

RANGSOROLÁS NEM BEFEJEZETT KÖRMÉRKÖZÉSES BAJNOKSÁGOKBAN¹

CSATÓ LÁSZLÓ

SZTAKI, Budapesti Corvinus Egyetem

A cikk a nem teljesen lejátszott körmérkőzéses (sport)bajnokságok eredményének meghatározását vizsgálja. Azonosítunk néhány, a rangsorolási módszerrel szemben elvárható tulajdonságot, majd belátjuk, hogy az általánosított sorösszeg azok mindegyikét teljesíti. E parametrikus eljárás egyik szélsőértéke az ellenfelek szerepét maximalizáló legkisebb négyzetek módszere. Javaslatunkat a francia első osztályú labdarúgó-bajnokság a koronavírus-járvány miatt félbeszakadt 2019/20-as szezonjának elemzése illusztrálja. Végül bemutatunk és értékelünk néhány alternatív rangsorolási megoldást.

Kulcsszavak: operációkutatás a sportban; körmérkőzéses bajnokság; labdarúgás; rangsorolás; sportszabályok.

MSC kód: 15A06, 91B14. *JEL kód:* C44, Z20.

„Ne kövessetek el igazságtalanságot az ítéletben, a hossz mértékben, súly mértékben és úrmértékben.”

(Mózes III. könyve 19:35)

1 Bevezetés

A 2020 márciusában világjárvánnyá nyilvánított koronavírus az élet szinte minden területét érintette, ez alól természetesen a sport sem jelent kivételt. 2020 kora tavaszán a legtöbb bajnokságot a fertőzés visszaszorítása érdekében meg kellett szakítani, és számos esetben kétségessé vált a folytatás: 2020. április 28-án például maga a francia miniszterelnök jelentette be, hogy az országban a teljes 2019/20-as sportszezon végét ért (BBC, 2020a). Valamilyen módon azonban ezekben az esetekben is meg kell határozni az eredményt, hiszen ezen múlik a feljutás és kiesés, a nemzetközi sorozatokban történő indulás, vagy akár a tévéközvetítésekéből származó bevételek elosztása (Bergantiños és Moreno-Ternero, 2020).

A befejezetlen játékok igazságos lezárásának problémája már *Blaise Pascal* és *Pierre de Fermat* levelezésében felmerült (Simonovits, 2009). Az ismert statisztikai előrejelzési technikák elvileg minden gond nélkül alkalmazhatók a végső rangsor becslésére az aktuális sorrendből kiindulva (Beggs et al., 2019). A koronavírus-járvány szintén több kutatót inspirált. Egy francia matematikus, *Julien Guyon* több napilapban népszerűsítette az általa javasolt, Élő-pontszámon alapuló eljárást (Guyon, 2020a,b), Lambers és Spijksma (2020)

¹Beérkezett 2020. október 21. E-mail: laszlo.csato@sztaki.hu.

pedig Landau (1914) nyomán egy sajátvektoron alapuló megközelítést használt. Gorgi et al. (2020) statisztikai modell segítségével becsüli meg a csapatok által szerzett pontok várható számát, míg Van Eetvelde et al. (2021) a lehetséges végső sorrendek valószínűségeit számítja ki a nem lejátszott mérkőzések szimulációjával. Végül Radojicic et al. (2021) nem a rangsor felállítására tesz javaslatot, hanem hierarchikus klaszterezéssel határozza meg a hátralevő mérkőzések azon részalmazát, amelyet mindenképp érdemes lejátszani. Tudomásunk szerint viszont a miénk az első olyan munka, amely axiomatikus szempontból tárgyalja a kérdést.

A cikk felépítése a következő. A 2. fejezet néhány félbeszakadt bajnokság példáját ismerteti. A 3. fejezetben azonosítjuk a körmérkőzéses bajnokságok általánosan használt rangsorolási módszerének néhány tulajdonságát, míg a 4. fejezetben igazoljuk, hogy az általánosított sorösszeg eljárás teljesíti az összes elvárható követelményt. Az 5. fejezet a javasolt megközelítést alkalmazza a francia labdarúgó-bajnokság első osztályának 2019/20-as idényére, végül a 6. fejezetben ajánlásokkal élünk a döntéshozók számára. A tanulmány rövid összeggel zárul.

2 Mi történt a nem befejezett bajnokságokkal?

A Magyar Kézilabda Szövetség vezetői 2020. április 9-én egyhangúlag döntöttek a 2019/20-as szezon törléséről, azaz nem hirdettek bajnokot, nem voltak kiesők, a nemzetközi kupasorozatokba pedig az előző évi szereplőket delegálták (Stregspiller, 2020). Ez a politika aligha nevezhető igazságosnak, ahogy azt a női bajnokság példája mutatja.

A teljes idény 26 mérkőzéséből a Siófok és a Ferencváros egyaránt 18-at játszott le, előbbi két ponttal – egy győzelem értékével – többet szerzett. A Siófok kétszer játszott az egyértelműen a legjobb csapatnak számító Győrrel, idegenben kikapott, otthon viszont legyőzte, ezzel megszakította a Bajnokok Ligája előző három kifrását megnyerő ellenfele több mint kétéves veretlenségi sorozatát. Emellett hazai pályán döntetlent játszott, idegenben nyert a Ferencváros ellen. Két további pontot veszített az Érd elleni idegenbeli vereséggel.

