ÉLETTARTAMRÉS ÉS JÁRULÉKALAP-PLAFON[1]

SIMONOVITS ANDRÁS
ELKH KRTK KTI, BME MI

A tb-nyugdíjrendszerek egyik alapfeladata, hogy biztosítsa a rövidlátó kisebb keresetűek időskori megélhetését. Keresetarányos nyugdíjrendszerekben ezért a járulékkulcsnak elég nagynak kell lennie. A járulékalapot viszont felülről korlátozni kell (plafon), hogy elegendő tér maradjon az előrelátó nagyobb keresetűek hatékony magánmegtakarításának. Ha figyelembe vesszük, hogy a várható élettartam függ az életpálya-keresettől (szemléletesen: ez az élettartamrés), egy jól megválasztott plafonérték további előnnyel is jár: korlátozza a szándékolatlan jövedelem-újraelosztást a várhatóan rövidebb élettartamú alacsonyabb keresetűektől a várhatóan hosszabb élettartamú magasabb keresetűekhez. Erősen stilizált modellünk számszerűen is szemlélteti a járulékkulcs és a plafon hatását a társadalmi jólétre és a szándékolatlan jövedelem-újraelosztásra.

Kulcsszavak: tb-nyugdíjrendszer, élettartamrés, jövedelem-újraelosztás.
JEL codes: D10, H55, I38

Köszönetnyilvánítás. Ezt a kutatást az NKFI 129078 számú pályázata támogatta. Köszönetemet fejezem ki Bessenyei István Györgynek, Hans Fehrnek és egy névtelen lektornak, akik felhívták a figyelmem egy korábbi változat néhány hiányosságára.

1 Bevezetés

A keresetarányos tb-nyugdíjak elemzésekor nagy hangsúlyt kap a járulékkulcs értéke: túl kicsi kulcsnál a megtakarítás nélküli kisebb keresetűek időskori fogyasztása elégtelen lenne, túl nagy kulcsnál viszont túlzott lenne a nagyobb keresetűek tb-n belüli kényszermegtakarítása. Az ellentmondást a járulékplafon helyes megválasztása enyhítheti (Barr–Diamond, 2008, 63. o.). (A nyugdíjdegresszió tovább javíthat a nyugdíjrendszer hatékonyságán és méltányosságán, de ezzel most nem foglalkozunk). Kevés kivétellel a szakirodalom alig foglalkozik a plafon kérdésével, itt csak néhány forrást említünk: Diamond–Orszag (2004, 65–66. o.) részletesen bemutatja, hogyan változott az Egyesült Államokban 1977 és 2000 között a plafon fölötti keresetek súlya: 16%-ról (1977) 10%-ra (1980), majd 2000-ben visszatért a kezdőértékre; míg a plafon fölött keresők aránya 15%-ról 6%-ra csökkent 1983-ra, és aztán ott is maradt. Valdés-Prieto–Schwarzhaupt (2011) 1. táblázata 60 ország plafonját

[1]Beérkezett 2022. augusztus 3. E-mail: simonovits.andras@krtk.hu.

közli az egy lakosra jutó GDP-hez viszonyítva. A találóbb plafon–bruttóbér-hányados értéke is szóródik: 1,2 Svédországban, 1,8 Németországban és 2,5 fölött van az Amerikai Egyesült Államokban (OECD, 2015, 129. o., Table 5.6).

Feldstein (1985) vizsgálta először a járulékkulcs társadalmilag optimális értékét egy nagyon stilizált együttélő nemzedéki modellben. Az alapötlet a következő: ha nem lenne kötelező nyugdíj, akkor a reprezentatív dolgozó biztosan takarékoskodna időskorára. A túlzott leszámítolás miatt azonban ez a megtakarítás paternalista szempontból elégtelen időskori fogyasztást adna. A megtakarítási hiányt áthidalandó, a kormányzat kötelező tb-nyugdíjrendszert vezet be: a dolgozó járulékot fizet, a nyugdíjas járadékot kap. Az optimális járulékkulcs megválasztásakor a kormányzat az egyéni leszámítolási együtthatót megemeli a társadalmi jóléti függvény kiszámításában. Különféle ellentmondásos feltevések miatt Feldstein nagyon kicsiny (néha nulla) ,,optimális" járulékkulcsot kapott, de ezt az eredményt Andersen–Bhattacharya (2011) és Simonovits (2018a) kijavította (vö. a jelen dolgozat 1. ábrája).

Valdés-Prieto–Schwarzhaupt (2011) az optimális kényszerítés egy egész modellcsaládját vázolta. Mi csak a járulékalap plafonjára vonatkozó, 6. szakasz modelljét idézzük, amely a következő alapfeltevésen alapul: a jobban keresők kevésbé számítolják le a jövőt. A szerzők ez alapján határozták meg a plafon optimális értékét, amely a keresők 80. percentilise körül van. A Simonovits (2015) és (2018c) cikkben egy soktípusú modellt építettem föl, ahol a kormányzat a járulékkulcs mellett a plafont is optimalizálta.

Természetesen az optimális pár többek között a már említett leszámítolási együttható–kereset- és a kamatláb–kereset-függvénytől függ. Választott paramétertartományunkban az optimális járulékkulcs alig tért el az ún. maximumtól, ahol a fiatal- és az időskori fogyasztás egyenlő, míg a plafon hatékonysága egy széles szakaszon közel van az optimumhoz, de általában mind a minimális, mind a maximális kereset plafonként szuboptimális. (Simonovits (2018c, Section 3.3) és a jelen dolgozat 3. példájában, ahol csak két kereseti típus létezik, az optimális plafon a minimális kereset.) Lee et al. (2022) egy hasonló modellt vizsgált, de csak egy eléggé semmitmondó eredményt igazolt: valamekkora plafon jobb, mint ha egyáltalán nincs plafon.

A címben szereplő élettartamrés arra utal, hogy minél nagyobb egy egyén életpálya-jövedelme, statisztikailag annál tovább él. Magyar férfiaknál Molnár D.–Hollósné Marosi (2015) 4 évnyi különbséget talált a legmagasabb és a legalacsonyabb jövedelemnegyedek várható élettartama között. Már Liebmann (2002) és Whitehouse–Zaidi (2008) hangsúlyozta: a társadalmi körülmények az élettartamrésen keresztül hatnak a tb-nyugdíjrendszerbeli jövedelem-újraelosztásra. Újabban nagyon megerősödött a téma iránti érdeklődés (vö. Chetty et al., 2016 és Holtzmann et al., 2020). A legtöbb közgazdász (például Ayuso et al., 2017; Haan et al., 2020; Simonovits–Lackó, 2021) azt javasolta, hogy kedvezőtlen munkapiaci hatása ellenére a kormány erősítse a tb-nyugdíjak degresszivitását: az induló nyugdíjak kiszámításában egyre csökkenő mértékben célszerű figyelembe venni az életpályakeresetek növekményét.

