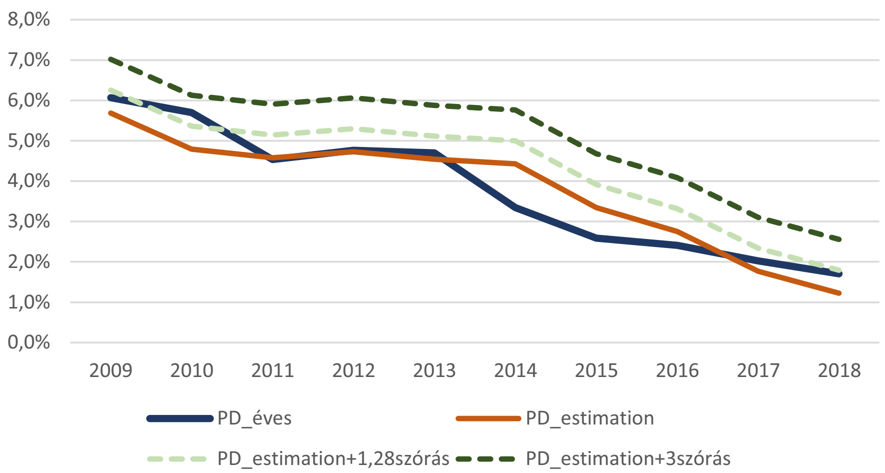
5.3 Egy másik regresszióra alapozott eljárás a PD becslésére

Algoritmus: *Határozzuk meg az utóbbi három év %-ban meghatározott reálbérváltozásának átlagát, jelöljük ezt x-szel. Helyettesítsük ezt be az* $y = -0{,}41x{+}45{,}74$ *lineáris függvénybe, ahol* y *a* PD *várható értékét jelenti. Ekkor az* $y{+}1{,}28\sigma$ *szinten meghatározott* PD*, ahol* $\sigma = 0{,}48$*, 90%-os valószínűséggel lefedi a tervezett évre megvalósuló valós* PD*-t (ha 1:1000 arányt akarunk, azaz ezer évenként egy esemény, akkor* $y + 3\sigma$ *lenne a* PD*. Másként megfogalmazva, annak valószínűsége, hogy a valós* PD *nagyobb lenne, mint (*$y{+}3\sigma$*) %, mindössze 0,1%).*

Példa: *Tegyük fel, hogy a tárgyévre tervezett reálbérnövekmény az előző év %-ban 108,3. Az előző két évben megfigyelt reálbérnövekmény 110,3 illetve 107,4% volt, és így e három szám átlaga 108,7. Tehát az* $x = 108{,}7$ *helyen megnézzük a fent definiált lineáris függvény értkét, ami* $y = 1{,}7$*. Azt várjuk tehát, hogy azon utóbbi évben, melyre a reáljövedelem változásának %-os becslését adtuk, a* PD *várható értéke 1,7%-os lesz. Ez azonban csak kb. 50%-os valószínűséggel következik be. Az 1,7%-os* PD*-re tegyünk ezért még biztonsági tartalékot, az előrejelzés szórásának (ami* $\sigma = 0,48$*) 1,28 szorosát. Azt gondoljuk tehát, hogy a valós, bekövetkező* PD *az* $1{,}7 + 1{,}28\sigma = 1{,}7 + 0{,}61 = 2{,}31\%$ *alatt lesz 90%-os valószínűséggel. Ha még kevesebb kockázatot akarunk vállalni, nézzük a háromszoros szórást, azaz az* $1{,}7 + 3\sigma = 1{,}7 + 1{,}44 = 3{,}14\%$ *értéket. Ekkor annak a valószínűsége, hogy a valós* PD *nagyobb lesz 3,14-nél, mindössze 0,1% – vagyis ezer évenként egy esemény.*