A Ferencváros ugyanakkor csak egyszer játszott a Győrrel (hazai pályán vereség), ahogy láttuk, rosszabb a Siófok elleni mérlege, emellett döntetlent játszott otthon a Debrecen, idegenben az MTK ellen. A hátralevő nyolc mérkőzést követően a Siófoknak valószínűleg sikerült volna megtartania a második helyet, így a Győr mellett az EHF Bajnokok Ligája 2020/21-es szezonjában indulhatott volna. 2018/19-ben azonban a harmadik helyen végzett a második Ferencváros mögött, ami az alacsonyabb presztízsű európai sorozatban, a – 2019/20-ig EHF Kupaként ismert – EHF Európa Ligában biztosít résztvételi jogot. Ez utóbbit a 2018/19-es idényben a Siófok megnyerte, míg az elődöntők előtt félbeszakadt 2019/20-as szezonban a legjobb négy közé jutott.

2020. április 21-én a német első osztályú férfi kézilabda-bajnokságot ugyan-

csak befejezettnek nyilvánították (Web24 News, 2020). A 36 első és másodosztályú csapat többségi döntése alapján a másodosztályból az első két klub feljutott, az első osztályból senki sem esett ki. A rangsoroláshoz mindkét esetben a csapatok által elért pontok számát elosztották a lejátszott mérkőzések számával (*kvóciens* szabály), az esetleges holtversenyeket pedig a gólkülönbség alapján döntötték el. Bár a Fűchse Berlin egy ponttal többet szerzett a Rhein-Neckar Löwennél, egy mérkőzéssel többet is játszott, így a pontok számából adódó ötödik helyett hatodik lett. Következésképp a 2020/21-es idényben csupán a negyedik TSV Hannover-Burgdorf visszalépése miatt indulhatott az EHF Európa Ligában.

A holland labdarúgó-bajnokság első osztályát 2020. április 25-én zárták le (Sky Sports, 2020). Bajnokot nem hirdettek, nem voltak sem kiesők, sem feljutók. A klubokat az utolsó játéknapot követő állás alapján rangsorolták, noha négy csapat eggyel kevesebb mérkőzésen szerepelt. A két vezető, egyaránt 25 lejátszott meccsel és 56 ponttal álló klub, az Ajax és az AZ Alkmaar sorrendjét a jobb gólkülönbség döntötte el az előbbi javára. Az Ajax a 2020/21-es UEFA Bajnokok Ligája csoportkörébe került, az AZ Alkmaarnak azonban ehhez három selejtezős párharcot kellett volna megnyernie, de a másodikban elbukott. Ezért csak a kisebb presztízsi európai kupasorozat, az UEFA Európa Liga csoportkörébe jutott.

A francia labdarúgó-bajnokság első osztályában (Ligue 1) 2020. április 30-án hirdettek eredményt (BBC, 2020b). A csapatokat itt is a kvóciens szabály alapján rendezték sorba. Az utolsó két klub, az Amiens és a Toulouse kiesett, a másodosztály első két helyezettje, a Lorient és a Lens feljutott. Az eredeti szabállyal ellentétben a 18. Nîmesnek nem kellett selejtezőt játszania a második liga 3–5. klubjaival a Ligue 1 fennmaradó helyéért.

Az angol harmadosztályú labdarúgóliga (EFL League One) 2019/20-as szezonját 2020. március 13-án ideiglenesen felfüggesztették, 2020. június 9-én pedig kvóciens szabály alkalmazásával meghatározták a végeredményt (Fisher, 2020). Így az 59 pontos Wycombe Wanderers 34 lejátszott mérkőzése révén harmadikként osztályozót játszhatott és fel is jutott a másodosztályba, ahol a jelenlegi 2020/21-es idényben az utolsó helyen áll. A szintén 59 pontos, de 35 alkalommal pályára lépő Peterborough United ellenben hetediként lemaradt a rájátszásról, bár a hátralevő kilenc fordulóban ötször otthon játszott volna, maradék ellenfelei közül pedig hét a 23 csapatos mezőny utolsó 10 helyezettje közül került ki.²

3 A körmérkőzéses sportbajnokságok rangsorának tulajdonságai

A 2. fejezet alapján a legkevésbé sem egyértelmű, mi lenne a befejezetlen bajnokságok végeredményének helyes meghatározása. A teljes 2019/20-as idény mellőzése aligha indokolt, hiszen a mérkőzések több mint felét sikerült

² A példáért köszönettel tartozunk *Štefan Gyürkinek* a pozsonyi Szlovák Műszaki Egyetemről.

lejátszani. Viszont a bajnokság félbeszakadása miatt előfordulhat, hogy egy csapat inkább nehezebb, míg egy másik gyengébb ellenfelekkel játszott, tehát az utóbbi könnyebben gyűjthetett pontokat. Azaz egy újabb kérdés is felmerül: hogyan lehetne számításba venni az ellenfelek erejét?

A megfelelő rangsorlási eljárás megtalálásához célszerű axiomatikus megközelítést alkalmazni. Ehhez összegyűjtöttük a körmérkőzéses bajnokságok szokásos, a megszerzett pontok száma alapján történő rangsorolásának néhány jellemzőjét.

