

KOCKÁZATBECSLŐ MODELLEK VISSZATESZTELÉSE<sup>1</sup>

BUGÁR GYÖNGYI – UZSOKI MÁTÉ  
*Pécsi Tudományegyetem*

A tanulmány célja öt kockázatbecslő modell validitásának értékelése kételemű portfóliók esetében. A téma jelentőségét a bankok kereskedési könyvében szereplő, piaci kockázatnak kitett pozíciók után képzendő szabályozói tőkekövetelmény megállapításának igénye, valamint a belső kockázatmérő modellek tőkepiaci felügyelet általi ellenőrizhetőségének követelménye adja. Valódi tőzsdei adatokon, nevezetesen a FTSE 100 index összetevőin alapuló szimulációkat végeztünk, amelynek során a vizsgált modellek kockázatát a Bázeli III-ban szereplő várható többletveszteség (Expected Shortfall – ES) kockázati mértékkel becsültük. Adataink olyan időszakot ölelnek fel, amely tartalmazza a közelmúltban lezajlott jelzálogpiaci válságot, ezáltal lehetőségünk nyílik arra, hogy az erre kapott eredményeket összevessük a kevésbé „stresszes” periódusokra adódó eredményekkel.

*Kulcsszavak:* kockázati modellek validálása, ES, portfólió, kopula

## 1 Bevezetés

A 2007-ban kirobbant jelzálogpiaci válságot követően a pénzügyi szektorban egyre nagyobb igény mutatkozott arra, hogy a kockázat megítélése „valid” mutatókkal történjen. Ennek kulcsfontosságú szerepe van a bankok kereskedési portfóliója teljesítményének értékelésében.

A közelmúltban bevezetett Bázeli III szabályozás (BCBS, 2016) felülvizsgálta a piaci kockázat kompenzálására képzendő tőketartalék meghatározásának módszertanát, és a bankok által használt belső modellekben a kockázatotott értékről (VaR) a várható többletveszteségre (ES) tért át a piaci kockázat után képzendő tőketartalék meghatározásánál. Az ES kockázati mérték ennek ellenére csak felemás szerepet kapott az új tőkepiaci szabályozásban, ugyanis visszatesztelési célokra – azaz az alkalmazott kockázati modell validálására – a Bázeli Bizottság továbbra is a VaR-t javasolta.

Tanulmányunkban öt különböző modell validálására vállalkozunk, egy Acerbi és Székely (2014) által kifejlesztett visszatesztelési eljárás segítségével. Ezzel kettős célt kívánunk elérni. Egyrészt be kívánjuk mutatni, hogy egy konkrét visszatesztelési eljárás hogyan működik a gyakorlatban. Érdeklődésünk elsősorban arra irányul, hogy a módszer megbízhatóan kimutatja-e a „rossz teljesítményt”, illetve képes-e világosan megkülönböztetni a különféle

---

<sup>1</sup>A kutatást az Innovációs és Technológiai Minisztérium Felsőoktatási Intézményi Kiválósági Programja finanszírozta, a Pécsi Tudományegyetem 4. – A hazai vállalatok szerepének növelése a nemzet újrapiarosításában – tématerületi programja keretében. Beérkezett 2021. január 25. E-mail: [bugar.gyongyi@ktk.pte.hu](mailto:bugar.gyongyi@ktk.pte.hu).

kockázatbecslő modellek által nyújtott eredményeket. Másrészt – a kapott eredményekre alapozva – azonosítani szeretnénk néhány sajátosságot, amelyek segíthetnek jobb kockázatbecslő modellek kialakításában.

Tanulmányunk a következő módon épül fel: először röviden áttekintjük a kockázatbecslő modellek elméleti háttérét. Ezt követően bemutatjuk az alkalmazott szimulációs modellezés részleteit, majd az empirikus elemzés során kapott eredményeket ismertetjük és értékeljük.

## 2 Elméleti háttér

Egy portfólió kockázatának becslése két lépést igényel. Az első a megfelelő kockázati mérték kiválasztását célozza, a második pedig az egyes portfólióelemek közötti statisztikai függőség, azaz a portfóliót alkotó értékpapírok hozama együttmozgásának modellezését szolgálja.

Tudomásunk szerint Markowitz (1952) volt az első, aki a kockázatot, mint döntési paramétert közvetlenül bevonta a portfólió-optimalizálás folyamatába. A portfóliókiválasztási döntést két paraméterre alapozta: a várható hozamra és a hozam varianciájára. Amíg az előzőt az átlagos jövedelmezőség mérésére, addig az utóbbit a kockázat megítélésére használta. Az egyes értékpapírok hozama közötti együttmozgás kifejezésére ugyanakkor a Pearson-féle lineáris korrelációs együtthatót javasolta.

Amint Dowd (2005) megállapította, a valós portfólió-allokációs döntések során két probléma merül fel. Az első, hogy a széles körben használt kockázati mutatók, mint a variancia vagy a VaR, megbízhatatlannak bizonyulnak. A második pedig, hogy a korreláció (variancia-kovariancia) számításán alapuló mértékek nem megfelelőek a függőségi kapcsolatok modellezésére.

A VaR adott konfidenciaszinten és időperiódusra vonatkozóan úgy határozható meg, mint a legnagyobb lehetséges veszteség. A veszteségeloszlás-függvényre ( $F$ ) alapozva, adott  $\alpha$  konfidenciaszinten a VaR a veszteségeloszlás  $\alpha$ -kvantiliseként definiálható (Dowd – Blake, 2006):

$$P(L \leq VaR_\alpha(F)) = \alpha, \quad (1)$$

ahol  $P$  valószínűséget,  $L$  pedig veszteséget jelöl.