Tudomásom szerint a jelen cikk az első, amely a járulékplafont és az élettartamrést együtt vizsgálja – mégpedig egy keresetarányos nyugdíjrendszerben. Bár mindkét kategória megjelenik Sheshinski–Coliendo (2020) cikkében, de ott az volt a cél, hogy megőrizzék az amerikai tb-nyugdíjrendszer degresszivitásának mértékét. Általánosítva korábbi modelljeimet, most numerikus számításokkal mutatom meg: az élettartamrés figyelembevétele nemcsak a társadalmilag optimális járulékplafont, de változatlanul maradó járulékkulcs miatt a szándékolatlan újraelosztást is csökkenti. Átvesszük a legtöbb hasonló modell kényszerű feltevését: a várható élettartam csak a bruttó életpálya-keresettől függ, tehát független a nyugdíjtól és a magánmegtakarítástól. Mivel nem modellezzük a szándékolt újraelosztást, ez elfogadhatónak tűnik.

Mielőtt a teljes modellt megszerkesztenénk, magyarázatok és bizonyítások nélkül előrebocsájtjuk a cikk fő eredményét. Legyen $\tau \in [0,1)$ a nyugdíjjárulékkulcs, $\bar{w} > 0$ a járulékalap-plafon (az átlagos keresethez viszonyítva) és adott várható élettartam–életpályakereset függvényseregre $g \geq 0$ az élettartamrés megfelelő mutatója. Föltesszük, hogy a társadalmi jóléti függvénye $V(\tau, \bar{w}, g)$. Megfelelő feltevések és specifikációk mellett adott g-re létezik és egyértelmű az optimális $(\tau(g), \bar{w}(g))$ járulékkulcs–plafon-pár. Talán a legfontosabb szemléltetést a 2. és a 3. táblázat ritkított 4. sorának az A. táblázatba sűrített összehasonlítása adja. Három plafonérték esetén mutatjuk be a megfelelő jólétet: 0,5 (minimális); 1,5 (közbülső) és 4,5 (maximális). Ha nincs rés, akkor a maximális plafon (nincs plafon) az optimum; míg ha van rés, akkor a közbülső plafon az optimum.

Élettartamrés	Jólét–plafon		
	0,5	1,5	4,5
nincs	1,154	1,204	*1,212*
van	1,104	*1,126*	1,108

A. táblázat. Rés, plafon és jólét

Nyomatékosan hangsúlyozzuk, hogy időben állandó együtthatós modellt vizsgálunk. A paraméterértékek (járulékkulcs, plafon) változtatása nem időbeli, hanem térbeli változtatás: párhuzamos világokat hasonlítunk össze. Adott ország valóságában azonban sok paraméterérték változik, és bármely nyugdíjreform modellezése időben változó dinamikus modellt igényel (például Fehr et al. (2013) a német nyugdíjrendszer optimális degresszivitásának bevezetéséről). Ha a hazai járulékalap plafonjának 2013-as megszüntetését és visszavezetését modelleznénk, akkor is dinamikus modellre lenne szükségünk. Ugyanez vonatkozik a tb-nyugdíj negyedik, eddig nem említett jellemzőjére: a már megállapított nyugdíjak indexálására (Simonovits, 2018b).

A cikk hátralévő részének szerkezete a következő. A 2. szakaszban bemutatjuk az analitikus modellt, a 3. szakaszban ismertetjük a numerikus számításokat, végül a 4. szakaszban levonjuk a következtetéseket. A függelék néhány érzékenységi számítást tartalmaz.

2 Analitikus modell

Ebben a szakaszban két részre tagoljuk az analitikus modell bemutatását: nincs plafon, van plafon. A modellben a paraméterek számát azzal csökkentettük, hogy a kamatláb és a gazdasági növekedés üteme helyett a relatív kamatlábat szerepeltettük, amely közelítőleg a kettő különbsége. (Pontosan: a relatív kamategyüttható a kamategyüttható és növekedési együttható hányadosa, s a továbbiakban a *relatív* jelzőt elhagyjuk.) A népességváltozástól eltekintettünk, viszont az idézett forrásokkal szemben figyelembe vettük, hogy egy tipikus egyén sokkal kevesebb évet tölt nyugdíjban, mint munkában.

2.1 Nincs plafon

Föltesszük, hogy minden dolgozó azonos életkorban kezd el dolgozni, és azonos időpontban megy nyugdíjba. Egy típus szuperbruttókeresetét w jelöli, ebből τw járulékot fizet egységnyi ideig és cserében egy keresetfüggő $b(w)$ járadékot kap majd $m(w)$ hosszúságú ideig – $m(w)b(w)$ összegben. (A szuperbruttó kereset a munkavállalói járulék mellett tartalmazza a munkáltatóit is, s a járulék pedig a két részjárulék összege.) Itt $0 < m < 1$, $b(\cdot)$ és $m(\cdot)$ gyengén, illetve szigorúan növekvő függvények. Ahol nem okoz félreértést, a továbbiakban a w függést nem jelöljük. (Hagyományosan években számolnak, a dolgozónak S éven keresztül fizetnek évi w bért, és T éven át kap évi b járadékot, T-t osztjuk el S-sel, és számolunk $m = T/S$ tartammal.)

Tb-nyugdíjakat mérlegelve uniszex népességet feltételezünk. Nyilvánvaló, hogy m a w kereset mellett nyugdíjazáskor várható feltételes élettartam. Az átlagot $\mu = \mathbf{E}m$ jelöli. Képtelen kimeneteket elkerülendő, a következő reális feltevéssel élünk: $m(\cdot)$ szigorúan konkáv. A Jensen-egyenlőtlenség szerint $\mu < m(1)$. Következmény: az $m(w)/w$ élettartam–kereset-hányados a kereset csökkenő függvénye. Föltesszük, hogy a keresetek eloszlása F és normalizált várható értéke $\mathbf{E}w = 1$.

Kiindulásunk egy szuperbruttó keresettel *arányos* nyugdíjrendszer:

$$b = \beta w,$$

ahol $\beta > 0$ a járadékszorzó. Magyarországon a nyugdíj a nettó keresettel arányos, de a jelenlegi „arányos” szja és időben invariáns paraméterértékek mellett a különbség közömbös. Ha progresszív az szja, akkor a helyzet bonyolultabb.

A jövedelem-újraelosztást a w keresetű dolgozó életpálya-egyenlegének eloszlása tükrözi, ahol az egyenleg

$$z = \tau w - \beta w m. \tag{1}$$

Föltesszük, hogy a rendszer *kiegyensúlyozott*, azaz az egyenleg *várható* értéke 0. (1) és $\mathbf{E}w = 1$ szerint

$$0 = \mathbf{E}z = \tau - \beta \mathbf{E}(wm),$$

igazolva a τ járulékkulcs és az egyensúlyi β járadékszorzó közti arányosságot:

$$\beta = \frac{\tau}{\mathbf{E}(wm)}. \tag{2}$$

Behelyettesítve (2)-t (1)-be, adódik az átlagosan kiegyensúlyozott rendszer egyéni egyenlege:

$$z = \tau w \left\{ 1 - \frac{m}{\mathbf{E}(wm)} \right\}.$$

Mivel m növekvő függvénye w-nek, $\mathbf{E}(wm) > \mu$; azaz $\beta < \tau/\mu$. Folytonos eloszlásnál létezik a kritikus bér: $w^{\mathrm{o}} > 1$, ahol $z(w^{\mathrm{o}}) = 0$; továbbá $z > 0$, ha $w < w^{\mathrm{o}}$ (vesztes) és $z < 0$, ha $w > w^{\mathrm{o}}$ (nyertes).