1. Axióma. *Függetlenség az irreleváns mérkőzésektől:* Két tetszőleges csapat sorrendjére nincs hatással a többi csapat egymás közötti mérkőzéseinek eredménye.

2. Axióma. *Önkonzisztencia:* Két, azonos erejű ellenfelekkel szemben azonos eredményeket elérő csapat között holtverseny áll fenn. Ugyanakkor egy csapatot előrébb kell rangsorolni egy másiknál, ha az alábbi feltételek valamelyike fennáll:

- a) azonos erejű ellenfelek ellen jobb eredményeket ért el; vagy
- b) erősebb ellenfelek ellen ugyanolyan eredményeket ért el; vagy
- c) erősebb ellenfelek ellen jobb eredményeket ért el.

A tulajdonság elnevezését az indokolja, hogy a csapatok erejét a végső sorrendjük szolgáltatja.

3. Axióma. *Körbeverés invariancia:* Tegyük fel, hogy A csapat legyőzte B -t, B legyőzte C -t, C pedig A -t. A rangsort nem befolyásolja, ha e kör mentén megfordítjuk az eredményeket, azaz B nyer A , C nyer B , és A nyer C ellen.

4. Axióma. *Függetlenség a mérkőzések helyszínétől:* A rangsor nem változik, amennyiben a mérkőzések eredményének módosítása nélkül a hazai csapat mindig idegenben, míg az idegenbeli mindig otthon játszott volna.

5. Axióma. *Konzisztencia:* Az eljárás eredménye a lejátszott mérkőzések számának növekedésével a pontszámból adódó rangsorhoz konvergál. Speciálisan, egy befejezett bajnokság esetén azzal azonos sorrendet ad.

Ha nem játszották le az összes mérkőzést, akkor nem található olyan rangsorlási módszer, mely egyszerre teljesítené az irreleváns mérkőzésektől való függetlenség és az önkonzisztencia követelményét (Csató, 2019, 1. Tétel). A lehetetlenség lényegében nem szüntethető meg az értelmezési tartomány szűkítésével sem. Mivel a két axióma közül az önkonzisztencia tűnik fontosabbnak, pozitív eredmény csak az irreleváns mérkőzésektől való függetlenség gyengítésével remélhető (Csató, 2019).

A mérkőzések helyszínétől való függetlenség természetes elvárás a szokásos körmérkőzéses bajnokságokban, ahol minden csapat minden másikkal egyszer otthon, egyszer idegenben játszik. Egy félbeszakadt bajnokságban azonban ez a kiegyensúlyozottság már nem teljesül. Például a 2019/20-as Ligue 1 harmadik helyezettje, a Rennes csak otthon játszott a kimagaslóan legjobb Paris

Saint-Germain ellen, a negyedik Lille viszont kétszer. Ugyanakkor az elmaradt 10 fordulóban a Rennes ötször, a Lille hatszor játszott volna idegenben.

Ezt a tulajdonságot két okból követelhetjük meg. Egyrészt, több európai első osztályú labdarúgó-bajnokság eleve kiegyensúlyozatlan. Koszovóban és Magyarországon 12-12 csapat háromszor játszik egymás ellen, azaz minden klub kétszer játszik otthon és egyszer idegenben egy másik ellen, vagy fordítva. A megszerzett pontok számát mégsem korrigálják ennek megfelelően. Másrészt, a hazai pálya jelentette előny számszerűsítése mindenképp valamilyen ökonometriai eljárást igényel, legalább egy paraméter statisztikai becslésével. Ez valószínűleg hosszúságos vitákat generálna az alkalmazott módszertan és a felhasznált minta körül, amibe a 2. fejezet alapján a döntéshozók aligha egyeznének bele.

4 Az általánosított sorösszeg módszer

Az általunk javasolt rangsorolási eljárás két inputot igényel, a \mathbf{p} *pontszámvektort* és az \mathbf{M} *mérkőzésmátrixot*. A \mathbf{p} vektor p_i eleme az i csapat által szerzett pontok száma, az \mathbf{M} mátrix m_{ij} eleme az i és j csapatok egymás elleni mérkőzéseinek száma.

Elsőként egy olyan \mathbf{s} *normalizált pontszámvektorra* van szükségünk, amely elemeinek összege nulla. Ezért a kvóciens szabály alapján minden csapat esetén kiszámítjuk az egy mérkőzésen szerzett pontok átlagos számát, majd ezeket normalizáljuk, vagyis az egyedi értékekből levonjuk az átlagos kvóciens. Könnyen ellenőrizhető, ha az i és j csapat ugyanannyi mérkőzést játszott, valamint $p_i = p_j$, akkor $s_i = s_j$ is fennáll.

Célszerűnek tűnik az ellenfelek erejének beépítése is: a francia Ligue 1 2019/20-as szezonjában harmadik Rennes fennmaradó 10 ellenfele az első 28 fordulóban legalább 381 pontot szerzett, a negyedik Lille esetén ugyanez a mutató viszont mindössze 347 (Guyon, 2020a). Ezért a Lillenek jó esélye lehetett volna a hátralevő mérkőzéseken ledolgozni egy pontos hátrányát.