Az ES adott  $\alpha$  konfidenciaszinten és időintervallumban úgy értelmezhető, mint a VaR-t meghaladó veszteségek várható értéke:

$$ES_\alpha(F) = E(L \mid L > VaR_\alpha(F)). \quad (2)$$

Az ES kockázati mérték kielégítő megoldást kínál a fent említett első problémára, mivel a legtöbb kockázati mutatónál kedvezőbb elméleti és empirikus tulajdonságokkal rendelkezik. Mindenekelőtt összhangban van a kockázatról alkotott intuitív képpel, mely szerint a kockázat meghatározásánál kizárólag a hozam- vagy veszteségeloszlás kedvezőtlen részét veszi figyelembe. Továbbá eleget tesz az Artzner et al. (1999) által bevezetett koherencia-axiómáknak. A fentiekén túl a VaR értékét meghaladó veszteségeket is figyelembe veszi, amely különös jelentőséggel bír a vastagszélű hozameloszlások esetében. Emellett két kedvező technikai sajátossággal rendelkezik: a konfidencia szintnek

folytonos, a portfólió-súlyoknak pedig konvex függvénye. Az utóbbi tulajdonságnak különösen a portfólió-optimalizálásban van nagy jelentősége.<sup>2</sup>

A függőségi mérték alkalmazásával kapcsolatos kihívásra – ahogy azt Dowd (2005) is kiemelte – a kopulák alkalmazása nyújt megfelelő alternatívát.

A visszatesztelés vagy mintán kívüli elemzés olyan eljárás, amely lehetővé teszi, hogy egy előrejelzési módszer pontosságát múltbeli adatokon értékeljük (McNeil et al. (2015)). A megvalósítás során két, egymást nem átfedő időhorizont használatos. Az egyik a becslési periódus, amely a szóban forgó változó (hozam vagy kockázat) becslésére szolgál. A másik az előrejelzési periódus, amely a változó becslült és valódi (realizált) értékének összehasonlítására használható fel. Elemzésünkben különböző ES-becslő modellek összehasonlítására vállalkozunk, így a vizsgált portfóliókon keletkező tényleges veszteséget a becslült ES-értékkel hasonlítjuk össze.

Vizsztesztelési célra az – Acerbi és Székely (2014) által javasolt – alábbi hibafüggvényt használjuk:

$$Z = \frac{1}{(1 - \alpha)T} \sum_{t=1}^T \frac{X_t I_t}{ES_{\alpha,t}} + 1, \quad (3)$$

ahol  $ES_{\alpha,t}$  a kockázat becslült értéke a  $t$ -edik részperiódusban, a választott  $\alpha$  megbízhatósági szint mellett.  $X_t$  a  $t$ -edik részperiódusban realizált portfólióhozam,  $T$  pedig az az előrejelzési periódus (rendszerint egy év) részperiódusainak száma, amelyre vonatkozóan a vizsgált portfóliók teljesítményét értékeljük.  $I_t$  indikátorváltozó, amely 0 vagy 1 értéket vehet fel.  $I_t = 0$ , amennyiben  $X_t + VaR_{\alpha,t} \geq 0$ , és  $I_t = 1$ , ha  $X_t + VaR_{\alpha,t} < 0$ . Az utóbbi esetben  $-X_t = L_t > VaR_{\alpha,t}$ , azaz a realizált veszteség nagyobb, mint  $VaR_{\alpha,t}$  becslült értéke. Erre az esetre a  $VaR$ -korlát megsértéseként hivatkozhatunk. Ideális esetben, amikor az alkalmazott modell minden részperiódusban pontosan becsli az  $ES$  értékét,  $Z$  értéke nulla.  $Z$  pozitív értéke azt jelzi, hogy a modell túlbecsüli a kockázatot, míg a negatív érték a kockázat alábecslésére utal.

## 3 Szimulációs modellezés

### 3.1 Portfóliókiválasztási modellek

Tanulmányunkban két értékpapírból álló portfóliókat vizsgálunk. Az összehasonlítandó modellekben az egyes összetevők (marginális) hozamának eloszlását két típussal modelleztük: normális eloszlással vagy általánosított Pareto-eloszlással (GPD). Jól ismert, hogy a normális eloszlás egyértelműen jellemezhető két paraméterrel, a várható értékkel és a szórással. A GPD meghatározása ugyanakkor három paramétert igényel: az első ( $\mu$ ) az eloszlás

<sup>2</sup>Amint azt Rockafellar és Uryasev (2000) megmutatták, az ES minimalizálására épülő döntési probléma egy lineáris programozási feladat megoldását igényli. Említésre érdemes, hogy a fenti szerzők az ES helyett a feltételes kockázatot érték elnevezést használták (Conditional Value-at-Risk – CVaR).

helyzetét (lokáció) a második ( $\sigma$ ) a léptékét (skála), a harmadik ( $\xi$ ) pedig az alakját jellemzi.<sup>3</sup> Ez az eloszlástípus különösen hasznosnak bizonyul az eloszlás szélének (azaz a nagy veszteségek) kockázatának modellezésében.

A függőségi struktúra modellezésére kopulákat használtunk. Viszonyítási alapként alkalmaztuk a Gauss-kopulát (a többdimenziós normális eloszlás függőségi struktúrája), amely lényegében a lineáris korrelációs együttható használatával egyenértékű. Ezen kívül két egyparaméteres arkhimédészi kopulát illesztettünk az adatokra: a Clayton- és Gumbel-kopulákat (Nelsen, 2006). Választásunkat az indokolja, hogy ez utóbbi függőségi struktúrák hasznosnak bizonyulnak a portfólióelemeken együttesen bekövetkező nagy veszteségek modellezésében (lásd pl. Dowd (2005)).

A kétdimenziós Clayton- és Gumbel-kopula – rendre – a következő eloszlásfüggvényekkel definiálható (Nelsen, 2006):<sup>4</sup>

$$C_{\theta}(\nu_1, \nu_2) = \max\left\{(\nu_1^{-\theta} + \nu_2^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}, 0\right\}, \quad \text{ahol } \theta \geq -1, \theta \neq 0, \quad (4)$$

$$C_{\theta}(\nu_1, \nu_2) = \exp\left\{-\left[(-\ln \nu_1)^{\theta} + (-\ln \nu_2)^{\theta}\right]^{\frac{1}{\theta}}\right\}, \quad \text{ahol } \theta \geq 1. \quad (5)$$

A fentiekben  $\nu_1$  és  $\nu_2$  standard egyenletes eloszlású valószínűségi változók (azaz amelyek a  $[0, 1]$  intervallumon egyenletes eloszlásúak).

A vizsgált kétféle marginális és háromféle kopula összes lehetséges kombinációjából származó modellek közül ötöt vizsgáltunk.<sup>5</sup> Ezeket az 1. táblázatban foglaltuk össze.