2.2 Van plafon

Előkészítésünket befejezve, bevezetjük a bérminimumot: w_{m} és a járulékalap *plafonját*: $\bar{w}$. A plafon alatti (és a plafonnal egyenlő) keresetek mind a be-, mind a kifizetésekben teljesen beleszámítanak; a plafon fölötti kereseti részek pedig kimaradnak. Felesleges bonyodalmakat elkerülendő, feltesszük, hogy $\bar{w} \geq w_{\mathrm{m}} > 0$. (Ha megengednénk a bérminimum alatti plafont, akkor a járulékkulcsot $\bar{w}/w_{\mathrm{m}} < 1$-gyel szorozva, a tényleges plafon w_{m}-ra emelkedve, mindenki változatlanul $\tau\bar{w}$ járulékot fizetne.)

A plafonos rendszerben a fedezett bér–teljes bér-kapcsolat $\tilde{w} = \min[w, \bar{w}]$, a nyugdíj–bér-kapcsolat $\tilde{b} = \beta\tilde{w}$, míg az életpálya-egyenleg $\tilde{z} = (\tau - m\beta)\tilde{w}$.

Várható értéket véve és egyensúlyt előírva: $\mathbf{E}\tilde{z} = 0$. A plafon alatti és feletti rész kettéválasztással (a plafont az alatti részbe sorolva) és a megfelelő $\mathbf{E}_{x \leq \bar{x}}\, x$, illetve $\mathbf{E}_{x > \bar{x}}\, x$ várható érték és $\mathbf{P}(x > \bar{x})$ valószínűség jelöléssel (x egy általános valószínűségi változó, $\bar{x}$ egy plafon) az egyensúlyi feltétel most a következő alakra hozható:

$$\mathbf{E}_{w \leq \bar{w}}[(\tau - m\beta)w] + \bar{w}\mathbf{E}_{w > \bar{w}}(\tau - m\beta) = 0,$$

vagy kicsit átrendezve

$$\tau \left[\mathbf{E}_{w \leq \bar{w}}\, w + \bar{w}\mathbf{P}(w > \bar{w})\right] = \beta \left[\mathbf{E}_{w \leq \bar{w}}\,(mw) + \bar{w}\mathbf{E}_{w > \bar{w}}\, m\right]. \tag{3}$$

A τ és az egyensúlyi β közti arányosságot ismét igazoltuk, és β kiszámítható. Érdemes megjegyezni, hogy a (3) bal oldalán álló mennyiség τ mögötti része a fedezett kereset aránya az összkeresethez képest.

Érdemes néhány szót szólni a járulékkulcs és a plafon együttes hatásáról: minél magasabb a kulcs vagy a plafon, annál nagyobb a nyugdíjrendszer GDP-hez viszonyított aránya. Például a keresetfüggő *tényleges járulékkulcs* τ-nak arányos, $\bar{w}$-nak nemlineáris növekvő függvénye.

2.3 Társadalmi jólét

Ismertetvén a modell magvát, rátérünk a társadalmi jólét maximalizálására. A kifejtést a fogyasztási párral kezdjük, az életpálya-hasznossággal és a jóléti függvénnyel folytatjuk. Elhanyagoljuk az szját és az egészségügyi járulékot. Két lépésben fejtjük ki fogalmainkat: (i) nincs magánmegtakarítás és (ii) van magánmegtakarítás.

(i) A magánmegtakarítások nélkül a fiatal- és időskori fogyasztás rendre

$$c_0 = w - \tau\tilde{w} \qquad \text{és} \qquad d_0 = \beta\tilde{w}.$$

Ugyanúgy mint a nyugdíjnál, d a fogyasztás intenzitása, és mivel a nyugdíjban töltött időszak jóval rövidebb, mint a munkában töltött időszak, az időskori fogyasztás összege csak $md < d$.

(ii) Most figyelembe vesszük még a keresetfüggő nemnegatív $s \geq 0$ *magánmegtakarítást*, amely az időskori fogyasztást némileg kiegészíti, ha a járulékkulcs vagy a plafon túlzottan alacsony. Eltérve Valdés-Prieto–Schwarzhaupt és mások tipikus feltevésétől, föltesszük, hogy minden dolgozó pontosan ismeri várható élettartamát és nyugdíját. Yaari (1965)-öt követve, feltesszük, hogy minden dolgozó tökéletes életjáradékot tud venni, amely a felhalmozott megtakarítás m^{-1}-szorosa. A valósághoz közelítve, föltesszük, hogy a keresetfüggő halmozott R kamategyüttható az életpálya-kereset növekvő függvénye:

$$c = c_0 - s \qquad \text{és} \qquad d = d_0 + m^{-1}Rs. \tag{4}$$

A következő egyszerű *leszámítolt* életpálya-hasznosságfüggvényt feltételezzük:

$$U(c, d) = \log c + \delta m \log d, \tag{5}$$

ahol δ a halmozott leszámítolási együttható. Feltesszük, hogy minél többet keres a dolgozó, annál kevésbé számítolja le a jövőt, δ növekvő függvény (Valdés-Prieto–Schwarzhaupt, 2011).

A kötelező tb-nyugdíjrendszer egyik funkciója, hogy a rövidlátó dolgozókat rábírja: a kényszermegtakarítással együtt többet tegyenek félre időskorukra, mint maguktól tennék. Átvesszük Feldstein (1985)-től, hogy felülírva a dolgozók rövidlátását, a paternalista kormányzat nem számítolja le a jövőt, amikor a társadalmi jólétet kiszámítja. De nem követjük Feldsteint abban, hogy negatív megtakarítást enged meg, és feltételezi, hogy a dolgozók irreálisan nagy mértékben alábecsülik jövőbeli nyugdíjakat, aláásva a tb-hatékonyságát (vö. Simonovits, 2018a).