Ehhez vezessük be az $\mathbf{L} = [\ell_{ij}]$ *Laplace-mátrixot*, ahol $\ell_{ij} = -m_{ij}$ minden $i \neq j$ párra, a főátló ℓ_{ii} eleme pedig az i csapat által játszott mérkőzések száma. Legyen továbbá \mathbf{I} az a megfelelő dimenziójú mátrix, ami a főátlójában csupa 1-et, azonkívül 0-t tartalmaz, míg \mathbf{e} az azonos dimenziójú egységvektor.

Az *általánosított sorösszeg* módszer $\mathbf{x}(\varepsilon)$ értékelővektora az alábbi egyenletrendszer egyértelmű, de az $\varepsilon > 0$ paramétertől függő megoldása:

$$[\mathbf{I} + \varepsilon \mathbf{L}] \mathbf{x}(\varepsilon) = \mathbf{s}.$$

Az eljárást Chebotarev (1989) és Chebotarev (1994) vezette be. A normalizált pontszámot az ellenfelek, majd az ellenfelek ellenfelei stb. erejét figyelembe véve igazítja ki. Az ε változó e korrekció mértékét tükrözi. $\varepsilon \rightarrow 0$ esetén az általánosított sorösszeg a normalizált pontszámhoz, vagyis a kvóciens szabályból adódó rangsorhoz tart.

A *legkisebb négyzetek* módszerének \mathbf{q} értékelővektora a következő egyen-

letrendszerből kapható:

$$\begin{aligned}\mathbf{L}\mathbf{q} &= \mathbf{s}, \\ \mathbf{e}^\top \mathbf{q} &= 0.\end{aligned}$$

A megoldás egyértelmű, ha bármely csapat bármely másikkal legalább közvetetten, más csapatokon keresztül összehasonlítható (Kaiser és Serlin, 1978; Bozóki et al., 2010). Ennek hiányában létezik két olyan részhalmaz, melyek elemeinek egymással szembeni teljesítménye ismeretlen. Az eljárás neve onnan származik, hogy a fenti egyenletrendszer egy négyzetösszeg minimalizálási feladat optimalitási feltételeivel egyezik meg (González-Díaz et al., 2014).

Amennyiben az \mathbf{L} Laplace-mátrix nem egy reguláris páros gráfhoz tartozik, a \mathbf{q} értékelővektor az alábbi $\mathbf{q}^{(k)}$ sorozat határértéke (Csató, 2015, 2. Tétel):

$$\begin{aligned}\mathbf{q}^{(0)} &= (1/r)\mathbf{s}, \\ \mathbf{q}^{(k)} &= \mathbf{q}^{(k-1)} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{r} (\mathbf{r}\mathbf{I} - \mathbf{L}) \right]^k \mathbf{s}, \quad \text{minden } k \geq 1\text{-re,}\end{aligned}\tag{1}$$

ahol r az egy csapat által játszott mérkőzések (fordulók) számának maximuma. Vagyis az $\mathbf{r}\mathbf{I} - \mathbf{L}$ mátrix a csapatok egymás elleni mérkőzéseinek számát tartalmazza, mintha az esetleg kevesebb mérkőzést játszó csapatok a hiányzó mérkőzéseket „önmaguk” ellen játszották volna. $\mathbf{q}^{(1)}$ az ellenfelek erejének beépítésével kapott értékeléseket mutatja, $\mathbf{q}^{(2)}$ ezt korigálja az ellenfelek ellenfeleinek erejével, és így tovább.

Az általánosított sorösszeg és a legkisebb négyzetek módszerével kapott rangsorok azonosak, amennyiben $\varepsilon \rightarrow \infty$ (Chebotarev és Shamis, 1998, 326. o.). Eszerint az általánosított sorösszeg módszer szélsőértékei a normalizált pontszám, amikor az ellenfelek ereje egyáltalán nincs figyelembe véve, illetve a legkisebb négyzetek, amikor az ellenfelek ereje a lehető legnagyobb mértékben számít. Mivel az ellenfelek által szerzett pontok számát a sakkban Buchholz módszer néven használják, elsősorban holtversenyek eldöntésére, a legkisebb négyzetek módszere *rekurzív Buchholznak* is hívható (Brozos-Vázquez et al., 2010).

Az általánosított sorösszeg és a legkisebb négyzetek módszerek egyaránt teljesítik a 3. fejezetben megfogalmazott négy, egymással összeegyeztethető tulajdonságot: önkonzisztencia, körbeverés invariancia, függetlenség a mérkőzések helyszínétől, konzisztencia (Csató, 2021, 1. Állítás).

Mindkét eljárásnak, különösen a legkisebb négyzetek módszerének számos sikeres alkalmazása ismert, például teniszszők (Bozóki et al., 2016), felsőoktatási intézmények (Csató, 2016; Csató és Tóth, 2020), és Forma-1 konstruktőrök (Petróczy és Csató, 2021; Petróczy, 2021b) rangsorolására, vagy alternatív életminőség-rangsorok meghatározására (Petróczy, 2018, 2020, 2021a).

5 Alkalmazás: a francia labdarúgás első osztályának 2019/20-as szezonja

A francia labdarúgó-bajnokság első osztálya, a Ligue 1 2019/20-as szezonját 2020. március 18-án bizonytalan időre felfüggesztették, április 28-án pedig befejezettnak nyilvánították a koronavírus-járvány miatt. Összesen 28 forduló játszottak le a Strasbourg–Paris Saint-Germain mérkőzés kivételével.