Argumentum: Az 1. táblázatban látható adatok az OTP-nél megfigyelt valós PD-k az ott látható években (második oszlop), a 2. tábla második oszlop a reálbérek alakulását mutatja ugyanezen időszakra az előző év %-ban kifejezve. A harmadik oszlop a reálbérek alakulásának utolsó három évre vonatkozó mozgóátlaga, az utolsó oszlop pedig a reáljövedelmek alakulását mutatja. Azt látjuk, hogy az OTP-nél megfigyelt, valós PD adatsor és a mozgóátlagra alapozott reálbérindex közötti korreláció rendkívül erős, 93%-os, vagyis a bedőlések valószínűsége szorosan köthető a reálbérek mozgóátlagra alapozott alakulásához. Egy regressziós egyenest illesztettünk a két mennyiségre, *ez az egyenes:* $y = -0{,}4x + 45{,}18$. Utána az x helyére beírtuk egy adott évre megfigyelt mozgó reálbérátlagot, és ezt összehasonlítottuk a valós, megfigyelt PD értékekkel. Az *átlagos szórás* $\sigma = 0{,}48$ volt. Ha ennek 1,28-szorosával megnöveljük a várható PD-t, akkor 90%-os valószínűséggel lefedjük a valójában bekövetkező PD-t, feltéve természetesen, ha a tárgyévre jól becsültük meg reálbérek %-os alakulását, és békeidő van.

E modellre alapozva OTP-s kollegák végezték el az illesztést, reprezentálták a valós bekövetkezéseket (az *5. ábrán* a kék vonal), a most megadott regressziós egyenest (bordó vonal), a 90 (világos zöld szaggatott), illetve 99,9%-os (1:1000 bekövetkezés, sötét zöld szaggatott) lefedettséget. Érdekességként jegyezzük meg, hogy a valós PD eseményeket lefedő 90%-os világos szaggatott vonal egyszer, csak hajszálnyira nem fedi le a valós bedőlést. Úgy tűnik, a mélyzöld szaggatott valóban nagy megbízhatóságot garantál, mert mindig határozottan a valós bedőlések fölött van. Legmagasabb pontja is 7%-os lefedettséget kér.



5. ábra. Egy regressziós illesztés

A Vasicek-modell vélt hiányosságainak összegzése

Az eredeti Vasicek-modell elemzése során az látható, hogy

- Viszonylag sok modellparamétert tartalmaz, viselkedésük nagyon nehezen figyelhető meg, sokszor mérésük nem lehetséges.
- Ugyanakkor, az eredeti Vasicek-modellnek csak egyetlen magyarázó változója van, egyetlen makrótényezővel magyaráz meg mindent.
- Az input paraméterek változására nagyon érzékeny, ez különösen veszélyes, amikor a paraméterek nehezen pontosíthatók.
- A paraméterek között nem bizonyított összefüggéseket tételez fel, ami jelentősen lecsökkenti alkalmazhatóságának körét. Bizonyos jelenségek modellezésére nem is alkalmas (például, amikor az eszközérték és a makróállapot alakulása közötti korreláció negatív, de még problematikusabb az eszközérték–makróállapot korreláció specifikus kapcsolata). Egy modell alkalmazását nagyon meg kell fontolni, amikor az csak

nagyon specifikus korrelációs kapcsolatokat tud kezelni, mert ekkor bizonyosra vehető, hogy lesznek olyan esetek, melyre nagyon félrevezető magyarázat keletkezik.

- Erre példa lehet OTP-beli alkalmazása, mely alapján az látszik, hogy csak akkor adja meg a modell a valós, korábban megfigyelt eseménysort (backtest), ha bizonyos paramétereknek a szakmában nem elfogadott, új értelmezést adunk.

- A Vasicek-modell nem tudja figyelembe venni a management specifikus tényezőket, például, hogy egy adott management miként reagál válságos állapotokra, vagy éppen milyen mértékű prudens magatartást képvisel, és miként kezeli a hitelezési tevékenységben eleve meglevő rendszerbeli kockázatokat.