Most meghatározzuk az életpálya-hasznosságot maximalizáló optimális megtakarításokat. Behelyettesítjük (4)-et (5)-be:

$$U[s] = \log(c_0 - s) + \delta m \log(d_0 + m^{-1}Rs). \tag{6}$$

Deriváljuk (6)-ot:

$$U'[s] = \frac{-1}{c_0 - s} + \frac{\delta R}{d_0 + m^{-1}Rs} = 0$$

és rendezéssel $d_0R^{-1} + m^{-1}s = \delta c_0 - \delta s$. Megoldva az egyenletet s-re és az esetleges negatív megoldást 0-ra növelve:

$$s^{\circ} = \frac{[\delta c_0 - d_0R^{-1}]_+}{\delta + m^{-1}},$$

ahol x_+ az x valós szám pozitív értéke. Behelyettesítve s°-t (6)-ba, és eltüntetve a leszámítolást: $\delta = 1$, eljutunk a paternalista hasznosságfüggvényhez:

$$\mathbf{U} = \log(c_0 - s^\circ) + m \log(d_0 + m^{-1} R s^\circ). \tag{7}$$

A társadalmi jóléti függvényt a paternalista hasznosságfüggvény várható értékével definiáljuk:

$$V_0(\tau, \bar{w}) = \mathbf{EU}. \tag{8}$$

E függvény segítségével kiszámíthatjuk a társadalmilag optimális járulékkulcsot és a plafont, de önmagában az önkényesen skálázott függvényérték átlagolása homályban hagyja, hogyan változik a jólét, ha az optimális paramétertpártól eltérünk. Ezért kissé körülményesen bevezetjük a plafonos nyugdíjrendszer *relatív hatékonyságát* (angolul: consumption equivalent variation) a nyugdíj nélküli rendszerhez képest ($\tau = 0$), jele: ε. Implicit definíciója: ez az a szám, amellyel beszorozva a nyugdíj nélküli rendszer kereseteit, a módosított jóléti függvény értéke eléri az eredeti keresetek melletti nyugdíjrendszer jólétét:

$$V(0, 0, \varepsilon) = V(\tau, \bar{w}, 1).$$

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a keresettől függő leszámítolást, kamatolást és tartamot itt nem módosítjuk. Szemléltetés kedvéért előrehozunk egy számpéldát: a 2. táblázat 1. sorának 3. oszlopában (0,5-ös relatív plafon) szereplő 1,165 azt jelenti, hogy a nyugdíjmentes rendszerben a bruttókereseteket egységesen 1,165-szörösére kellene emelni ahhoz, hogy az emelt társadalmi jólét elérje a nevezett nyugdíjrendszer eredeti keresetek mellett nyújtotta jólétét.

Behelyettesítve ε-t a logaritmikus hasznosságfüggvényekbe:

$$V(0, 0, \varepsilon) = V(0, 0, 1) + (1 + \mu) \log \varepsilon.$$

Ezért visszatérhetünk a V_0-ra:

$$\log \varepsilon = \frac{V_0(\tau, \bar{w}) - V_0(0, 0)}{1 + \mu}, \quad \text{azaz} \quad \varepsilon = \exp\left[\frac{V_0(\tau, \bar{w}) - V_0(0, 0)}{1 + \mu}\right]. \tag{9}$$

Könnyű megérteni, hogy minél kisebb a járulékkulcs, annál magasabb a feltételesen optimális plafon. Az igazán nehéz kérdés a következő: mekkora járulékkulcs és plafon ad elég nagy helyettesítést a kisebb keresetűeknek, miközben elég tág teret biztosít a magas keresetűek magánmegtakarításainak?

Hogyan hat az élettartamrés nagysága a szándékolatlan újraelosztásra, amely még egy keresetarányos rendszerben is végbemegy? Az újraelosztást az életpálya-egyenleg szórásával mérjük, négyzete: $\mathbf{D}^2 z = \mathbf{E} z^2$ (hasonló indexet alkalmazott Holzmann et al., 2020; Sheshinski–Coliendo, 2021). Ez egy egyszerű mérce, de nem tesz különbséget aközött, hogy az alacsonykeresetűek támogatják a magaskeresetűeket vagy fordítva. Mivel keresetarányos nyugdíjrendszereket mérlegelünk, az élettartamrés okozta újraelosztás zöme az előbbi, tehát a nagyobb szórás nagyobb visszás újraelosztást jelez. Nyilvánvaló, hogy a szórás monoton növekvő függvénye mind a járulékkulcsnak, mind a plafonnak.

2.4 Négy példa

Most három példát mutatunk be egy vagy két reprezentatív dolgozóval, és egy negyediket, tetszőleges számú típussal, de keresetfüggetlen kamatlábbal és leszámítolással.

1. példa. Reprezentatív dolgozónk keresete $w = 1$, nincs hatásos plafon: $\bar{w} \geq 1$, nincs magánmegtakarítás, és a munkában töltött idő $0 < \mu < 1$-szörösét éli nyugdíjasként. A társadalmi jóléti függvény

$$V[\tau] = \log(1-\tau) + \mu \log(\mu^{-1}\tau).$$

Deriválva a függvényt, és nullává téve a deriváltat, az optimális járulékkulcs meghatározható:

$$0 = V'[\tau] = -\frac{1}{1-\tau} + \frac{\mu}{\tau} \Rightarrow \bar{\tau} = \frac{\mu}{1+\mu}.$$

A megfelelő fogyasztási pár két eleme egyenlő:

$$\bar{c} = \frac{1}{1+\mu} \qquad \text{és} \qquad \bar{d} = \frac{1}{1+\mu}.$$

A $\bar{\tau}$-t maximális járulékkulcsnak is nevezhetjük, mert ennél nagyobb járulékkulcs a fiatalkori fogyasztást az időskori fogyasztás alá vinné.

Numerikusan, $\mu = 0{,}5$ esetén $\bar{\tau} = 1/3$, $\bar{c} = 2/3 = \bar{d}$. Természetesen ez a $\bar{\tau}$ túl nagy, különösen azért, mert szuperbruttó keresetre számoljuk, de ha figyelembe vennénk az időskorban csökkenő családméretet és más bonyodalmakat, akkor az érték jelentősen csökkenthető lenne.

A következő három példában csak elkezdjük az elemzést, de adósak maradunk a jóléti következmények taglalásával.

2. példa. (Simonovits, 2018c, Section 3.2.) Megtartva az 1. példa reprezentatív dolgozóját, de bevonva a magánmegtakarítást, a modell bonyolultabbá válik. A részleteket mellőzve, minden R kamategyüttható esetén létezik olyan kritikus leszámítolási együttható: δ_R, amelyre a nyugdíj nélküli társadalmi jólét egyezik a maximális járulékkulcsú nyugdíjrendszer mellettivel: $V(0) = V(\bar{\tau})$. Szubkritikus leszámítolási együtthatókat mérlegelünk: $0 < \delta < \delta_R$, ahol létezik egy kritikus járulékkulcs: $0 < \tau_{\mathrm{o}} < \bar{\tau}$, amelyre $V(0) = V(\tau_{\mathrm{o}})$ és a $0 < \tau < \tau_{\mathrm{o}}$ szakaszon a nyugdíjrendszer kisebb jólétet nyújt, mint a nyugdíjmentes rendszer, a $\tau_{\mathrm{o}} < \tau < \bar{\tau}$ szakaszon viszont nagyobbat (vö. a későbbi 1. ábrával).

