VERTIKUM-TÍPUSÚ RENDSZEREK IRÁNYÍTHATÓSÁGA[1]

MOLNÁR SÁNDOR – SZIDAROVSZKY FERENC – MOLNÁR MÁRK
MATE, SZTAKI – Corvinus Egyetem, Matematika Tanszék – ELTE GTK Összehasonlító Gazdaságtan Tanszék

Egy speciális lineáris rendszerosztályt vizsgálunk, ahol az egyes részrendszerek kimenet-bemenet relációkkal vannak összekötve, amelyek egy olyan irányított gráfot generálnak, amely körmentes. Azaz, a részerendszereket összekötő relációk mindig előre haladnak. Rendszerek irányíthatóságának vizsgálatához feltétlenül szükséges az összes olyan állapotok halmazának meghatározása, amelyek megfelelő irányítás mellett elérhetőek. Vizsgálatunk a Lie-algebrák és speciális mátrixstruktúrák elméletén alapszik.

1 Bevezetés

A gazdasági és műszaki rendszerek a munkamegosztás, a technológiai feltételek, geográfiai viszonyok stb. miatt természetes módon strukturálódnak, hierarchizálódnak. Ezen felül a gazdasági rendszereket társadalmi, gazdasági, politikai elvek és különféle egyéb okok miatt is tovább tagolhatjuk. Ezek végül igen bonyolult gráfú komplex gazdasági rendszert hozhatnak létre. Ebben az értelemben a dinamikusan működő bonyolult rendszerek ,,egyszerű szerkezetűvé" való újjászervezésének lehetőségeit és matematikai módszereit vizsgáljuk.

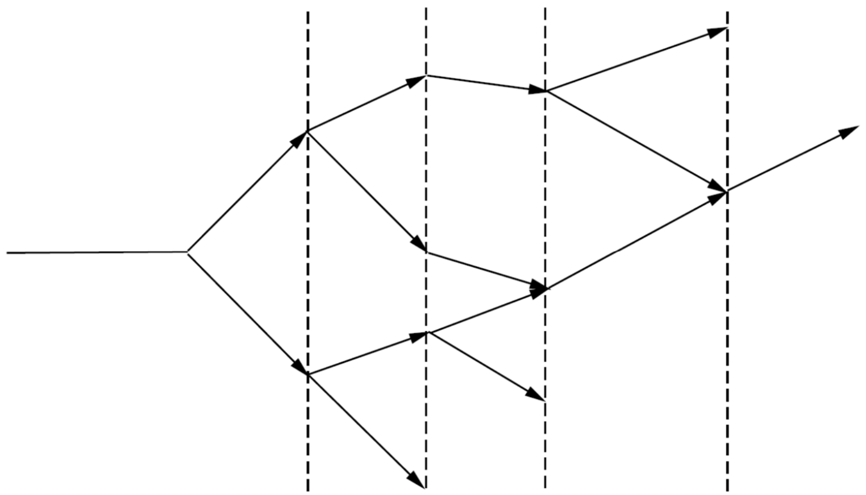
Egyszerűbb szerkezetűnek az ún. vertikum-típusú rendszereket fogjuk tekinteni, amelyeknek a közgazdaságtanban önmagában is nagy fontossága van, hiszen egy kitermelő-feldolgozó rendszer a technológiai lánc szerint természetszerűen szervezehető vertikum-típusú gazdasági rendszerré.

A feldolgozóipar folytonos folyamatai, de a feldolgozó, összeszerelő ipari objektumok is, vagy pl. egy olajfinomító sok részegységre, részrendszerre bomlik, azzal a speciális struktúrával, hogy lényegében nincs visszatérő folyamat, a részben feldolgozott termékek lesznek a bemenetei egy következő folyamatnak, és így tovább. Ezt egy irányított fával lehet egyszerűen érzékeltetni (Kamen, 1978; Molnár, 1988).

Ezekre a lineáris rendszerekre is megfogalmazhatók, felvethetők azok a kérdések (a gyakorlatban is előforduló esetek tanulmányozása során), mint amelyeket az általános lineáris rendszernél vizsgálnak, lásd Kalman et al., 1969. A szokásos rendszertulajdonságok tanulmányozására alkalmazhatjuk az általánosan kapott kritériumokat az elérhetőségre, az irányíthatóságra,

[1]Beérkezett 2023. október 12. DOI: https://doi.org/10.15170/SZIGMA.54.1204. E-mail: `molnar.sandor@gek.szie.hu`.

megfigyelhetőségre és rekonstruálhatóságra. Elvárható azonban, hogy a specialitást kihasználva leegyszerűsödnek az eredmények.



1. ábra. Egyszerű vertikum-típusú rendszer sémája

Az *1. ábra* egy egyszerű vertikum-típusú rendszert ábrázol, ahol a gráf csúcspontjai mutatják a részrendszereket és az élek jelentik a részrendszerek közötti kimenet-bemenet irányított kapcsolatokat. Minden él balról jobbra halad visszatérés nélkül. Ez a gráf egy kör nélküli véges fa. A részerendszerek kimenetei az állapotváltozók függvényei.

A rendszer irányíthatóságának vizsgálatához szükséges, hogy meghatározzuk az összes olyan állapotot, amelyek megfelelő irányítás mellett elérhetőek. Például termelési folyamatokat leíró rendszerek esetén az irányítás azt jelenti, hogy egy rögzített későbbi időpontra az összes részrendszer által előállított termékmennyiséget előírjuk, és egy speciális értékre irányítjuk a rendszert, ha ez lehetséges.

Dolgozatunk célja vertikum-típusú rendszerek esetére az, hogy előállítsuk az összes elérhető állapotok halmazát. Vizsgálatunkban speciális mátrixstruktúrák segítségével átalakítjuk a leíró dinamikát, majd a Lie-algebrák elméletével előállítjuk a kérdéses halmazt.

2 Matematikai leírás

Amennyiben az egyes részrendszerek lineáris bemenet-kimenet rendszerek, amelyeket az n_i dimenziós euklideszi térben modelleztünk, akkor k részrendszer esetén $(n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n)$ a következő blokk-mátrixos modellel adhatjuk meg:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{x}}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \dots & \vdots \\ \dots & \dots & \ddots & 0 \\ A_{k1} & A_{k2} & \dots & A_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & \dots & 0 \\ B_{21} & B_{22} & \dots & \vdots \\ \dots & \dots & \ddots & 0 \\ B_{k1} & B_{k2} & \dots & B_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_k \end{pmatrix} =$$

$$= A\mathbf{x} + B\mathbf{u}\,, \tag{1}$$

ahol a mátrixok blokk-háromszög alakú struktúrája a vertikumtulajdonságból adódik.