Hely	Csapat	Gólk.	Pont	Kvóciens	Általánosított sorösszeg		
					$\varepsilon = 0,001$	$\varepsilon = 0,1$	$\varepsilon \rightarrow \infty$
1	Paris SG	+51	68	2,52	1	1	1
2	Marseille	+12	56	2,00	2	2	2
3	Rennes	+14	50	1,79	3	3	4
4	Lille	+8	49	1,75	4	4	3
5	Nice	+3	41	1,46	6	6	8
6	Reims	+5	41	1,46	5	5	5
7	Lyon	+15	40	1,43	9	9	9
8	Montpellier	+1	40	1,43	7	7	6
9	Monaco	0	40	1,43	8	8	7
10	Strasbourg	0	38	1,41	10	11	12
11	Angers	-5	39	1,39	11	10	10
12	Bordeaux	+6	37	1,32	13	13	13
13	Nantes	-3	37	1,32	12	12	11
14	Brest	-3	34	1,21	15	15	15
15	Metz	-8	34	1,21	14	14	14
16	Dijon	-10	30	1,07	16	16	16
17	Saint-Étienne	-16	30	1,07	17	17	17
18	Nîmes	-15	27	0,96	18	18	18
19	Amiens	-19	23	0,82	19	19	19
20	Toulouse	-36	13	0,46	20	20	20

Megjegyzések: (1) Rövidítések: Paris SG = Paris Saint-Germain; Gólk. = Gólkülönbség.

(2) A Paris Saint-Germain és a Strasbourg 27, a maradék 18 klub 28 mérkőzést játszott.

(3) A kvóciens a mérkőzésenkénti átlagos pontszám.

(4) Az általánosított sorösszeg fejlécű oszlopok a csapatok helyezéseit tartalmazzák.

1. táblázat. A francia labdarúgó-bajnokság első osztályának 2019/20-as eredménye.

Forrás: saját szerkesztés.

A hivatalos és az általánosított sorösszeg módszerrel kapott rangsorok az 1. táblázatban láthatók. A nemzeti szövetség által meghatározott sorrend a kvóciens szabályon alapul, a holtversenyek következő módon történő feloldásával (Ligue 1, 2020):

- Az 5. a Nice a Reims előtt, két egymás elleni mérkőzésük kedvezőbb eredménye (2-0 és 1-1) alapján;
- A 7. a Lyon, mert nem játszott kétszer sem a Montpellier, sem a Monaco ellen, miközben azok 14 meccset játszottak idegenben, a Lyon viszont 15-öt;
- A 8. a Montpellier a Monaco előtt, két egymás elleni mérkőzésük kedvezőbb eredménye (3-1 és 0-1) alapján, de a Montpellier gólkülönbsége is jobb;

- A 12. a Bordeaux a Nantes előtt, két egymás elleni mérkőzésük kedvezőbb eredménye (2-0 és 1-0) miatt, de a Bordeaux gólkülönbsége is jobb;
- A 14. a Brest a Metz előtt, mert csak egyszer játszottak és jobb a gólkülönbsége;
- A 16. a Dijon a Saint-Étienne előtt, mert csak egyszer játszottak és jobb a gólkülönbsége.

A Strasbourg ugyan egy ponttal kevesebbet szerzett, mint az Angers, de egy mérkőzéssel kevesebbet is játszott – igaz, az éppen a toronymagas első Paris Saint-Germain elleni hazai összecsapás lett volna. Az eredeti kiírás szerint a pontszámban jelentkező holtversenyeket a következő kritériumok alapján döntötték volna el: (1) jobb gólkülönbség; (2) több rúgott gól; (3) egymás elleni gólkülönbség; (4) fairplay rangsor. Így a Reims lett volna az ötödik a Nice helyett.

Az általánosított sorösszeg eljárással kapott sorrendek meglepően robusztusak, alig befolyásolja azokat az ε változó. A paraméter legalacsonyabb értéke lényegében a kvociensben jelentkező holtversenyeket dönti el az ellenfelek ereje alapján. A 7–15. helyezések némileg eltérő kiosztásának csekély a jelentősége, bár a hivatalos rangsor szerint a Lyon a Montpellier és a Monaco, a Bordeaux a Nantes, míg Brest a Metz elé kerül, miközben utóbbiak rendre erősebb csapatokkal mérkőztek meg.

Az utolsó két, kieső csapat kiléte egyértelmű. Az UEFA Bajnokok Ligája (BL) csoportkörében induló első két helyezett ugyancsak nyilvánvaló. A harmadik, végül szintén BL csoportkört érő pozíciót ellenben a Lille is megérdemelné, ha az ellenfelek erősségét fokozott mértékben vesszük figyelembe. Az UEFA Európa Liga (EL) csoportkörébe került a negyedik és – miután a Paris Saint-Germain mind a kupát, mind a ligakupát megnyerte – az ötödik, második selejtező fordulójába pedig a hatodik csapat. A hivatalosan ötödik Nice gyengébb ellenfelekkel játszott, mint a hatodik Reims, ráadásul az eredetileg a holtversenyt eldöntő gólkülönbsége is rosszabb. A Reims végül nem jutott el az EL csoportköréig, mert a selejtező harmadik fordulójában tizenegyesekkel kiesett a magyar Fehérvár ellen. A legkisebb négyzetek módszerének használatával a Montpellier szintén odaérhetne a nemzetközi szereplésre feljogosító hatodik helyre.