A modell elnevezése	Marginálisok	Kopula
Normális-Gauss	Normális	Gauss / Lineáris korreláció
Normális-Clayton	Normális	Clayton
Normális-Gumbel	Normális	Gumbel
Pareto-Clayton	GPD	Clayton
Pareto-Gumbel	GPD	Gumbel

1. táblázat. Szimulált portfóliókiválasztási modellek

A jövedelmezőség mérésére a várható hozamot, kockázati mértékként pedig az  $ES$ -t használtuk.

### 3.2 A szimuláció folyamata

A Monte Carlo szimuláció végrehajtása előtt elvégeztük a modellekben szereplő paraméterek becslését. Minden egyes mintán kívüli részperiódusra – a

<sup>3</sup>A GPD eloszlásfüggvény az alábbi módon határozható meg (Coles (2001)):

$$F_{(\mu, \sigma, \xi)}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi(x-\mu)}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \text{ha } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right) & \text{ha } \xi = 0 \end{cases}$$

ahol  $x \geq \mu$ , ha  $\xi \geq 0$ , és  $\mu \leq x \leq \mu - \frac{\sigma}{\xi}$ , ha  $\xi < 0$ . A fentiekben  $\mu$ ,  $\sigma$ ,  $\xi$  valós számok,  $\sigma > 0$ .

<sup>4</sup> $\theta$  a kopula paramétere.

<sup>5</sup>A GDP marginálisok és Gauss-kopula párosítást mellőztük.

rendelkezésre álló adatokra támaszkodva – becsültük a normális  $(\mu, \sigma)$  és a Pareto-eloszlás  $(\mu, \sigma, \xi)$  paramétereit. Minden egyes értékpapírpárból álló portfólióra, minden mintán kívüli részperiódusra szintén megbecsültük a választott kopula paraméterét  $(\theta)$ .

A szükséges paraméterek becslését követően Monte Carlo szimulációval hozamokat generáltunk a különböző portfóliókiválasztási modellekre vonatkozóan. Elsőként a standard egyenletes eloszlásra vonatkozó, választott kopulát szimuláltuk, majd a kívánt marginálisokat illesztettük az adott kopulára. A folyamat lépései a következőképpen írhatók le (lásd Bouyé et al. (2000) és Dowd (2005)):

1. Generálunk két, standard egyenletes eloszlású valószínűségi változót:  $\nu_1, \nu_2$ .
2. Legyen  $u_1 = \nu_1$ .
3.  $u_1$  értéke alapján szimuláljuk  $u_2$  értékét a

$$C(u_2 | u_1) = \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1} = \nu_2 \quad (6)$$

feltételes eloszlásra támaszkodva.

4. A (6) egyenletet megoldjuk  $u_2$ -re.
5. Az  $u_i$  ( $i = 1, 2$ ) segítségével generáljuk a kívánt marginálisok egy-egy értékét:

$$F_i^{-1}(u_i) = r_i \quad (i = 1, 2). \quad (7)$$

6. A fentiek alapján egy szimulált portfólióhozam (ahol  $w$  a portfóliósúly):

$$R = wr_1 + (1 - w)r_2. \quad (8)$$

7. Az előző lépéseket ismételve  $m$  számú portfólióhozamhoz jutunk (esetünkben  $m = 10000$ ).
8. A kapott empirikus eloszlásból meghatározható az  $ES$  értéke.

## 4 Eredmények

### 4.1 Adatok és leíró statisztikák

Az empirikus elemzés során 25 két értékpapírból álló portfóliót vizsgáltunk, amelyek összetevőit véletlenszerűen választottuk ki a londoni tőzsdeindex (FTSE 100) értékpapírkosarából. A marginálisok, azaz az egyedi értékpapírok hozameloszlásának és az egyes értékpapírpárok függőségi struktúrájának becslése a fent említett adatbázison történt, a releváns értékpapírok napi záró árfolyamainak felhasználásával, a 2000. január 4. és 2015. december 31. közötti, 16 évet magába foglaló időhorizonton. Az elemzésbe bevont értékpapírokra vonatkozóan napi (százalékos) hozamot számítottunk.

A véletlenszerű kiválasztás során összesen 31 értékpapír került be a vizsgált 25 portfólióba. A 2. táblázat a 2001. január 2. és 2015. december 31. időszak egymást követő ötéves periódusaira vonatkozóan mutatja a számított napi hozamok leíró statisztikáit. Az összes, a táblázatban szereplő átlagos értéken – az utolsó oszlopban feltüntetett korrelációt kivéve – nagy átlagot, azaz a vizsgált ötéves időszakra és valamennyi értékpapírra vonatkozó napi átlagolást kell érteni.<sup>6</sup> A 25 értékpapírpárra vonatkozó átlagos korreláció az ötéves időszakra számított átlagérték. Az átlagos, a minimális és a maximális hozamok százalékban értendőek.

Időinter- vallum	Átlagos hozam (%)	Minimális hozam (%)	Maximális hozam (%)	Átlagos szórás	Átlagos ferdeség	Átlagos csúcsosság	Átlagos korreláció
2001-2005	0,028	-62,97	23,89	0,020	0,113	10,15	0,248
2006-2010	0,034	-66,57	73,24	0,023	-0,192	13,18	0,381
2011-2015	0,029	-22,10	18,43	0,015	0,323	12,43	0,377

2. táblázat. A kételemű portfóliókat alkotó értékpapírok leíró statisztikái a 2001 és 2015 közötti időszak három, egymást követő ötéves periódusában

Nem meglepő, hogy a legszélsőségesebb hozam, szórás és korreláció értékek a 2007-es válságot tartalmazó periódusban adódtak. 2006 és 2010 között az átlagos napi hozam 3,4 bázispont volt, a minimális és maximális hozamok pedig ebben az időszakban -66,57 és 73,24 százalékot tettek ki. Az átlagos napi szórás, csúcsosság és korreláció értékei pedig (rendre) 0,023 (2,3 százalék), 13,18 and 0,381 voltak. Szintén említésre méltó, hogy a válságot tartalmazó középső periódusban az átlagos ferdeségi mutató (-0,192) negatív volt. Minden vizsgált portfólióban szereplő értékpapírra teszteltük a hozamok normalitására vonatkozó hipotézist. Ezt egyetlen értékpapír esetében sem sikerült igazolni (a szokásos 5 százalékos szignifikanciaszinten).