Ezekre a lineáris rendszerekre is megfogalmazhatók, felvethetők azok a kérdések (a gyakorlatban is előforduló esetek tanulmányozása során), mint amelyeket az általános lineáris rendszernél vizsgálnak. A szokásos rendszertulajdonságok tanulmányozására alkalmazhatjuk az általánosan kapott kritériumokat, az elérhetőségre, az irányíthatóságra, megfigyelhetőségre és rekonstruálhatóságra. Elvárjuk azonban, hogy a specialitást kihasználva leegyszerűsödnek az általános eredmények. Itt is természetes az időtől, állapottól függő együtthatós rendszerek esete. Ha diszkrét időre is gondolunk, pl. egy részrendszer leállása, legyen az hiba miatt, vagy karbantartás céljából, azonnal felveti a több részrendszerből álló rendszer egyes részrendszereinek ki-be kapcsolásával kapott időfüggő együtthatók esetének a vizsgálatát. Az egyszerűbb írásmód céljából vezessük be az alábbi tömörebb jelöléseket:

$$\mathsf{A}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & & & \\ i & \dots & A_{ij} & \\ & & \vdots & \\ & & j & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{B}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & & & \\ i & \dots & B_{ij} & \\ & & \vdots & \\ & & j & 0 \end{pmatrix}.$$

Ekkor az (1) rendszer a következő alakúvá válik:

$$\dot{x} = \Big(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i} \mathsf{A}_{ij}\Big)\mathbf{x} + \Big(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i} \mathsf{B}_{ij}\Big)\mathbf{u}\,,$$

amely egy időtől vagy állapottól függő együtthatójú vertikum-típusú lineáris rendszer. Példaként megemlítjük, hogy az i-ik részrendszer ki-be kapcsolásával, ill. a többi együttes ki-be kapcsolásával adódó kapcsolási rendszert két, 0 és 1 értékeket felvevő, szakaszonként balról folytonos, és esetleg állapottól és időtől függő függvénnyel, a p, q-val modellezhetjük

$$\begin{aligned} \dot{x} = {} & p(\mathsf{A}_{ii}\mathbf{x} + \mathsf{B}_{ii}\mathbf{u}) + q\Big(\sum_{j_1\neq i}\sum_{j_2\neq i} \mathsf{A}_{j_1j_2}\mathbf{x} + \mathsf{B}_{j_1j_2}\mathbf{u}\Big) + \\ & pq\Big(\Big(\sum_{j_1<i} \mathsf{A}_{ij_1} + \sum_{j_2>i} \mathsf{A}_{j_2i}\Big)\mathbf{x} + \Big(\sum_{j_1<i} \mathsf{B}_{ij_1} + \sum_{j_2>i} \mathsf{B}_{j_2i}\Big)\mathbf{u}\Big) \end{aligned} \tag{2}$$

Valóban, $p \equiv 1$, $q \equiv 0$ esetén az i-ik részrendszert kapjuk

$$\dot{x} = \mathtt{A}_{ii}\mathbf{x} + \mathtt{B}_{ii}\mathbf{u}\,.$$

Ha $p \equiv 0$, $q \equiv 1$, akkor az i-ik kivételével az összes többi bekapcsolásával létrehozott

$$\dot{x} = \Big(\sum_{j_1 \neq i}\sum_{j_2 \neq i} \mathtt{A}_{j_1 j_2}\Big)\mathbf{x} + \Big(\sum_{j_1 \neq i}\sum_{j_2 \neq i} \mathtt{B}_{j_1 j_2}\Big)\mathbf{u}$$

rendszert kapjuk, míg $p \equiv 1$, $q \equiv 1$ visszaadja az egész rendszert, a $p \equiv 0$, $q \equiv 0$ pedig a triviális $\dot{x} = 0$ rendszert.

A könnyebb leírhatóság érdekében bevezetjük még az egységmátrix blokkjaira az

$$I_{ii} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} & & 0 & & \\ & & \vdots & & \\ 0 & \dots & I & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \\ & & 0 & & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \underbrace{\;i\;} \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} & & \underbrace{\;i\;} & & \end{matrix} & \end{array}$$

jelölést is. Ezzel pl. fennáll az

$$\mathtt{A}_{ij} = I_{ii} A I_{jj}$$

egyenlőség, ami a vertikum-típusú rendszerek blokk-trianguláris struktúramátrixai esetén azt eredményezi, hogy $i \geq j$ esetén lesz csak 0 -tól különböző a szorzat. Hasonló alakban írhatók fel a B mátrix blokkjaiból a $\mathtt{B}_{ij}$ mátrixok is $\mathtt{B}_{ij} = I_{ii} B I_{jj}$ alakban, csak a jobb oldali egységmátrix-blokkok dimenziója a B oszlopainak a blokkosításának megfelelőek.

A (2) egyenlet jobb oldalán lévő mátrixokat a következőképpen is átírhatjuk:

$$\begin{aligned} \dot{x} = \big(&pI_{ii}AI_{ii} + q(A - I_{ii}A - AI_{ii} + I_{ii}AI_{ii}) + pq(I_{ii}A + AI_{ii} - I_{ii}AI_{ii})\big)x + \\ &+ \big(pI_{ii}BI_{ii} + q(B - I_{ii}B - BI_{ii} + I_{ii}BI_{ii}) + pq(I_{ii}B + BI_{ii} - I_{ii}BI_{ii})\big)u \end{aligned}$$

Vezessük be a következő jelölést

$$T_i(p,q)X = pI_{ii}XI_{ii} + q(X - I_{ii}X - XI_{ii} + I_{ii}XI_{ii}) + pq(I_{ii}X + XI_{ii} - I_{ii}XI_{ii})\,,$$

ahol az X egy tetszőleges dimenziós blokkosított mátrix

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1k} \\ X_{21} & \dots & & \\ \vdots & & & \\ X_{k1} & X_{k2} & \dots & X_{kk} \end{pmatrix}.$$

Ezzel a jelöléssel az előző egyenlet az

$$\dot{x} = T_i(p,q)Ax + T_i(p,q)Bu \tag{3}$$

alakra hozható.

Legyenek most $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq k$, $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in I\!R^k$, és tekintsük az X mátrix

$$T_{i_1}(p_1 q_1) T_{i_2}(p_2 q_2) \dots T_{i_k}(p_k, q_k) X$$

transzformáltját, amelyik függ nyilván az $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_k)$, valamint a $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in I\!R^k$ paraméterektől, illetve elvben az $i_1, i_2, \dots, i_k$ rendezésétől is. Megmutatható, hogy ettől a rendezéstől eltekinthetünk, ugyanis igaz, hogy

$$T_i(p,q)\big(T_j(\overline{p},\overline{q})X\big) = T_j(\overline{p},\overline{q})\big(T_i(p,q)X\big)\,. \tag{4}$$

Valóban,

$$\begin{aligned} T_i(p,q)\big(T_j(\overline{p},\overline{q})X\big) &= \overline{q}qX + \overline{q}q(\overline{p}-1)I_{jj}X + \overline{q}q(\overline{p}-1)XI_{jj} + \\ &+ \overline{q}q(p-1)I_{ii}X + \overline{q}q(p-1)XI_{ii} + \big(\overline{q}q(1-\overline{p}) + \overline{p}q\big)I_{jj}XI_{jj} + \\ &+ \big(p\overline{q} + \overline{q}q(1-p)\big)I_{ii}XI_{ii} + (1-\overline{p})(1-p)\overline{q}qI_{jj}XI_{ii} + \\ &+ (1-\overline{p})(1-p)\overline{q}qI_{ii}XI_{jj} = T_j(\overline{p},\overline{q})\big(T_i(p,q)X\big)\,. \end{aligned}$$