3. példa. (Simonovits, 2018c, Section 4.4 általánosítása.) A legegyszerűbb heterogén modellben két típusú dolgozó van: w_{m}, illetve w_{M} keresettel és f_{m}, illetve f_{M} gyakorisággal: $w_{\mathrm{m}} < w_{\mathrm{M}}$ és $f_{\mathrm{m}} > f_{\mathrm{M}}$, $\delta_{\mathrm{m}} = 0 < 1 = \delta_{\mathrm{M}}$ leszámítolási együtthatóval. Ha a járulékkulcs elég nagy, akkor az optimális plafon értéke w_{m}. Bonyolultabb a számítás, ha belép az élettartamrés: $m_{\mathrm{m}} < m_{\mathrm{M}}$. (3) alakja például

$$\tau(f_{\mathrm{m}} w_{\mathrm{m}} + f_{\mathrm{M}} \bar{w}) = \beta(f_{\mathrm{m}} m_{\mathrm{m}} w_{\mathrm{m}} + f_{\mathrm{M}} m_{\mathrm{M}} \bar{w}),$$

(1)-é pedig

$$z_{\mathrm{m}} = (\tau - \beta m_{\mathrm{m}}) w_{\mathrm{m}} > 0, \qquad z_{\mathrm{M}} = (\tau - \beta m_{\mathrm{M}}) \bar{w} < 0.$$

Egyetlen nyilvánvaló kivétel van, amikor a heterogenitás ellenére sincs szükség plafonra, mert az 1. példa átmenthető.

4. példa. Tetszőleges számú típus esetén, ha az R kamategyüttható és a δ leszámítolási együttható független a keresettől, és a szorzatuk kisebb, mint 1, akkor az optimális járulékkulcs és a plafon egyaránt maximális.

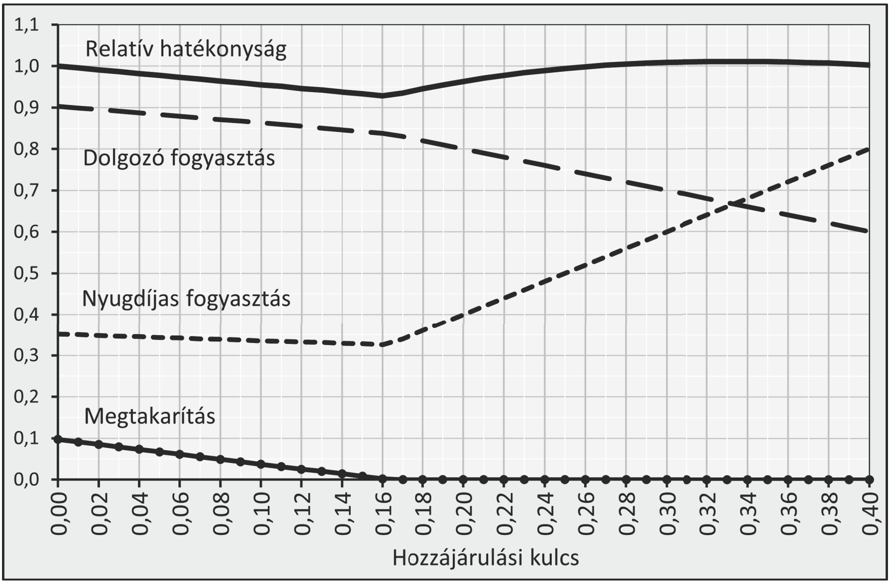
A következő kvalitatív kérdéspár vetődik föl: mekkora az optimális járulékkulcs és a plafon az élettartamrés mellett? Hogyan lehet a szándékolatlan újraelosztást csökkenteni a kulcs és a plafon célszerű megválasztásával? Bonyolultabb számpéldáink majd azt mutatják, hogy az optimális járulékkulcs elég közel van az 1. példában meghatározott maximális kulcshoz, és a megfelelő plafon tipikusan egyaránt messze esik a minimális és a maximális keresettől, viszont tágas szakaszon lényegében nem befolyásolja a hatékonyságot.

3 Numerikus szemléltetés

Képleteink annyira bonyolultak, hogy reménytelennek tűnik határozott analitikus megállapításokhoz jutni segítségükkel, még a 3. példa esetén is. Megelégszünk az A. táblázatban elkezdett numerikus szemléltetéssel, bár a modell kezdetlegessége miatt nélkülözzük a megbízható kalibrálást. Mindenekelőtt a halmozott kamat- és leszámítolási együtthatót vissza kell vezetni éves megfelelőikre: $R = R[1]^A$ és $\delta = \delta[1]^A$, ahol A a fél életpálya hossza, elhanyagolva függését w-től.

3.1 Nincs élettartamrés

A 2. példával kezdjük, $\delta[1] = 0{,}95$ éves leszámítolási együtthatóval és $R[1] = 1{,}02$ éves kamategyütthatóval. Az 1. ábra megmutatja, hogy a járulékkulcs emelése kezdetben hogyan szorítja ki a hatékonyabb magánmegtakarítást. A minimális relatív hatékonyság 0,93; amely $\tau_{\mathrm{m}} = 0{,}16$-nél valósul meg; az eredeti hatékonyság $\tau_{\mathrm{o}} = 0{,}27$ kulcsnál tér vissza, míg az 1,01 nagyságú maximális relatív hatékonyság $\bar{\tau} = 0{,}33\ldots$-nál valósul meg.



1. ábra. A járulékkulcs hatása a hatékonyságra

Heterogén kereset esetén kényelem kedvéért Pareto-féle kereseteloszlással dolgozunk:

$$F(w) = 1 - (w_{\mathrm{m}}/w)^{\sigma}, \qquad \text{ahol} \qquad w \ge w_{\mathrm{m}} > 0. \tag{10}$$

A megfelelő sűrűségfüggvény

$$f(w) = \sigma w_{\mathrm{m}}^{\sigma}/w^{1+\sigma}, \qquad \text{ahol} \qquad w \ge w_{\mathrm{m}} > 0.$$

Normalizálásként $\mathbf{E}w = 1$, azaz $w_{\mathrm{m}} = (\sigma - 1)/\sigma$. A továbbiakban $\sigma = 2$, ekkor a minimálbér az átlagbér fele: $w_{\mathrm{m}} = 1/2$.

A teljesen fedezett keresetű dolgozók aránya mellett a fedezett keresetek arányát is a plafon függvényében elemezzük. (3) bal oldala alapján Pareto-eloszlás esetén a két tag rendre

$$\omega_1 = \int_{w_{\mathrm{m}}}^{\bar{w}} w\sigma w_{\mathrm{m}}^{\sigma} w^{-1-\sigma} = \frac{\sigma w_{\mathrm{m}}^{\sigma}}{\sigma - 1}\left[\frac{1}{w_{\mathrm{m}}^{\sigma-1}} - \frac{1}{\bar{w}^{\sigma-1}}\right] = 1 - \frac{w_{\mathrm{m}}^{\sigma-1}}{\bar{w}^{\sigma-1}}$$

és

$$\omega_2 = \frac{w_{\mathrm{m}}^{\sigma}}{\bar{w}^{\sigma-1}}.$$

Az 1. táblázatban numerikusan tabuláljuk a két mutatót néhány plafon értékére, $\sigma = 2$.

