ÁRMEGHATÁROZÁS ÉS ÁRALAKULÁS DINAMIKUS KÖRNYEZETBEN, VÁLLALATI TANULÁS ESETÉN[1]

SZABÓ BALÁZS
PTE Gazdálkodástani Doktori Iskola

A vállalatok egyes életszakaszaiban a termelési tapasztalatból eredő rutinok fontos szerepet játszhatnak. A szervezeti tanulás fajtái közül tanulmányunk a csinálva tanulás (*learning-by-doing*) folyamatát állítja a vizsgálódás középpontjába, különös figyelmet fordítva a szervezeti felejtésnek. Annak ellenére, hogy többen foglalkoztak már az irodalomban ezzel a kérdéssel, mégis olyan gazdag területről van szó, amely további analízisre és bővítésre érdemes, amelyhez mi is csatlakozni kívánunk. Ennek érdekében az optimális irányításelmélet segítségével egy folytonos idejű modellt elemzünk. A modellben a termék egységára a döntési változó, a kumulált termelési tapasztalat az állapotváltozó. Utóbbi alapján származtatjuk az optimalizálni kívánt kifejezés állapotegyenletét. A tanulási rátáról feltesszük, hogy időben változó lehet, valamint annak értéke negatív tartományba is kerülhet. Eredményeink egyrészt rámutatnak az árrés és az árnyékár jelenértékének kapcsolatára; a jelenértékű árnyékár, tanulási ráta és termékár viszonyára; illetve az árnyékár jelenértékének dinamikájára. Másrészt, speciális feltételezésekkel élve, az áralakulás dinamikájáról teszünk megállapításokat, külön kiemelve, hogy ezek a kijelentések kiterjednek a vállalati felejtés esetére is. Rámutatunk, hogy a tanulás és felejtés értékelése az árdinamika szempontjából a konkrét vállalati szituációktól függően változhat. Végül illusztratív célból a tanulmány egy további érdekes esetet is vizsgál, amelynek eredményeként implicit és explicit módon meghatározzuk az optimális árat. Erre az illusztratív eredményre építve, a dolgozatot egy numerikus példával zárjuk.

Kulcsszavak: Csinálva tanulás, ármeghatározás, árdinamika, optimális irányítás. *JEL:* C44, C61, D83

1 Bevezetés

A szervezeti tanulás interdiszciplináris természete számos tudományterület fejlődéséhez járul hozzá (szervezeti viselkedés, közgazdaságtan, stratégiai menedzsment stb.) (Argote et al. 2003; Argote és Miron-Spektor 2011). Ez pedig arra világít rá, hogy a modernitás milyen fontos jelentőséget tulajdonít ennek a tanulási formának. Azonban a szervezeti tanulásnak vannak nyilvánvaló hátulütői is, hiszen a szervezeti rutinok tehetetlenséget idézhetnek elő, illetve lelassíthatják a változást, így annak előnyei mellett hátrányokkal

[1]Beérkezett 2020. október 1. E-mail: `szabo.balazs@pte.hu`.

is számolni kell (Argote és Hora 2017). Tehát kijelentés helyett inkább kérdésként merül fel, hogy a „gyakorlat valóban tökéletesebbé tesz-e?" (Li és Rajagopalan 1998:1519)

Az eddigiek alapján nem meglepő, hogy szervezeti tanulás kapcsán több modell és megállapítás is található a szakirodalomban. Ide sorolhatók többek között (Vörös 2006, 2017) cikkei, valamint Li és Rajagopalan (1998) már említett munkája is. E tanulmányok mindegyikében a termelékenységi tudás kulcstényező.

A termelés és az abból fakadó tapasztalatok szerepe tehát megkerülhetetlen, mégis fogós kérdés annak meghatározása a vállalati vezetők szemében, hogy a termelés milyen mértékben járul hozzá az innovációhoz (Pisano és Shih 2012). Pisano (1994) gyógyszercégek adatait vizsgálva rámutat, hogy a vállalati tanulásnak nincs kizárólagos módja, hanem az egyes tanulási környezetek más-más megközelítéseket igényelhetnek. Sőt a szerző azt is megállapítja, hogy akár egy adott iparágon belül is a tanulás eltérő megközelítésére lehet szükség az egyes vállalatok szintjén.

A vállalati tudás jelentőségére a termelés tekintetében már Arrow (1962) is rámutatott, aki a munkájában vizsgált példák alapján felveti a termelésből jövő tapasztalatnak az akkumulált kibocsátással történő modellezési lehetőségét, bár ezt nem tartja teljes mértékben kielégítőnek.[2] Arrow szóban forgó dolgozata címében megjelenik a csinálva tanulás (*learning-by-doing*) kifejezés, amely a továbbiakban ennek a cikknek is az egyik központi fogalma lesz. A csinálva tanulás, más néven autonóm tanulás kapcsán meg kell említeni Levy (1965), valamint Dutton és Thomas (1984) munkáját, hiszen ők szintén úttörőknek számítanak e tanulási forma népszerűsítésének tekintetében.

Clarke et al. (1982) modellezi a termelési tapasztalat hatását a vállalati költségre. Ennek során a cikk kitér a csinálva tanulás jelenségére, feltételezve, hogy a termelés során szerzett tapasztalat költségcsökkenéshez vezet. A szerzők rámutatnak a költségszerkezet jelentőségére az árdinamika tekintetében, bemutatva, hogy bizonyos típusú költségfüggvény csökkenő, míg egy másik típusú növekvő árdinamikát eredményez. Spence (1981) cikkében egy olyan tanulási görbét vizsgál, amely összekapcsolja a vállalati költséget a kumulált kibocsátással. Rajta lép túl Dorroh et al. (1994), aki nemcsak a kumulált kibocsátást veszi figyelembe modelljében, hanem a termelési folyamat során képződő tudás összességét is. Szemben Spence (1981) volumenalapú tanulásmodelljével, Fine (1986) bevezeti a minőségalapú tanulásmodellt, amelyben a kumulált kibocsátás helyett egyfajta súlyozott kumulált kibocsátás jelenik meg. Így az utóbbi szerző állapotegyenlete ($\dot{z}(t) = q(t)x(t)$) majdnem azonos a mi modellünkben használt állapotegyenlettel ($\dot{z}(t) = a(t)x(p(t), z(t))$). Eltérés azon a ponton van, hogy míg az általa alkalmazott $q(t)$ súlyfüggvény értelemszerűen $[0, 1]$-beli értékeket vesz fel, addig a mi állapotegyenletünkben $a(t)$ tetszőleges valós értéket felvehet.