Tekintsük most az i_1-edik és az i_2-edik részrendszert, $i_1 < i_2$, valamint a p_1, p_2 és q_1, q_2 paramétereket. Ekkor

$$\begin{aligned} &T_{i_1}(p_1,q_1)\big(T_{i_2}(p_2,q_2)A\big) = q_1q_2A + q_1q_2(p_2-1)I_{i_2,i_2}A + \\ &+ q_1q_2(p_2-1)AI_{i_2,i_2} + q_1q_2(p_1-1)AI_{i_1,i_1} + q_1q_2(p_1-1)AI_{i_1,i_1} + \\ &+ \big(q_1q_2(1-p_2) + p_2q_1\big)I_{i_2,i_2}AI_{i_2,i_2} + \big(p_1q_2 + q_1q_2(1-p_1)\big)I_{i_1,i_1}AI_{i_1,i_1} + \\ &+ (1-p_2)(1-p_1)q_2q_1I_{i_2,i_2}AI_{i_1,i_1}\,, \end{aligned}$$

ui. $I_{i_1,i_1}AI_{i_2,i_2} = 0$, mivel az A mátrix blokk-trianguláris mátrix. Hasonló igaz a B mátrix esetén is.

Ezek után leírhatjuk a fenti rendszert is a $T_i(p,q)$ transzformációk segítségével, a $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ paraméterekkel, amelyben az $i_1, i_2, \dots, i_k$-adik részrendszereket kapcsolgatjuk:

$$\begin{aligned} T_{i_1}(p_1,q_1)\dots T_{i_k}(p_k,q_k)A &= \Pi(\mathbf{p},\mathbf{q})A + \sum_{j=1}^{k}\Pi_j(\mathbf{p},\mathbf{q})\big(I_{i_j,i_j}A + AI_{i_j,i_j}\big) + \\ &+ \sum_{j=1}^{k}\overline{\Pi}_j(\mathbf{p},\mathbf{q})I_{i_j,i_j}AI_{i_j,i_j} + \sum_{j_1<j_2}\hat{\Pi}_{j_1,j_2}(\mathbf{p},\mathbf{q})I_{i_{j_2},i_{j_2}}AI_{i_{j_1},i_{j_1}}\,, \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} T_{i_1}(p_1,q_1)\dots T_{i_k}(p_k,q_k)B &= \Pi(\mathbf{p},\mathbf{q})B + \sum_{j=1}^{k}\Pi_j(\mathbf{p},\mathbf{q})\big(I_{i_j,i_j}B + BI_{i_j,i_j}\big) + \\ &+ \sum_{j=1}^{k}\overline{\Pi}_j(\mathbf{p},\mathbf{q})I_{i_j,i_j}BI_{i_j,i_j} + \sum_{j_1<j_2}\hat{\Pi}_{j_1,j_2}(\mathbf{p},\mathbf{q})I_{i_{j_2},i_{j_2}}BI_{i_{j_1},i_{j_1}}\,, \end{aligned}$$

ahol Π, Π_j és $\hat{\Pi}_{j_1,j_2}$ a $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ polinomjai. Ezek alapján a (3) rendszer az

$$\dot{x} = T_{i_1}(p_1,q_1)T_{i_2}(p_2,q_2)\dots T_{i_k}(p_k,q_k)A\mathbf{x} + T_{i_1}(p_1,q_1)\dots T_{i_k}(p_k,q_k)B\mathbf{u} \tag{5}$$

egy polinomiális LPV-rendszer alakú lesz az $A, I_{i_j,i_j}A + AI_{i_j,i_j}$, $I_{i_j,i_j}AI_{i_j,i_j}$, és az $I_{i_{j_2},i_{j_2}}AI_{i_{j_1},i_{j_1}}$ mátrixokkal. A polinomváltozós (5) rendszer struktúramátrixai polinomiálisak a $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ paraméterekre nézve, de még így is kellően jó tulajdonságokkal bírnak. Tekinthetjük az (5) rendszerben lévő paramétereket időfüggőnek, amely esetén a $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \{0,1\}^k \subset Q_k \subset I\!R^k$ k-dimenziós egységkockájának a csúcsaiból véve az értékeit, egy kapcsolási rendszert formálunk. A $T_i(p,q)$ „kapcsoló"-k kommutálása folytán tekinthetjük (5) paraméterezését egy paraméterenkénti 2-állású kapcsolónak, azaz a rendszerbe beépítettünk egy 4^k-állású kapcsolót. A vertikum struktúrájú komplex ipari rendszerekben az egyes részrendszerek beállításával kapott rendszer a konverterrel analóg kapcsolási rendszernek tekinthető egy 4^k állású „kapcsoló"-val ellátva. Ennek az ipari komplexum esetén a célja az lehet, hogy az időben lefolyó ideális gazdaságpolitika, a nyereség maximálása, a szükségletek szezonális változásai, a szükséges erőforrások és a termeléshez szükséges anyagi és energetikai feltételek biztosítása mind megkívánják, hogy változó struktúrát, változtatható termelést tervezhessünk. Tekinthetjük azt az ideális esetet, amikor a $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ paraméterek időfüggőek, azaz $\mathbf{p}(t)$, $\mathbf{q}(t)$ időfüggő paraméterekkel tekintjük az

$$\begin{aligned} \dot{x} &= T_{i_1}\big(p_1(t), q_1(t)\big) \dots T_{i_k}\big(p_k(t), q_k(t)\big) A\mathbf{x}(t) + \\ &+ T_{i_1}\big(p_1(t), q_1(t)\big) \dots T_{i_k}\big(p_k(t), q_k(t)\big) B\mathbf{u}(t) \end{aligned} \tag{6}$$

rendszert, amelynek az ideális működését fogjuk vizsgálni. Majd ezt approximáljuk a $Q_k \subset I\!R^k$ kockán mint konvex poliéderen egy olyan szakaszonként konstans kapcsolási rendszerrel, amelyben a $(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t))$ értékei a Q_k csúcsai, azaz a p_j, q_j, $j = 1, 2, \dots, k$ értékei a 0 vagy 1 értékeket vehetik fel a meghatározott részintervallumokon, azaz részintervallumonként olyan vertikum-típusú rendszerekkel közelítjük, amelyek az eredeti vertikum bizonyos részrendszereinek kikapcsolásával, leállításával adódnak.

3 Az állapotok jellemzése

Az általános esetben láttuk, hogy az időtől függő rendszerek fundamentális mátrixának a kiszámításához ki kell számítani a rendszer struktúrájához rendelt Lie-algebrát, azaz az $\mathtt{A}_{ij}$ mátrixok által generált Lie-algebrát.

1. Minden lehetséges i, j párra

   $$\big[\mathtt{A}_{ii}, \mathtt{A}_{jj}\big] = \mathtt{A}_{ii}\mathtt{A}_{jj} - \mathtt{A}_{jj}\mathtt{A}_{ii} = 0\,,$$

   akár $i = j$, akár $i \neq j$.