## 4.2 A szimuláció eredményei

Becslési periódusként egy 250 napból álló (gyakorlatilag egy éves) „csúszó ablakot” alkalmaztunk. Miután az első évre vonatkozó napi hozam adatok birtokában az évet követő első napra megbecsültük az  $ES$  értékét, a becslési periódust egy nappal elcsúsztattuk, és az azt követő napra ismét becslünk a kockázat ( $ES$ ) értékét. Ezzel a gördülő horizontos módszerrel minden egyes portfólióra vonatkozóan 3750-3750 becslült  $ES$  értéket kaptunk<sup>7</sup>. A Bázis III szabályozással (BCBS, 2016) összhangban az  $ES$  becslése során 97,5 százalékos konfidencia intervallumot választottunk.

A becslült  $ES$  értékekre alapozva mind a 25 vizsgált portfólióra kiszámítottuk a (3) összefüggésben szereplő  $Z$ -értéket. Az egyes értékpapírok súlyát azonosnak (50 százaléknak) választottuk a portfóliókban,  $Z$  számításában szereplő időhorizontot ( $T$ ) pedig – a fent leírtakkal összhangban – 250 napnak

<sup>6</sup>A vizsgálatban szereplő értékpapírok nagy száma miatt nem mutatunk egyedi értékeket.

<sup>7</sup>Az R statisztikai programcsomagra épülő C#.net alkalmazást használtunk, a szimulációk futtatása pedig az Azure SQL felhasználásával történt.

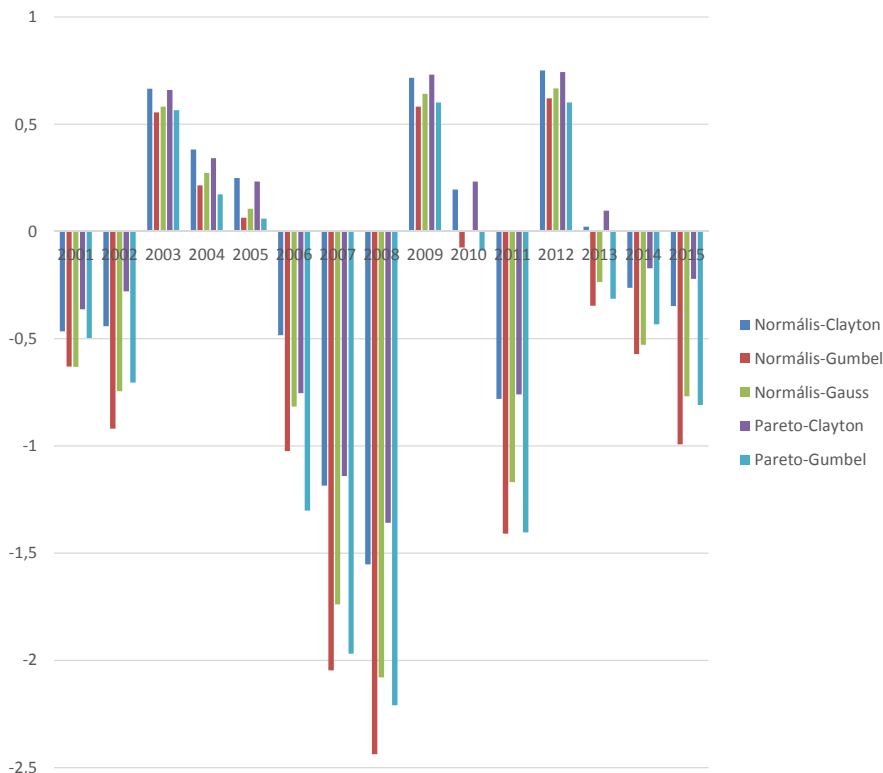
adtuk meg. Ezzel lehetővé vált, hogy a vizsgált öt különböző modell teljesítményét éves alapon vessük össze.

Az 1. ábra a vizsgált 25 portfólió különböző modellek által szolgáltatott átlagos  $Z$  értékét szemlélteti az előrejelzési periódus (2001-2015) egyes éveiben. Levonható az a következtetés, hogy általában a kockázat fölé- vagy alábecsülésének tekintetében egyetértés mutatkozott a modellek között. Ténylegesen csak két olyan év volt (2010 és 2013) amikor két – konkrétan a Clayton-kopulával, mint függőségi struktúrával rendelkező – modell felülbecsülte az  $ES$  értékét, míg az összes többi alábecsülte. Az öt modell közül a Pareto-Clayton mutatta a legjobb teljesítményt, amely a 15 vizsgált év közül 7 esetben (abszolút értékben) a legalacsonyabb  $Z$ -értéket produkálta. Említésre érdemes, hogy ez a modell mutatkozott a legmegbízhatóbbnak azokban az években, amelyekben a kockázat alábecslése volt a jellemző. Ez a hatás 2007-ben és 2008-ban bizonyult a legjelentősebbnek. A modellek rangsorában a Normális-Clayton modell szerezte meg a második helyet, amelyre szintén jellemző volt, hogy azokban az években mutatott különösen jó teljesítményt, amelyekben a kockázat alábecslése volt jellemző. Mindkét említett modell – a többiekkel összehasonlítva – „túl óvatosnak” bizonyult azonban azokban az években, amikor a kockázat fölébecsülésének lehettünk tanúi. A Pareto-Gumbel modell a Normális-Claytonnal nagyjából azonos teljesítményt mutatott, azzal az eltéréssel, hogy azokban az években volt sikeresebb az előzőnél, amikor a kockázat fölébecsülésére mutatkozott tendencia, és kevésbé volt sikeres abban az esetben, amikor a kockázat alábecslése volt jellemző. Az egyes modellek teljesítmény szerinti rangsorában – a Normális-Gausst követően – a Normális-Gumbel modell foglalja el az utolsó helyet.<sup>8</sup>

A 2. ábra a becsült  $ES$  átlagos napi értékét mutatja a különböző modellekre a 2001 és 2015 közötti időszakban. Az egyes évekhez tartozó diszkrét pontokat összekötöttük annak érdekében, hogy a változás tendenciája jobban követhető legyen. Jól látható, hogy a normális marginálisokkal rendelkező modellek esetében az  $ES$  időben jóval stabilabbnak tűnik, és egyúttal alacsonyabb értékeket mutat a Pareto-marginálisokkal rendelkező modellekhez képest. 2002-ben például az átlagos  $ES$  értéke, amely közel napi 30 százalék veszteséget jelzett a Pareto-modellekre, körülbelül hatszor nagyobb volt, mint a normális marginálisokkal rendelkező modellek esetében (5 százalék). A fent említett tényt visszaigazolja a Pareto-marginálisokkal rendelkező modellek jobb teljesítménye (lásd 1. ábra).

