ÖNMAGUKAT ÚJRATERMELŐ MEGSZORÍTÁSOK – A KÖZEPES FEJLETTSÉG CSAPDÁJÁBAN[1]

BESSENYEI ISTVÁN
Pécsi Tudományegyetem

Azt vizsgáljuk, hogy a közepes fejlettség csapdájában megrekedt gazdaságokban alkalmazott megszorító intézkedések miként termelik újra önmagukat. Ehhez Ramsey modelljébe vezetünk be egy olyan lineárisan homogén, folytonos termelési függvényt, mely a jól viselkedő termelési függvényekkel szemben támasztott követelmények nem mindegyikét elégíti ki. Ez a módosítás egy több stacionárius ponttal rendelkező dinamikus rendszerhez vezet, ahol két nyeregpont és egy instabil stacionárius pont adódik. Kiegészítve a modellt egy a transzverzalitási feltétel teljesülését biztosító mechanizmussal, meghatározzuk azokat a feltételeket, melyek fennállása esetén a fogyasztás megszorítása előbb-utóbb a fogyasztás újbóli megszorítását teszi szükségessé, miközben a gazdaság nem jut ki a közepes fejlettség csapdájából.

1 Bevezetés

A gazdasági növekedés legáltalánosabban használt modellje Solow (1956) cikkén alapul. Ennek oka minden bizonnyal abban rejlik, hogy a Solow által konstruált modell egyszerűsége ellenére messzire vezető következtetések levonására alkalmas. Ezek jelentős része empirikusan igazolható, tanulmányunk fókuszában azonban a modellnek egy olyan következménye áll, mely nemzetgazdaságok jelentős részére nem érvényes. Solow modelljéből következik ugyanis, hogy amennyiben a műszaki-technikai haladás eredményeihez minden gazdaság szabadon hozzáférhet, akkor a különböző országokban az egy főre eső GDP szintje és növekedési rátája, ha lassan is, de egy exogén módon meghatározott, közös értékhez tart. Ez a konvergencia a fejlett országok esetében empirikusan igazolható, ám az összes országra nem mutatható ki. Mint azt más szerzők mellett Parente és Prescott (2000) bemutatták, ennek oka az, hogy a különböző országokban eltérő termelési technológiák állnak rendelkezésre. A technológiai különbségek hátterében például munkavállalói érdekek, vagy a nemzeti ipar védelmét szolgáló kereskedelmi korlátozások állhatnak. Másrészt Radosevic és Yoruk (2018) cikke a szervezeti képességek hiányosságaira hívja fel a figyelmet. Hasonló álláspontra helyezkedik a Magyar Nemzeti Bank 2018. novemberi Pénzügyi stabilitási jelentése is megállapítva, hogy hazánkban a legtöbb kisvállalkozásnál hiányoznak az üzleti tervezés legalapvetőbb elemei: tízből csak három készít üzleti tervet, s csak kettő

[1] Beérkezett 2021. február 8. E-mail: `bessenyei.istvan@ktk.pte.hu`.

rendelkezik marketing- és értékesítési stratégiával. A vezető pozíciók odaítélésénél pedig általában fontosabb szerepet játszanak a családi kötelékek, mint a képzettség, vagy a korábban nyújtott teljesítmény.

Hazánkban a közepes fejlettség csapdája a Magyar Nemzeti Bank 2018. évi Növekedési jelentése nyomán került az érdeklődés középpontjába. Mivel Radosevic és Yoruk (2018) szerint a különböző fejlettségű gazdaságok Solow modelljéből adódó konvergenciája a közepes fejlettség csapdájával összeegyeztethetetlen, ebben a tanulmányban Ramsey (1928) modelljének Caas (1965) és Koopmans (1965) által korszerűsített változatából indulunk ki. Ez a változat csupán annyiban tér el Solow modelljétől, hogy szakít az exogén konstans fogyasztási és megtakarítási hányad keynesi feltevésével, s helyette a fogyasztó intertemporális hasznosságot maximalizáló viselkedését tételezi fel.

A következő szakaszban Ramsey, illetve Solow nyomán a kormányzati beavatkozásoktól mentes, zárt gazdaság dinamikus erőforráskorlátját vezetjük le. Definiáljuk az egyensúlyi növekedési pálya fogalmát, majd rámutatunk e növekedési pálya két fontos tulajdonságára. Ezek után a reprezentatív háztartás optimális fogyasztási pályáját határozzuk meg, és az eredményeket átvisszük makroszintre. Mivel a továbbiak alapját ez a szakasz képzi, megvizsgáljuk az így kapott síkbeli dinamikus rendszer stacionárius pontjának egzisztenciáját, unicitását és stabilitását. Látni fogjuk, hogy a kapott stacionárius pont nyeregpont, ezért a 3. szakaszban részletesen szemügyre vesszük a stacionárius pont eléréséhez szükséges transzverzalitási feltétel teljesülését biztosító mechanizmust. Alkalmas módon perturbálva a termelési függvényt, a 4. szakaszban úgy módosítjuk a modellt, hogy abban a közepes fejlettség csapdája megjelenjen. Ezt követően, a 3. szakaszban bevezetett mechanizmust felhasználva, az 5. szakaszban megvizsgáljuk, hogy miként és milyen feltételek mellett termelik önmagukat újra a közepes fejlettség csapdájában megrekedt gazdaságokban alkalmazott megszorítások. Eredményeinket az utolsó szakasz foglalja össze, rámutatva egyúttal a közepes fejlettség csapdájából való kikerülés rendszeres megszorításokat mellőző lehetőségére.

2 Az alapmodell

Feltesszük, hogy a gazdaság a kibocsátást (Y) fogyasztásra (C), a tőkeállomány növelésére $\dot{K}$ és az amortizációs veszteségek pótlására δK használja. Ezek szerint:

$$Y = C + \dot{K} + \delta K, \tag{1}$$

ahol K a korábban felhalmozott tőke állományát jelöli, $\dot{K}$ pedig annak idő szerint vett deriváltját[2], továbbá δ az amortizációs rátát. A kormányzati felhasználástól, továbbá a nettóexporttól tehát – követve Ransey és Solow modelljeit – eltekintünk. A tőkeállomány mellett a termelés hatékony munkát

[2]Azt a tényt, hogy Y, C és K az idő függvényei, az egyszerűbb írásmód érdekében nem jelöljük. Csak abban az esetben fogjuk jelölni, hogy egy változó az idő függvénye, ha tartani lehet tőle, hogy a jelölés elhagyása zavart okozna.

($\bar{L}$) használ fel. Ennek növekedési rátája: $\hat{\bar{L}} = \frac{\dot{\bar{L}}}{\bar{L}} = m + n$, ahol m a tisztán munkanövelő, technikai haladás rátája, n pedig a termelés rendelkezésére álló munka demográfiai folyamatok által meghatározott, növekedési üteme. Feltesszük, hogy m és n egyaránt konstansok. A továbbiakban mindkettőt exogén adottságnak tekintjük. Olyan változót keresünk, melynek értéke növekvő kibocsátás mellett is változatlan lehet. Ilyen a tőkeállomány és a hatékony munka hányadosa, a hatékony tőkeintenzitás:

$$\bar{k} = \frac{K}{\bar{L}}. \tag{2}$$

Az egyensúlyi növekedési pályát a neoklasszikus elveknek megfelelően definiáljuk:

1. Definíció. *Akkor mondjuk, hogy a gazdaság egyensúlyi növekedési pályán van, ha* $\dot{\bar{k}} = 0$.

A (2) definícióból adódik, hogy $\frac{\dot{\bar{k}}}{\bar{k}} = \frac{\dot{K}}{K} - (m + n)$, amiből $\dot{K}$-t kifejezve, majd az (1) mérlegösszefüggésbe helyettesítve a gazdaság dinamikus erőforráskorlátját kapjuk, egységnyi hatékony munkára vetített változókra felírva:

$$\bar{y} = \dot{\bar{k}} + (m + n + \delta)\bar{k} + \bar{c}, \tag{3}$$

ahol $\bar{y} = \frac{Y}{\bar{L}}$ az egységnyi hatékony munkára eső kibocsátás, és $\bar{c} = \frac{C}{\bar{L}}$ az egységnyi hatékony munkára eső fogyasztás. A (3) mérlegösszefüggés, hasonlóan (1)-hez, azt fejezi ki, hogy a gazdaság csak annyi kibocsátást használhat fel fogyasztásra és beruházásra, amennyit megtermelt. Itt azonban az egyes nagyságokat az egységnyi hatékony munkára vetítettük. Tettük ezt azért, mert így egyensúlyi növekedési pályán az összefüggésben szereplő valamennyi változó időben állandó.