2. Most tekintsük általában az $\mathtt{A}_{ij}$ és az $\mathtt{A}_{lm}$ elemeket, legalább az egyik mátrix nem diagonálisbeli, azaz $i \neq j$ vagy $l \neq m$ teljesül. Ekkor

   $$\big[\mathtt{A}_{ij}, \mathtt{A}_{lm}\big] = \mathtt{A}_{ij}\mathtt{A}_{lm} - \mathtt{A}_{lm}\mathtt{A}_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } j \neq l \text{ és } m \neq i, \\ \mathtt{A}_{ij}\mathtt{A}_{jm}, & \text{ha } j = l, \\ -\mathtt{A}_{lm}\mathtt{A}_{mj}, & \text{ha } m = i. \end{cases}$$

3. Mivel $i \geq j$ és $l \geq m$ teljesül, csak ezekre definiáltuk az $\mathtt{A}_{ij}$, $\mathtt{A}_{lm}$ mátrixokat, ezért $\left[\mathtt{A}_{ij}, \mathtt{A}_{lm}\right] \neq 0$ csak akkor lehetséges, ha $i \geq j = l \geq m$ vagy $l \geq m = i \geq j$ teljesül.

Ebből már sejthető, hogy egy szorzat csak akkor lehet nem nulla, ha a tényezői átrendezhetők elemek (mátrixok) cseréjével, hogy így az indexek egy monoton csökkenő szorzatot alkossanak, és hogy egy mátrix második indexe legyen egyenlő a rákövetkező mátrix első indexével. Ebből könnyen látható, hogy akármilyen zárójelzéssel egy szorzat, ha teljesíti a fentieket, akkor

$$\pm\mathtt{A}_{i_1 i_2}\mathtt{A}_{i_2 i_3}\mathtt{A}_{i_3 i_4}\ldots\mathtt{A}_{i_{l-2} i_{l-1}}\mathtt{A}_{i_{l-1} i_l}$$

alakú, ahol $i_1 \geq i_2 \geq i_3 \geq \ldots \geq i_{l-2} \geq i_{l-1} \geq i_l$, és legalább egy egyenlőtlenség szigorúan teljesül, az

$$\mathtt{A}_{ii}\mathtt{A}_{ii}\ldots\mathtt{A}_{ii}$$

szorzat, mint láttuk az első pontban, nem lehet eredménye Lie-zárójelnek. Ha a különböző indexű elemeket jelöljük csak különbözőknek, azaz

$$\pm\mathtt{A}_{i_1 i_2}\mathtt{A}_{i_2 i_3}\ldots\mathtt{A}_{i_{l-1} i_l}$$

teljesítve, hogy $i_1 > i_2$, $i_2 > i_3$, …, $i_{l-1} > i_l$, akkor a szorzatok általános alakja

$$\pm\mathtt{A}^{m_1}_{i_1 i_1}\mathtt{A}_{i_1 i_2}\mathtt{A}^{m_2}_{i_2 i_2}\mathtt{A}_{i_2 i_3}\mathtt{A}^{m_3}_{i_3 i_3}\mathtt{A}_{i_3 i_4}\ldots\mathtt{A}^{m_{l-1}}_{i_{l-1} i_{l-1}}\mathtt{A}_{i_{l-1} i_l}\mathtt{A}^{m_l}_{i_l i_l}\,.$$

Ezt a szorzatok hosszára vonatkozó teljes indukcióval lehet bizonyítani. A kéttényezős $\left[\mathtt{A}_{i_1 i_2}, \mathtt{A}_{i_3 i_4}\right]$ Lie-zárójelre azt kapjuk, hogy ez $i_2 = i_3$ esetén $\left[\mathtt{A}_{i_1 i_2}, \mathtt{A}_{i_2 i_4}\right]$ (i_4-et újra nevezhetjük i_3-nak), és $i_1 = i_4$ esetén $\left[\mathtt{A}_{i_3 i_4}, \mathtt{A}_{i_4 i_2}\right]$ (itt is átindexezhetjük az indexeket). A lényeg ismét, hogy teljesül az $i_1 \geq i_2$, $i_2 \geq i_3 \geq i_4$, illetve $i_3 \geq i_4 = i_1 \geq i_2$ monotonitás az indexekre. Tegyük fel, hogy a legfeljebb M-tényezős Lie-zárójelekre (és a rövidebbekre) már tudjuk a fenti szabályt. Akkor, ha az utolsó Lie-zárójelezés két tényezőjét tekintjük, mindegyike M vagy kevesebb tényezős:

$$\left[A_1, A_2\right],$$

ahol

$$A_1 = [[\mathtt{A}_{i_j i_{j+1}}, \ldots][\cdot,\cdot]]$$

$$A_2 = \left[[\mathtt{A}_{ij}, [[\mathtt{A}_{i_1 i_2}, \mathtt{A}_{i_3 i_4}], A]], \ldots\right].$$

Ezek mindegyikére igaz, hogy

$$A_1 = \pm\mathtt{A}^{m_1}_{i_1 i_1}\mathtt{A}_{i_1 i_2}\mathtt{A}^{m_2}_{i_2 i_2}\ldots\mathtt{A}^{m_{l-1}}_{i_{l-1} i_{l-1}}\mathtt{A}_{i_{l-1} i_l}\mathtt{A}^{m_l}_{i_l i_l}\,,$$

$$A_2 = \pm\mathtt{A}^{m_l}_{i_l i_l}\mathtt{A}_{i_l i_{l+1}}\mathtt{A}^{m_{l+1}}_{i_{l+1} i_{l+1}}\ldots\mathtt{A}^{m_{l+\bar{l}-1}}_{i_{l+\bar{l}-1} i_{l+\bar{l}-1}}\mathtt{A}_{i_{l+\bar{l}-1} i_{l+\bar{l}}}\mathtt{A}^{m_{l+\bar{l}}}_{i_{l+\bar{l}} i_{l+\bar{l}}}\,.$$

Használhattuk az A_1, illetve az A_2 esetén is az i_l indexet mint utolsót, illetve mint elsőt. De ugyanúgy felcserélhető az A_1 és A_2 szerepe, azért az itt $i_{l+\bar{l}}$-lel jelölt index is megegyezhetett volna az i_1-gyel, akkor is hasonló eredmény adódott volna, természetesen átindexezve a mátrixokat. Innen

$$\left[A_1, A_2\right] = \pm\mathtt{A}^{m_1}_{i_1 i_1}\mathtt{A}_{i_1 i_2}\ldots\mathtt{A}_{i_{l-1} i_l}\mathtt{A}^{m_l + \overline{m}_l}_{i_l i_l}\mathtt{A}_{i_l i_{l+1}}\ldots\mathtt{A}^{m_{l+\bar{l}}}_{i_{l+\bar{l}} i_{l+\bar{l}}}\,.$$