A legkisebb négyzetek módszerének (1) rekurzív formáját alkalmazva azt tapasztaljuk, az ellenfelek erejével korrigáló $\mathbf{q}^{(1)}$ már majdnem a végső sorrendet adja, csak a Lyon végez az Angers mögött, amit a $\mathbf{q}^{(2)}$ vektor állít helyre. Tehát gyakorlatilag nincs szükség a mátrixinvertálás elvégzésére, egyetlen mátrixszorzás már biztosítja a közel optimális eredményt. Eszerint a számítás minimális matematikai háttérrel igényel, bármely egyszerű irodai szoftverrel, sőt, akár papíron is elvégezhető.

6 Ajánlások a sportszövetségek számára

A nem befejezett körmérkőzéses bajnokságok sorrendjének meghatározása kihívásokkal teli feladat, főleg, ha számításba szeretnénk venni a csapatok ellenfeleinek eltérő erősségét. A probléma megoldására a következő javaslatokkal élünk, saját értékelésünk szerint csökkenő sorba rendezve:

1. Legkisebb négyzetek módszere ($\varepsilon \rightarrow \infty$);
2. Általánosított sorösszeg olyan alacsony paraméterértékkel ($\varepsilon \rightarrow 0$), amely csupán a kvóciensben jelentkező holtversenyeket oldja fel;
3. Kvóciens szabály, gólkülönbség, több rúgott gól;
4. Megszerzett pontok száma, kevesebb lejátszott mérkőzés, gólkülönbség, több rúgott gól.

Az egymás elleni eredmények használatát nem tartjuk helyesnek, hiszen a gólkülönbséggel szemben általánosan nem alkalmazható.

Az első két szabály egyike sem tartalmaz külön paramétert, és a kvócienssel ellentétben szinte soha nincs szükség további önkényes rangsorolási kritériumok alkalmazására sem (Brozos-Vázquez et al., 2010; Csató, 2017). Amennyiben mégis, talán a gólkülönbség ajánlható erre a célra. A döntéshozók – a holland Eredivisie kivételével – alapvetően a harmadik megoldást követik.

7 Összegzés

2020 tavaszán világszerte számos sportbajnokság félbeszakadt a mérkőzések több mint felének lejárta után. Az előzőekben az ilyen hiányos körmérkőzéses versenyek rangsorolásának problémáját jártuk körül. A legnagyobb kihívást az ellenfelek erejének beépítése jelenti, amihez egy rekurzív módszert ajánlottunk a csapatok által szerzett pontok kiigazítására az ellenfelek, az ellenfelek ellenfeleinek stb. teljesítménye alapján. Az eljárás kedvező axiomatikus tulajdonságokkal rendelkezik, a korrekció mértéke egy paraméterrel szabályozható. A francia első osztályú labdarúgó-bajnokság 2019/20-as szezonja alapján e változó minimális hatással van a végső rangsorra, noha éppen a nemzetközi kupaindulást jelentő pozíciókban nem ad egyértelmű eredményt. Számításaink egybecsengenek Guyon (2020a), illetve Lambers és Spieksma (2020) következtetéseivel: a sok lejátszott mérkőzésnek köszönhetően a félbeszakadt bajnokságok aktuális állása viszonylag jó kiindulópontot jelent, ezért aligha indokolt az összes eredmény törlése, ahogy az a magyar kézilabdában történt.

Zárszóként azt mondhatjuk, a döntéshozóknak számos matematikai-statisztikai módszer áll rendelkezésére ahhoz, hogy egy csonka idény alapján is megnyugtatóan lezárhassák a bajnokságokat. Bár a legjobb megoldást véleményünk szerint a korábbi ellenfelek erejének figyelembevétele adná, az ennél egyszerűbb, egy mérkőzésen szerzett átlagos pontok száma alapján történő eredményhirdetés sem rossz megoldás. Ugyanakkor általános tanulságként lekövethető, az ilyen esetekre a jövőben előre készülni kell, a szabálykönyvben

egyértelműen rögzítendő, mi a teendő, ha egy bajnokság a szezon közepén megszakad.

Köszönetnyilvánítás

Hálásak vagyunk *Julien Guyonnak* a problémafelvetésért. A szerző édesapja, *Csató László* segített a számítások elvégzésében. A kutatást az MTA Prémium posztdoktori kutatói program PPD2019-9/2019 számú pályázata támogatta.