Pan és Li (2016) a csinálva tanulást egy olyan optimális irányításelméleti modell keretében jelenítik meg, amelyben a folyamat-termék innovációja áll

[2] Arrow a hivatkozott tanulmányban a tanulásból származó tapasztalatot illetően az akkumulált tőkejavakat jobb választásnak véli.

a dinamika fókuszában. E szerzők tanulmánya Vörös (2006) cikkével analóg módon a keresleti függvényben a termékáron kívül a minőséget is figyelembe veszi, azonban egy speciális lineáris keresleti függvénnyel dolgozik, szemben az utóbb említett szerzővel. Megjegyezendő ugyanis, hogy Vörös (2006) munkájában a fajlagos termelési költség alakulása meglehetősen összetett, azt egyebek mellett a kumulált termelékenységi tudás, valamint akkumulált minőségi tudás is magyarázza.

Tanulmányunkban csatlakozni szeretnénk a csinálva tanulás modellezésének meglehetősen gazdag irodalmához. A jelenség modellezését az optimális irányításelmélet keretein belül végezzük el, modellünkben a dinamikus feltétel a termelés függvénye lesz. Ebből a szempontból Spence (1981), Clarke et al. (1982), Fine (1986), Vörös (2006) vagy Vörös (2021) munkáihoz hasonlóan járunk el. Célunk az áralakulás elemzése és az árdinamika vizsgálata egy viszonylag általános modell keretein belül. Ennek a cikknek a szakirodalomhoz való legfontosabb hozzájárulása elsősorban kettő pontban ragadható meg:

1. a tanulási ráta árhatása különféle jól meghatározott feltételrendszerek mellett;
2. az árdinamika alakulása meghatározott körülmények között.

Modellünk lényegét tekintve Fine (1986) által hozott újfajta minőségalapú tanulás ötletének egy kiterjesztett változatát veszi alapul, és szemben például Li és Rajagopalan (1998) vagy Vörös (2021) megközelítésével, *a tanulási rátát nem tekinti időben állandónak, sőt annak előjelét sem rögzíti.* Így reálisabb képet kaphatunk a vizsgált területekről. Végül megjegyezzük, hogy az árdinamika analízise szempontjából egy összetett modellt mutat be Vörös (2019) cikke, amely egyben a jelenlegi modell kiterjesztését illetően ötleteket is szolgáltathat.

2 Az alapmodell felírása

A soron következő modellben $x(p, z) \geq 0$ és $c(z) > 0$ függvények játsszák a központi szerepet. Az első jelöli az egységártól (p) és a kumulált termelési tapasztalattól (z) függő termelési volument, míg a második – a kumulált termelési tapasztalattól függő – a fajlagos termelési költséget. E függvények tekintetében az alábbi kikötésekkel élünk:

1. $x_p(p, z) < 0$, tehát a növekvő termékár csökkenő keresletet, így csökkenő volument eredményez;
2. $x_z(p, z) \geq 0$, tehát a kumulált termelési tapasztalat növekedése nem eredményezi a kibocsátás csökkenését;
3. $x_{pp}(p, z) \geq 0$, vagyis a termelés volumene konvex a termék egységára szempontjából;
4. $x_{pz}(p, z)$ derivált előjele nem rögzített;

5. $c(z) > 0$ és $c_z(z) \leq 0$, azaz a termelési tapasztalat növekedésével a fajlagos költség nem növekszik.

Az első pont alapján kimondhatjuk, hogy az árnövekedés csökkenő termelést eredményez, ami esetünkben egyenértékű a volumencsökkenéssel, hiszen modellünkben a vállalat ismeri a keresletet, és termelését ahhoz igazítja. A második pontban megfogalmazott tulajdonsággal azt feltételezzük, hogy a termelésből származó tapasztalat lecsapódhat a termék minőségében, amely azt a fogyasztók szemében vonzóbbá teszi (Vörös 2006, 2017). A termelési tapasztalatból fakadó tudás hatását a termékminőségre szépen szemlélteti Li és Rajagopalan (1998:1521) cikkének 1. ábrája. Vagyis a növekvő termelésből származó tapasztalat végső soron nem vezet keresletcsökkenéshez (vö. Pan és Li 2016). A harmadik pont szerint a termelési volumen az ár szerint gyengén konvex. Gyengén konvex keresleti függvényre jó példa az termékárban lineáris keresleti függvény, vagy negatív kitevőjű hatványfüggvénnyel arányos keresleti függvény (lásd Spence 1981). A keresztthatásról viszont nem tudunk semmit (negyedik pont). Végül az utolsó pont arra világít rá, hogy a kumulált termelési tapasztalat növekedése a fajlagos költség növekedését sosem vonja maga után.

Vegyük a $[0, \tau]$ vagy $[0, \tau)$ intervallumot, attól függően, hogy $\tau = T > 0$ vagy $\tau = \infty$. Tesszük ezt azért, mert a problémát véges és végtelen horizonton is meg szeretnénk fogalmazni, illetve vizsgálni. Adott ezen intervallumok valamelyikén az $a(t)$ függvény, úgynevezett tanulási ráta. Jelölje továbbá $r \geq 0$ a diszkontrátát. Ezután keressük egy adott $p(t) \geq 0$ függvényhez azt a $z(t)$ differenciálható függvényt, amelyre

$$\dot{z}(t) = a(t)x(p(t), z(t)) \quad \text{és} \quad z(0) = z_0 > 0 \tag{1}$$

teljesül, és a vállalat profitjának diszkontált jelenértéke maximális:[3]

$$\max_{p(t)\geq 0} \int_0^\tau e^{-rt}(p(t) - c(z(t)))x(p(t), z(t))\, dt\,. \tag{2}$$

Az eddigiekből világos, hogy a vizsgált problémában az ár a döntési, míg a kumulált termelési tapasztalat az állapotváltozó.

Ahogy azt a bevezetőben említettük, az $a(t)$ függvény előjelével kapcsolatban nem tételezünk fel semmiféle megszorítást. Ennek a lényegi mondanivalója, hogy az olyan helyzetek mellett, amelyekben a vállalat termelési tapasztalata tudásnövelő (még ha változó hatékonysággal is), figyelembe veszünk olyan szituációkat is, amikor a vállalatnál tudáserózió jelenik meg. Tehát előállhat olyan helyzet, hogy $a(t) < 0$ teljesül a vállalat egy bizonyos életszakaszában. Az úgynevezett felejtés jelenségével az irodalomban több tanulmány is foglalkozik, példának okáért Benkard (2000) vagy Besanko et al. (2010). Megjegyzendő, hogy bármilyen legyen is a tanulási ráta előjele, $\dot{z}(t)$ előjele azzal mindig megegyezik.