Tehát az $L\{\mathtt{A}_{ij} : i \geq j\}$ generált Lie-algebra éppen az

$$\{\mathtt{A}_{i_1 i_1}^{m_1}\mathtt{A}_{i_1 i_2}\mathtt{A}_{i_2 i_2}^{m_2}\ldots\mathtt{A}_{i_{l-1} i_l}\mathtt{A}_{i_l i_l}^{m_l}\}$$

mátrixszorzatok által generált vektor-altér az $\mathbb{R}^{n\times n}$-ben. A bázist válasszuk ki növekvő hossz szerint, a tényezők számának növekedő sorrendjében minden olyan báziselemre, amely fix i, j-re $\mathtt{A}_{ii}^{m_1}\mathtt{A}_{ii_2}\mathtt{A}_{i_2 i_2}^{m_2}\ldots\mathtt{A}_{i_{l-1}j}\mathtt{A}_{jj}^{m_l}$ alakú. Ezeket így rendezve alkotják a bázis $\mathcal{A}_{ij}$ blokkját. Ezeket a blokkokat pedig rendezzük i-ben növekvően, j-ben csökkenően minden fix i-re. Legyen $\mathcal{A}_{ii}$ vagy üres: ha $\mathtt{A}_{ii} = 0$, vagy egyelemű $\mathcal{A}_{ii} = \{\mathtt{A}_{ii}\}$ (ha $\mathtt{A}_{ii} \neq 0$), és

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{k}\bigcup_{j=1}^{i}\mathcal{A}_{ij}\,.$$

Ebben a sorrendben felírható a Wei-Norman-egyenlet (Wei-Norman, 1964), amelyben az

$$\mathtt{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}} = \mathtt{A}_{i_1 i_1}^{m_1}\mathtt{A}_{i_1 i_2}\mathtt{A}_{i_2 i_2}^{m_2}\ldots\mathtt{A}_{i_{l-1} i_l}\mathtt{A}_{i_l i_l}^{m_l} \in \mathcal{A}_{ij}$$

elemhez rendelhető a $g_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}(t,\tau)$ megoldás. Ennek segítségével az alaprendszer felírható exponenciálisok szorzataként

$$\Phi(t,\tau) = \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{l}\prod_{\mathtt{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}\in\mathcal{A}_{ij}}\exp\bigl(g_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}(t,\tau)\mathtt{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}\bigr)\,.$$

Az $\mathtt{A}_{ii} \in \mathcal{A}_{ii}$ báziselemekre

$$\exp\bigl(g_{ii}(t,\tau)\mathtt{A}_{ii}\bigr) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{g_{ii}(t,\tau)^l}{l!}\mathtt{A}_{ii}^l = \sum_{l=0}^{n_i-1}\mathcal{P}_{il}\bigl(g_{ii}(t,\tau)\bigr)\mathtt{A}_{ii}^l\,,$$

ahol a $\mathcal{P}_{il}\bigl(g_{ii}(t,\tau)\bigr)$ függvények a $g_{ii}(t,\tau)$-nak kvázipolinomjai.

Egyszerűbb kiszámítani a többi báziselem exponenciálisát, de a formulának vannak érdekes következményei. Könnyű belátni, hogy minden $i > j$ esetén az $\mathtt{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}} \in \mathcal{A}_{ij}$-re teljesül, hogy

$$(\mathtt{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}})^2 = 0\,,$$

azaz

$$\exp\bigl(g_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}(t,\tau)\mathtt{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}\bigr) = I + g_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}(t,\tau)\mathtt{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}\,;$$

továbbá két báziselem, $\mathtt{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}} \in \mathcal{A}_{ij}$ és $\mathtt{A}_{\hat{\mathbf{i}}}^{\hat{\mathbf{m}}} \in \mathcal{A}_{ki_2\hat{j}}$ szorzata $i > j$ és $ki_2 > \hat{j}$ esetén szintén 0:

$$\mathtt{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}\mathtt{A}_{\hat{\mathbf{i}}}^{\hat{\mathbf{m}}} = 0\,.$$

Ha $\mathtt{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}} = \mathtt{A}_{i_1 i_1}^{m_1}\mathtt{A}_{i_1 i_2}\ldots\mathtt{A}_{i_{l-1} i_l}\mathtt{A}_{i_l i_l}^{m_l}$, akkor $i \neq i_1$ esetén

$$\exp\bigl(g_{ii}(t,\tau)\mathtt{A}_{ii}\bigr)\mathtt{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}} = \mathtt{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}\,.$$

Így az exponenciális szorzatok lényegesen leegyszerűsödnek. Például

$$\prod_{j=i}^{l} \prod_{\mathtt{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}} \in \mathcal{A}_{ij}} \exp\bigl(g_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}(t,\tau)\mathtt{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}\bigr) = \exp\bigl(g_{ii}(t,\tau)\mathtt{A}_{ii}\bigr)\Bigl(I + \sum_{i>j} \sum_{\mathtt{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}} \in \mathcal{A}_{ij}} g_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}(t,\tau)\mathtt{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}\Bigr).$$

Könnyen látható, hogy az (i,i) blokkban egyedül $\exp\bigl(g_{ii}(t,\tau)\mathtt{A}_{ii}\bigr)$ van, az (i,j) blokkban pedig

$$\sum_{\mathtt{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}} \in \mathcal{A}_{ij}} \exp\bigl(g_{ii}(t,\tau)\mathtt{A}_{ii}\bigr) g_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}(t,\tau)\mathtt{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}} \tag{7}$$

áll. A többi diagonális blokkban az egységmátrixok n_l $(l \neq i)$-dimenziós egységek, míg az összes többi blokkban 0 áll.

A $\Phi(t,\tau)$-t úgy kapjuk, hogy ezeket mind összeszorozzuk. Ezzel minden $i = 1, 2, \ldots, k$-ra hasonlóképpen írjuk be a (7)-beli sorok blokkjait anélkül, hogy bármit módosulnának a sorok. Láttuk, hogy a Cauchy-féle formulában, ill. a Kalman-féle elérhetőségi mátrixban a $\Phi(t,\tau)B(\tau)$ szorzatot kell számolni, amely esetünkben

$$\begin{aligned} \Phi(t,\tau)B(\tau) = \prod_{i=1}^{k} \exp\bigl(g_{ii}(t,\tau)\mathtt{A}_{ii}\bigr)\Bigl(I + \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{\mathtt{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}} \in \mathcal{A}_{ij}} g_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}(t,\tau)\mathtt{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}\Bigr) \times \\ \times \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{i} b_{ij}(\tau)\mathtt{B}_{ij}\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Mielőtt folytatnánk a részletesebb tárgyalást, vizsgáljuk meg, hogy milyen specialitása van az $\exp\bigl(g_{ii}(t,\tau)\mathtt{A}_{ii}\bigr)$ exponenciálisoknak. Azt tudjuk, hogy általában a $\Phi(t,\tau)$ alapmátrixot kifejezhetjük a $\Psi(t) = \Phi(t,0)$ mátrix segítségével, amit ugyancsak alapmátrixnak neveznek, amely a speciális