Plafon	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0	4,5
A teljesen fedezettek aránya	0,0	0,75	0,889	0,938	0,972	0,988
A fedezett keresetek aránya	0,5	0,75	0,833	0,875	0,917	0,944

1. táblázat. A teljesen fedezettek és a fedezett keresetek aránya a plafon függvényében

A gyakorlatban $n = 20$ egyforma súlyú jövedelmi osztállyal számolunk, ahol a W_i sávhatárokat

$$1 - (w_\mathrm{m}/W_i)^\sigma = i/n \qquad \text{azaz} \qquad W_i = w_\mathrm{m}[i/(n-i)]^{1/\sigma}, \tag{11}$$

az osztályjövedelmeket a két sávhatár mértani közepe adja:

$$w_i = \sqrt{W_i W_{i+1}}, \qquad i = 1, \ldots, n-1. \tag{12}$$

Például $w_\mathrm{M} = 4{,}472$; kerekítve az átlagos szuperbruttó bér 4,5-szerese.

Hogyan változik modellünkben az éves $R[1]$ kamategyüttható a bérrel? Egy egyszerű képlettel dolgozunk:

$$R[1, w] = R_\mathrm{M}[1] + (R_\mathrm{m}[1] - R_\mathrm{M}[1])e^{\xi(w_\mathrm{m} - w)}, \qquad w \geq w_\mathrm{m}. \tag{13}$$

Nyilvánvaló, hogy $R[1]$ növekvő függvénye w-nek: $R[1, w_\mathrm{m}] = R_\mathrm{m}[1]$-től $R[1, \infty] = R_\mathrm{M}[1]$-ig, és ξ-re kamatrugalmasságként utalunk. Minél rugalmasabb a kamatláb, annál erősebb a bér hatása a kamatlábra.

Ugyanígy paraméterezzük az éves $\delta[1, w]$ leszámítolási együttható függését a bértől:

$$\delta[1, w] = \delta_\mathrm{M}[1] + (\delta_\mathrm{m}[1] - \delta_\mathrm{M}[1])e^{\eta(w_\mathrm{m} - w)}, \qquad w \geq w_\mathrm{m}. \tag{14}$$

Nyilvánvaló, hogy $\delta[1]$ növekvő függvénye w-nek; $\delta[1, w_\mathrm{m}] = \delta_\mathrm{m}[1]$-től $\delta[1, \infty] = \delta_\mathrm{M}[1]$-ig, és η-ra mint leszámítolási rugalmasságra utalunk. Minél rugalmasabb a leszámítolás, annál erősebben csökken a bérnövekedéskor.

Kihasználjuk, hogy a 20-osztályos számszerűsített modellben van maximális osztálykereset: w_M. Ezért

$$R[1, w_\mathrm{M}] = R_\mathrm{M}[1] + (R_\mathrm{m}[1] - R_\mathrm{M}[1])e^{\xi(w_\mathrm{m} - w_\mathrm{M})},$$
$$\delta[1, w] = \delta_\mathrm{M}[1] + (\delta_\mathrm{m}[1] - \delta_\mathrm{M}[1])e^{\eta(w_\mathrm{m} - w_\mathrm{M})}.$$

Hat szabad paraméterünk van, de kettőre redukáljuk őket: ξ-re és η-ra. A maradék négy paraméter értéke rendre

$$R_\mathrm{m}[1] = 1, \quad R_\mathrm{M}[1] = 1{,}02 \qquad \text{és} \qquad \delta_\mathrm{m}[1] = 0{,}95, \qquad \delta_\mathrm{M}[1] = 1.$$

A (9) relatív hatékonysági képletben szereplő várható értéket numerikusan integráljuk. Behelyettesítjük a (12)-beli osztálypontokat a (13)-as kamatláb-pályába és a (14)-es leszámítolási tényező pályába, adódik (7)-es paternalista életpálya-hasznosság, illetve várható értéke.

A két rugalmassági együtthatót egymástól függetlenül 0 és 0,4 között változtatjuk. Rácsunkon a társadalmilag optimális járulékkulcs mindig 0,33 közelébe esik (vö. Függelék F.3. táblázata). A plafonos rendszer relatív hatékonyságát kitüntetett plafonértékek mellett értékeljük, a minimális 0,5-es átlagbérrel kezdve, és a maximális 4,5-del végezve. Kisebb rugalmasságok esetén a plafon bevezetése csökkenti a hatékonyságot, nagyobb rugalmasságok esetén javítja. Például a 2. táblázat első sorában a 4. példa szellemében még a plafonmentes hatékonyság a maximális: $1{,}233 > 1{,}231$; utolsó sorában a plafonmentes rendszer hatékonysága kicsivel rosszabb, mint az optimális plafoné, amely az átlagbér 1,5 és 2-szerese között van: $1{,}144 < 1{,}448$.

Érzékenység		A plafon relatív hatékonysága kitüntetett értékeknél					
Kamatláb	Leszámítolás						
ξ	η	0,5	1	1,5	2	3	4,5
0,0	0,0	1,165	1,213	1,221	1,226	1,231	*1,233*
	0,2	1,147	1,189	1,195	1,196	1,196	*1,198*
	0,4	1,134	1,170	1,176	1,176	1,176	*1,177*
0,2	0,0	1,154	1,199	1,204	1,206	1,210	*1,212*
	0,2	1,137	1,174	*1,180*	*1,180*	1,178	1,178
	0,4	1,125	1,157	1,160	*1,161*	1,159	1,157
0,4	0,0	1,144	1,186	*1,191*	*1,191*	1,196	1,198
	0,2	1,129	1,162	*1,167*	*1,167*	1,165	1,164
	0,4	1,117	1,146	*1,148*	*1,148*	1,146	1,144

2. táblázat. A rugalmassági paraméterek hatása a plafon hatékonyságára: nincs élettartamrés

3.2 Van élettartamrés

Hogyan módosítja a fenti elemzést az élettartamrés figyelembevétele? Kerestettel növekvő túlélési valószínűséggel kezdve, az a relatív életkor hatványfüggvényével számolunk (vö. Sheshinski–Coliendo, 2020):

$$p_a(w) = 1 - a^{\gamma+\psi w}, \qquad 0 < a < 1, \qquad \gamma, \psi > 0. \tag{15}$$

Vegyük észre, hogy p_a az a csökkenő függvénye, 1-gyel indulva és 0-val végezve; a w-nek viszont növekvő függvénye.

Egyszerű számolással kapjuk a relatív tartam–kereset-függvényt:

$$m(w) = \int_0^1 [1 - a^{\gamma+\psi w}]\, da = 1 - \frac{1}{1+\gamma+\psi w} = \frac{\gamma+\psi w}{1+\gamma+\psi w}. \tag{16}$$

A következő paraméterpárt választjuk: $\gamma = 0{,}72$ és $\psi = 0{,}304$; ahol $\mu = 0{,}5$; a relatív rés $\Delta m = m[w_{0,9}] - m[w_{0,1}] = 0{,}156$ (a 90. és a 10. bérpercentilissel számolva).

Az optimális járulékkulcs továbbra is 0,33 közelébe esik, és a plafon bevezetése azonnal javítja a hatékonyságot: a 3. táblázat 1. sorában az optimális sáv az átlagbér 2 és 3-szorosa között van, az utolsó sorban már az átlagbér közelébe esik, jóval hatékonyabb, mint a plafon nélküli rendszer: $1{,}128 > 1{,}108$.