[3] A különbségeket illetően vö. Vörös (2021) cikkével, akinél a tanulási ráta egy nemnegatív konstans, illetve nála a volumen a döntési változó.

Az optimális irányításelmélet módszertanát alkalmazva (vö. Kirk 1970, Seierstad és Sydsæter 1987, Dixit 1990, Léonard és Ngo 1998/1992), az optimális megoldás megkeresése a jelenértékű Hamilton-függvény segítségével történhet.

$$H(p,z,\lambda,t) = e^{-rt}(p - c(z))x(p,z) + \lambda a(t)x(p,z)\,. \tag{3}$$

Az optimalitás szükséges feltételei rendre az állapotegyenlet a kezdeti feltétellel:

$$\dot{z}(t) = a(t)x(p(t),z(t))\,, \quad \text{és} \quad z(0) = z_0 > 0\,, \tag{H1}$$

az optimalitási feltétel:

$$\begin{aligned} H_p = e^{-rt}[x(p(t),z(t)) + (p(t) - c(z(t)))x_p(p(t),z(t))] +& \\ + \lambda(t)a(t)x_p(p(t),z(t)) = 0\,,& \end{aligned} \tag{H2}$$

valamint a szorzóegyenlet a transzverzalitási feltétellel:

$$\begin{aligned} -\dot{\lambda}(t) = H_z = e^{-rt}[(p(t) - c(z(t)))x_z(p(t),z(t)) -& \\ - c_z(z(t))x(p(t),z(t))] + \lambda(t)a(t)x_z(p(t),z(t))\,,& \end{aligned} \tag{H3}$$

$$\lambda(T) = 0, \text{ ha } \tau = T\,, \quad \text{és} \quad \lim_{t\to\infty} \lambda(t) = 0, \text{ ha } \tau = \infty\,. \tag{H4}$$

A másodrendű elégséges feltétel pedig:

$$\begin{aligned} H_{pp} = e^{-rt}[2x_p(p(t),z(t)) + (p(t) - c(z(t)))x_{pp}(p(t),z(t))] +& \\ + \lambda(t)a(t)x_{pp}(p(t),z(t)) \le 0\,.& \end{aligned} \tag{5}$$

Megjegyezzük, hogy ha $x(p,z)$ lineáris p-ben, akkor $x_{pp}(p,z) = 0$, azaz $H_{pp} < 0$, hiszen $x_p(p,z) < 0$.

A (H1)–(H4) feltételek következményeinek könnyebb vizsgálhatósága érdekében bevezetjük a következő függvényeket:

$$\varphi(t) = \int_0^t a(s)x_z(p(s),z(s))\,ds\,,$$

$$\psi(t) = -[(p(t) - c(z(t)))x_z(p(t),z(t)) - c_z(z(t))x(p(t),z(t))]\,.$$

Ezek segítségével a szorzóegyenlet a következő lesz:

$$\dot{\lambda}(t) = e^{-rt}\psi(t) - \lambda(t)\dot{\varphi}(t)\,. \tag{H3'}$$

Szorozzuk be mindkét oldalt az $e^{\varphi(t)}$ függvénnyel, utána rendezzük át a kapott egyenletet az alábbiak szerint:

$$e^{\varphi(t)}\dot{\lambda}(t) + e^{\varphi(t)}\dot{\varphi}(t)\lambda(t) = e^{\varphi(t)-rt}\psi(t)\,.$$

Az egyenlet bal oldala deriváltalakban is felírható, ahol A egy tetszőleges konstans:

$$\frac{d}{dt}\Big(e^{\varphi(t)}\lambda(t) + A\Big) = e^{\varphi(t)-rt}\psi(t)\,. \tag{6}$$

Ebből következik, hogy

$$e^{\varphi(t)}\lambda(t) + A = \int_0^t e^{\varphi(s)-rs}\psi(s)\,ds\,. \tag{7}$$

A transzverzalitási feltétel miatt igaz, hogy

$$A = \int_0^T e^{\varphi(s)-rs}\psi(s)\,ds\,,$$

$$e^{\varphi(t)}\lambda(t) = -\int_t^T e^{\varphi(s)-rs}\psi(s)\,ds\,.$$

Ebből pedig az árnyékár jelenértékére azt kapjuk, hogy

$$\lambda(t) = -e^{-\varphi(t)}\int_t^T e^{\varphi(s)-rs}\psi(s)\,ds\,. \tag{8}$$

Mielőtt továbbmegyünk, az alábbi megjegyzéseket tesszük:

1. A (8) egyenletből következik, hogy ha $\psi(t) \leq 0$ a teljes időhorizonton, akkor $\lambda(t) \geq 0$ minden szóba jövő t esetén. Azonban, ha $\psi(t) < 0$ a teljes időhorizonton, akkor $\lambda(t)$ esetén szintén a szigorú egyenlőtlenség teljesül.

2. Mivel $\dot{\varphi}(t) = a(t)x_z(p(t), z(t))$ és feltevés szerint $x_z(p(t), z(t)) \geq 0$ a teljes időhorizonton, ezért ha $a(t) \geq 0$, akkor $\dot{\varphi}(t) \geq 0$ minden szóba jövő t-re, következésképpen $\varphi(t)$ nem csökkenő. Viszont $\varphi(0) = 0$ miatt $\varphi(t) \geq 0$. Hasonlóan, ha $a(t) < 0$ minden lehetséges t esetén, akkor $\varphi(t) \leq 0$ a teljes időhorizonton.

3. Adott t-re $a(t)$ és $\dot{\varphi}(t)$ előjele azonos, tehát $a(t)\dot{\varphi}(t) \geq 0$.

4. Ha $\psi(t) \leq 0$ a vizsgált periódusban, akkor (8) alapján $\lambda(t) \geq 0$ minden t-re. Ha $a(t) \geq 0$ a teljes időhorizonton, akkor $\dot{\varphi}(t) \geq 0$, és (H3') következtében λ időben nem növekvő függvény. Azonban, ha mindkét említett függvény esetén a szigorú egyenlőtlenség teljesül, akkor λ időben csökkenő függvény.

Ezek a következmények összhangban vannak Vörös (2021) speciálisabb modelljének bizonyos konzekvenciáival.