$$\dot{\Psi}(t) = A(t)\Psi(t), \qquad \Psi(0) = I$$

kezdetiérték-problémának a megoldása. Ezek szerint

$$\Phi(t,\tau) = \Psi(t)\Psi(\tau)^{-1}.$$

Vizsgáljuk meg, esetünkben ez mit jelent az átlóban levő $\mathtt{A}_{ii}$ blokkok exponenciálisaira. A $\Psi(t)$ átlóinak az exponenciálisaira azt kapjuk, hogy azok a definíció szerint éppen az $\exp\bigl(g_{ii}(t,0)\mathtt{A}_{ii}\bigr)$ mátrixok. $\Psi(t)^{-1}$-ben az $\exp\bigl(-g_{ii}(t,0)\mathtt{A}_{ii}\bigr)$ elemek állnak, mert az átlóban levő blokkok inverzei lesznek az inverz átlós blokkjai, annak következményeként, hogy a mátrixunk blokk-trianguláris. Tehát

$$\begin{aligned} \exp\bigl(g_{ii}(t,\tau)\mathtt{A}_{ii}\bigr) &= \exp\bigl(g_{ii}(t,0)\mathtt{A}_{ii}\bigr)\exp\bigl(-g_{ii}(\tau,0)\mathtt{A}_{ii}\bigr) = \\ &= \exp\bigl((g_{ii}(t,0) - g_{ii}(\tau,0))\mathtt{A}_{ii}\bigr)\,. \end{aligned}$$

Legyen most $\alpha_{ii}(t) = \frac{d}{dt}g_{ii}(t,0)$. Ekkor $\int_\tau^t \alpha_{ii}(s)\,ds = g_{ii}(t,0) - g_{ii}(\tau,0)$, azaz $g_{ii}(t,\tau) = g_{ii}(t,0) - g_{ii}(\tau,0)$, vagy ezt az exponenciálisba beírva

$$\exp\bigl(g_{ii}(t,\tau)\mathtt{A}_{ii}\bigr) = \exp\int_\tau^t \alpha_{ii}(s)\,ds\,\mathtt{A}_{ii}\,.$$

Az $\alpha_{ii}(t)$ függvényről ennél több is mondható. Ehhez kiszámoljuk a $\Psi(t)$ alapmegoldás egy részét, a diagonálisban álló blokkokét a

$$\Psi_{j+1}(t) = I + \int_0^t A(t_1)\Psi_j(t_1)\,dt_1$$

iterációból, a $\Psi_0(t) = I$ kezdőértékből kiindulva.

$$\Psi_1(t) = I + \int_0^t A(t_1)\,dt_1,$$

$$\Psi_2(t) = I + \int_0^t A(t_1)\,dt_1 + \frac{1}{2!}\Bigl(\int_0^t A(t_1)\,dt_1\Bigr)^2 - \frac{1}{2}\int_0^t \Bigl[A(t_2), \int_0^{t_2} A(t_1)\,dt_1\Bigr]\,dt_2\,.$$

Az utolsó tag integrál alatti Lie-zárójele abból adódik, hogy a formula kiszámításában szerepet játszó

$$\frac{d}{dt}\Bigl(\int_0^t A(t_1)\,dt_1\Bigr)^2 = A(t)\Bigl(\int_0^t A(t_1)\,dt_1\Bigr) + \Bigl(\int_0^t A(t_1)\,dt_1\Bigr)A(t) =$$
$$= 2A(t)\int_0^t A(t_1)\,dt_1 + \Bigl[\int_0^t A(t_1)\,dt_1, A(t)\Bigr]$$

deriválás esetén az $A(t)$ és $\int_0^t A(t_1)\,dt_1$ nem felcserélhetőek, ezért szükséges a $\bigl[\int_0^t A(t_1)\,dt_1, A(t)\bigr]$ Lie-zárójeles korrekció. Ugyanez a harmadik hatvány esetén

$$\frac{d}{dt}\Bigl(\int_0^t A(t_1)\,dt_1\Bigr)^3 = A(t)\Bigl(\int_0^t A(t_1)\,dt_1\Bigr)^2 + \int_0^t A(t_1)\,dt_1\,A(t)\int_0^t A(t_1)\,dt_1 +$$
$$+ \Bigl(\int_0^t A(t_1)\,dt_1\Bigr)^2 A(t) = 3A(t)\Bigl(\int_0^t A(t_1)\,dt_1\Bigr)^2 +$$
$$+ 2\Bigl[\int_0^t A(t_1)\,dt_1, A(t)\Bigr]\int_0^t A(t_1)\,dt_1 + \int_0^t A(t_1)\,dt_1\Bigl[\int_0^t A(t_1)\,dt_1, A(t)\Bigr],$$

ezért

$$A(t)\Bigl(\int_0^t A(t_1)\,dt_1\Bigr)^2 = \frac{1}{3}\frac{d}{dt}\Bigl(\int_0^t A(t_1)\,dt_1\Bigr)^3 -$$
$$- \frac{2}{3}\Bigl[\int_0^t A(t_1)\,dt_1, A(t)\Bigr]\int_0^t A(t_1)\,dt_1 - \frac{1}{3}\int_0^t A(t_1)\,dt_1\Bigl[\int_0^t A(t_1)\,dt_1, A(t)\Bigr].$$

Ezt a rekurzióba beírva

$$
\begin{aligned}
\Psi_3(t) = I + \int_0^t A(t_1)\,dt_1 + \int_0^t A(t_1) \int_0^{t_1} A(t_2)\,dt_2\,dt_1 + \\
+ \frac{1}{2!} \int_0^t A(t_1) \Big(\int_0^{t_1} A(t_2)\,dt_2 \Big)^2 dt_1 - \\
- \frac{1}{2!} \int_0^t A(t_1) \int_0^{t_1} \Big[A(t_2), \int_0^{t_2} A(t_3)\,dt_3 \Big]\,dt_2\,dt_1 = I + \int_0^t A(t_1)\,dt_1 + \\
+ \frac{1}{2!} \int_0^t \frac{d}{dt_1} \Big(\int_0^t A(t_2)\,dt_2 \Big)^2 dt_1 - \frac{1}{2!} \int_0^t \Big[A(t_2), \int_0^{t_2} A(t_1)\,dt_1 \Big]\,dt_2 + \\
+ \frac{1}{3!} \int_0^t \frac{d}{dt_1} \Big(\int_0^{t_1} A(t_2)\,dt_2 \Big)^3 dt_1 - \frac{1}{3} \int_0^t \Big[\int_0^{t_1} A(t_2)\,dt_2, A(t_1) \Big] \int_0^{t_1} A(t_2)\,dt_2\,dt_1 - \\
- \frac{1}{3!} \int_0^t \int_0^{t_1} A(t_2)\,dt_2 \Big[\int_0^{t_1} A(t_2)\,dt_2, A(t_1) \Big]\,dt_1 = \\
= I + \int_0^t A(t_1)\,dt_1 + \frac{1}{2!} \Big(\int_0^t A(t_1)\,dt_1 \Big)^2 + \frac{1}{3!} \Big(\int_0^t A(t_1)\,dt_1 \Big)^3 + \\
+ \Big[\text{Lie-zárójelet tartalmazó tagok} \Big]\,.
\end{aligned}
$$