A termelési technológiát az

$$Y = F(K, \bar{L}) \tag{4}$$

lineárisan homogén termelési függvény írja le. Megjegyzendő, hogy Cobb-Douglas típusú termelési függvény esetén nincs jelentősége, hogy tisztán munkanövelő, vagy egyaránt tőke- és munkanövelő technikai haladásról van szó, mert egyik formula a másikra egyszerűen átírható. A (4) egyenlőség mindkét oldalát $\bar{L}$-lel osztva az úgynevezett intenzív formában felírt, vagy intenzív termelési függvényt kapjuk:

$$\bar{y} = f(\bar{k}). \tag{5}$$

Ez a forma már könnyűszerrel beírható a (3) erőforráskorlátba. Könnyű látni, hogy ha $f'(\bar{k}) > 0$, akkor a hatékony tőkeintenzitás változatlanságából az egységnyi hatékony munkára eső kibocsátás változatlansága következik. Ha Solow (1956) nyomán emellett még azt is feltesszük, hogy az $s = S/Y$ megtakarítási hányad exogén konstans, továbbá a neoklasszikus elveknek megfelelően minden megtakarítás beruházásra kerül, azaz $S = sY = \dot{K} + \delta K$, akkor egyensúlyi növekedési pályán az egységnyi hatékony munkára eső fogyasztás változatlan, és $\bar{y} - \bar{c} = sf(\bar{k})$ miatt a (3) mérlegösszefüggés a Solow-modell alapjául szolgáló differenciálegyenletre egyszerűsödik. Ebben a tanulmányban azonban Ramsey cikkét követjük, ezért nem tesszük fel a megtakarítási hányad exogén konstans voltát, csupán azt, hogy minden megtakarítás automatikusan beruházássá válik. Az 1. Definícióból következik továbbá az

1. Tulajdonság. *Egyensúlyi növekedési pályán kibocsátás növekedési rátája, $\hat{Y} = m + n$, az egy főre eső fogyasztás ($c = C/L$) növekedési rátája pedig: $\hat{c} = m$.*

(Az egyes változók fölé írt kalap azok növekedési rátáját jelöli.) Jelölje r a kamatláb, w pedig a reálbér mindenkori nagyságát, és tegyük fel, hogy a termelőszféra z számú, azonos technológiával termelő vállalatból áll! Ekkor a reprezentatív vállalatnál képződő nyereség:

$$\Pi = \left[F(K, \bar{L}) - (r + \delta)K - wL\right]/z,$$

ahol w a reálbér, továbbá L a termelés rendelkezésére álló tényleges munka mennyisége, és $L = \bar{L}e^{-mt}$. Felhasználva a (4) termelési függvény lineáris homogenitását: $\Pi = \left[f(\bar{k}) - (r + \delta)\bar{k} - we^{-mt}\right]\bar{L}/z$. Ekkor a profitmaximum elsőrendű feltételei:

$$r = f'(\bar{k}) - \delta\,, \tag{6}$$

$$w = \left[f(\bar{k}) - \bar{k}f'(\bar{k})\right]e^{mt}\,. \tag{7}$$

Figyelembe véve az 1. Definíciót, a fenti egyenlőségek felhasználásával a következőt kapjuk:

2. Tulajdonság. *Egyensúlyi növekedési pályán a kamatláb konstans, továbbá $\hat{w} = m$.*

Vizsgálódásaink középpontjában mindeddig az egyensúlyi növekedési pálya állt. A valóságos gazdaságok azonban ritkán kerülnek egyensúlyi növekedési pályára. A nem egyensúlyi pályák alaposabb vizsgálatához mindenekelőtt a reprezentatív háztatás fogyasztását kell szemügyre venni. Mivel az exogén konstansként adott megtakarítási határhajlandóság feltételezéséről lemondtunk, szükséges a reprezentatív háztartás fogyasztásának és megtakarításának endogenizálása. Legyen az időpreferencia ráta ρ exogén konstans, és tegyük fel, hogy $0 < \rho < 1$. Jelölje a t időpontban $c_i(t)$ a reprezentatív háztartás fogyasztását, $k_i(t)$ pedig a tőkejavakban megtestesülő vagyonát. (Feltesszük, hogy a vagyontartásnak más formája nem létezik.) Tegyük fel továbbá, hogy munkakínálata egységnyi, ekkor a reprezentatív háztartás problémája az alábbi:

$$\max_{c_i(t)} \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c_i(t))\, dt, \tag{8}$$

feltéve, hogy $k_i(0)$ exogén adottság, továbbá

$$r(t) \cdot k_i(t) + w(t) = c_i(t) + \dot{k}_i(t)\,, \tag{9}$$

valamint

$$\lim_{t\to\infty} k_i(t) \cdot e^{-\int_0^t r(v)\,dv} \geq 0\,, \tag{10}$$

ahol az u függvény a fogyasztásból származó hasznosságot méri. Feltesszük, hogy a fogyasztás határhaszna pozitív: $u'(c_i) > 0$, és csökkenő: $u(c_i)'' < 0$. A reprezentatív háztartás (9) mérlegegyenletének bal oldala a forrás, jobb oldala pedig a felhasználási oldal. A vagyon hitelfelvétel révén történő felélése ($\dot{k}_i < 0$) megengedett, azonban a felvett hiteleket véges időn belül vissza kell fizetni. Ezt fejezi ki a (10) feltétel.

A (8)–(10) problémához az alábbi Hamilton-függvény írható fel:

$$H = e^{-\rho t}u(c_i) + \lambda\,(rk_i + w - c_i)\,.$$

Az elsőrendű feltételek:

$$\frac{\partial H}{\partial c_i} = e^{-\rho t}u'(c_i) - \lambda = 0\,, \tag{11}$$

$$-\frac{\partial H}{\partial k_i} = \dot{\lambda} = -\lambda r\,. \tag{12}$$

Továbbá a transzverzalitási feltétel: $\lim_{t\to\infty} \lambda(t) \cdot k_i(t) = 0$. Ezek a $c_i = c_i(t)$ fogyasztási pálya optimalitásának szükséges feltételei. Mangasarian (1966) eredményeiből következik továbbá, hogy ezek elegendő feltételek is, mivel a H Hamilton-függvény a c és k_i változókban konkáv.

Az elsőrendű feltételekből az objektív és szubjektív időpreferencia ráta viszonyára az alábbi összefüggést kapjuk:

$$r = \rho - \frac{\dot{u}'(c_i)}{u'(c_i)}\,.$$

A fenti differenciálegyenlet helyett céljainknak jobban megfelel egy olyan összefüggés, melyben a fogyasztás határhaszna helyett a fogyasztás növekedési rátája szerepel. Figyelembe véve, hogy $\dot{u}'(c_i) = \frac{du'(c_i)}{dt} = u''(c_i)\dot{c}_i$, a fogyasztásból származó határhaszon növekedési rátája a következő módon írható fel: $\hat{u}'(c_i) = \frac{u''(c_i)\cdot\dot{c}_i}{u'(c_i)} = \frac{c_i \cdot u''(c_i)}{u'(c_i)}\hat{c}_i$. Mindezek miatt az optimális fogyasztási pálya feltétele az alábbi formában adható meg:

$$r = \rho - \frac{c_i u''(c_i)}{u'(c_i)}\hat{c}_i = \rho + \theta\hat{c}_i, \tag{13}$$

ahol $\theta = -\frac{c_i u''(c_i)}{u'(c_i)}$ a határhaszon fogyasztás szerint vett rugalmassága. Mivel feltevéseink szerint $u'(c_i) > 0$ és $u(c_i)'' < 0$, a határhaszon fogyasztás szerint vett rugalmassága negatív, és így $\theta > 0$. Továbbá, mivel feltettük, hogy ρ exogén konstans, és az 1. és 2. Tulajdonság szerint egyensúlyi növekedési pályán r és $\hat{c}_i$ is konstansok, olyan $u(c_i)$ hasznossági függvényt kell alkalmaznunk, mely θ változatlanságát biztosítja, ha $\hat{c}_i = 0$ és $m = 0$. Ilyen az

$$u(c) = \frac{c_i^{1-\theta} - 1}{1-\theta}$$

hasznossági függvény, melyet a (13) feltételbe helyettesítve

$$\hat{c}_i = \frac{1}{\theta}(r - \rho) \tag{14}$$

adódik.

Az optimális fogyasztási pálya (14) feltétele lehetővé teszi a θ paraméter egy másik értelmezését is. Mivel $\frac{d\hat{c}_i}{d(r-\rho)} = \frac{1}{\theta}$, a θ paraméter azt méri, milyen erősen preferálja a háztartás a sima fogyasztási pályát, melyen $\hat{c}_i = 0$.

Tanulmányunk szempontjából központi jelentőségű a $\lim_{t\to\infty} \lambda k_i = 0$ transzverzalitási feltétel értelmezése. A (11) feltételből adódik, hogy λ a fogyasztás mindenkori határhasznának a szubjektív időpreferencia ráta szerint jelenre diszkontált értékeként értelmezhető. Mivel azonban ez az értelmezés meglehetősen nehézkes, érdemes λ-t a transzverzalitási feltételből kiküszöbölni. Ehhez mindenekelőtt meg kell oldani a (12) differenciálegyenletet. Mivel $\dot{r} = 0$ általában nem tehető fel, a megoldás:

$$\lambda = \lambda(t) = \lambda(0)e^{-\int_0^t r(v)\,dv}.$$

Behelyettesítve a $\lim_{t\to\infty} \lambda(t) \cdot k_i(t) = 0$ transzverzalitási feltételbe:

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t) \cdot k_i(t) = \lim_{t\to\infty} k_i(t) \cdot \lambda(0)e^{-\int_0^t r(v)\,dv} = 0,$$

amiből:

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t) \cdot k_i(t) = \lim_{t\to\infty} k_i(t)e^{-\int_0^t r(v)\,dv} = 0. \tag{15}$$

A (15) transzverzalitási feltételhez $\lambda(0)$-lal történő osztás révén jutottunk. Ez elvégezhető, mert a (11) feltétel szerint $\lambda(0) = e^{-\rho t}u'(c_i) = u'(c_i) > 0$.