1. Tétel. *Ha $p(t) \geq c(z(t))$ a teljes időhorizonton, akkor $\lambda(t) \geq 0$ tetszőleges t-re.*

Bizonyítás. A tétel feltételei mellett $\psi(t) \leq 0$ a teljes időhorizonton, ezért a (8) egyenlet figyelembevételével adódik az állítás. □

1. Következmény. *A tétel konklúziója nem függ a tanulási ráta előjelétől, valamint abszolút nagyságától. Tehát függetlenül attól, hogy a vállalat tanul vagy felejt, a fenti feltételek teljesülése esetén az árnyékár jelenértéke biztosan nemnegatív a tervezési periódusban.*

2. Tétel. *Ha minden t-re teljesül, hogy $\lambda(t) \geq 0$ és $a(t) < 0$, akkor $p(t) > 0$ is igaz a teljes időhorizonton.*

Bizonyítás. Fejezzük ki a (H2) optimalitási feltételből $p(t)$ árat:

$$p(t) = c(z(t)) - \frac{x(p(t), z(t))}{x_p(p(t), z(t))} - e^{rt}\lambda(t)a(t), \tag{9}$$

hiszen $x_p(p, z) < 0$. Ebből következik, hogy ha $\lambda(t) \geq 0$ és $a(t) < 0$ a teljes időhorizonton, akkor (9) jobb oldala pozitív, tehát $p(t) > 0$ tetszőleges t esetén. □

2. Következmény. *Vegyük észre, hogy az iménti bizonyítás nem igényeli annak feltételezését, hogy $p(t) \geq c(z(t))$ igaz legyen minden időpillanatban. A $\lambda(t) \geq 0$ egyenlőtlenség ugyanis úgy is teljesülhet minden t-re, hogy $\psi(t)$ pozitív értékeket is felvesz a vizsgált időhorizonton. Vagyis akár az is előfordulhat, hogy a vállalat úgy tud optimális árat megállapítani, hogy egy bizonyos életszakaszban veszteséges.*

A fenti, 4. megjegyzés első felénél általánosabb eredményt fogunk igazolni a következő tételben. Be fogjuk látni, hogy függetlenül az $a(t)$ tanulási ráta és a $\psi(t)$ függvény előjelétől, λ árnyékár jelenértéke sosem lehet időben növekvő függvény.

3. Tétel. *A* (H2) *és* (H3) *feltételek alapján belátható, hogy*

$$e^{-rt}\big[x_z(p(t), z(t)) + x_p(p(t), z(t))c_z(z(t))\big]x(p(t), z(t)) = x_p(p(t), z(t))\dot{\lambda}(t) \tag{10}$$

teljesül a vizsgált időhorizonton. Ezenkívül a λ jelenértékű árnyékár időben nem növekvő dinamikájú.

Bizonyítás. A szóban forgó (H2) optimalitási feltétel és (H3) szorzóegyenlet segítségével számítsuk ki a $x_z(p(t), z(t))H_p - x_p(p(t), z(t))H_z$ kifejezést. Egyrészt

$$x_z(p(t), z(t))H_p - x_p(p(t), z(t))H_z =$$
$$e^{-rt}(x_z(p(t), z(t)) + x_p(p(t), z(t))c_z(z(t)))x(p(t), z(t)),$$

másrészt pedig

$$x_z(p(t), z(t))H_p - x_p(p(t), z(t))H_z = x_p(p(t), z(t))\dot{\lambda}(t),$$

mivel $H_p = 0$ és $H_z = -\dot{\lambda}(t)$. Ebből rögtön következik a (10) egyenlet. Figyelembe véve az $x_p(p, z) < 0$, $x_z(p, z) \geq 0$, $c_z(z) \leq 0$ és $x(p, z) \geq 0$ függvénytulajdonságokat, (10) bal oldala nemnegatív. Ez viszont azt jelenti, hogy (10) jobb oldala is nemnegatív kell, hogy legyen. Utóbbi pedig pontosan akkor teljesül, ha $\dot{\lambda}(t) \leq 0$ a teljes időhorizonton. Vagyis az árnyékár jelenértéke időben nem növekvő dinamikájú. □

A tétel kapcsán a következő megjegyzéseket tesszük:

1. Ha $x(p,z) > 0$ igaz (vagyis sosincs üzemszünet), illetve $c_z < 0$ is teljesül (vagyis a fajlagos termelési költség nem állandó), akkor λ időben szigorúan csökkenő.
2. Ha $x(p,z) > 0$ és $x_z(p,z) > 0$ teljesül, viszont $c_z \leq 0$, akkor az árnyékár jelenértéke időben úgyszintén szigorúan csökken.
3. Ha $x_z(p,z) = c_z = 0$, akkor λ állandó a teljes időhorizonton.

Gondolatmenetünk folytatásaként rendezzük át a (H2) optimalitási feltételt:

$$-x(p(t),z(t)) = \big[p(t) - c(z(t)) + e^{rt}\lambda(t)a(t)\big]x_p(p(t),z(t))\,.$$

Deriváljuk mindkét oldalt t-szerint, felhasználva a többváltozós függvények deriválására érvényes láncszabályt:

$$\begin{aligned}-x_p(p(t),z(t))\dot{p}(t) - x_z(p(t),z(t))\dot{z}(t) = \big[\dot{p}(t) - c_z(z(t))\dot{z}(t) + \\ + re^{rt}\lambda(t)a(t) + e^{rt}\dot{\lambda}(t)a(t) + e^{rt}\lambda(t)\dot{a}(t)\big]x_p(p(t),z(t)) + \\ + \big[p(t) - c(z(t)) + e^{rt}\lambda(t)a(t)\big]\big[x_{pp}(p(t),z(t))\dot{p}(t) + x_{pz}(p(t),z(t))\dot{z}(t)\big]\,.\end{aligned} \tag{11}$$

4. Tétel. *Tegyük fel, hogy $r = 0$, $x_{pz}(p,z) = 0$, $H_{pp} < 0$, $c(z) = c > 0$, valamint $p(t) \geq c$ a teljes időhorizonton. Ekkor igazak a következő állítások tetszőleges t-re:*

(i) ha $a(t) \geq 0$ és $\dot{a}(t) \leq 0$, akkor $\dot{p}(t) \geq 0$,
(ii) ha $a(t) > 0$ és $\dot{a}(t) < 0$, $x(p,z) > 0$ és $x_z(p,z) > 0$, akkor $\dot{p}(t) > 0$,
(iii) ha $a(t) \leq 0$ és $\dot{a}(t) \geq 0$, akkor $\dot{p}(t) \leq 0$,
(iv) ha $a(t) < 0$ és $\dot{a}(t) \geq 0$, $x(p,z) > 0$ és $x_z(p,z) > 0$, akkor $\dot{p}(t) < 0$.