Irodalom

1. BBC (2020a). Ligue 1 & 2: France's top two divisions will not resume this season. Április 28. <https://www.bbc.com/sport/football/52460468>.
2. BBC (2020b). Ligue 1: Paris St-Germain awarded French title as season finished early. Április 30. <https://www.bbc.com/sport/football/52484926>.
3. Beggs, C. B., Bond, A. J., Emmonds, S., és Jones, B. (2019). Hidden dynamics of soccer leagues: The predictive 'power' of partial standings. *Plos One*, 14(12):e0225696.
4. Bergantiños, G. és Moreno-Ternero, J. D. (2020). Sharing the revenues from broadcasting sport events. *Management Science*, 66(6):2417–2431.
5. Bozóki, S., Csató, L., és Temesi, J. (2016). An application of incomplete pairwise comparison matrices for ranking top tennis players. *European Journal of Operational Research*, 248(1):211–218.
6. Bozóki, S., Fülöp, J., és Rónyai, L. (2010). On optimal completion of incomplete pairwise comparison matrices. *Mathematical and Computer Modelling*, 52(1-2):318–333.
7. Brozos-Vázquez, M., Campo-Cabana, M. A., Díaz-Ramos, J. C., és González-Díaz, J. (2010). Recursive tie-breaks for chess tournaments. http://eio.usc.es/pub/julio/Desempate/Performance_Recursiva_en.htm.
8. Chebotarev, P. (1989). An extension of the method of string sums for incomplete pairwise comparisons (oroszul). *Avtomatika i Telemekhanika*, 50(8):125–137.
9. Chebotarev, P. Yu. (1994). Aggregation of preferences by the generalized row sum method. *Mathematical Social Sciences*, 27(3):293–320.
10. Chebotarev, P. Yu. és Shamis, E. (1998). Characterizations of scoring methods for preference aggregation. *Annals of Operations Research*, 80:299–332.
11. Csató, L. (2015). A graph interpretation of the least squares ranking method. *Social Choice and Welfare*, 44(1):51–69.
12. Csató, L. (2016). Felsőoktatási rangsorok jelentkezői preferenciák alapján. *Közgazdasági Szemle*, 63(1):27–61.
13. Csató, L. (2017). On the ranking of a Swiss system chess team tournament. *Annals of Operations Research*, 254(1-2):17–36.
14. Csató, L. (2019). An impossibility theorem for paired comparisons. *Central European Journal of Operations Research*, 27(2):497–514.

15. Csató, L. (2021). Coronavirus and sports leagues: obtaining a fair ranking when the season cannot resume. *IMA Journal of Management Mathematics*, 32(4):547–560. <https://doi.org/10.1093/imaman/dpab020>.
16. Csató, L. és Tóth, Cs. (2020). University rankings from the revealed preferences of the applicants. *European Journal of Operational Research*, 286(1): 309–320.
17. Fisher, B. (2020). ‘A disgrace’: Peterborough furious as League One and League Two curtailed. *The Guardian*. Június 9. <https://www.theguardian.com/football/2020/jun/09/league-two-league-one-clubs-vote-to-curtail-season-promotion-relegation-hold-play-offs>.
18. González-Díaz, J., Hendrickx, R., és Lohmann, E. (2014). Paired comparisons analysis: an axiomatic approach to ranking methods. *Social Choice and Welfare*, 42(1):139–169.
19. Gorgi, P., Koopman, S. J., és Lit, R. (2020). Estimation of final standings in football competitions with premature ending: the case of COVID-19. Műhelytanulmány. <https://www.timeserieslab.com/articles/football.pdf>.
20. Guyon, J. (2020a). Football : comment décider du classement final de la Ligue 1 si elle devait s’arrêter ici ? *Le Monde*. Március 16. https://www.lemonde.fr/sport/article/2020/03/16/football-comment-decider-du-classement-final-de-la-ligue-1-si-elle-devait-s-arreter-ici_6033217_3242.html.
21. Guyon, J. (2020b). The model to determine Premier League standings. *The Times*. Március 18. <https://www.thetimes.co.uk/article/the-model-to-determine-premier-league-standings-ttt8tnltd>.
22. Kaiser, H. F. és Serlin, R. C. (1978). Contributions to the method of paired comparisons. *Applied Psychological Measurement*, 2(3):423–432.
23. Lambers, R. és Spieksma, F. (2020). True rankings. Műhelytanulmány. <https://www.euro-online.org/websites/orinsports/wp-content/uploads/sites/10/2020/05/TrueRanking.pdf>.
24. Landau, E. (1914). Über Preisverteilung bei Spielturnieren. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 63:192–202.
25. Ligue 1 (2020). 2019/2020 Ranking Table Round 28. <https://www.ligue1.com/ranking?seasonId=2019-2020&matchDay=28>.
26. Petróczy, D. G. (2018). Egy életminőség-rangsor a hazautalások alapján. In Temesi, J., szerk., *A XV. Gazdaságmodelllezési Szakértői Konferencia Előadásai*, 97–106. o. Gazdaságmodelllezési Társaság, Budapest.
27. Petróczy, D. G. (2020). Egy életminőség-rangsor a hazautalások alapján. *Sigma*, 51(2):169–184.
28. Petróczy, D. G. (2021a). An alternative quality of life ranking on the basis of remittances. *Socio-Economic Planning Sciences*, megjelenés alatt. <https://doi.org/10.1016/j.seps.2021.101042>.
29. Petróczy, D. G. (2021b). Teljesítményalapú pénzfelosztás a Forma-1-ben páros összehasonlításokkal. *Sigma*, 52(1):63–76.
30. Petróczy, D. G. és Csató, L. (2021). Revenue allocation in Formula One: A pairwise comparison approach. *International Journal of General Systems*, 50(3):243–261.
31. Radojicic, M., Djokovic, A., és Cvetkovic, N. (2021). Extraordinary circumstances: Covid-19 – Italian Serie A scenario. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part P: Journal of Sports Engineering and Technology*, megjelenés alatt. <https://doi.org/10.1177/17543371211019289>.