6 A módosított Vasicek-modell

A fent említett hiányosságokon igyekszik az alábbi megközelítés segíteni, melyben azt tételezzük fel, hogy az eszközérték %-os alakulását és ennek szórását, valamint a makróállapot és eszközérték alakulása közötti korrelációs együtthatót ismerjük. Ha ezek nem ismertek, akkor a fent javasolt regressziós (pl. az inverz Vasicek-) eljárások valamelyike javasolható. Példaként ismét a személyi kölcsönöket használjuk majd, ahol az eszközérték alakulásának proxyjaként a reálbérek alakulását tekintjük.

Tételezzük fel, hogy az eszköz egy év múlva érvényes piaci értékét az alábbi kifejezéssel határozhatjuk meg:

$$Be^{x+(k_0 v+k_1 R_1 m)s},$$

ahol B az eszköz jelenlegi értéke, melyen belül a hitel volumene D, x az eszköz évi értékének változása %-ban kifejezve, s ennek szórása, R_1 az eszközérték és a makróállapot alakulása közötti korrelációs együttható, v az eszközspecifikus és m a makróállapot meglepetésfaktor. Mindkettő 0 várható értékkel, 1 szórással bíró sztenderd normális eloszlású valószínűségi változó. A k_0 és k_1 paraméterek a menedzsment kockázatkezelési gyakorlatát karakterizáló inputok, melyek azonosítási módját meg fogjuk határozni. A k_0 paraméter azt írja le, hogy a banki menedzsment milyen arányban képes semlegesíteni a termékben meglevő rendszerbeli kockázatokat (0, ha teljesen, 1, ha egészében képtelen) kiegyensúlyozott makróállapot esetén, a k_1 paraméter a menedzsment azon képességét írja le, hogy mennyire képes vagy akarja a makróhatásokat semlegesíteni (1, ha nem tudja, vagy nem akarja, 0, ha teljesen semlegesít. Maszkgyártónak kovid idején előnyös a makróállapot – nem akarja közömbösíteni.)

Egy hitelt bedőltnek tekintünk, ha az eszköz értéke a hitel volumene alá csökken, azaz ha

$$Be^{x+(k_0 v+k_1 R_1 m)s} < D\,. \tag{8}$$

Ebből

$$\frac{B}{D}e^{x+(k_0v+k_1R_1m)s} < 1$$

következik, és mivel a természetes alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő, ezért azt írhatjuk, hogy

$$\ln\frac{B}{D} + x + (k_0v + k_1R_1m)s < 0\,,$$

melyből

$$v < \frac{\ln\frac{D}{B} - x}{sk_0} - \frac{k_1R_1m}{k_0} \tag{9}$$

adódik. Jelöljük ezen (9) egyenlőtlenség jobb oldalát ismét $\Theta(m)$-mel, így verbálisan azt mondhatjuk tehát, hogy amennyiben az eszközspecifikus véletlen tényező értéke a $\Theta(m)$ alá kerül, akkor az eszköz bedől, amikor a makró m állapotba kerül (m = a makró hány (makró)szórásnyira van az átlagos állapottól ($= DFE$)). Amikor a makró m állapotban van, a bedőlés valószínűsége ($= PD_m$):

$$PD_m = F(\Theta(m))\,,$$

ahol F a standard normális eloszlásfüggvény (ennek inverzét F^{-1}-gyel jelöljük). Ezen utóbbi egyenletből $\Theta(m)$-et kifejezve:

$$F^{-1}(PD_m) = \Theta(m) = \frac{\ln\frac{D}{B} - x}{sk_0} - \frac{k_1R_1m}{k_0}\,. \tag{10}$$

Személyi kölcsönöket tekintve feltehetjük, hogy $B = D$, amiből $\ln\frac{D}{B} = 0$ következik. Az x és s értékét (eszközérték és szórásának alakulását) ismertnek véve, a $\frac{\ln\frac{D}{B}-x}{sk_0}$ kifejezésben egy ismeretlen van, a k_0. Ennek meghatározásához kiindulhatunk abból, hogy a banknak mennyi a szisztematikus (rendszerbeli) kockázati szintje, amikor a makrómutató átlagos állapotban van, pl. amikor a GDP átlagos ütemben nő, vagyis $m = 0$. Kérdés, létezett-e egyáltalán ilyen állapot, vagy ha ez többször is előfordult, azonos volt-e a bedőlési valószínűség. Javaslatunk, hogy a $\frac{\ln\frac{D}{B}-x}{sk_0}$ kifejezés értékét tegyük egyenlővé a megfigyelt $F^{-1}(PD_m)$ értékek átlagával, melyet a (7) képletben már használtunk, azaz legyen