Bizonyítás. Figyelembe véve a tétel feltételeit, (11) a következő egyenletre egyszerűsíthető:

$$\begin{aligned}-x_p(p(t),z(t))\dot{p}(t) - x_z(p(t),z(t))\dot{z}(t) = \big[\dot{p}(t) + \dot{\lambda}(t)a(t) + \lambda(t)\dot{a}(t)\big] \times \\ \times x_p(p(t),z(t)) + \big[p(t) - c(z(t)) + \lambda(t)a(t)\big]x_{pp}(p(t),z(t))\dot{p}(t)\,.\end{aligned}$$

Ezt az egyenletet átrendezve:

$$-H_{pp}\dot{p}(t) = \big[\dot{\lambda}(t)a(t) + \lambda(t)\dot{a}(t)\big]x_p(p(t),z(t)) + x_z(p(t),z(t))\dot{z}(t)\,, \tag{12}$$

hiszen, ha $r = 0$, akkor

$$H_{pp} = 2x_p(p(t),z(t)) + \big[p(t) - c(z(t)) + \lambda(t)a(t)\big]x_{pp}(p(t),z(t))\,.$$

Ezek után $\dot{p}(t)$-t kifejezve az alábbit kapjuk:

$$\dot{p}(t) = -\frac{\big[\dot{\lambda}(t)a(t) + \lambda(t)\dot{a}(t)\big]x_p(p(t),z(t))}{H_{pp}} + \frac{x_z(p(t),z(t))\dot{z}(t)}{H_{pp}}\,,$$

ahol $x_p(p,z)/H_{pp} > 0$ és $x_z(p,z)/H_{pp} \leq 0$. Mivel a $p(t) \geq c$ egyenlőtlenség igaz minden lehetséges t-re, ezért, amint fentebb láttuk, következik, hogy

$\lambda(t) \geq 0$ a teljes időhorizonton (lásd 1. Tétel). A korábbiakból azt is tudjuk, hogy $\dot{\lambda}(t) \leq 0$ minden lehetséges t-re (lásd 3. Tétel).

Tehát abban az esetben, ha $a(t) \geq 0$ és $\dot{a}(t) \leq 0$ a teljes időhorizonton, akkor a fenti egyenlet jobb oldalán álló kifejezés mindkét tagja nemnegatív, tehát az ár időben nem csökkenő dinamikájú. Ha azonban azt feltételezzük, hogy $a(t) > 0$ és $\dot{a}(t) < 0$, $x(p,z) > 0$ és $x_z(p,z) > 0$ teljesül minden szóba jövő t-re, akkor az ár időben szigorúan növekvő dinamikájú, hiszen a jobb oldal második tagja mindenképpen pozitív.

Másrészt, ha $a(t) \leq 0$ és $\dot{a}(t) \geq 0$ minden lehetséges t esetén, akkor a fenti kifejezés jobb oldalán álló mindkét tag nempozitív, vagyis az ár időben nem növekvő dinamikájú. Ha viszont azt tesszük fel, hogy $a(t) < 0$ és $\dot{a}(t) \geq 0$, $x(p,z) > 0$ és $x_z(p,z) > 0$ teljesül a vizsgált időhorizonton, akkor az ár időben szigorúan csökkenő dinamikájú, mivel a jobb oldal második tagja mindenképpen negatív. □

5. Tétel. *Tegyük fel, hogy $x(p,z)$ kétszer folytonosan differenciálható, $x_z(p,z) = 0$ és $p(t) \geq c(z(t))$ teljesül a vizsgált időhorizonton. Ekkor, ha $a(t), \dot{a}(t) \geq 0$ minden lehetséges t-re, akkor az ár időben nem növekvő dinamikájú. Azonban, ha $a(t), \dot{a}(t) \leq 0$ a teljes periódus során, akkor az ár időben nem csökkenő dinamikájú.*

Bizonyítás. Induljunk ki a (11) egyenletből, és rendezzük át azt az alábbi módon:

$$\begin{aligned}
&-[2x_p(p(t),z(t)) + (p(t) - c(z(t)) + e^{rt}\lambda(t)a(t))x_{pp}(p(t),z(t))]\dot{p}(t) = \\
&= (-c_z(z(t))\dot{z}(t) + re^{rt}\lambda(t)a(t) + e^{rt}\dot{\lambda}(t)a(t) + e^{rt}\lambda(t)\dot{a}(t))x_p(p(t),z(t)) + \\
&\quad + (p(t) - c(z(t)) + e^{rt}\lambda(t)a(t))x_{pz}(p(t),z(t))\dot{z}(t) + x_z(p(t),z(t))\dot{z}(t)\,.
\end{aligned} \tag{13}$$

Felhasználva, hogy

$$e^{rt}H_{pp} = 2x_p(p(t),z(t)) + (p(t) - c(z(t)) + e^{rt}\lambda(t)a(t))x_{pp}(p(t),z(t))\,,$$

$x_z(p(t),z(t))\dot{z}(t) = \dot{\varphi}(t)x(p(t),z(t))$, továbbá

$$\begin{aligned}
&-c_z(z(t))\dot{z}(t) + e^{rt}\dot{\lambda}(t)a(t) = -c_z(z(t))\dot{z}(t) + a(t)\psi(t) - e^{rt}\lambda(t)\dot{\varphi}(t)a(t) = \\
&= -c_z(z(t))\dot{z}(t) - a(t)[(p(t) - c(z(t)))x_z(p(t),z(t)) - c_z(z(t))x(p(t),z(t))] - \\
&\quad - e^{rt}\lambda(t)\dot{\varphi}(t)a(t) = a(t)(p(t) - c(z(t)))x_z(p(t),z(t)) - e^{rt}\lambda(t)a(t)\dot{\varphi}(t)\,,
\end{aligned} \tag{14}$$

a (H1), (H3') egyenlet, illetve $\varphi(t)$ és $\psi(t)$ definíciója miatt a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}
&-e^{rt}H_{pp}\dot{p}(t) = e^{rt}\lambda(t)[(r - \dot{\varphi}(t))a(t) + \dot{a}(t)]x_p(p(t),z(t)) + \\
&\quad + (p(t) - c(z(t)) + e^{rt}\lambda(t)a(t))x_{pz}(p(t),z(t))\dot{z}(t) + \dot{\varphi}(t)x(p(t),z(t)) + \\
&\quad + a(t)(p(t) - c(z(t)))x_z(p(t),z(t))x_p(p(t),z(t))\,.
\end{aligned} \tag{15}$$