---

<sup>8</sup>Amennyiben a vizsgált időszakban mutatott teljesítményük alapján formálisan rangsorolni szeretnénk a modelleket, ezt megtehetjük az átlagos  $Z$  mutató abszolút értéke alapján képzett éves rangszámok (1 a legjobb, 5 a legrosszabb) vizsgált időszakra történő összeadásával. Így a Pareto-Clayton összesített rangszáma 37, a Pareto-Gumbel és a Normális-Clayton modelleké 44, a Normális-Gaussé 47, a Normális-Gumbel pedig 53.



1. ábra. A 25 két értékpapírból álló portfólió átlagos  $Z$  értéke a különböző modellekre a 2001 és 2015 közötti időszakban

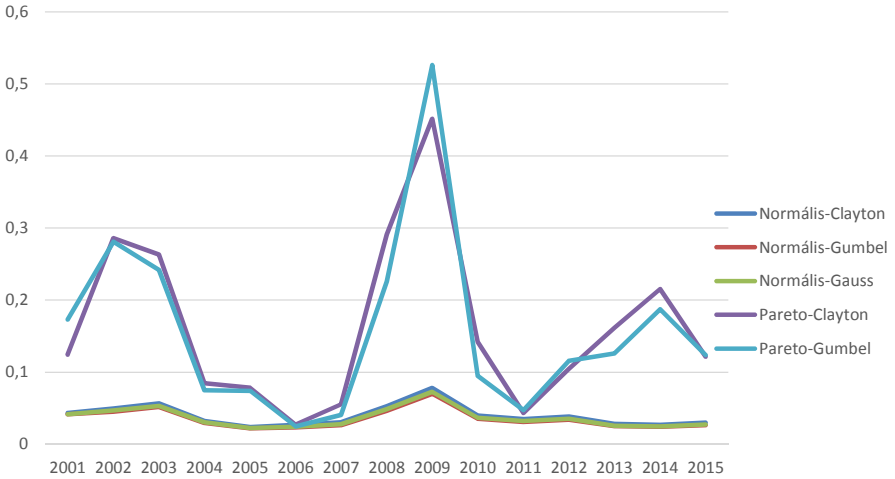
Hasonló „mintát” láthatunk a pénzügyi krízis legkeményebb évében, 2008-ban. Az is megállapítható ugyanakkor, hogy 2009-ben a Pareto-modellek által biztosított – még mindig aránytalanul magas – becsült  $ES$  értékek alapján előírt tőketartalék már nem bizonyult szükségesnek a valódi veszteségek fedezéséhez. Amint azt az 1. ábra világosan mutatja, minden modell túlbecsülte a kockázatot ebben az évben, a túlbecslés mértéke azonban nagyobb volt a Pareto-modellek esetében, mint a normális marginálisokkal rendelkezőknél.

Azt is megvizsgáltuk, hogyan teljesítenek a különféle kopula modellek adott marginálisok mellett. A 3. ill. 4. ábrák a vizsgált kopula modelleknek a 25 portfólióra vonatkozó átlagos  $Z$  értékét mutatják fix (normális ill. Pareto-) marginálisok mellett.

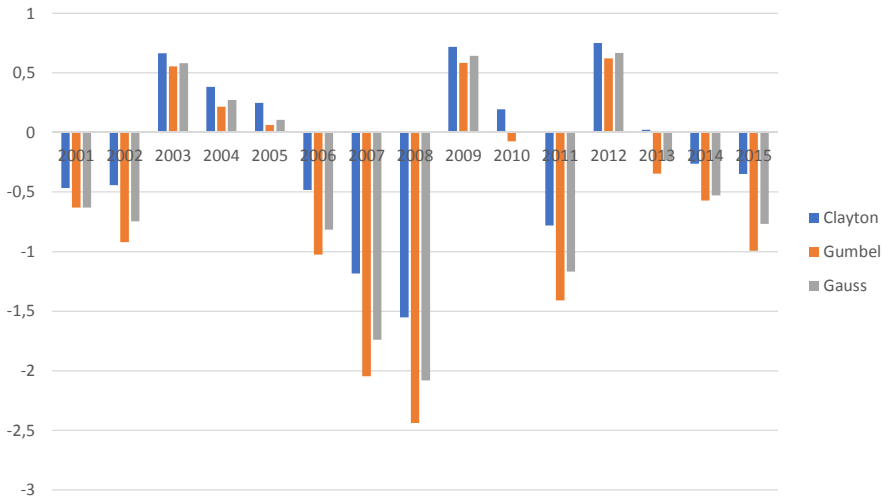
A 3. ábra azt mutatja, hogy a normális marginálisokkal rendelkező modellek közül azok mutattak általában<sup>9</sup> jobb teljesítményt, amelyek függőségi struktúrája Clayton-kopula volt.

<sup>9</sup>A Clayton-, Gauss- és a Gumbel-kopulával bíró modellek összesített rangszáma rendre: 27, 29, 34.