$$\frac{\ln\frac{D}{B} - x}{sk_0} = \frac{\sum_1^T d_i}{T} = \overline{DTD+E}\,, \tag{11}$$

ahol d_i az i-edik évben megfigyelt $DTD+E$ állapot (T évet figyeltünk meg), jelöljük ezt az átlagot $\overline{DTD+E}$-vel. Ekkor a keresett k_0 érték:

$$k_0 = \frac{\ln\frac{D}{B} - x}{s\overline{DTD+E}}\,. \tag{12}$$

Miután meghatároztuk k_0 értékét, a megfigyelt bedőlési adatsorból válasszuk ki a legnagyobbat (gondosan, céltól függően más pont is kiválasztható) és jelöljük a hozzá tartozó $DTD + E$ értéket $(DTD + E)_{\max}$-szal, a hozzá tartozó megfigyelt makróállapotot pedig $m_{\max}$-szal. Mint emlékezetes, az eszközérték és a makró közötti korrelációt az R_1 mutatja. Ekkor (10) akkor írja le pontosan ezen szituációra jól az összefüggést, ha igaz, hogy

$$(DTD + E)_{\max} = \overline{DTD + E} - \frac{k_1}{k_0} R_1 m_{\max} \,. \tag{13}$$

Feltételezve, hogy az eszközérték és makróállapot alakulása nem független egymástól, akkor

$$k_1 = \frac{(DTD + E)_{\max} - \overline{DTD + E}}{-Rm_{\max}} k_0 \,. \tag{14}$$

Példa: *Személyi kölcsönök esetében úgy gondoljuk, a reálbérek alakulása jó proxy-ja lenne az eszközérték alakulásának. 2018-at megelőző 10-12 évben a reálbérek átlagosan 3,3%-kal nőttek évente, szórásuk 3,8% volt (*$x = 0,033$*,* $s = 0,038$*), ezen adatok a 2. tábla második oszlopából erednek. Ugyanezen időszak alatt megfigyelt bedőlési rátákat az 1. táblázat második oszlopa adja, a harmadik pedig ezen adatsorhoz tartozó* $DTD + E$ *értékeket mutatja. E számok átlagát már kiszámoltuk, ami* $\overline{DTD + E} = -1{,}8$ *volt. Ezek maximuma 2009-ben (az 1. táblázat harmadik oszlopának első eleme)* $-1{,}55$*, vagyis* $(DTD + E)_{\max} = -1{,}55$*. Az 1. táblázat negyedik oszlopa a GDP alakulását mutatja az előző év %-ban, mely alapján a* DFE *értékeket számítottuk ki, és ezeket e tábla utolsó oszlopa adja közre. A* $(DTD + E)_{\max} = -1{,}55$ *számhoz az* $m_{\max} = -2{,}7$ DFE *szám tartozik. Említettük már, hogy ezen időszak alatt a reálbérek és a GDP alakulása közötti korrelációs együttható 0,79 (megemlítjük, hogy a reálbérek és a bedőlési mutatók közötti korrelációs együttható még ennél is erősebb, értéke* $-0{,}86$*). A menedzsment külső tényezőkből eredő kockázatok kezelésére vonatkozó mutatója, a* k_1 *értéke tehát ekkor (14) alapján:*

$$k_1 = \frac{-1{,}55 + 1{,}8}{0{,}79 \times 2{,}7} k_0 = 0{,}117 k_0.$$

A várható bedőlések becslésére így az alábbi összefüggés segítségével lehet előrejelzést adni a makróállapot (m, vagy DFE) függvényében:

$$(DTD + E) = \overline{DTD + E} - \frac{k_1}{k_0} R_1 m = -1,8 - 0,092m \,.$$

Így például a kritikus 1:1000 esetet tekintve ($m = -3$*) – mely egyébként kb. 8%-os GDP csökkenést jelentene –,* $DTD + E = -1{,}8 - 0{,}092 \times (-3) = -1{,}52$*. A standard normális eloszlás táblájából a -1,52 értékhez 6,3%-os bedőlési valószínűség tartozik.*