Mivel feltettük, hogy a háztartások munkakínálata egységnyi, a háztartások száma L, és így a háztartások feltételezett uniformitása miatt $K = L \cdot k_i$. A továbbiakban az i alsó indexet elhagyjuk, és k_i vagy c_i helyett egyszerűen k-t, illetve c-t írunk. Szükséges még az optimális fogyasztás (14) feltételébe egy olyan változót bevezetni, melynek értéke $\bar{k}$-hoz hasonlóan az egyensúlyi növekedési pálya mentén konstans. Mivel az 1. Tulajdonság szerint egyensúlyi növekedési pályán $\hat{c} = m$, a $\bar{c} = e^{-mt}c$ egységnyi hatékony munkára eső fogyasztásra igaz, hogy egyensúlyi növekedési pályán $\hat{\bar{c}} = 0$, általában pedig $\hat{c} = \hat{\bar{c}} + m$. Behelyettesítve a (14) differenciálegyenletbe, és felhasználva a (6) összefüggést, kapjuk, hogy

$$\hat{\bar{c}} = \frac{1}{\theta}\left[f'(\bar{k}) - \delta - \rho - \theta m\right]. \tag{16}$$

Végül a (15) transzverzalitási feltételben cseréljük ki k-t $\bar{k}$-ra. Ehhez mindkét oldalt megszorozzuk L-lel:

$$L \lim_{t\to\infty} ke^{-\int_0^t r(v)dv} = \lim_{t\to\infty} Lke^{-\int_0^t r(v)dv} = \lim_{t\to\infty} L(0)ke^{-\int_0^t [r(v)-n]dv} = 0.$$

Mindkét oldalt elosztva $L(0)$-lal, továbbá felhasználva a (6) összefüggést, valamint azt, hogy definíció szerint $\bar{k} = ke^{-mt}$,

$$\lim_{t\to\infty} \bar{k}(t)e^{-\int\limits_0^t [f'(\bar{k}(v))-\delta-m-n]dv} = 0. \tag{17}$$

Figyelembe véve a (3) összefüggést, a (3) és (16) differenciálegyenletek, valamint a (17) transzverzalitási feltétel meghatározzák a $\bar{c}$ és $\bar{k}$ változók dinamikáját. Az így kapott dinamikus rendszer a következő:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{c}} &= \bar{c} \cdot \left[f'(\bar{k}) - \delta - \rho - \theta m \right] / \theta \\ \dot{\bar{k}} &= f(\bar{k}) - \bar{c} - (m + n + \delta)\bar{k} \,. \end{aligned}$$

A $\left(\bar{k}^*, \bar{c}^*\right)$ stacionárius pontban a bal oldalon álló differenciálhányadosok értéke zérus, és így

$$f'(\bar{k}^*) = \delta + \rho + \theta m \tag{18}$$

$$\bar{c}^* = f(\bar{k}^*) - (m + n + \delta)\bar{k}^* \tag{19}$$

egyenletek révén adódik. A makroszintű egyensúlyt jelentő stacionárius pont egzisztenciája és unicitása biztosított, ha az (5) függvényre teljesülnek az Inada-feltételek:

$$\begin{array}{rcll} f'(\bar{k}) & > & 0 & (a) \\ f''(\bar{k}) & < & 0 & (b) \\ \lim_{\bar{k}\to\infty} f'(\bar{k}) & = & 0 & (c) \\ \lim_{\bar{k}\to 0} f'(\bar{k}) & = & \infty & (d) \\ f(0) & = & 0 & (e) \\ f(\infty) & = & \infty & (f) \end{array} \tag{20}$$

Megjegyzendő, hogy ezek a feltételek biztosítják, hogy a reprezentatív vállalat profitmaximumának (6) és (7) nem csupán szükséges, de elegendő feltételei is. A stacionárius pont stabilitásának vizsgálatához a Poincaré-Ljapunov-Perron-tételt[3] alkalmazzuk. A linearizált rendszer:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{k}} \\ \dot{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho - (1-\theta)m - n & -1 \\ \frac{\bar{c}^* f''(\bar{k}^*)}{\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{k} - \bar{k}^* \\ \bar{c} - \bar{c}^* \end{bmatrix}. \tag{21}$$

[3]Lásd pl. Gandolfo (1997) 361. o.

A rendszermátrix sajátértékei:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left\{ -[n-\rho+(1-\theta)m] \pm \sqrt{[n-\rho+(1-\theta)m]^2 - 4\frac{\bar{c}^* f''(\bar{k}^*)}{\theta}} \right\}.$$

Megjegyzendő továbbá, hogy a (17) transzverzalitási feltétel teljesüléséhez $\rho + \theta m > m + n$ fennállása szükséges. A továbbiakban feltesszük, hogy ez a reláció a modell paramétereire teljesül. A feltevés már csak azért is reális, mert számos országban, például Magyarországon is, a demográfiai folyamatok következtében $n < 0$. Ekkor $n-\rho+(1-\theta)m < 0$. Továbbá a (b) Inada-feltétel szerint $f''(\bar{k}^*) < 0$, így a rendszermátrix egyik sajátértéke pozitív, a másik pedig negatív. Ezek szerint a stacionárius pont lokálisan aszimptotikusan instabil, nyeregpont.

A későbbiek miatt fontos még tisztázni, hogy $f''(\bar{k}^*) > 0$ esetén, ha $f''(\bar{k}^*) < \frac{\theta[n-\rho+(1-\theta)m]^2}{4\cdot\bar{c}^*}$ teljesül, akkor a négyzetgyökjel alatt álló kifejezés pozitív, és a rendszermátrixnak két valós, pozitív sajátértéke van, így a stacionárius pont instabil. Ellenkező esetben pedig a rendszermátrixnak két konjugált komplex sajátértéke van, továbbá, mivel a mátrix nyoma pozitív, a stacionárius pont ebben az esetben is instabil, és létezik a stacionárius pontnak egy olyan v sugarú környezete, melyben a pályagörbék spirálformát követve távolodnak a stacionárius ponttól.[4] Ezek szerint érvényes a

3. Tulajdonság. *A nyeregponti stabilitás szükséges és elegendő feltétele* $f''(\bar{k}^*) < 0$ *teljesülése.*

Ramsey modelljének dinamikája az *1. ábrán* az I. síknegyedben látható. A IV. síknegyedben a (18) egyensúlyi feltétel teljesülése követhető nyomon, rávilágítva arra, hogy milyen szerepet játszanak az egyes paraméterek a stacionárius pont meghatározódásában. Jelölje $\dot{\bar{c}} = 0$ mellett az egységnyi hatékony munkára eső vagyon maximálisan elérhető nagyságát $\bar{k}_a > 0$. Ábránkon ez a vízszintes tengelyen a $\dot{\bar{k}} = 0$ nyugalmi vonal vízszintes tengellyel vett metszéspontja lenne, ahol $f(\bar{k}_a) = (m+n+\delta)\bar{k}_a$. A jobb megjelenítés érdekében azonban, ezt, a témánk szempontjából kevéssé jelentős pontot az ábrán nem tüntettük fel. Fontosabbak a stacionárius pont környezetében futó pályagörbék, ezek közül néhány jellegzetes trajektóriát fel is tüntettünk. A pályagörbéket az alábbi módon osztályozzuk:

2. Definíció. *Ha egy pályagörbe mentén* $\lim_{t\to\infty} \bar{k}(t) \leq 0$ *teljesül, akkor ezt a trajektóriát hedonista pályagörbének nevezzük,* $\lim_{t\to\infty} \bar{k}(t) = \bar{k}_a$ *esetén pedig absztinensnek. A nyeregpályákat egyensúlyi pályagörbéknek hívjuk.*

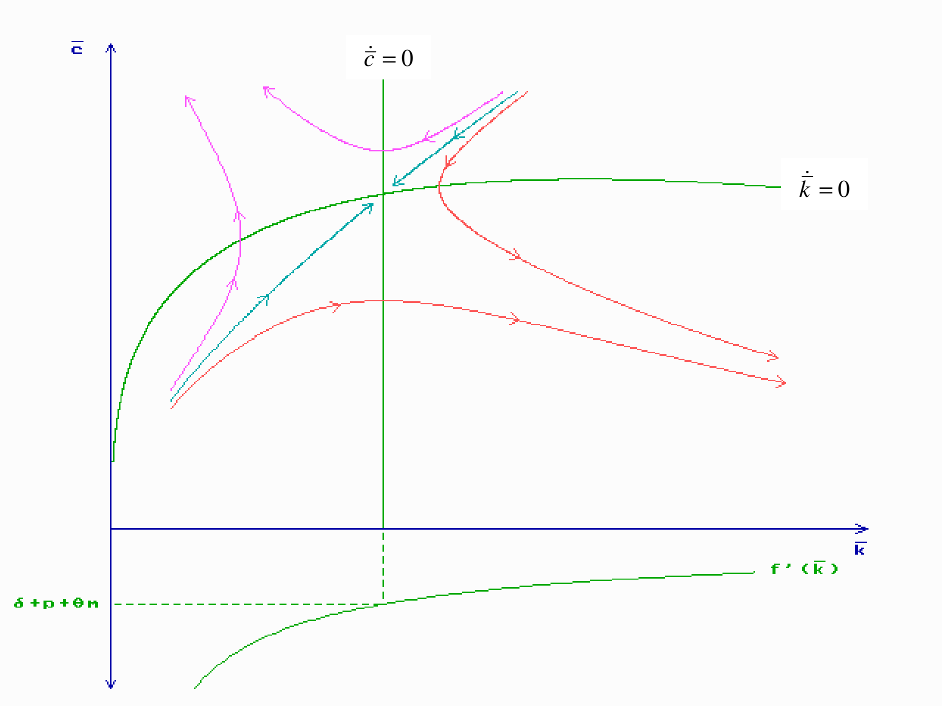
Az 1. Tulajdonság szerint a stacionárius pontban az egy főre eső fogyasztás növekedési rátája megegyezik az exogén technikai haladás ütemével, azaz $\hat{c} = m$. Az 1. ábra alapján azonban ennél többet is megállapíthatunk. $\hat{c} = \hat{\bar{c}} + m$ miatt teljesül ugyanis az alábbi

4. Tulajdonság. $\bar{k} < \bar{k}^*$ *esetén* $\hat{c} > m$*. Ez a helyzet a hedonista pályagörbék mentén mindvégig fennmarad, az egyensúlyi pályagörbe mentén azonban*

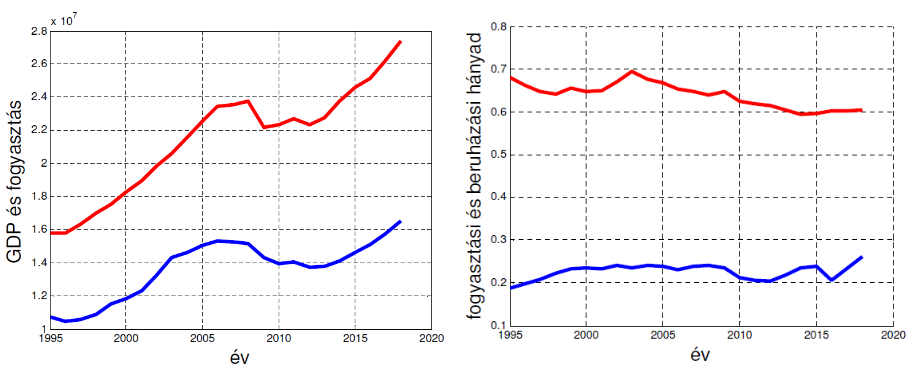
[4] Lásd pl. Gandolfo 358. o.

csak a stacionárius pont eléréséig tart. Az absztinens pályagörbék mentén $\bar{k}$ *mindvégig növekszik, de* $\bar{k} = \bar{k}^*$ *elérése után* $\hat{c} < m$*.*

Hasonlóképpen $\bar{k} > \bar{k}^*$ esetén $\hat{c} < m$, ez az eset azonban számunkra kevésbé érdekes.