32. Simonovits, A. (2009). *Válogatott fejezetek a matematika történetéből*. Typotex Kiadó, Budapest.
33. Sky Sports (2020). Ajax denied title as Dutch Eredivisie season declared void, European places decided, no relegation. Április 25. <https://www.skysports.com/football/news/11906/11978351/ajax-denied-title-as-dutch-eredivisie-season-declared-void-european-places-decided-no-relegation>.
34. Stregspiller (2020). It does not end here. Április 11. <https://www.stregspiller.com/it-does-not-end-here>.
35. Van Eetvelde, H., Hvattum, L. M. és Ley, C. (2021). The Probabilistic Final Standing Calculator: a fair stochastic tool to handle abruptly stopped football seasons. *Advances in Statistical Analysis*, megjelenés alatt. <https://doi.org/10.1007/s10182-021-00416-6>.
36. Web24 News (2020). Season in handball Bundesliga canceled – Kiel champions. Április 21. <https://www.web24.news/u/2020/04/season-in-handball-bundesliga-canceled-kiel-champions.html>.

RANKING IN UNFINISHED ROUND-ROBIN TOURNAMENTS

The pandemic of coronavirus disease 2019 (COVID-19) stopped almost all sports leagues around the world. Some of them never resumed: the German premier men's handball league was canceled on 21 April 2020; the Dutch top soccer league ended with immediate effect on 24 April 2020; and the French Prime Minister announced on 28 April 2020 that the 2019/20 sporting season is over in the country. Consequently, several organisers faced an unenviable dilemma: how to decide the final ranking in the 2019/20 season? Should all results be abandoned? Should the current standing be frozen? Should a reasonable subset of the matches be considered? Since the sports industry is a billion dollars business, the answer has huge financial consequences as promotion and relegation, qualification for international cups, and the allocation of broadcasting revenue all depend on the league ranking. The choices of the administrators were quite different in the spring of 2020. For instance, the Hungarian Handball Federation canceled all results in the 2019/20 season, while the best 36 German men's handball clubs voted by a large majority to evaluate the 2019/20 season according to the so-called quotient rule, the number of points scored per game. In addition, the top two clubs were promoted from the second division but there was no relegation.

The present paper aims to propose a fair ranking in similar incomplete round-robin tournaments, where the main challenge is how to take into account the varying strength of the opponents. The analysis is based on preserving the most theoretical properties of the standard ranking in round-robin leagues. The novelty of our research resides in its axiomatic approach, which has never been followed so far in this particular context. As the first step, we identify some conditions that are satisfied by the ranking from the number of points in a round-robin tournament. The collection aims to assess whether they can be guaranteed if the league cannot resume after some matches are played.

Independence of irrelevant matches means that the relative ranking of two teams should be independent of any matches between the other teams. According to self-consistency, two teams should have the same rank if they achieved the same results against teams having the same strength. Furthermore, a team should be ranked strictly higher than another team if it achieved the same results against stronger opponents or better results against opponents having the same strength.

However, there exists no ranking method simultaneously being independent of irrelevant matches and self-consistent if the tournament is not round-robin. Since self-consistency is a more important property than independence of irrelevant matches, we have chosen the former to be met. Assume that team i defeated team j , team j defeated team k , and team k defeated team j . The ranking is invariant to cycles if it is independent of reversing these results such that team j wins against team i , team k wins against team j , and team i wins against team k . Home-away independence means that the order of the teams does not change if the field of all matches is reversed. Finally, the ranking is consistent if it approaches the ranking from the number of points as the number of rounds played increases. In particular, the two rankings should coincide when the competition is finished, namely, the contest is round-robin.

A family of scoring rules for preference aggregation, the generalised row sum method, is found to satisfy all axioms that remain compatible with each other: self-consistency, invariance to cycles, home-away independence, and consistency. It requires two inputs, the normalised score vector, and the symmetric matches matrix. The normalised score vector is obtained as follows. First, the quotient is calculated for each team by dividing its number of points by its number of matches played. Then these values are normalised such that the average quotient is subtracted from the quotient of each team. The generalised row sum method adjusts the normalised scores by considering the performance of the opponents, the opponents of the opponents, and so on. A parameter quantifies the degree of this modification. The suggested approach is applied for the 2019/20 season of Ligue 1, the top soccer competition in France. The rankings are found to be robust concerning the weight of adjustment for the strength of the opponents. However, the third-placed team, which qualifies for the UEFA Champions League group stage, is either Rennes or Lille, depending on the role of opponents.

To summarise, our proposal is based exclusively on the number of points as well as the structure of the matches already played, and has the following advantages: (a) it takes into consideration all results from the unfinished season; (b) it accounts for the different number of matches played as well as for the fact that the teams played against different sets of opponents with varying strengths; (c) it is not influenced by the form, home-away pattern, injuries, or results in the preceding season(s); (d) it seldom requires further tie-breaking criteria; (e) it is suitable for any sport and does not call for the estimation of any parameter; (f) it has a recursive formula where the first iteration still yields an adequate solution, thus its implementation requires no specific software, and the ranking can be computed essentially by hand.

Naturally, ranking in a sports league is a zero-sum game, hence any solution will prefer certain teams compared to an alternative regime. Future rulebooks should explicitly define what happens if a league has to be finished without playing all matches. This paper can contribute to single out a suitable policy to that end.