Érdekes lehet még a k_0 érték. (12) alapján ez 0,48. Kijelenthető, a bank menedzsmentje hatékonyan kezeli a vállalkozásból eredő rendszerbeli ($k_0 = 0{,}48$), és különösen jól a külső tényezőkből adódó kockázatokat ($k_1 = 0{,}056$).

E példában a megfigyelés történetében előfordult legkedvezőtlenebb makró esetre fókuszáltunk, és arra kaptunk választ, hogy ha a menedzsment kockázatkezelő képessége ugyanilyen marad még nehezebb külső körülmények közt, mi lesz a bedőlés valószínűsége. A hangsúlyt nem extrém, hanem általános esetre helyezve, felhasználhatjuk az „inverz Vasicek" példa számeredményeit. Ebben az esetben

$$\frac{k_1}{k_0}R_1 = 0{,}1455\,,$$

melyből $k_1 = 0{,}1455\frac{k_0}{R_1}$, és mivel $R_1 = 0{,}79$, továbbá $k_0 = 0{,}48$, következésképpen $k_1 = 0{,}088$. Ismét kedvező kép a management fogékonyságáról. (Megjegyezzük még, hogy a két k paraméter 1 alá esése azért biztosított a jelen helyzetben, mert az itt felhasznált inputokkal az eredeti Vasicek-modell már $m = 0$ makróállapotra 8%-os, $m = -1$ makróállapotra pedig 50%-os bedőlést vetít előre.)

A bedőlési arányok eloszlásának meghatározása a módosított Vasicek-modell felhasználásával

A 3. fejezetből tudjuk, hogy az eloszlást az alábbi levezetés adja meg:

$$P(L<\beta) = P(m>m(\beta)) = P\Big(m > \frac{-F^{-1}(\beta)\sqrt{1-n} + \frac{\ln a-(x-0.5s^2)T}{s\sqrt{T}}}{\sqrt{n}}\Big) =$$

$$= F\Big(\frac{F^{-1}(\beta)\sqrt{1-n} - \frac{\ln a-(x-0.5s^2)T}{s\sqrt{T}}}{\sqrt{n}}\Big).$$

A módosított Vasicek-modellben (13) alapján most az érvényes összefüggés:

$$(DTD+E) = \overline{DTD+E} - \frac{k_1}{k_0}R_1 m\,, \tag{15}$$

ahol $DTD{+}E$ nem más, mint $F^{-1}(\beta)$. Ismét m-et tekintve függő változónak, és kifejezve:

$$m(\beta) = \frac{-(DTD+E)+\overline{DTD+E}}{R_1k_1}k_0\,.$$

Ezért a módosított Vasicek-modell esetében a bedőlési arányok eloszlására az alábbi meghatározás adható ($F^{-1}(\beta) = (DTD+E)$):