1. ábra. Ramsey modelljének dinamikája



2. ábra. A GDP és fogyasztás alakulása (bal oldali grafikon) 2005. évi átlagáron millió Ft, és a fogyasztási, valamint beruházási hányad alakulása (jobb oldali grafikon). *Forrás:* KSH

3 A transzverzalitási feltétel teljesülését biztosító mechanizmus

Az előző szakaszban feltételeztük a (17) transzverzalitási feltétel teljesülését. Az ezt biztosító mechanizmust ebben a szakaszban vesszük alaposabban szemügyre.

Legyen G az egyensúlyi pályagörbék pontjainak halmaza. Az 1. ábra szerint ez a halmaz bijektív leképezést definiál a hatékony tőkeintenzitás és az egységnyi hatékony munkára eső fogyasztás között. Legyen ez a bijekció a $\bar{k} = g(\bar{c}) = g(c \cdot e^{-mt})$ függvény! A g függvény ezek szerint azt mutatja meg, hogy az egy főre eső fogyasztás adott nagysága mellett $\bar{k}$ mekkora értéke tartja a gazdaságot az egyensúlyi pályagörbén.

A gazdaság azonban tartósan nem követi ezt a trajektóriát, mert a háztartási szektorra kirótt (17) transzverzalitási feltétel nem teljesül automatikusan. A háztartások ugyanis rövidlátó módon, gyakran szem elől tévesztik a (15) transzverzalitási feltételt, ezáltal egy hedonista pályára lökve a gazdaságot. A felhalmozás ezzel együtt járó alacsonyabb üteme azonban előbb-utóbb olyan, felhalmozást serkentő megszorítást tesz szükségessé, mely a gazdaságot az egyensúlyi pályagörbe irányába mozdítja. Hasonló problémát okoznak azok a természeti katasztrófák, melyek következtében a tőkeállomány egy része megsemmisül, vagy azok az elhibázott beruházási döntések, melyek során a létrehozott, többnyire infrastrukturális eszközök a termelési erőforrásként figyelembe vehető tőke állományát nem, vagy a vártnál csekélyebb mértékben növelik.[5] Mivel ilyen esetekben a fogyasztásnak kell alkalmazkodni, helyesebb lenne az egy főre eső fogyasztás (16) mozgásegyenlete helyett a következő differenciálegyenletet alkalmazni:

$$\hat{\bar{c}} = \frac{1}{\theta}\left[f'(\bar{k}) - \delta - \rho - \theta m\right] + x, \tag{22}$$

ahol $x = \varphi(\bar{k}, \bar{c}) + \eta$, és a φ függvény reprezentálja a gazdaságot a stabil ág felé terelő, stabilizációs mechanizmusokat. Ilyen mechanizmus például a piaci szereplők rendelkezésére álló hitelrendszer, vagy a kormányzat által követett stabilizációs politika. Ezekből $\partial\varphi/\partial\bar{k} \geq 0$ és $\partial\varphi/\partial\bar{c} \leq 0$ következik, továbbá figyelembe véve, hogy a stabilizációs mechanizmusok nem korlátlanul érzékenyek a stabil ágak elhagyására, $\exists\,\epsilon > 0 : \left|\bar{k} - g(\bar{c})\right| < \epsilon \Rightarrow \varphi(\bar{k}, \bar{c}) = 0$. A háztatások hedonista attitűdjét, valamint a nem stabilizációs indíttatású, politikai ciklusokat az η véletlen változó reprezentálja. Mellár (2008) könyvének 8. fejezete kiváló bevezetést ad a politikai ciklusok elméletébe, az η által reprezentált, egyéb politikai indíttatású élénkítéseket és megszorításokat, valamint egyéb exogén sokkokat azonban a továbbiakban véletlen hatásoknak tekintjük. Ennek megfelelően feltesszük, hogy η szórása véges, várható értéke pedig nem negatív. Utóbbi feltevésünk mögött egyrészt a háztartások hedonista hajlama, másrészt a fiskális politika belső expanziós kényszere húzódik meg.

[5] Az utóbbi eset hátterében esetlegesen meghúzódó korrupció részletesebb leírásával és következményeivel foglalkozik Bessenyei (2001) és Bessenyei (2004).

Feltesszük továbbá, hogy η a modell egyetlen más változójával sem korrelál. Ebben az esetben azonban az 1. ábrán bemutatott a pályagörbék nem az endogén változók tényleges időbeli alakulását reprezentálják, csupán azok trendjét. φ egy egyszerű specifikációja lehet a következő:

$$\varphi(\bar{k},\bar{c}) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } |\bar{k} - g(\bar{c})| < \epsilon \\ z\cdot\left[\bar{k} - g(\bar{c}) - \epsilon\right] & \text{, ha } \bar{k} > g(\bar{c}) + \epsilon \\ z\cdot\left[\bar{k} - g(\bar{c}) + \epsilon\right] & \text{, ha } \bar{k} < g(\bar{c}) - \epsilon \end{cases} \tag{23}$$

Ekkor Kornai (1997) terminológiájával élve azt mondhatjuk, hogy a gazdaság költségvetési korlátja annál keményebb, minél kisebb $\epsilon > 0$, és minél nagyobb $z > 0$. A (22) összefüggés szerint tehát egy stop-go mechanizmus biztosítja, hogy a gazdaság ne távolodhasson el túlságosan nagy mértékben az egyensúlyi pályagörbétől. Ezt a stop-go politikát részben a kormányzat, részben pedig a hitelrendszer működteti.

A megszorítás mértékének meghatározásához legyen $t < t_0 : x(t) = 0$, továbbá $t_0 \le t \le T : x(t) < 0$, és $t > T : x(t) = 0$. Ekkor azt mondjuk, hogy a t_0 és T közötti időszakban a fogyasztás megszorítására került sor. Ennek következtében a gazdaság elhagyja a t_0-ig követett pályagörbét, és a T időponttól kezdve egy másik, a vízszintes tengelyhez közelebb futó pályagörbére kerül. Hogy melyikre, az a megszorítás mértékétől függ. A megszorítás mértékét egyrészt $x(t)$ határozza meg, másrészt a megszorítás időtartama. Jelölje D a megszorítás mértékét, ekkor

$$D = \int_{t_0}^{T} x(t)\,dt.$$

A fenti definícióból következik, hogy egy megszorítás esetén $D < 0$. Ha D pozitív, akkor $t_0 \le t \le T : x(t) > 0$. Ilyenkor a fogyasztás élénkítéséről beszélünk. Ezek szerint egy megszorítás esetén dinamikus rendszerünk elhagyja az addig követett pályagörbét, és egy annál alacsonyabban futó pályagörbére tér át, minél nagyobb D. Ez az áttérés egyik pályagörbéről a másikra pedig annál tovább tart, minél hosszabb a $[t_0, T]$ intervallum. A fogyasztás élénkítése természetesen ellenkező irányú elmozdulást eredményez.

A fogyasztás élénkítése a háztartások természetes törekvése, amitől csak a (10) feltétel miatt térnek el. Ezt a korlátot azonban a háztartások nem minden esetben érzékelik. Amikor kevésbé érzékelik, Kornai (1997) szóhasználatával élve puha költségvetési korlátról beszélünk. Egy ilyen helyzetet mutatunk be az alábbi példában, ami jól illusztrálja $\varphi(\bar{k},\bar{c})$ és η viszonyát:

Példa. *A költségvetési korlát felpuhulása volt jellemző Magyarországon 2003-ban, a fogyasztási hányad historikus csúcspontján. (A fontosabb makrogazdasági folyamatok a 2. ábrán követhetők nyomon.) Az ebben az időszakban növekvő eladósodottságot modellünkben $\bar{k}$ csökkenése reprezentálja. Emiatt a fogyasztás megszorítása vált szükségessé, ami jelentős késéssel ugyan, de 2006. második felében be is következett. Modellünkben ezt úgy jeleníthetjük* *meg, hogy 2004-ben ugyan $\varphi(\bar{k}, \bar{c}) < 0$ állt fenn, $\eta > 0$ miatt azonban $x \geq 0$ teljesült, ami 2006-ig még biztosította az egységnyi munkára eső fogyasztás növekedését. Ebben az időszakban $\eta > 0$ teljesülését a háztartások természetes törekvése mellett a közelgő választásokra fókuszáló kormányzat fogyasztást élénkítő politikája is támogatta.*

Politikai szempontból különösen nehezen vállalható egy megszorítás $\dot{\bar{k}} > 0$ esetén, hisz az egységnyi munkára eső tőke ilyenkor a technikai haladás exogén rátájánál is gyorsabb ütemben növekszik.