Indukcióval lehet igazolni, hogy

$$
\Psi_l(t) = \sum_{j=0}^{l} \frac{1}{j!} \Big(\int_0^t A(t_1)\,dt_1 \Big)^j + \Big[\text{Lie-zárójelet tartalmazó tagok} \Big]\,.
$$

A $\Psi_l(t)$ egyenletes konvergenciája is igazolható minden kompakt intervallumon. Ráadásul a

$$
\sum_{j=0}^{l} \frac{1}{j!} \Big(\int_0^t A(t_1)\,dt_1 \Big)^j
$$

is egyenletesen konvergál az $\exp \int_0^t A(t_1)\,dt_1$ exponenciálishoz, azaz

$$
\Psi(t) = \lim_{l \to \infty} \Psi_l(t) \neq \exp \int_0^t A(t_1)\,dt_1
$$

a nemkommutativitás miatt. Azonban a Lie-zárójeles tagok ii típusú diagonális blokkjai mind 0-k, ezért a $\Psi(t)\ \exp\big(g_{ii}(t,0)\mathtt{A}_{ii}\big)$ blokkjaira igaz, hogy azok $\exp \int_0^t A(t_1)\,dt_1$ diagonális blokkjaival egyenlők. Ezekre azonban fennáll, hogy

$$
\exp\big(g_{ii}(t,0)\mathtt{A}_{ii}\big) = \exp\Big(\int_0^t a_{ii}(t_1)\,dt_1 \mathtt{A}_{ii} \Big)\,,
$$

amiből $g_{ii}(t,0) = \int_0^t a_{ii}(t_1)\,dt_1$ adódik, azaz $\alpha_{ii}(t) = a_{ii}(t)$.

Most már visszatérhetünk a (8) alakításához. Nyilvánvalóan

$$= \prod_{i=1}^{k} \exp\Big(\int_{\tau}^{t} a_{ii}(t_1)\, dt_1 \mathtt{A}_{ii}\Big)\Big(I + \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{\mathtt{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}} \in \mathcal{A}_{ij}} g_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}(t,\tau)\mathtt{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}\Big) \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{i} b_{ij}(\tau)\mathtt{B}_{ij} =$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \exp\Big(\int_{\tau}^{t} a_{ii}(t_1)\, dt_1 \mathtt{A}_{ii}\Big)\Big(b_{ii}(\tau)\mathtt{B}_{ii} + \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{\mathtt{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}} \in \mathcal{A}_{ij}} g_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}(t,\tau) b_{ij}(\tau)\mathtt{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}\mathtt{B}_{ij}\Big).$$

Tehát

$$x(t) = \int_0^t \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\, d\tau = \prod_{i=1}^{k} \int_0^t \exp\Big(\int_{\tau}^{t} a_{ii}(t_1)\, dt_1 \mathtt{A}_{ii}\Big) \times$$

$$\times \Big(b_{ii}(\tau)\mathtt{B}_{ii}u_i(\tau) + \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{\mathtt{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}} \in \mathcal{A}_{ij}} b_{ij}(\tau) g_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}(t,\tau)\mathtt{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}\mathtt{B}_{ij}u_j(\tau)\Big)\, d\tau$$

írja le a rendszer dinamikát. Ebből az i-edik sorban levő blokkmátrixnak megfelelő $\mathbf{x}_i$ állapotra fennáll, hogy:

$$x_i(t) = \int_0^t \exp\Big(\int_{\tau}^{t} a_{ii}(t_1)\, dt_1 \mathtt{A}_{ii}\Big)\mathtt{B}_{ii} b_{ii}(\tau)u_i(\tau)d\tau +$$

$$+ \int_0^t \exp\Big(\int_{\tau}^{t} a_{ii}(t_1)\, dt_1 \mathtt{A}_{ii}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{i-1} \sum_{\mathtt{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}} \in \mathcal{A}_{ij}} \mathtt{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}\mathtt{B}_{ij} b_{ij}(\tau) g_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}(t,\tau)u_j(\tau)\Big)\, d\tau.$$

Vajon ez milyen differenciálegyenlet megoldóképletének, Cauchy-féle formulájának tekinthető? Hogy ezt megkapjuk, deriváljuk a kapott egyenletet, felhasználva, hogy egy ún. paraméteres integrált, amelynek a paramétere az integrál felső határában is benne van, a

$$\frac{d}{dt}\Big(\int_0^t f(t,\tau)\, d\tau\Big) = f(t,t) + \int_0^t \partial_t f(t,\tau)\, d\tau$$

formula alapján deriválunk, ráadásul a mi esetünkben az integrandus szorzat, amelyet a szorzat deriválási szabályával deriválunk. Tehát

$$\dot{x}_i(t) = b_{ii}(t)\mathtt{B}_{ii}u_i(t) + \int_0^t a_{ii}(t)\mathtt{A}_{ii} \exp\Big(\int_{\tau}^{t} a_{ii}(t_1)\, dt_1 \mathtt{A}_{ii}\Big) \times$$

$$\times \Big(\mathtt{B}_{ii} b_{ii}(\tau)u_i(\tau) + \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{\mathtt{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}} \in \mathcal{A}_{ij}} \mathtt{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}\mathtt{B}_{ij} b_{ij}(\tau) g_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}(t,\tau)u_j(\tau)\Big)\, d\tau +$$

$$+ \int_0^t \exp\Big(\int_{\tau}^{t} a_{ii}(t_1)\, dt_1 \mathtt{A}_{ii}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{i-1} \sum_{\mathtt{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}} \in \mathcal{A}_{ij}} \mathtt{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}\mathtt{B}_{ij} b_{ij}(\tau) \frac{d}{dt} g_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}(t,\tau)u_j(\tau)\Big)\, d\tau =$$

$$= a_{ii}(t)\mathtt{A}_{ii}x_i(t) + b_{ii}(t)\mathtt{B}_{ii}u_i(t) +$$

$$+ \int_0^t \exp\Big(\int_{\tau}^{t} a_{ii}(t_1)\, dt_1 \mathtt{A}_{ii}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{i-1} \sum_{\mathtt{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}} \in \mathcal{A}_{ij}} \mathtt{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}\mathtt{B}_{ij} b_{ij}(\tau) \frac{d}{dt} g_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}(t,\tau)u_j(\tau)\Big)\, d\tau\,.$$

Látható, hogy az eredeti, az i-edik részrendszer egyenletéhez hozzájárul egy az $u_1(t)$, $u_2(t)$, …, $u_{i-1}(t)$ előző bemenetektől függő integrálos beavatkozó tag. Viszont az így kapott k részrendszernek az állapotfüggő dinamikája szétcsatolódott k darab független dinamikára. Az időtől függő együttható is maradt az eredeti $a_{ii}(t)$.