Mivel feltettük, hogy $x(p,z)$ kétszer folytonosan differenciálható és $x_z(p,z) = 0$, emiatt $x_{zp}(p,z) = x_{pz}(p,z) = 0$. Tehát az iménti egyenlet egyszerűbb alakra hozható:

$$-\,e^{rt}H_{pp}\dot{p}(t) = e^{rt}\lambda(t)(ra(t) + \dot{a}(t))x_p(p(t),z(t))\,. \tag{16}$$

Ebből fejezzük ki $\dot{p}(t)$-t:

$$\dot{p}(t) = -\frac{\lambda(t)(ra(t) + \dot{a}(t))x_p(p(t), z(t))}{H_{pp}}. \tag{17}$$

Felhasználva, hogy a $p(t) - c(z(t))$ árrés nemnegatív a vizsgált időszakban, $\lambda(t) \geq 0$ az összes lehetséges t-re (1. Tétel). Ezért, ha $a(t), \dot{a}(t) \geq 0$ a vizsgált időhorizonton, akkor az ár időben nem növekvő dinamikájú. Ellenben, ha $a(t), \dot{a}(t) \leq 0$ minden szóba jövő t-re, akkor az ár időben nem csökkenő dinamikájú. □

A következő megjegyzéseket tesszük a tételt illetően:

1. Ha az árrés szigorúan pozitív, továbbá $ra(t) > 0$ vagy $\dot{a}(t) > 0$ teljesül minden lehetséges t-re, akkor az ár időben csökkenő dinamikájú.
2. Ha az árrés szigorúan pozitív, továbbá $ra(t) < 0$ vagy $\dot{a}(t) < 0$ teljesül a vizsgált időhorizonton, akkor az ár időben növekvő dinamikájú.

Vizsgáljuk meg azt a speciális esetet, amikor a $p(t) = p$ termékár és az $a(t) = a$ tanulási ráta időben állandó, valamint $\tau = T$. Tegyük fel, hogy $x(p) = d - p$, valamint $d > p$. Legyen $r = 0$ és $c(z) = Cz^{-\beta}$ alakú, ahol $C > 0$ és $\beta \geq 1$.[4] Az (1) egyenletből integrálás után $z(t)$ kifejezhető:

$$z(t) = 1 + \int_0^t a(d - p)\, ds\,,$$

feltéve, hogy $z_0 = 1$. Mivel $\int_0^t a(d-p)ds = a(d-p)t$, tehát

$$z(t) = 1 + a(d - p)t\,.$$

Ha $r = 0$, akkor a (H2) egyenlet a következő lesz:

$$H_p = c(z(t)) + d - 2p - \lambda(t)a = 0\,.$$

Innen a termékár egyszerűen

$$p = \frac{c(z(t)) + d - \lambda(t)a}{2}\,. \tag{18}$$

A következő lépésben a (8) egyenletbe való helyettesítés után meghatározzuk $\lambda(t)$ értékét. Mivel $x_z(p, z) = 0$, emiatt $\varphi(t) = 0$ minden t-re, továbbá $\psi(t) = c_z(z(t))(d - p)$. Tehát

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= -\int_t^T c_z(z(s))(d-p)\, ds = -(d-p)\int_t^T -\beta C[1 + a(d-p)s]^{-\beta-1}\, ds = \\ &= \beta(d-p)C\int_t^T [1 + a(d-p)s]^{-(\beta+1)}\, ds = \\ &= \frac{C}{a}[1 + a(d-p)t]^{-\beta} - \frac{C}{a}[1 + a(d-p)T]^{-\beta} = \frac{c(z(t)) - c(z(T))}{a}\,.\end{aligned}$$

[4]E speciális típusú költségfüggvény kapcsán lásd például Bernstein és Kök (2009) vagy Vörös (2013).

Következésképpen ki tudjuk küszöbölni $\lambda(t)$-t a (18) egyenletből, mivel $c(z(t)) - \lambda(t)a = c(z(T))$. Így eljutunk a

$$p = \frac{d + C[1 + (d-p)T]^{-\beta}}{2} \tag{19}$$

kifejezéshez. Ennek az implicit egyenletnek biztosan van megoldása például akkor, ha a C paraméter kellően alacsony. Abban a szélsőséges esetben pedig, ha C zérus, $p = d/2$. Vegyük azt is észre, hogy a fenti formula nem függ a tanulási rátától, tehát ebben a speciális esetben lényegtelen annak abszolút nagysága vagy előjele.

Legyen $\beta = 1$. Ekkor a (19) egyenletet átrendezve, a megfelelő tagokat összevonva a következőt kapjuk:

$$2Tp^2 - (2 + 3dT)p + d(1 + dT) + C = 0\,. \tag{20}$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletét használva:

$$p = \frac{2 + 3dT \pm \sqrt{(2 + 3dT)^2 - 8T[d(1 + dT) + C]}}{4T}\,. \tag{21}$$

Megoldás létezéséhez szükséges feltenni, hogy $(2+3dT)^2 \geq 8T[d(1+dT)+C]$. Ennek segítségével felső becslést adhatunk a $C > 0$ fajlagos termelési költségre $t = 0$ időpontban: $1/(2T) + d(1 + dT/4)/2 \geq C$. Ha az időhorizont elegendően hosszú, akkor adott C értékre biztosan teljesül az egyenlőtlenség.

1. Példa. Legyen $d = 10$, $C = 1$, $T = 4$. A lehetséges optimális árak négy tizedesjegyre kerekítve 0,8947 vagy 14,3553. Ezekből a potenciális megoldásokból csak az előbbi lesz megfelelő, hiszen annál $v = 9{,}1053 > 0$, míg az utóbbinál $v = -4{,}3553 < 0$. A volumen azonban nem lehet negatív.

3 Összegzés

A csinálva tanulás jelentőségét nem szabad alábecsülni. Elsősorban erre szerettünk volna rámutatni cikkünkben, ezzel tovább bővítve a szakirodalom eddigi eredményeit. Tettük ezt egy viszonylag tömör, mégis általános modell keretein belül.