4 A közepes fejlettség csapdája

Ebben a szakaszban egy olyan termelési függvényt vezetünk be az előzőekben tárgyalt modellbe, mely alkalmas a fejlett és közepesen fejlett gazdaságok között fennálló technológiai rés megjelenítésére. Amennyiben a (4) termelési függvény lineárisan homogén, Cobb-Douglas típusú, azaz $Y = A \cdot K^{\alpha}\bar{L}^{1-\alpha}$, ahol $0 < \alpha < 1$, teljesülnek a (20) Inada-feltételek, így a stacionárius pont egzisztenciája, unicitása és stabilitása biztosított. A közepes fejlettség csapdájának hátterében meghúzódó technológiai rés megjelenítéséhez olyan lineárisan homogén termelési függvényt alkalmazunk, mely értelmezési tartományának valamely részhalmazán az Inada-feltételek nem teljesülnek. Ilyen a Bessenyei (2020) cikkemben bevezetett

$$Y = F(K, \bar{L}) = A \cdot \left[K^{\alpha} \cdot \bar{L}^{1-\alpha} - \frac{b \cdot \bar{L}}{v + (d \cdot \frac{K}{\bar{L}} - k_0)^{2p}} \right]$$

perturbált termelési függvény, ahol a szögletes zárójelben álló kifejezés második tagja egy permanens technológiai sokk hatására létrejött technológiai rést eredményez. Továbbra is feltesszük, hogy $0 < \alpha < 1$, továbbá a $b \neq 0$ és v paraméterek előjele határozza meg, hogy a technológiai rés hátterében egy pozitív, vagy negatív technológiai sokk húzódik-e meg. A d és k_0 valós, pozitív paraméterek azt határozzák meg, hogy a függvény értelmezési tartományának melyik részhalmazán érzékelhető a sokk hatása, a p természetes szám pedig, a b és v paraméterekkel együtt, hogy mekkora ez a részhalmaz. A termelési függvény mikroszintű megalapozása Bessenyei (2020) cikkemben megtalálható. A függvény intenzív formája:

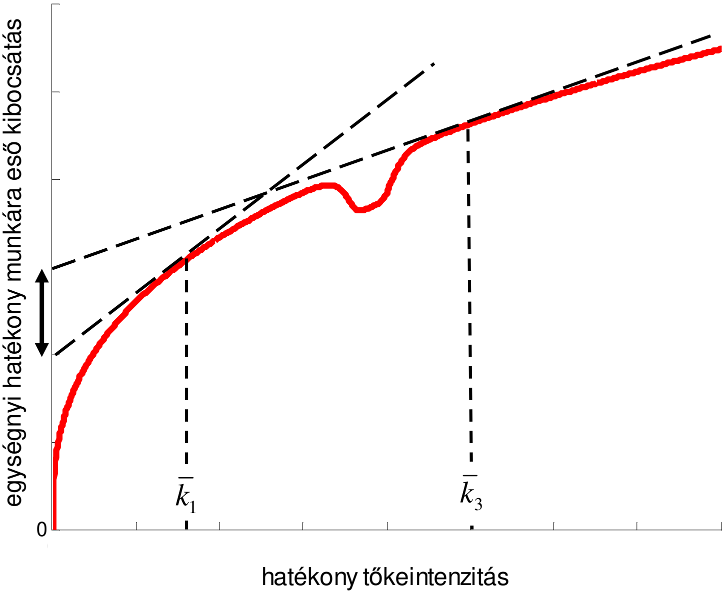
$$y = f(\bar{k}) = A \cdot \left[\bar{k}^{\alpha} + \frac{b}{v + (d \cdot \bar{k} - k_0)^{2p}} \right]. \tag{24}$$

A (24) intenzív termelési függvényt a *3. ábra* mutatja be. Figyelembe véve a (7) összefüggést látható, hogy $\bar{k}_3$ esetén a munka határtermelékenysége magasabb, mint $\bar{k}_1$ mellett. (Az érintő függőleges tengelymetszete ugyanis az origótól távolabb esik.) A technológiai rés mértékét a 3. ábrán elhelyezett függőleges méretnyíl hossza adja meg. A (24) formula relevanciáját támasztja alá a Magyar Nemzeti Bank 2020 évi Termelékenységi jelentése is. Eszerint 1995 és

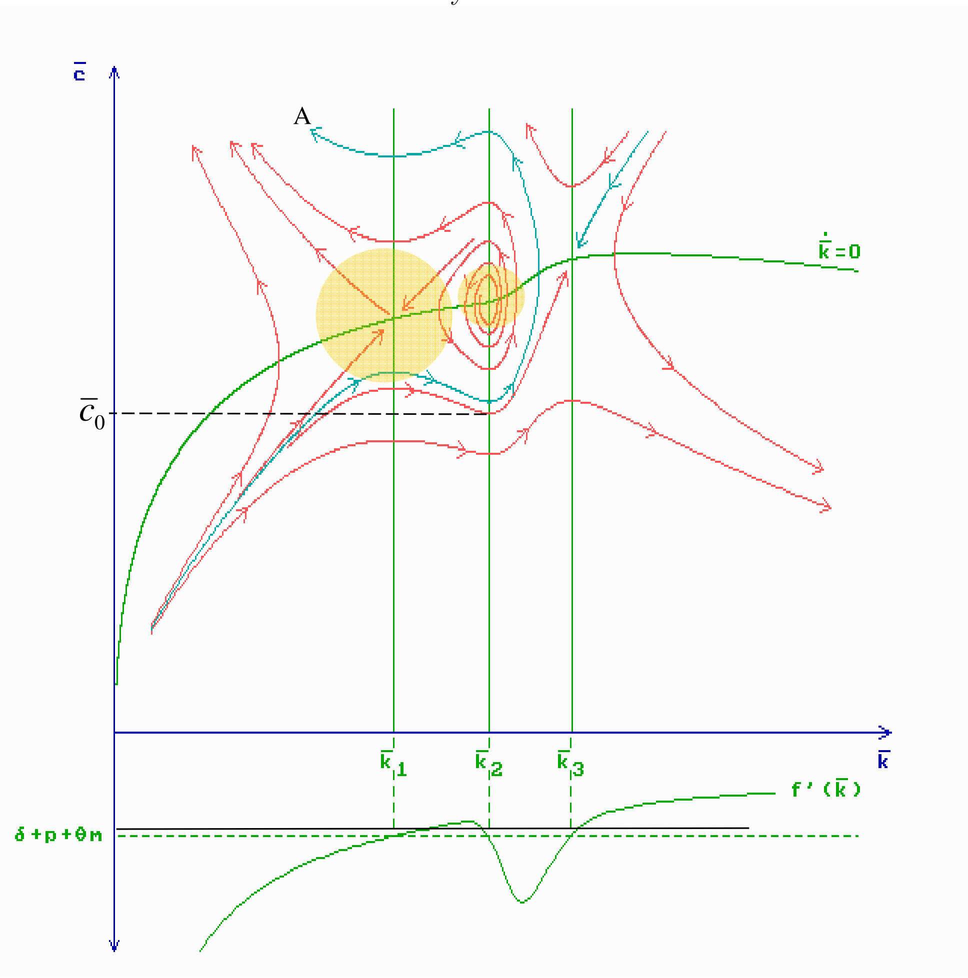
2017 között a tőke/munka arány egyrészt a szálláshely-vendéglátás ágazatban 22,4%-kal növekedett, miközben a munka átlagtermelékenysége 25,5%-kal csökkent, másrészt az információs és kommunikációs technológiai ágazatban a tőke/munka arány 57,3%-os csökkenését a munka átlagtermelékenységének 194,8%-os növekedése kísérte.

Könnyű látni, hogy a (24) intenzív termelési függvény definíciójában a szögletes zárójelben szereplő második tagnak $\bar{k} = k_0/d$ esetén lokális szélsőértéke van, továbbá $\bar{k} \to \pm\infty$ esetén nullához tart, következésképp a (18) egyensúlyi feltétel $\bar{k}$ több különböző értéke mellett is teljesülhet. Ekkor a stacionárius pont unicitása nem áll fenn, és a 3. Tulajdonság szerint $f''(\bar{k}) > 0$ esetén nyeregponti stabilitás sincs, így a stacionárius pont instabil. Egy ilyen helyzetet mutat be a *4. ábra*, ahol léteznek a hatékony tőkeintenzitás $\bar{k}_1$ és $\bar{k}_3$ melletti stacionárius pontjaihoz tartó nyeregpályák, de a $\bar{k}_2$ mellettihez ilyen nem létezik. A megszorításokon alapuló stabilizációs politika lehetőségeinek felmérése során azonban a (3) differenciálegyenlet mellett dinamikus rendszerünk másik összefüggése nem a (16) differenciálegyenlet lesz, hanem a (22). Ez egyrészt azzal a hátránnyal jár, hogy a Poincaré-Ljapunov-Perron-tétel csak $x = 0$ esetén marad érvényben, így a 4. ábrát némi óvatossággal kell szemügyre venni, mivel bemutatott pályagörbék csakis $\forall t : x = 0$ esetén érvényesek. Ezt szem előtt tartva azonban az ábra lehetőséget nyújt számos érdekes következtetés levonására.

A pályagörbék 2. Definícióban bevezetett osztályozása továbbra is fenntartható, de ezúttal négy egyensúlyi trajektória létezik. Szemügyre véve az ábrát, mindenekelőtt adódik a következő tulajdonság.



3. ábra. A (24) függvény és a felhalmozási rés



4. ábra. A közepes fejlettség csapdája Ramsey modelljében

5. Tulajdonság. *A $\bar{k}_1$ melletti stacionárius pontnak létezik egy olyan $\upsilon_1 > 0$ sugarú környezete, melyben a két egyensúlyi pályagörbén kívül valamennyi pályagörbe hedonista.*

A $\bar{k}_2$ melletti stacionárius pontnak létezik egy olyan $\upsilon_2 > 0$ sugarú környezete, melyben valamennyi pályagörbe hedonista, kivéve egyetlen, a $\bar{k}_1$ melletti stacionárius ponthoz tartó nyeregpályát.