4 Az elérhető állapotok halmaza

Az elérhető állapotok leírására is elég az elérhető $x_i(T)$ állapotokat leírni minden $i = 1, 2, \dots, k$ esetén. Ehhez definiáljuk az új B-k szerepét játszó mátrixokat:

$$\mathtt{B}_i = (\mathtt{B}_{ii}, \dots, \mathtt{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}} \mathtt{B}_{ij}, \dots), \qquad \mathtt{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}} \in \bigcup_{j=1}^{i-1} \mathcal{A}_{ij}\,.$$

Az i-edik Kalman-féle irányíthatósági-elérhetőségi mátrix az a következő:

$$(\mathtt{B}_i, \mathtt{A}_{ii}\mathtt{B}_i, \dots \mathtt{A}_{ii}^{n_i-1}\mathtt{B}_i), \qquad i = 1, 2, \dots, k\,.$$

A perzisztens gerjesztés feltételeként nem tudunk semmi speciálist mondani, ugyanis a Wei-Norman-differenciálegyenlet megoldására az egyetlen speciális állításunk az, hogy $g_{ii}(t, \tau) = \int_\tau^t a_{ii}(t_1)\, dt_1$. Tehát létezik olyan gerjesztési feltétel, és ez generikusan teljesül, amely mellett az elérhetőségi altér az $\mathbf{x}_i$ állapotok elérhetőségi altereinek a direkt összege (a szétcsatolás miatt).

Tétel. *Az elérhetőségi altér az*

$$\mathrm{Im}(\mathtt{B}_i, \mathtt{A}_{ii}\mathtt{B}_i, \dots \mathtt{A}_{ii}^{n_i-1}\mathtt{B}_i)$$

alterek direkt összege.

Összefoglalás

A különféle vertikum-típusú rendszerek mind gyakorlati, mind elméleti jelentőségét abban látjuk, hogy egy természetes algoritmizálási lehetőséget kínálnak, másrészt az is látható, hogy szinte minden rendszer vertikum-típusú rendszerré transzformálható (pl. biológiai rendszerek, környezetvédelmi rendszerek stb.). Ezt az algoritmizálási lehetőséget kiaknáztuk mind a megfigyelési rendszerek irányíthatósága, mind megfigyelhetősége vizsgálata során.

A cikkben a korábban jellemzett vertikum-típusú rendszereket általánosítottuk, és egy gyakorlatban nagyon fontos approximációs tételt bizonyítottunk ezekre vonatkozóan.

5 Megjegyzések

1. Az 1. ábrán látható és azt általánosító struktúrák már az elemi operációkutatási feladatoknál is felmerülnek. Ha a gráf kezdőpontjából a végpontig vezető legrövidebb utat keressük, ahol az élekhez a megfelelő részrendszerek közötti távolságokat rendeljük, akkor az ún. ,,legrövidebb útvonal" problémához jutunk. Ha azonban a gráf csúcspontjai egy munkafolyamat, vagy egy termelési lánc fázisait mutatják, az élek pedig azokat a tevékenységeket, amelyek az egyik fázisból a másikba való eljutáshoz szükségesek, akkor a ,,kritikus út" probléma a teljes projekt lehető legkorábbi befejezési időtartamát adja meg.

2. Véges fával ábrázolható n-személyes játékok egyensúlypontjainak meghatározása is az 1. ábrához hasonló struktúrára épül (Matsumoto és Szidarovszky, 2016).

3. Néhány további alkalmazási terület

- ökológiai monitorozáshoz olyan esetekben használhatóak a vertikum típusú rendszerek, amikor az egyes alrendszerek szekvenciálisan kapcsolódnak egymáshoz, és egy adott alrendszer állapotvátozóinak egy része a következő rendszerben exogén változóként jelentkezik.

- Hasonló a helyzet táplálékláncok vizsgálata során, amikor a rendszer állapotát az egyensúlyponthoz közeli pontba kívánjuk vezérelni stabilitási okok miatt.

- Ipari-technológiai parkok esetén az állam olyan állapotra kívánja vezérelni az egyes blokkok termelését, amelyek tökéletesen megfelelnek a nagyobb volumenű gazdasági elképzeléseknek. Itt arra is figyelni kell, hogy a kezdeti és végső időpontok között a rendszer állapota ne kerüljön elfogadhatatlan tartományba. Ilyenkor vagy korlátokat teszünk fel a rendszer állapotértékeire, vagy a teljes trajektóriát kívánjuk irányítani (Slapan és Ortuzan, 2015). Hasonló alkalmazások figyelhetőek meg a termelői és fogyasztói rendszerek (Molnár és Szidarovszky, 1994), szállítás (Tánczos et al., 2011) és a kártevőirtás (Molnár et al., 2013) esetén.

Irodalom

1. Kamen, E. W. (1978): *Lectures on algebraic system theory: Linear systems over rings,* NASA Contractor Report # 3016.

2. Matsumoto A., Szidarovszky F. (2015): *Game Theory and Its Applications,* Springer Japan, Tokyo, Heidelberg.

3. Molnár S. (1988): Realization of Verticum-Type Systems, *Math. Anal. and System Theory,* Vol. 5., 11–30, (Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem).

4. Molnár S., Szidarovszky F. (1994): A dinamikus termelői-fogyasztói modell irányíthatóságáról, *Szigma,* 26(1-2), 49–54.
5. Molnár S., López I., Gámez M. (2007): Observability and observers in a food web, *Applied Mathematics Letters,* 20(8), 951–957.
6. Molnár S., M. Gámez, I. López (2008): Monitoring Environmental Change in an Ecosystem, *Biosystems,* 93(3), 211–217. ISSN 0303-2647.
7. Molnár S., Gámez M., López I. (2012): Observation of nonlinear verticum-type systems applied to ecological monitoring, *International Journal of Biomathematics,* 5(6), 1250051-1-1250051-15.
8. Molnár S., Gámez M., López I. Cabello T. (2013): Equilibrium control of nonlinear verticum-type systems, applied to integrated pest control. *Biosystems,* 113(2), 72–80.
9. Kalman, R. E., P. L. Falb and M. A. Arbib (1969): *Topics in Mathematical System Theory,* McGraw-Hill Book Company, New York, San Francisco, St. Louis, Toronto, London, Sydney, p. 353.
10. Serre, J-P. (1992), *Lie algebras and Lie groups.* 2nd Edition, Springer-Verlag, New York, p. 168.
11. Slapar T., G. Ortuzan (2015): Industry clusters and economic developments. *Indiana Business Review,* 90(1), 7–9.
12. Tánczos K., Molnár S., Török Á., Molnár M. (2011): Future trends in road transport systems in Hungary and in the EU, *International Journal of Critical Infrastructures,* 7(2), 163–175.
13. Wei, J. and E. Norman (1964): On Global Representation of the Solutions of Linear Differential Equations as a Product of Exponentials, *Proceedings of the American Mathematical Society* 15(12), 327–334.

CONTROLLABILITY OF VERTICUM-TYPE SYSTEMS

A special class of linear systems is examined, where the subsystems are connected with each other by output-input relations, and these connections generate a directed graph without circles. That is, these connections always move forward. The controllability problem of any system finds the set of all feasible states which can be reachable with the appropriate choice of the control. The theory of Lie-algebras and special matrix structures provide the theoretical basis for constructing this set.