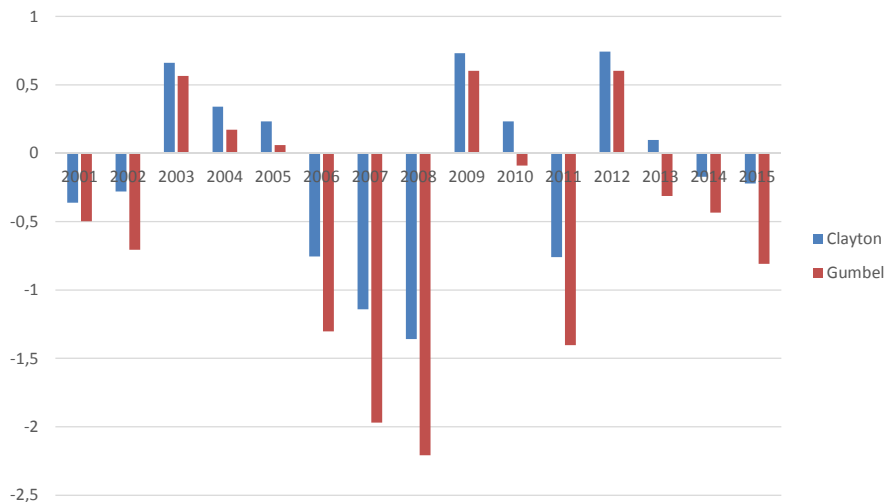


2. ábra. A becsült várható többletvesztés (ES) napi átlagos értéke a különböző modellekre a 2001 és 2015 közötti időszakban



3. ábra. A normális marginálisokkal rendelkező különböző kopula modelleknek a vizsgált 25 portfólióra vonatkozó átlagos Z értéke a 2001 és 2015 közötti időszakban

Konkréten a vizsgált 15 évből 9 esetben, tipikusan azokban az években, amikor a valódi veszteségek alábecslése volt jellemző, a Clayton-kopulával bíró modellekre volt a legalacsonyabb (abszolút értékben) az átlagos Z-érték. Pontosan az ellenkezője igaz azokra az évekre (például 2003 vagy 2009), amikor a kockázat fölébecslése volt tapasztalható. Az utóbbi esetekben a Gumbel-kopula bizonyult a legjobbnak.



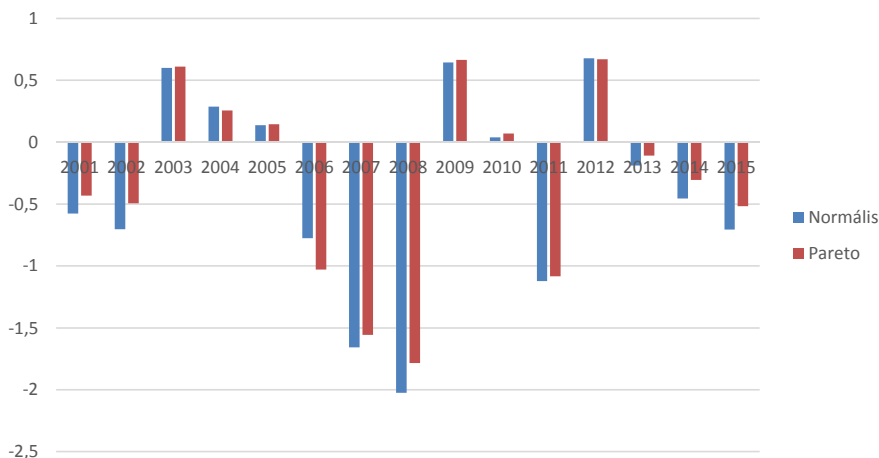
4. ábra. A Pareto-marginálisokkal rendelkező különböző kopula modelleknek a vizsgált 25 portfólióra vonatkozó átlagos Z értéke a 2001 és 2015 közötti időszakban

A Pareto-marginálisokra alapozó modellekben (lásd a 4. ábrát) megmaradt a Clayton-kopulával rendelkező modellek összességében jobb teljesítménye a Gumbel-kopulával bírókkal szemben. A Clayton-kopula-modellek 9 évben mutattak jobb teljesítményt, és – a normális marginálissal rendelkező modellek esetéhez hasonlóan – ez (egy kivétellel) azokban az években fordult elő, amikor a kockázat alábecslése volt tapasztalható.

Tanulmányunkban a marginálisok megválasztásának hatását is vizsgáltuk az előrejelzési teljesítményre. Eredményeinket az 5. ábra illusztrálja. Figyelemre méltó a Pareto-marginálisokra épülő modellek fölénye a normális marginálisokéval szemben. Az előbbieket ugyanis kétszer annyi esetben (konkrétan a vizsgált 15 évből 10-ben) mutattak az utóbbiaknál jobb teljesítményt.