A $\bar{k}_3$ melletti stacionárius pont minden $\upsilon > 0$ sugarú környezetében hedonista, absztinens és egyensúlyi pályagörbék egyaránt előfordulnak.

A $\bar{k}_1$ melletti stacionárius pont υ_1 és a $\bar{k}_2$ melletti stacionárius pont $\upsilon_2 > 0$ sugarú környezetét a 4. ábrán sötétített alappal jelöltük. A közepes szintű fejlettség csapdáját Agénor és Canuto (2012) tanulmányához hasonlóan, a $\bar{k}_1$ melletti stacionárius pont segítségével definiáljuk:

3. Definíció. *A $\bar{k}_1$ melletti stacionárius pont υ_1 sugarú környezetében a közepes fejlettség csapdájáról beszélünk.*

A definíció némileg eltér a mainstream irodalomban használatostól. Ennek oka, hogy míg például Agénor és Canuto (2012), vagy Bessenyei (2020) modelljeiben a közepes fejlettség csapdája stabil stacionárius pont gyanánt adódik, addig modellünkben csupán instabil stacionárius pontok és nyeregpályák léteznek. Megjegyzendő, hogy az 1. és 2. Tulajdonság a közepes fejlettség csapdájában is teljesül, csakúgy, mint bármelyik másik stacionárius pontban. Az 5. Tulajdonságból következik továbbá, hogy a közepes fejlettség csapdájában jellemzők a hedonista fogyasztási pályák, szemben a fejlett gazdaságok egyensúlyi helyzetét reprezentáló, $\bar{k}_3$ melletti stacionárius pont bármely környezetével.

Lapova és Szirmai (2018) szerint a csapdahelyzetet egyfajta technológiai rés okozza, ami az alacsony munkatermelékenységben mutatkozik meg. A 3. ábra tanúsága szerint azonban e technológiai rés mögött az egységnyi hatékony munkára eső tőke alacsonyabb szintje húzódik meg. Ezért a lemaradást a $\bar{k}_2$-höz fogjuk viszonyítani, az egyértelműbb terminológia érdekében pedig bevezetjük a felhalmozási rés fogalmát:

4. Definíció. *A $\bar{k}_1/\bar{k}_2 < 1$ hányadost standard felhalmozási résnek, a $\bar{k}(t)/\bar{k}_2$ hányadost pedig aktuális felhalmozási résnek nevezzük.*

A 4. ábra tanúsága szerint a standard felhalmozási rés nagysága csak az $f(\bar{k})$ intenzív termelési függvénytől, továbbá a δ, ρ, θ és m paraméterek értékétől függ, ezért $\bar{k}_1/\bar{k}_2$ időben állandó. Ettől a felhalmozási rés aktuális nagysága rendszeresen eltér. Azt mondhatjuk, hogy $\bar{k}(t)/\bar{k}_2 > 1$ esetén az aktuális felhalmozási rés megszűnt, vagy bezárult. Érdemes felfigyelni rá, hogy az aktuális felhalmozási rés megszűnése nem jelenti, hogy a $\bar{k}(t)$-től függetlenül definiált standard felhalmozási rés is eltűnt volna a rendszerből. Továbbá léteznek olyan trajektóriák, melyeken az aktuális felhalmozási rés bezárulását később annak újbóli megnyílása követi. Valamely pályagörbe mentén történő elmozdulás során az aktuális felhalmozási rés változik, de a standard felhalmozási rés változatlan marad.

Mivel a (24) intenzív termelési függvény alkalmazása esetén négy nyeregpálya létezik, szükséges a transzverzalitási feltétel teljesülését biztosító mechanizmus újradefiniálása. Ehhez azonban csak annyit kell tenni, hogy a $g(\bar{c})$ függvényt külön kell értelmezni arra az esetre, amikor az aktuális felhalmozási rés létezik, és arra az esetre, amikor megszűnt, azaz $\bar{k} > \bar{k}_2$. A G halmaz definiálása során az első esetben a $\bar{k}_1$ melletti stacionárius ponthoz tartó nyeregpályákat kell alapul venni a $\left(0, \bar{k}_2\right)$ intervallumon, a második esetben pedig a $\bar{k}_3$ melletti stacionárius ponthoz tartókat a $\left(\bar{k}_2, \infty\right)$ intervallumon. A 4. ábra alapján adódik a

6. Tulajdonság. *Legyen $\forall t : x(t) = 0$, ekkor a közepes szintű egyensúly csapdájának elhagyásához szükséges és elegendő*

(i) Az aktuális felhalmozási rés megszűnése.

(ii) Az aktuális felhalmozási rés megszűnésekor a gazdaság ne valamelyik hedonista pályagörbén legyen, azaz $\bar{c} \leq \bar{c}_0$ teljesüljön.

A 4. ábrán látható, hogy a $\bar{k}_1$ melletti stacionárius pontban az egy főre eső fogyasztás kisebb, mint bármelyik másik stacionárius pontban. Megjegyzendő továbbá, hogy $w(\bar{k}_1) < w(\bar{k}_3)$, teljesül tehát az a például Radosevic és Yoruk (2018) által empirikusan igazolt tulajdonság, mely szerint a közepes fejlettség csapdájába ragadt gazdaságok növekedése az alacsony bérköltségeken alapul.

5 Önmagukat újratermelő megszorítások

Az is kitűnik a 4. ábráról, hogy $\bar{c}^*(\bar{k}_1) < \bar{c}^*(\bar{k}_3)$. Ha tehát egy gazdaság a $\bar{k}_1$ melletti stacionárius pontban van, kívánatos lenne a $\bar{k}_3$ melletti stacionárius pontba eljuttatni, hisz ez az egy főre eső fogyasztás magasabb szintjét biztosítaná. Ehhez azonban mindenekelőtt az aktuális felhalmozási rés felszámolására lenne szükség, ami a gyakorlatban meglehetősen nehezen valósítható meg.

Tegyük fel ugyanis, hogy a gazdaság a közepes fejlettség csapdájában van. A 6. Tulajdonságból következik, hogy a $\bar{k}_3$ melletti stacionárius pont eléréséhez a fogyasztás megszorítása, azaz $x < 0$ szükséges. Csakhogy elégtelen mértékű megszorítás esetén, amikor a 6. Tulajdonság feltételei nem teljesülnek, a gazdaság egy hedonista pályagörbére kerül. Ez annak ellenére így van, hogy a megszorítás révén elért pályagörbe mentén $\bar{c}$ egy darabig csökken, $\bar{k}$ pedig növekszik. Amikor azonban az aktuális felhalmozási rés bezárul, $\bar{c}$ növekedésnek indul, ugyanakkor $\bar{k}$ növekedése lassul, majd csökkenni kezd, mint ez az "A"-val jelölt pályagörbe mentén nyomon követhető. Ezt a csökkenést nem állítja meg az sem, hogy amikor az aktuális felhalmozási rés ismét megnyílik, $\bar{c}$ növekedése átmenetileg csökkenésbe fordul. Így a hedonista pályagörbe mentén előbb-utóbb bekövetkezik $\bar{k} < g(\bar{c}) - \epsilon$, és (23) szerint ezzel együtt a fogyasztás újbóli megszorítása válik szükségessé, hacsak $\eta > 0$ miatt $x \geq 0$ el nem odázza a megszorítást, mint azt a 3. szakaszban bemutatott példában láttuk. A megszorítások aztán egy a $\bar{k} = g(c)$ nyeregpályához közelebb eső pályagörbére lökik a gazdaságot, szerencsés esetben pedig a $\bar{k} = g(c)$ nyeregpályára, majd a folyamat kezdődik előről.

Mindez csak abban az esetben történne másképp, ha a megszorítás nyomán a gazdaság egy olyan pályagörbére kerülne, mely a 6. Tulajdonságban szereplő mindkét feltételt kielégíti. (Két ilyen pályagörbét az ábrán fel is tüntettünk.) Ezeken a pályákon azonban a fogyasztás megszorítását követően $\bar{c}$ tovább csökken, egészen addig, míg az aktuális felhalmozási rés meg nem szűnik, és ez hosszú ideig tarthat[6], ami politikai szempontból már nehezen vállalható. Különösen nehezen vállalható $\hat{\bar{c}} < m$ esetén, amikor az egy főre eső fogyasztás is csökken. Annak tisztázására, hogy ez mikor következik be, két helyzetet különböztetünk meg:

5. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy gazdaság erősen beragadt a közepes fejlettség csapdájába, ha a felhalmozási rés zárása során létezik olyan* $0 < \xi$, *melyre* $\bar{k}_1 + \xi < \bar{k} < \bar{k}_2 - \xi$ *esetén* $\hat{c} = \frac{1}{\theta}\left[f'(\bar{k}) - \delta - \rho\right] = \hat{\bar{c}} + m < 0$. *Ha*

[6] Az egységnyi munkára eső tőke lassú alkalmazkodásáról a neoklasszikus modellben lásd pl. Romer (2006) könyvének 2.6. szakaszát.

ilyen $0 < \xi$ *nem létezik, azt mondjuk, hogy a gazdaság a közepes fejlettség csapdájában megrekedt.*

Amennyiben a 4. ábrán a IV. síknegyedbe berajzolt folytonos, vízszintes egyenes origótól való távolsága $\delta+\rho$, az ábra épp egy ilyen helyzetet mutat be. Ekkor a gazdaság a közepes fejlettség csapdájába erősen beragadt. Amikor az $f'(\bar{k})$ görbe ezen vízszintes egyenes fölött halad, az egy főre eső fogyasztás a (16) mozgásegyenlet szerint $x = 0$ mellett is csökken. A korábban alkalmazott megszorítások eredményessége most csak a fogyasztás élénkítése, azaz $\eta > 0$ révén nyerhet átmeneti igazolást, ami $\dot{\bar{k}} > 0$ miatt ilyenkor egy hedonista pályán megalapozottnak is tűnik.