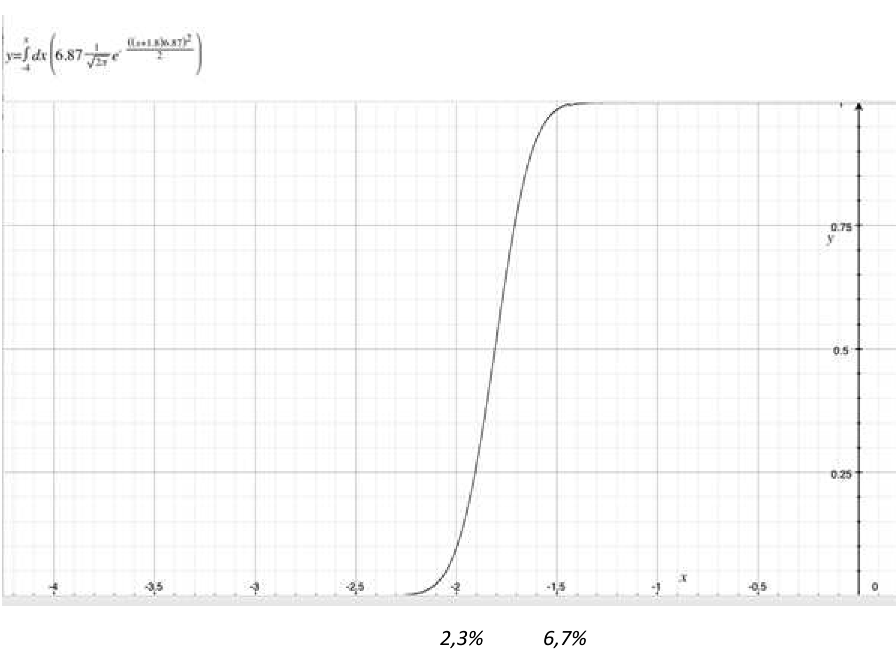
$$P(L<\beta) = F\Big(\frac{(DTD+E)-\overline{DTD+E}}{R_1k_1}k_0\Big)\,. \tag{16}$$

Példa: *Válasszunk ki a fenti becslések közül egy prudens megközelítést, mondjuk az 5.1 fejezetben közölt „inverz Vasicek" megközelítést, mely a személyi kölcsönök bedőlési valószínűségét (pontosabban ennek inverzét) a*

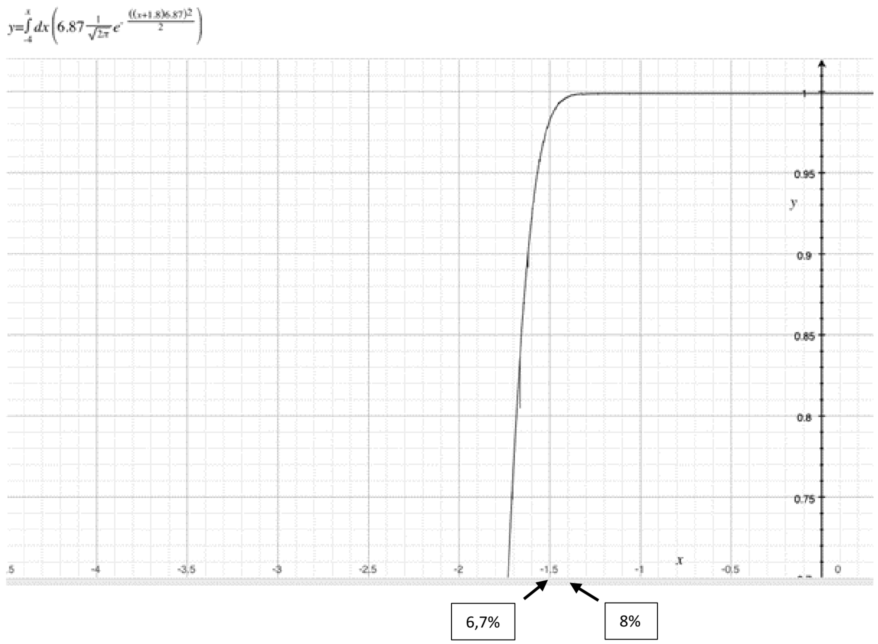
$$DTD{+}E = -1{,}8 - 0{,}1455(DFE)$$

egyenlettel adja meg. Ez alapján $\frac{k_1}{k_0}R_1 = 0{,}1455$, *azaz* $\frac{k_0}{R_1 k_1} = 6{,}87$, *a* $\overline{DTD+E}$ *értéke pedig* $-1{,}8$. *Ezen értékeket a (16) kifejezésben használjuk fel. A 6. ábra vízszintes tengelye a bedőlési valószínűségekhez tartozó inverz értéket mutatja, az egyes inverz értékekhez tartozó bedőlési valószínűségeket jeleztük. A 6. ábra függőleges tengelye azt mutatja meg, hogy a bedőlések aránya milyen valószínűséggel lesz kisebb az adott bedőlési valószínűségnél.*