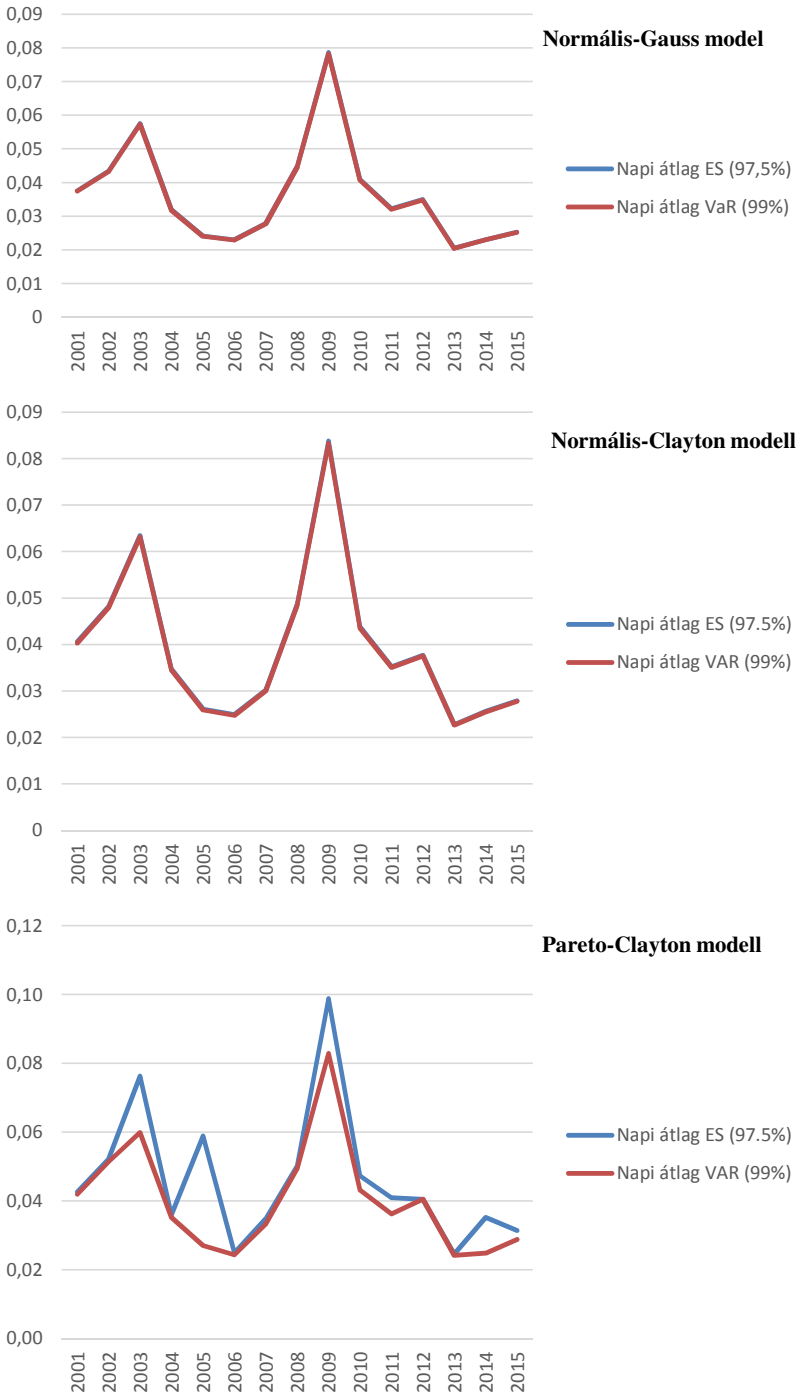
Végül rá kívánunk mutatni a kockázatbecslő modell megválasztásának jelentőségére a régi és új bázeli tartaléktőke előírások közötti különbséget alapul véve. A 6. ábra egy véletlenszerűen kiválasztott portfólió (a vizsgált 25 portfólió egyike)<sup>10</sup> napi átlagos becsült *VaR* és *ES* értékét mutatja három eltérő modell esetében. A bázeli szabályozással összhangban a *VaR* esetében 99, míg az *ES* esetében 97,5 százalékos konfidenciaszintet alkalmaztunk. Az egyes évekhez tartozó diszkrét pontokat összekötöttük.

<sup>10</sup>Mindkét – általunk nem nevesített – FTSE 100 alkotóelem 50 százalékos súlyt képvisel a portfólióban.



5. ábra. A marginálisok megválasztásának hatása a vizsgált 25 portfólió átlagos Z értékére a 2001 és 2015 közötti időszakban

Amíg a  $VaR$  görbe profilja majdnem azonos mindhárom modell esetében, addig a becslt  $VaR$  értékek – a Normális-Gauss modellhez képest – kissé magasabbak a Normális-Clayton, és még magasabbak a Pareto-Clayton modell esetében. A fentiekén túl, amint a 6. ábra világosan mutatja, a Normális-Gauss modell esetében a becslt  $VaR$  és  $ES$  értékek majdnem teljesen meg-egyeznek (a  $VaR$  és az  $ES$  görbék lényegében fedik egymást). Ez nem meglepő, hiszen az  $ES$  97,5 százalékos konfidencia szintjét pont úgy kalibrálták, hogy ilyen alapesetekben a régi bázeli szabályozásban szereplő 99 százalékos megbízhatósági szint mellett becslt  $VaR$ -ral azonos eredményeket adjon, így a kötelező tartaléktőke szintje a szabályozási „váltás” miatt ne változzon. Említésre méltó az is, hogy a függőségi struktúra – Gauss-kopuláról Claytonra történő – változtatása semmilyen változást nem eredményezett az előbb említett vonatkozásban (a Normális-Clayton modell által szolgáltatott  $VaR$  és  $ES$  profilok szintén nagyjából fedik egymást). A fentiek éles kontrasztban állnak a Pareto-Clayton modellre kapott eredményekkel. Ebben az esetben ugyanis az új szabályozás – ilyen belső modell használata során becslt magasabb kockázat fedezetéül – magasabb tartaléktőke igényt is követel.



6. ábra. Egy véletlenszerűen választott portfólió három eltérő modellel becsült napi átlagos VaR és ES értékei a 2001 és 2015 közötti időszakban

## 5 Összegzés

A tanulmányban öt kockázatbecslő modell teljesítményét értékeltük 25, két értékpapírból álló, egyenlő súlyozású portfólió esetében. Az egyes portfóliók összetevőit a FTSE index kosarából véletlenszerűen választottuk ki. A marginálisok modellezésére normális és általánosított Pareto-eloszlást használtunk, függőségi struktúraként pedig Gauss-, Clayton- és Gumbel-kopulákat illesztettünk az adatokra. Míg az előbbi a normális eloszlás lineáris korrelációs együtthatóval jellemezhető függőségi struktúrája, addig az utóbbi két kopula hasznosnak bizonyulhat a nagy veszteségek együttes bekövetkezésének modellezésében. Az alap (benchmark) modellel (normális marginálisokra ültetett Gauss-kopula) összehasonlítva a Pareto-marginálisok alkalmasabbnak bizonyultak az eloszlás széleinek, azaz a nagy kockázatoknak a modellezésében.

A 2000. január 4. és 2015. december 31. közötti, 16 évet magába foglaló időhorizonton az elemzésbe bevont értékpapírokra vonatkozóan napi (százalékos) hozamot számítottunk. A szükséges paraméterek becslése után minden modell esetében a vizsgált portfóliókra Monte Carlo szimulációval napi hozamokat generáltunk, és 10000 szimulált hozamértékre támaszkodva becsültük az  $ES$  nagyságát. Becslési célokra egy 250 napból álló „csúszó ablakot” tartottunk fenn, amelyet – az előrejelzett következő napi  $ES$  érték birtokában – egy nappal előre mozgattunk. A becsült  $ES$  értékeket minden egyes előrejelzési periódusban összehasonlítottuk a tényleges (realizált) hozam (veszteség) értékeivel. A visszatesztelés során kapott eredményeket az Acerbi és Székely (2014) által javasolt hibafüggvény segítségével értékeltük.