Tegyük fel, hogy a 4. ábrán bemutatott helyzetben $\bar{k} < \bar{k}_1$, és a gazdaság erősen beragadt a közepes fejlettség csapdájába. Ekkor az aktuális felhalmozási rés felszámolása során $\hat{c} < m$, és $\hat{c}$ annál kisebb, minél nagyobb a $(\delta+\rho)-f'(\bar{k})$ különbség, amit ábránkon a IV. síknegyedben feltüntetett görbe és a folytonosan rajzolt, vízszintes segédegyenes függőleges távolsága jelenít meg. A gazdaság akkor ragadt be erősen a közepes fejlettség csapdájába, ha a 6. Tulajdonságban adott feltételeket teljesítő minden pályagörbe mentén létezik egy olyan időintervallum, melynek során az egy főre eső fogyasztás csökken.

A 4. ábra szerint a közepes fejlettség csapdájából két módon lehet kikerülni:

1. Egy alkalmas méretű megszorítás révén, mely a gazdaságot a $\bar{k}_3$ melletti stacionárius pontba vezető nyeregpályára vezeti.

2. Egy az 1. pontban említettnél nagyobb mértékű megszorítás révén, mely a gazdaságot egy absztinens pályagörbére vezeti. Ezt követve, a felhalmozási rés megszűnése után nyílik lehetőség a $\bar{k}_3$ stacionárius ponthoz történő közeledést szolgáló élénkítésre.

Egy a közepes fejlettség csapdájába erősen beragadt gazdaság esetén azonban a fenti két forgatókönyv közül a társadalom többnyire egyiket sem viseli el, hisz ezek a megszorítást követően további fogyasztáscsökkenést tartalmaznak. Politikai szempontból a fogyasztásnak csak olyan mértékű megszorítása vállalható, ami továbbra is egy hedonista pályagörbére vezeti a gazdaságot, ilyen módon igazolva a korábbi megszorítás eredményességét. Így a fogyasztás megszorítása hosszabb távon újabb megszorítást tesz szükségessé. Ennek során az aktuális felhalmozási rés a standard felhalmozási rés körül ingadozik, és átmenetileg be is zárulhat, sőt időszakonként $\bar{k} > \bar{k}_2$ is fennállhat anélkül, hogy a gazdaság a közepes fejlettség csapdájából végérvényesen megszabadulna. Ebben az esetben fennáll a

7. Tulajdonság. *A közepes fejlettség csapdájába erősen beragadt gazdaságok esetében a fogyasztást érintő megszorítások önmagukat újratermelik.*

Más a helyzet az 5. Tulajdonság szerint a $\bar{k}_3$ melletti stacionárius pont esetén. Ennek környezetében is bekövetkezhet a fogyasztás túlzott élénkülése, ami itt is egy hedonista pályára löki a gazdaságot. Így egy fogyasztást érintő megszorítás ebben az esetben is szükségessé válik. Ezúttal azonban nem biztos, hogy a megszorítás eredményeként a rendszer megint csak egy hedonista pályára kerül. Amennyiben a gazdaság költségvetési korlátja elegendően kemény, a rendszer egy absztinens trajektóriára jut, esetleg a nyeregpályára. Ebben az esetben pedig nem lesz szükség újabb megszorításokra.

A 6. Tulajdonságból következik, hogy bár a közepes fejlettség csapdájából kivezető pályagörbe eléréséhez és követéséhez szükséges gyors életszínvonalemelkedést nem eredményező, de jelentős mértékű megszorítások politikai szempontból alig vállalhatók, ilyen pályagörbék mégis léteznek. Erről tanúskodik a 4. ábra. A tárgyalás teljességének érdekében azonban meg kell említeni azt az esetet is, amikor ilyen pályagörbe egyáltalán nem létezik.

Figyelembe véve a 4. szakaszban a (21) linearizált rendszer mátrixának sajátértékeiről mondottakat látható, hogy a 4. ábrán bemutatott esetben a $\bar{k}_2$ stacionárius pontnál a mátrixnak két konjugált komplex sajátértéke van, pozitív valós résszel. Ezért mutatnak ugyanis a pályagörbék a $\bar{k}_2$ melletti stacionárius ponttól távolodó spirálformát. Az is látható, hogy ha $0 < f''(\bar{k}_2)$ elég kicsi, akkor a rendszermátrixnak két pozitív valós sajátértéke lesz, tehát a $\bar{k}_2$ melletti stacionárius pont instabilitása oly módon áll fenn, hogy e stacionárius pontnak létezik egy olyan $\upsilon > 0$ környezete, melyben nem érvényes az 5. Tulajdonság, hanem $\bar{k} < \bar{k}_2$ esetén $\dot{\bar{c}} < 0$, továbbá $\lim_{t\to\infty} \bar{c} = 0$ és $\lim_{t\to\infty} \bar{k} = \bar{k}_2$. Mivel egy ilyen helyzethez az szükséges, hogy $f''(\bar{k}_2) > 0$ elegendően kicsi legyen, a 4. ábra tanúsága szerint, ebben a helyzetben a standard felhalmozási rés is kicsi: a $\hat{\bar{c}} = \big[f'(\bar{k}_1) - \delta - \rho - \theta m\big] = 0$ és $\hat{\bar{c}} = \big[f'(\bar{k}_2) - \delta - \rho - \theta m\big] = 0$ nyugalmi vonalak egymáshoz annyira közel esnek, hogy a pályagörbék számítógépes szimuláció révén történő megjelenítése nem lehetséges. Ebben a helyzetben azonban a működőtőke kisebb mértékű beáramlása is elegendő a standard felhalmozási rés bezárásához, és ilyen módon a közepes fejlettség csapdájából való kikerüléshez. Mindazonáltal azt mondhatjuk, hogy ebben az esetben a $\bar{k}_1$ stacionárius pontnak létezik egy olyan $\upsilon > 0$ sugarú környezete, melyben a hedonista és egyensúlyi pályagörbék mellett olyan pályagörbék is futnak, melyek a $\bar{c} = 0$ és $\bar{k} = \bar{k}_2$ ponthoz tartanak. Másrészt a $\bar{k} < \bar{k}_2$ tartományban nincs olyan pályagörbe, melyen az aktuális felhalmozási rés teljesen megszűnne. Egyetlen pályagörbe sem keresztezi ugyanis a $\bar{k}_2$ mellett adódó $\dot{\bar{k}} = 0$ nyugalmi vonalat, így ez a közepes fejlettség csapdájában megrekedt gazdaságot a fejlett gazdaságoktól mereven elválasztja. Ebből a helyzetből tehát csak a működőtőke exogén beáramlása jelenthet kiutat, ha ennek eredményeként az aktuális felhalmozási rés teljesen megszűnik, és $\bar{k} > \bar{k}_2$ bekövetkezik.

6 Következtetések és záró megjegyzések

Tanulmányunkban megmutattuk, hogy feladva a jól viselkedő termelési függvény koncepcióját, Ramsey modellje meglehetősen komplex dinamikát mutat. Az így adódó fázissík diagramon mind a közepes fejlettség csapdájában megrekedt gazdaság, mind pedig a fejlett gazdaság növekedési lehetőségeit meghatározó pályagörbék megjelenhetnek. Ehhez nincs is szükség a lineáris homogenitásra vonatkozó feltevés elvetésére, és a (20) Inada-feltételek többsége is teljesülhet. Csupán az (a) és (b) feltételek nem teljesülnek, azok is csak a $\left(\bar{k}_1, \bar{k}_3\right)$ intervallum egy valódi részhalmazán. Elemzésünk középpontjában az az eset állt, amikor az ezen intervallumban adódó stacionárius pontban a linearizált rendszer mátrixának két konjugált komplex sajátértéke van, és a mátrix nyoma pozitív. Ilyenkor a közepes fejlettség csapdájába erősen beragadt gazdaságban a megszorítások önmagukat újratermelik. A közepes fejlettség csapdájában megrekedt gazdaságok helyzete azonban csak abban az esetben kedvezőbb, ha az exogén technikai haladás üteme szignifikánsan nagyobb nullánál. Ellenkező esetben ugyanis a háztartások a közepes fejlettség csapdájának elhagyását célzó megszorítás feloldását követően sem érzékelik életszínvonaluk emelkedését. Az ezzel együttjáró társadalmi elégedetlenséget pedig a legtöbb kormány már nem vállalja fel. Különösen akkor nem, ha az egységnyi hatékony munkára eső tőke mennyisége a technikai haladás exogén rátáját meghaladó ütemben növekszik. Ezek szerint a közepes fejlettség csapdájában megrekedt gazdaságok esetében is a megszorítások újratermelődését segítik elő az alábbi, m csökkenésének irányába ható folyamatok:

- A technikai haladás ütemének például Erber és szerzőtársai (2017) által kimutatott, évtizedek óta tartó lassulása.
- A terrorfenyegetettség erősödése, ami Cevik és Ricco (2015) szerint a biztonságra fordított kiadások növelését teszi szükségessé, és így kevesebb jut oktatásra és kutatásra.
- A környezetvédelmi előírások szigorodása, mivel a Zalai (2012) könyvében tárgyalt díjmentes lomtalanítás nem létezik. Így a környezetszennyező hulladékok és melléktermékek ártalmatlanítása is egyre több erőforrást von el a termeléstől.