Érzékenység		A plafon relatív hatékonysága kitüntetett értékeknél					
Kamatláb	Leszámítolás						
ξ	η	0,5	1	1,5	2	3	4,5
0,0	0,0	1,152	1,196	1,201	1,204	*1,205*	1,202
	0,2	1,135	1,171	*1,174*	1,172	1,168	1,165
	0,4	1,122	1,152	*1,155*	1,153	1,148	1,143
0,2	0,0	1,140	1,180	*1,182*	1,181	1,182	1,179
	0,2	1,124	1,156	*1,158*	1,155	1,149	1,143
	0,4	1,112	1,138	*1,139*	1,136	1,130	1,122
0,4	0,0	1,130	1,168	*1,169*	1,166	1,166	1,163
	0,2	1,115	1,144	*1,145*	1,142	1,135	1,127
	0,4	1,104	*1,128*	1,126	1,123	1,117	1,108

3. táblázat. A rugalmassági paraméterek hatása a plafon hatékonyságára: van élettartamrés, $\tau = 0{,}33$

Figyelembe véve a szándéktalan újraelosztást, a maximumon rögzített járulékkulcsnál a plafon haszna még nyilvánvalóbb. A 4. táblázat azt mutatja, hogyan növekszik az életpálya-egyenlegek szórása a plafon növekedésével.

Plafon $\bar{w}$	0,5	1	1,5	2	3	4,5
Szórás $\mathbf{D}z$	0,022	0,037	0,049	0,060	0,079	0,103

4. táblázat. Az egyenlegek szórása a plafon függvényében

A csupasz számokat talán legjobban a 3. példa kéttípusú rendszerében szemléltethetjük: $f_{\mathrm{m}} = 0{,}5$; $w_{\mathrm{m}} = 0{,}5$, azaz $w_{\mathrm{M}} = 1{,}5$ és plafon nélkül esetén a szórásnégyzet:

$$\mathbf{D}^2 z = f_{\mathrm{m}}(\tau - \beta m_{\mathrm{m}})^2 w_{\mathrm{m}}^2 + f_{\mathrm{M}}(\tau - \beta m_{\mathrm{M}})^2 w_{\mathrm{M}}^2,$$

ahol

$$\beta = \frac{f_{\mathrm{m}} w_{\mathrm{m}} + f_{\mathrm{M}} w_{\mathrm{M}}}{f_{\mathrm{m}} m_{\mathrm{m}} w_{\mathrm{m}} + f_{\mathrm{M}} m_{\mathrm{M}} w_{\mathrm{M}}}\,\tau.$$

Ekkor $\mathbf{D}z = 0{,}115$; jó közelítéssel a 4. táblázat maximális szórása: 0,103.

4 Következtetések

Az utóbbi két évtizedben egyre nagyobb hangsúlyt kap az élettartamrés hatása a nyugdíjrendszerek által nyújtott jólétre. Az elméleti vizsgálatokban azonban, az élettartamréstől függetlenül, figyelmen kívül maradt a járulékalap-plafon jóléti szerepe, pedig az egyébként tájékozatlan hazai nagyközönség idegeit is borzolják az így keletkező milliós nyugdíjak. Az igazi problémát persze nem ez jelenti, hanem az élettartamrés okozta szándékolatlan jövedelem-újraelosztás túlzott nagysága.

A kérdést vizsgálandó, az optimális járulékkulcs és plafon korábbi modelljét olyan környezetre terjesztettük ki, ahol a keresetarányos rendszer szándékolatlan újraelosztást okoz. Néhány próbaszámítás azt mutatta, hogy az élettartamrés alig érinti az optimális járulékkulcs értékét, de balra tolja az optimális plafon intervallumát. Természetesen számpéldáink korlátozott értékűek. Csak abban reménykedünk, hogy a kvalitatív megállapításaink széles tartományban érvényesek. További kutatások szükségesek, például amikor a keresetarányos alrendszer mellett az alapnyugdíj is megjelenik; esetleg a várható élettartamot alábecsülik a dolgozók. Jóval nehezebb a plafon menet közbeni változtatását modellezni, pedig a magyar nyugdíjrendszerben ez is időszerű lehet.

Irodalom

1. Andersen, T. M. and Bhattacharya, J. (2011): "On Mypoia as a Rationale for Social Security", *Journal of Economic Theory,* 47, 135–158.
2. Ayuso, M. – Bravo, J. M. – Holzmann, R. (2017): "Addressing Longevity Heterogeneity in Pension Scheme Design and Reform", *Journal of Finance and Economics,* 6 (1), 1–24.

3. Barr, N. – Diamond, P. (2008): *Reforming Pensions: Principles and Policy Choices,* Oxford, Oxford University Press.
4. Chetty, R. – Stepner, M. – Abraham, S. – Lin, S. – Scuderi, B. – Turner, N. – Bergeron, A. – Cutler, D. (2016): "The Association between Income and Life Expectancy in the United States, 2001–2014," *Clinical Review and Education Special,* 315 (16), 1750–1766, https://doi.org/10.1001/jama.2016.4226.
5. Diamond, P. A. – Orszag, P. R. (2004): *Saving Social Security: A Balanced Approach,* Washington D. C., Brookings Institution Press.
6. Fehr, H. – Kallweit, M. – Kindermann, F. (2013): "Should Pensions be Progressive?" *European Economic Review,* 63, 94–116.
7. Feldstein, M. S. (1985): "The Level of Social Security Benefits", *Quarterly Journal of Economics,* 100, 302–320.
8. Feldstein, M. A. – Liebmann, B. eds. (2002): *The Distributional Aspects of Social Security and Social Security Reform,* Chicago, Chicago University Press.
9. Haan, P. – Kemptner, D. – Lüten, H. (2020): "The Rising Longevity Gap by Lifetime Earnings – Distributional Implications for the Pension System", *The Journal of the Economics of Ageing,* 17, 1–24.
10. Holzmann, R. – Alonso-García, J. – Labit-Hardy, H. – Andrés, M. (2020): "NDC Schemes and Heterogeneity in Longevity: Proposals for Redesign", *Holzmann et al., eds.* 307–332.
11. Holzmann, R. – Palmer, E. – Palacios, R. – Robalino, D., eds, (2020): *Progress and Challenges of Nonfinancial Defined Contribution Schemes, Vols. I – II.* Washington, D.C., World Bank.
12. Lee, I. – Lu, T. – and Chen, Q. (2022): "To Cap or not to Cap Public Pensions", *Applied Economic Letters,* 29, 812–816.
13. Liebmann, J. B. (2002): "Redistribution in the Current U.S. Social Security System", *Feldstein and Liebmann, eds,* 11–48.
14. Molnár D. L. – Hollósné Marosi J. (2015): "Az öregségi nyugdíjasok halandósága", *Közgazdasági Szemle,* 62, 1258–1290.
15. OECD (2015): Glance at Pensions, Paris.
16. Sheshinski, E. – Caliendo, F. N. (2020): "Social Security and the Increasing Longevity Gap", *Journal of Theoretical Public Economics,* 23, 29–52.
17. Simonovits, A. (2015): "Socially Optimal Contribution Rate and Cap in Proportional Pension Systems", *Portuguese Economic Journal,* 14, 45–63, doi 10.1007/s10258-015-0107-0.
18. Simonovits, A. (2018a): "Hogyan értékelte alá a tb-nyugdíj optimális szintjét Feldstein [1985]?" *Közgazdasági Szemle,* 65, 66–73.
19. Simonovits, A. (2018b): Miért kell a nyugdíjvalorizálást és –indexálást pontrendszerrel felváltani? *Közgazdasági Szemle,* 65, 903–922. o.
20. Simonovits, A. (2018c): *Simple Models of Income Redistribution,* Palgrave, MacMillan.
21. Simonovits, A. – Lackó, M. (2021): "A várható élettartam–jövedelem-kapcsolat egyszerű ökonometriai becslése – újraelosztás a nyugdíjrendszerben", *Közgazdasági Szemle,* 68, 1162–1170.
22. Yaari, M. (1965): "Uncertain Lifetime, Life Insurance and the Theory of the Consumer", *Review of Economic Studies,* 32, 137–150.
23. Valdés-Prieto, S. and Schwarzhaupt, U. (2011): "Optimal Compulsion when Behavioural Biases Vary and the State Errs", CESifo Working Paper 3316.