Az analízis azt mutatja, hogy mindössze 10% (lásd a függőleges tengely értékét) a valószínűsége, hogy a személyi kölcsönök bedőlési aránya 2,3%-nál kisebb lesz, és közel 100% (pontosabban 98% a 7. ábra alapján), hogy a bedőlési arány 6,7% alatt marad. A *7. ábra* a 6. ábra kinagyítása a kritikus intervallumban, ahol azt látjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy a bedőlések aránya 8% alatt marad, csak 1-2 tizedszázalékkal van a 100% alatt.



6. ábra. A bedőlések arányának valószínűségeloszlása, $y = \int_{-4}^{x} dx \left(6{,}87\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{((x+1{,}8)6{,}87)^2}{2}}\right)$



7. ábra. A 6. ábra kritikus szegmensének kinagyítása, $y = \int_{-4}^{x} dx \left(6{,}87 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{((x+1{,}8)6{,}87)^2}{2}} \right)$

Köszönet

A szerzők köszönik Csányi Sándor úrnak, az OTP Bank NyRT elnök-vezérigazgatójának támogatását, inspirációit és kitartását a téma fontossága mellett, továbbá az adatokhoz való hozzáférést. A kutatás a TKP2021-NKTA-19 számú projekt keretében készült, mely az Innovációs és Technológiai Minisztérium Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alapból nyújtott támogatásával, a TKP2021-NKTA pályázati program finanszírozásában valósult meg.

Irodalom

1. Canavos, G. C., 1984, *Applied Probability and Statistical Methods*, Little, Brown and Co., Boston.
2. Finger, C., 1999, Conditional approach for CreditMetrics portfolio distributions, CreditMetrics Monitor, Riscmetrics Group.
3. Garcia-Céspedes, R. and M. Moreno, 2017, An approximate multi-period Vasicek credit risk model, *Journal of Banking and Finance,* 81, 105–113.
4. Gordy, M. B., 2003, A risk factor model foundation for rating based bank capital rules, *Journal of Financial Intermediation,* 12, 199–232.
5. Merton, R. C., 1974, On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates, *Journal of Finance,* 29, 449–470.
6. Vasicek, O. A., 1987, Probability of loss on loan portfolio, KVM Corporation, working paper.

7. Vörös, J., 2023, Some properties of the maximum loss on loan portfolios, *Central European Journal of Operations Research,* to appear.

DETERMINING THE MAXIMUM LOSS OF LOAN PORTFOLIOS I. THE VASICEK MODEL WITH ONE FINANCIAL PRODUCT AND WITH ONE INDEPENDENT VARIABLE

Credit losses arise from a lack of knowledge of the future state of influencing factors, and these factors are classified in the literature as idiosyncratic causes, expressing internal characteristics, and external, so-called macro causes. Even in the presence of favorable external conditions, the default rate of loans can be estimated at 2-4%, for which one can be prepared. However, adverse macro conditions may exist in the external environment, the occurrence of which causes an increase in the rate of failures. Therefore, it is important to analyse what macro factors, and to what extent, cause the change in the rate of failures. The use of the Vasicek model is well known in the financial sphere: the Vasicek model aims to determine the probability of default of a single type of credit product and condenses external, so-called macro effects into a single explanatory variable. This study concludes that the Vasicek model's estimation of the probability of failure is very sensitive to input parameters, which are already numerous and often difficult to measure. It is also important to note that the model assumes relationships that are difficult to prove. While retaining the values of the model, this study basically launches a family of models extended in two directions, the basic goal of which was to propose a useful methodology that is easy to understand (e.g. summarized in a figure) for a bank's senior management or supervisory body, where inputs are as clear and measurable as possible. We intend to continue this study, in which we simultaneously determine the magnitude of maximum losses for several credit products, when several external (macro) factors can be used as explanatory variables.

Key words: lending, probability of default, non-convex programming