A jelen dolgozatban tárgyalt modell empirikus tartalommal történő megtöltése során a fő nehézséget az jelenti, hogy nem áll rendelkezésre olyan ökonometriai eljárás, mely el tudná dönteni, hogy egy adott pillanatban a gazdaság milyen pályagörbén van. Ennek legfontosabb okai az alábbiak:

1. Mint a 4. ábrán látszik, az absztinens, hedonista és egyensúlyi pályagörbék több helyen, egymáshoz nagyon közel futnak. Feltételezve, hogy az ökonometriai vizsgálat statisztikai hibahatára nullánál nagyobb, az aktuális pályagörbe meghatározása még az aktuális felhalmozási rés felszámolása után sem feltétlenül ad megbízható eredményt.
2. Igaz ugyan, hogy $\bar{k}$ csökkenéséből felismerhető, hogy a gazdaság egy hedonista pályagörbét követ, az egy főre eső tőke alakulásáról azonban többnyire nem áll rendelkezésre megbízható információ. Az egy főre eső fogyasztás alakulását a statisztika, ha némi késéssel is, de jobban követi, azonban $\bar{c}$ bármelyik pályagörbe mentén növekedhet.

3. A (24) termelési függvényt rendszeresen érik pozitív és negatív technológiai sokkok, és ezek a sokkok kizárólag az A paraméter értékének a megváltozásával nem is írhatók le. Valószínűbb, hogy egy-egy technológiai sokk a függvény több paraméterét is érinti, hogy melyiket miként, az mindig az aktuális sokk jellegétől függ. A technológiai sokkok természetesen az $f'(\bar{k})$ görbét is eltolják, így a rendszernek több bifurkációs paramétere létezik: a stacionárius pontoknak nem csak az elhelyezkedése, de a száma is megváltozhat, következésképp egy korábban absztinens pályagörbe egy negatív technológiai sokk hatására hedonistává válhat, vagy fordítva.

A 3. pont rávilágít, hogy vizsgálódásaink során az egyszerűség érdekében a perturbált intenzív termelési függvénynek egy meglehetősen primitív, csupán egyetlen, tartós technológiai sokkot feltételező alakját vettük szemügyre. A valósághoz minden bizonnyal közelebb áll egy több sokkot feltételező forma:

$$y = A \cdot \left[\bar{k}^{\alpha} + \sum_{j=1}^{N} \frac{b_j}{v_j + (d_j \cdot \bar{k} - k_0^j)^{2p_j}} \right].$$

Ha a rendelkezésre álló ökonometriai eszközökkel ez a függvény az (5) formulával jól közelíthető, akkor azt mondhatjuk, hogy a Cobb-Douglas vagy CES formát alkalmazó dinamikus modellekben a közepes fejlettség csapdájának lehetősége a közelítés hibája miatt maradhat rejtve. Fejlett gazdaságok esetén ez a hiba elhanyagolható, közepesen fejlett gazdaságok esetén azonban nem.

A 6. Tulajdonságból következik, hogy változatlan technológiai feltételek esetén a közepes fejlettség csapdájából történő kikerüléshez szükséges lenne egy olyan makrostatisztikai eljárás, mely pontosan méri $\bar{k}$ alakulását. Ennek hiányában nem lehet számítani rá, hogy $\bar{c}$ (22) mozgásegyenletében a $\varphi(\bar{k}, \bar{c})$ függvény a megfelelő időben a fogyasztás szükséges mértékű megszorítását fogja generálni. Egy ilyen makrostatisztikai eljárás azonban a gazdaságban korábban felhalmozott tőke minél pontosabb értékelését tenné szükségessé. Az utóbbi időben a jegybankok által rendszeresen alkalmazott mennyiségi lazítások nyomán időről időre kialakuló pénzügyi buborékok ugyanakkor ezt az értékelést ássák alá.

Egy másik lehetőség a technikai haladás során olyan termelési technológiák fejlesztése, melyek a (24) intenzív termelési függvényben b csökkenését, vagy v növekedését eredményezik, ilyen módon csökkentve a standard felhalmozási rést. Az ilyen technológiák meghatározását Bessenyei (2020) cikkemben mutattam be. Ugyanakkor az 5. szakasz végén arra is rámutattunk, hogy ha ez a technikai változás nem elég jelentős mértékű, s így a $\bar{k}_2$ stacionárius pontnál a tőke növekvő határtermelékenysége fennmarad, a közepes fejlettség csapdájából kivezető pályagörbék elvesznek. E következmény hátterében az áll, hogy míg Bessenyei (2020) cikkemben a megtakarítási hányadot exogén adottságnak tételeztem fel, ezzel szemben jelen tanulmány a megtakarítói viselkedést endogenizálja.

Köszönet

A szerző ezúton mond köszönetet Vörös József professzornak mindazért a segítségért, bíztatásért és támogatásért, melyet munkájához az elmúlt évtizedek során kapott. A jelen kutatást továbbá az Innovációs és Technológiai Minisztérium Tématerületi Kiválósági Program 2020 – Intézményi Kiválósági Alprogramja finanszírozta, a Pécsi Tudományegyetem 4. ,,A hazai vállalatok szerepének növelése a nemzet újraiparosításában” tématerületi programja keretében.

Irodalom

1. Agénor, P. R. és Canuto O. (2012) *Middle-Income Growth Trap.* The World Bank, Policy Research Working Papers, 6240.
2. Bessenyei, I. (2001) Közjavak és korrupció Ramsey modelljében. *Szigma,* 32, 29–47.
3. Bessenyei, I. (2004) Korrupció és adósságdinamika. *Szigma,* 35, 41 –60.
4. Bessenyei, I. (2020) Technikai haladás a közepes fejlettség csapdájában. *Alkalmazott Matematikai Lapok,* 37(2), 1–14.
5. Cass, D. (1965). Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation, *Review of Economic Studies,* 32, 233–240.
6. Cevik, S. és Ricco, J. (2015) *Fiscal Consequences of Terrorism.* IMF Working Paper WP/15/225.
7. Erber, G., Fritsche, U. és Harms, P. C. (2017) The Global Productivity Slowdown: Diagnostics, Causes and Remedies. *Intereconomics,* 52(1), 45–50.
8. Gandolfo, G. (1997) *Economic Dynamics.* Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg
9. Koopmans, T. C. (1965) On the Concept of Optimal Economic Growth, in *The Econometric Approach to Development Planning*, North Holland, Amsterdam.
10. Kornai J. (1997) Pénzügyi fegyelem és puha költségvetési korlát. *Közgazdasági Szemle,* 44, 940–953.
11. Lapova, A. és Szirmai, Á. (2018) Structural modernisation and development traps. An empirical approach. *World Development,* 112, 59–73.
12. Mangasarian, O. L. (1966) Sufficient Conditions for the Optimal Control of Nonlinear Systems, *SIAM Journal on Control,* Vol 4, 139–152.
13. Magyar Nemzeti Bank (2018) *Növekedési jelentés.* Budapest, 2018.
14. Magyar Nemzeti Bank (2018) *Pénzügyi stabilitási jelentés.* Budapest, 2018. (november)
15. Magyar Nemzeti Bank (2020) *Termelékenységi jelentés.* Budapest, 2020.
16. Mellár, T. (2008) *Gazdaságpolitika makroszemléletben.* Pécsi Tudományegyetem, Közgazdaságtudományi Kar.
17. Parente S. és Prescott E. (2000) *Barrier to Riches.* MIT Press Cambridge, MA.
18. Radosevic, S. és Yoruk, E. (2018) Technology upgrading of middle income economics: A new approach and results. *Technological Forecasting & Social Change,* 129, 56–75.

19. Ramsey, Frank (1928) "A Mathematical Theory of Saving", *Economic Journal,* 38, 543–559.
20. Romer, D. (2006) *Advanced macroeconomics.* McGraw-Hill Irwin.
21. Solow, R. M. (1956) A Contribution to the Theory of Economic Growth. *Quarterly Journal of Economics,* 70, 65–94. https://doi.org/10.2307/1884513
22. Williamson, S., D. (2009) *Makroökonómia,* Osiris, Budapest 213. o.
23. Zalai, E. (2012) *Matematikai közgazdaságtan II. Többszektoros modellek és makrogazdasági elemzések.* Akadémiai Kiadó, Budapest.

SELF-REPRODUCING FISCAL RESTRICTIONS IN THE MIDDLE-INCOME GROWTH TRAP

The paper presents how each fiscal restriction generates the next one in the middle-income growth trap. In order to do this, we extend the Ramsey-model refined by Cass (1965) and Koopmans (1965) by introducing production function (24) into the model. The perturbation term in the square bracket represents a permanent negative technological shock, which can generate the emergence of the middle-income growth trap. As a result, we get the continuous-time dynamic system presented in Section 2. This system undergoes a bifurcation as the amount of the shock increases resulting in three singular points, which we can determine by using equations system (18) and (19). These singular points are illustrated in Figure 4 with some typical trajectories. Some of these trajectories converge towards the vertical axis; these are called hedonistic consumption-accumulation paths. Some other trajectories tend to the vertical axis. These are the abstinent consumption-accumulation paths. Furthermore, the figure depicts both saddle paths associated with the singular point characterized by the lower and higher equilibrium capital-effective labor ratio. The lower one represents the middle-income growth trap.

Section 3 presents a detailed description of the mechanism ensuring the fulfilment of transversality condition (17). This mechanism is based on a stop-go policy pursued by the government. According to equation (23), this stop-go policy tolerates the hedonistic behavior of the households until the distance between the stable arm and the actually followed hedonistic trajectory does not exceed a certain level. By achieving this level, the government starts a fiscal restriction to reduce the consumption, driving the system in this way towards the stable arm.

Figure 4 also presents the main result of the paper. According to this finding, there is a region around the middle-income growth trap, which does not comprise any abstinent consumption-accumulation path. Consequently, if a fiscal restriction employed in this region is not large enough, then it shifts the system either (1) to a stable arm, while the economy is heading towards the middle-income growth trap, or (2) to a hedonistic consumption-accumulation path, which is going to require a further fiscal restriction. The access of any trajectory, which makes it possible to escape definitely from the middle-income growth trap necessitates a sufficiently large amount of fiscal restriction. Although, from political point of view this looks to be unsupportable.