24. Whitehouse, E. and Zaidi, A. (2008): "Socioeconomic Differences in Mortality: Implications for Pension Policy," *OECD Social, Employment and Migration Working Papers* 70, Paris OECD.

Függelék

A függelék három érzékenységi vizsgálatot mutat be, amelyek a 2. és a 3. táblázat néhány paraméterértékét módosítják.

Rögzítve az $\eta = 0{,}4$ paraméterértéket, az F.1. táblázatban a járulékkulcs 0,33 mellett a 0,3 és a 0,36 értéket is fölveszi, de az élettartamrés mellett is mindig a 0,33 marad az optimum. Kis rugalmasság esetén a plafon nélküli rendszer ($\bar{w} = 4{,}5$) az optimális, de nagyobb rugalmasságok esetén az optimális plafon jóval kisebb: 1,5–2 közé esik.

Kamatláb rugalmasság ξ	Járulék-kulcs τ	A relatív hatékonyság kitüntetett plafonoknál 0,5	1	1,5	2	3	4,5
0,0	0,30	1,124	1,166	1,172	1,173	1,173	1,174
	0,33	1,134	1,170	1,176	1,176	1,176	*1,177*
	0,36	1,143	1,170	1,174	1,174	1,174	1,175
0,2	0,30	1,115	1,153	1,157	1,158	1,157	1,155
	0,33	1,125	1,157	1,160	*1,161*	1,159	1,157
	0,36	1,132	1,156	1,159	1,159	1,157	1,155
0,4	0,30	1,107	1,143	1,145	1,146	1,144	1,142
	0,33	1,117	1,146	*1,148*	*1,148*	1,146	1,144
	0,36	1,124	1,145	1,147	1,146	1,144	1,141

F.1. táblázat. A járulékkulcs hatása a plafon hatékonyságára: nincs élettartamrés, $\eta = 0{,}4$

Az F.2. táblázatban a rés bevonása mellett számoljuk újra a járulékkulcs hatását, rögzítve a $\eta = 0{,}4$ leszámítolás–bér-rugalmasságot. Ha a plafon túl alacsony, például a minimálbér (0,5), akkor a maximum fölötti 0,36-os járulékkulcs tovább javít a jóléten. De ha a plafon szabadon változhat, akkor optimumánál a középső kulcs marad optimális, de az optimális plafon csökkenve, az $[1, 1{,}5]$ intervallumba esik.

Kamatláb rugalmasság ξ	Járulék-kulcs τ	A relatív hatékonyság kitüntetett plafonoknál 0,5	1	1,5	2	3	4,5
0,0	0,30	1,112	1,149	1,152	1,150	1,146	1,140
	0,33	1,122	1,152	*1,155*	1,153	1,148	1,143
	0,36	1,129	1,152	1,153	1,151	1,146	1,141
0,2	0,30	1,103	1,136	1,136	1,134	1,128	1,120
	0,33	1,112	1,138	*1,139*	1,136	1,130	1,122
	0,36	1,119	1,137	1,137	1,134	1,127	1,120
0,4	0,30	1,095	1,125	1,124	1,121	1,115	1,106
	0,33	1,104	*1,128*	1,126	1,123	1,117	1,108
	0,36	1,110	1,126	1,124	1,121	1,114	1,105

F.2. táblázat. A járulékkulcs hatása a plafon hatékonyságára: van élettartamrés, $\eta = 0{,}4$

Az F.3. táblázatban a 2. és a 3. táblázat közti élettartamrés mellett, $\psi = 0{,}16$ és $\gamma = 0{,}85$ esetén számoljuk újra a plafon jóléti hatását a maximális kulcs esetén: $\tau = 0{,}33$. Amint várható volt, az optimális plafon most a két szélső eset között helyezkedik el. Például az 1. sorban most az optimum a 3-szoros plafon körül valósul meg, ellentétben a 2. táblázat 1. sorának résmentes 4,5-es optimumával, s megegyezően a 3. táblázat 1. sorának 1–1,5-es sávjával. A 9. sorában a résmentes $[2,3]$-as sávtól balra, és a nagyobb réshez tartozó 1-ponttól jobbra.

Érzékenység		A plafon relatív hatékonysága kitüntetett értékeknél					
Kamatláb	Leszámítolás						
ξ	η	0,5	1	1,5	2	3	4,5
0,0	0,0	1,158	1,203	1,209	1,213	*1,215*	1,214
	0,2	1,140	1,179	*1,182*	1,181	1,179	1,178
	0,4	1,127	1,159	*1,163*	1,162	1,159	1,156
0,2	0,0	1,146	1,188	1,191	1,191	*1,193*	1,192
	0,2	1,130	1,164	*1,167*	1,165	1,160	1,156
	0,4	1,117	1,146	*1,148*	1,146	1,141	1,135
0,4	0,0	1,136	1,175	*1,178*	1,176	*1,178*	1,176
	0,2	1,121	1,151	*1,154*	1,152	1,147	1,141
	0,4	1,110	*1,135*	*1,135*	1,133	1,128	1,122

F.3. táblázat. A rugalmassági paraméterek hatása a plafon hatékonyságára: közbülső élettartamrésre, $\tau = 0{,}33$

LONGEVITY GAP AND CAP ON PENSION CONTRIBUTIONS

A basic function of public pension systems is to guarantee a satisfactory old-age income for short-sighted low earners. In earning-related systems, this requires a sufficiently high contribution rate. At the same time, there should be a cap on the pension contribution base to leave sufficient room for the efficient private savings of prudent high earners. Taking into account the dependence of life expectancy on the earnings (figuratively called longevity gap), a well-chosen cap has an additional advantage: it limits the unintended income redistribution from the expectedly short-lived to the expectedly long-lived. Our strongly stylized model is able to illustrate numerically the impact of the contribution rate and of the cap on the social welfare and the unintended income redistribution.