Megmutattuk, hogy ha a vállalat a teljes időhorizonton képes legalább akkora egységárat szabni, mint a fajlagos termelési költség nagysága, akkor az árnyékár jelenértéke feltétlenül nemnegatív. Ez az eredmény független a tanulási ráta előjelétől, illetve annak abszolút nagyságától. Ha ezen túlmenve feltételezzük, hogy $a(t) \geq 0$ minden t-re, akkor az árnyékár jelenértékének dinamikájáról is tudunk mit mondani, nevezetesen, hogy az időben csökkenő függvény. Ezután beláttuk, hogy a teljes tervezési periódusban nemnegatív jelenértékű árnyékárat és negatív tanulási rátát feltételezve a termékár végig pozitív lesz. Ez a megállapítás amiatt fontos, mert nem zárja ki, hogy optimális termékárat akkor is lehetséges szabni, ha a vállalatnak vannak veszteséges időszakai. Megmutattuk továbbá, hogy az árnyékár jelenértéke időben mindig nemnövekvő, valamint tisztáztuk a szigorú csökkenés feltételeit is.

Gondolatmenetünk második nagyobb egysége az árdinamikát helyezi fókuszba. Itt több eredményünk született. Ezek a megállapítások azért lehetnek fontosnak, mert az árdinamikát felejtés esetén is vizsgálják, rámutatva arra, hogy az utóbbi jelenléte különböző kontextusokban más-más kimenetelre vezet az időbeli lefutását illetően. Elsőként zérus diszkontráta, $x_{pz}(p,z) = 0$, $H_{pp} < 0$, konstans fajlagos termelési költség és nemnegatív árrés mellett megmutattuk, hogy az ár időben nem csökken, ha $a(t) \geq 0$, $\dot{a}(t) \leq 0$, valamint időben nem növekszik, ha $a(t) \leq 0$, $\dot{a}(t) \geq 0$ a vizsgált időhorizonton. Rámutattunk arra is, hogy milyen megszorítások mellett teljesül az árak szigorú időbeli növekedése, továbbá szigorú időbeli csökkenése. Azon körülmények között, ha a diszkontráta különböző lehet zérustól, $x(p,z)$ nem függ a z állapotváltozótól és az árrés nemnegatív, megmutattuk, hogy ha a tanulási ráta és annak dinamikája nemnegatív, akkor az ár időben nem növekszik, ellenben, ha a tanulási ráta és annak dinamikája nempozitív, akkor az ár időben nem csökken. Az utóbbi eredmény kapcsán tisztáztuk azt is, hogy mikor lehetséges az árdinamika vonatkozásában szigorú csökkenés vagy növekedés.

Végül egy további speciális esetet vizsgáltunk, amelyben feltettük, hogy $\dot{p}(t) = \dot{a}(t) = 0$ minden t-re. Konkrét fajlagos költség mellett implicit módon meghatároztuk az ár nagyságát, amellyel kapcsolatosan láttuk, hogy az nem függ a tanulási ráta előjelétől, sem annak abszolút nagyságától. A fajlagos költséget tovább specifikálva explicit képletet kaptunk a termékárra, majd konkrét paraméterértékek mellett egy numerikus példát is bemutattunk.

A tanulmányban elemzett téma további lehetőségeket rejt magában, amelyek közül kettőt megemlítünk. Jövőbeli kutatások keretén belül érdemes lenne foglalkozni olyan modellel, amelyben a tanulási ráta endogén változó. Tehát felvethető az a kérdés, hogy a vállalat milyen döntési változón keresztül képes e rátára hatást gyakorolni. Ezenkívül érdekes lenne megvizsgálni annak a következményeit, ha a $\dot{z}(t) = a(t)x(p(t), z(t))$ dinamikus feltétel helyett valami általánosabb $\dot{z}(t) = f(a(t), x(p(t), z(t)))$ alakot tekintünk.[5] Egy további kiterjesztési lehetőséget kapunk, ha olyan modellt vizsgálunk, amelyben a csinálva tanulás mellett a megelőző vállalati K+F+I is helyet kap (*learning-before-doing*) (Pisano 1994: 85). Ez a modellkiterjesztés persze nem ismeretlen, hiszen bizonyos formában már jelen van Li és Rajagopalan (1998), Vörös (2006) vagy akár Pan és Li (2016) cikkében is. Ennek ellenére további innovatív modellezési megközelítésre mégis nyílhat lehetőség.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom Vörös professzor úrnak egy olyan szakmai műhely létrehozásáért és irányításáért, amelynek támogatása nélkül a jelenlegi tanulmány nem készülhetett volna el. Szeretném továbbá hálámat kifejezni Komlósi Sándor professzor úrnak segítőkészségéért, módszertani útmutatásaiért és

[5] A $\dot{z}(t) = af(x(t), z(t))$, $f_x(x,z) > 0$ esetet érintőlegesen tárgyalja Vörös (2021), de nála – ahogy cikke során végig – $a \geq 0$ konstans, illetve a volumen a döntési változó.

hasznos tanácsaiért. Nem utolsó sorban pedig ezúton mondok köszönetet tanulmányom bírálóinak szakmai észrevételeikért.

A TKP2020-IKA-08 számú projekt a Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alapból biztosított támogatással, a Tématerületi Kiválósági Program 2020 (2020-4.1.1-TKP2020) pályázati program finanszírozásában valósult meg.

Irodalom

1. Argote, L., Hora, M., 2017. Organizational learning and management of technology. *Production and Operations Management,* 26(4), 579–590.
2. Argote, L., McEvily, B., Reagans, R., 2003. Managing Knowledge in Organizations: An Integrative Framework and Review of Emerging Themes. *Management Science,* 49(4), 571–582.
3. Argote, L., Miron-Spektor, E., 2011. Organizational Learning: From Experience to Knowledge. *Organization Science,* 22(5), 1123–1137.
4. Arrow, K. J., 1962. The Economic Implications of Learning by Doing. *Review of Economic Studies,* 29(3), 155–173.
5. Benkard, C. L., 2000. Learning and Forgetting: The Dynamics of Aircraft Production. *American Economic Review,* 90(4), 1034–1054.
6. Bernstein, F., Kök, A. G., 2009. Dynamic Cost Reduction Through Process Improvement in Assembly Networks. *Management Science,* 55(4), 552–567.
7. Besanko, D., Doraszelski, U., Kryukov, Y., Satterthwaite, M., 2010. Learning-by-Doing, Organizational Forgetting, and Industry Dynamics. *Econometrica,* 78(2), 453–508.
8. Clarke, F. H., Darrough, M. N., Heineke, J. M., 1982. Optimal Pricing Policy in the Presence of Experience Effects. *Journal of Business,* 517–530.
9. Dixit, A. K., 1990. *Optimization in Economic Theory.* 2nd ed. Oxford University Press, New York, NY.
10. Dorroh, J. R., Gulledge, T. R., Womer, N. K., 1994. Investment in knowledge: A generalization of learning by experience. *Management Science 40(8),* 947–958.
11. Dutton, J. M., Thomas, A., 1984. Treating Progress Functions as a Managerial Opportunity. *Academy of Management Review,* 9(2), 235–247.
12. Fine, C. H., 1986. Quality Improvement and Learning in Productive Systems. *Management Science,* 32(10), 1301–1315.
13. Kirk, D. E., 1970. *Optimal Control Theory: An Introduction.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ.
14. Levy, F. K., 1965. Adaptation in the Production Process. *Management Science,* 11(6), B136–B154.
15. Li, G., Rajagopalan, S., 1998. Process Improvement, Quality, and Learning Effects. *Management Science,* 44(11/1), 1517–1532.
16. Léonard, D., Ngo, V. L., 1998/1992. *Optimal control theory and static optimization in economics.* Repr. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
17. Pan, X., Li, S., 2016. Dynamic optimal control of process-product innovation with learning by doing. *European Journal of Operational Research,* 248(1), 136–145.