Empirikus elemzésünk megerősítette, hogy a várható többletveszteség ( $ES$ ) kockázati mértékként történő alkalmazása önmagában nem elég a kockázatot értékelni ( $Var$ ) kiváltására. Emellett döntő jelentősége van a kockázatbecslésére használt modell (bázeli szóhasználattal: belső modell) körültekintő megválasztásának és validálásának. A visszatesztelés során kapott eredményeink megerősítették, hogy a Pareto-eloszlás jó választásnak bizonyul a kockázatmodellezésében. A vizsgált öt kockázatbecslő modell közül a Pareto-marginálisoknak a Clayton-kopulával történő párosítása nyújtotta a legjobb teljesítményt. Azt is megállapíthatjuk ugyanakkor, hogy erre a modellre „túlzott óvatosság” jellemző, így hajlamos arra, hogy – a stabil periódusokban – az indokoltnál nagyobb mértékben felülbecsülje a kockázatot. Elemzésünk alátámasztotta a Low et al. (2013) által kapott eredményt is, amely szerint két értékpapírból álló portfóliók esetében a marginálisok megfelelő megválasztása nagyobb jelentőségűnek tűnik, mint a függőségi struktúra modellezése.

A függőségi struktúra megfelelő modellezése külön kihívást tartogat többdimenziós portfóliókra, ami hasznos további kutatási irány lehet. Emellett fontos lenne dinamikus és/vagy adaptív modellek alkalmazása annak érdekében, hogy sikerüljön megoldást találni a prudens modellek „túlzott óvatosságának” kiküszöbölésére.

## Irodalom

1. Acerbi, C. – Székely, B. (2014): *Backtesting Expected Shortfall*, MSCI White paper. 1–37.
2. Artzner, P. – Delbaen, F. – Eber, J. M. – Heath D. (1999): Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, 9, 203–228.
3. Basel Committee on Banking Supervision (BCBS, 2016): *Minimum capital requirements for market risk. Bank for International Settlements*, 1–88.
4. Bouyé, E. – Durrleman, V. – Nikeghbali, A. – Riboulet, G. – Roncalli, T. (2000): *Copulas for Finance – A Reading Guide and Some Applications*. Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, Paris.
5. Coles, S. (2001): *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*, Springer London Ltd, London.
6. Dowd, K. (2005): Copulas and Coherence – Portfolio Analysis in a Non-Normal World. *Journal of Portfolio Management*, Fall 2005, 123–127.
7. Dowd, K. – Blake, D. (2006): After VaR: The Theory, Estimation, and Insurance Applications of Quantile-Based Risk Measures. *Journal of Risk and Insurance*, 73(2), 193–229.
8. Low, R. K. J. – Alcock, J. – Faff, R. – Brailsford, T. (2013): Canonical vine copulas in the context of modern portfolio management: Are they worth it? *Journal of Banking and Finance*, 37, 3085–3099.
9. Markowitz, H. M. (1952): Portfolio Selection. *Journal of Finance*, 8, 77–91.
10. McNeil, A. J. – Frey, R. – Embrechts, P. (2015): *Quantitative Risk Management – Concepts, Techniques and Tools*. Princeton University Press. Princeton, Oxford.
11. Nelsen, R. B. (2006): *An Introduction to Copulas*, Springer-Verlag, New York.
12. Rockafellar, R. T. – Uryasev, S. (2000): Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of Risk*, 2(3), 21–41.

### VALIDATING RISK ESTIMATION MODELS

We compare five expected shortfall estimation models applied to 25 equally weighted two-stock portfolios. The relevance of the topic comes from the need to measure the minimum capital requirements for market risk for banking institutions. The choice of risk measure is based on the requirements of the Basel III international regulatory framework for banks. We used normal and general Pareto distribution for the marginals and Gauss, Clayton, and Gumbel copulas to model the dependency between the stocks. Gauss copula models linear correlation between the stocks while Clayton and Gumbel copulas result in losses occurring together more frequently. The Clayton and Gumbel copulas are defined by the following equations, respectively:

$$C_{\theta}(\nu_1, \nu_2) = \max\left\{(\nu_1^{-\theta} + \nu_2^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}, 0\right\}, \quad \text{ahol } \theta \geq -1, \theta \neq 0,$$

$$C_{\theta}(\nu_1, \nu_2) = \exp\left\{-\left[(-\ln \nu_1)^{\theta} + (-\ln \nu_2)^{\theta}\right]^{\frac{1}{\theta}}\right\}, \quad \text{ahol } \theta \geq 1.$$

The distribution and dependency parameters were estimated from the time series and the Expected Shortfall risk measure was calculated using Monte Carlo simulations in two steps. First, we simulated unified distributions according to the selected copula. The second step was to apply the selected marginals. Finally, we calculated the Expected Shortfall from the resulting 10 000 simulated return values. The models were evaluated using the back-testing methodology proposed by Acerbi and Székely (2014):

$$Z = \frac{1}{(1 - \alpha)T} \sum_{t=1}^T \frac{X_t I_t}{ES_{\alpha,t}} + 1.$$

The stocks were chosen randomly from FTSE 100 index constituents, the calculations are based on daily return percentages on a 16-year long time series that ranges from 2000 to 2015. Our empirical analysis confirms that the choice alone of using Expected Shortfall as the risk measure is not enough to remedy all the problems of the risk measure Value at Risk. The model choice for estimating Expected Shortfall also has great importance. Our back-testing results show that the Pareto distribution is a good choice for modelling marginals. We have observed the best results for the model with Pareto marginals and Clayton dependencies. We can also observe in our empirical analysis that the Pareto-Clayton model tends to be overly cautious, often overestimating the risk of the portfolio. This is especially a problem for stable periods. Finally, we conclude that the choice of marginal distribution seems to be more important than the choice of dependency structure considering estimation accuracy. The research was financed by the Higher Education Institutional Excellence Programme of the Ministry of Human Capacities in Hungary, within the framework of the 4th thematic programme „Enhancing the Role of Domestic Companies in the Reindustrialization of Hungary” of the University of Pécs (reference number of the contract: 20765-3/2018/FEKUTSTRAT)

*Key words:* risk estimation models, portfolio, back-testing, expected shortfall, copula.