18. Pisano, G. P., 1994. Knowledge, integration, and the locus of learning: An empirical analysis of process development. *Strategic Management Journal 15(S1),* 85–100.
19. Pisano, G. P., Shih, W. C., 2012. Does America Really Need Manufacturing. *Harvard Business Review 90(3),* 94–102.
20. Seierstad, A., Sydsæter, K., 1987. *Optimal Control Theory with Economic Applications.* North-Holland, Amsterdam, NL.
21. Spence, A. M., 1981. The learning curve and competition. *The Bell Journal of Economics,* 49–70.
22. Vörös, J., 2006. The dynamics of price, quality and productivity improvement decisions. *European Journal of Operational Research,* 170(3), 809–823.
23. Vörös, J., 2013. Multi-period models for analyzing the dynamics of process improvement activities. *European Journal of Operational Research,* 230(3), 615–623.
24. Vörös, J., 2017. A minőség és az ár kapcsolatáról. *Szigma,* 48(3-4), 133–149.
25. Vörös, J., 2019. An analysis of the dynamic price-quality relationship. *European Journal of Operational Research,* 277(3), 1037–1045.
26. Vörös, J., 2021. A termelés dinamikája szervezeti tanulás esetén. *Szigma 52(1),* 5–27.

PRICING AND PRICE DEVELOPMENT IN A DYNAMIC ENVIRONMENT IN CASE OF CORPORATE LEARNING

Routines gained from production experience may play an important role in certain stages of a firm's life. Among the variations of organizational learning, our study focuses on the process of learning by doing (*learning-by-doing*), paying also special attention to organizational forgetting. Despite the fact that many authors have already dealt with this issue in the literature, it is still a rich field that deserves further analysis and exploration, to which we also wish to contribute. For this purpose, we analyze a continuous-time model using optimal control theory. In the model, the unit price of the product ($p \geq 0$) is the decision variable, while the experience of cumulative production (z) is the state variable. Based on the latter, we reach the

$$\dot{z}(t) = a(t)x(p(t), z(t)) \quad \text{and} \quad z(0) = z_0 > 0,$$

state equation of the expression to be optimized:

$$\max_{p(t)\geq 0} \int_0^T e^{-rt}(p(t) - c(z(t)))x(p(t), z(t))dt,$$

where $x(p, z)$ stands for the production volume ($x_p(p, z) < 0$, $x_z(p, z) \geq 0$, $x_{pp}(p, z) \geq 0$), and $c(z)$ denotes the unit cost of production ($c(z) > 0$, $c_z(z) \leq 0$). The learning rate ($a(t)$) is assumed to vary over time, moreover, its value can also be in a negative range. On the one hand, our results point to the relationship between the $p(t) - c(z(t))$ margin and the shadow price's present value ($\lambda(t)$); the relationship between the shadow price's present value, the learning rate and the product price; and the dynamics of the present value of the shadow price.

We show that if a firm is able to charge a unit price at least as large as the unit cost of production over the entire planning horizon, then the present value of the shadow price is necessarily non-negative, irrespective of the sign of the learning rate and its absolute value. In addition, if we assume that $a(t) \geq 0$ holds for every t, then we are also able to make a statement about the dynamics of the shadow price's present value, namely that it is a decreasing function over time. We then prove that by assuming a non-negative present value concerning the shadow price and a negative learning rate over the entire planning horizon, the product price is going to be positive throughout. This finding is important because it does not exclude that it is possible to set an optimal product price even if the company has loss-making periods. We are also going to demonstrate that the shadow price's present value never increases over time, and we will also clarify the conditions for a strict decrease. On the other hand, using special assumptions, we formulate statements about the dynamics of price development, particularly highlighting that these assertions also extend to the case of corporate forgetting. We point out that the evaluation of learning ($a(t) \geq 0$) and forgetting ($a(t) < 0$) in terms of price dynamics may vary depending on specific corporate situations.

These mentioned findings may be important because price dynamics is also analyzed in case of forgetting, pointing out that the presence of the latter in different contexts leads to different outcomes in terms of its dynamics. First, with a zero discount rate, $x_{pz}(p, z) = 0$, $H_{pp} < 0$, a constant unit cost of production and a non-negative margin, we are going to show that regarding the examined planning horizon the price does not decrease over time if $a(t) \geq 0$, $\dot{a}(t) \leq 0$, and does not increase over time if $a(t) \leq 0$, $\dot{a}(t) \geq 0$. We will also point out those constraints under which a strict increase or decrease in prices over time is triggered. In such a context, when the discount rate may differ from zero, $x(p, z)$ does not depend on the state variable z and the margin is non-negative, we are going to show that if the learning rate and its dynamics are non-negative, the price does not increase over time. However, if the learning rate and its dynamics are non-positive, the price will not decrease over time. In connection with the latter result, we will also make it clear when a strict decrease or increase in price dynamics is possible.

Finally, for illustrative purposes, the paper also investigates an additional interesting case (assuming that $p(t) = p$, $a(t) = a$ are both constants over a finite time horizon), as a result of which we calculate the optimal price both implicitly and explicitly. Taking a specific unit cost function, we are going to implicitly determine the price, in relation to which we will see that it neither depends on the sign of the learning rate nor its absolute value. Further specifying the unit cost, we arrive at an explicit formula for the product price. Based on this result, we end our paper with a numerical example.