TRAJEKTÓRIÁK ÉRZÉKENYSÉGVIZSGÁLATA VÉGTELEN IDŐHORIZONTON[1]

KÁNNAI ZOLTÁN – SZABÓ IMRE – TALLOS PÉTER
Budapesti Corvinus Egyetem

1 Bevezetés

A közgazdasági dinamika számos területén felmerülő különféle feladatokban a halmazértékű analízis technikája, illetve a differenciáltartalmazások elmélete sikeresen alkalmazható. Ilyen alkalmazásokra láthatunk példákat a „bizonytalan" (nem egyértelmű) dinamikai rendszerek területén (lásd például Aubin, [1]), illetve a Leontief-féle input-output rendszerek vizsgálatánál (Kánnai és Tallos, [7]).

Hasonlóképpen eredményesnek bizonyul ez a technika bizonyos nemlineáris (és nem konvex) irányításelméleti modellek egzisztencia-problémáinak elemzésekor (lásd Kánnai, Szabó és Tallos, [8]). Érdekes irányításelméleti alkalmazásokat találunk például Vörös [9] dolgozatában.

Ezen problémákban az érzékenység vizsgálata, azaz a megoldásoknak a paraméterektől való folytonos függése különösen fontos szerepet játszik. Jelen dolgozatban azt vizsgáljuk meg, hogy milyen feltételek mellett garantálható egy differenciáltartalmazás megoldáshalmazának folytonos függése a kezdeti feltételektől.

Külön technikai nehézséget okoz, hogy a halmazértékű (bizonytalan) dinamikai rendszert végtelen időhorizonton tekintjük, amelyre a klasszikus tételek nem alkalmazhatóak. Ezt úgy hidaljuk át, hogy a rendszer megoldásainak halmazán egy olyan új normát vezetünk be, amely diszkontálja (kisimítja) az eltéréseket a végtelenben, és ezen normára nézve bizonyítjuk a folytonosságot.

A dolgozat utolsó szakaszában áttekintjük, hogy az általunk bevezetett norma használata mellett, eredményeink hogyan viszonyulnak a terület klasszikus eredményeihez. Hasonló vizsgálatokat illetően lásd Kánnai és Tallos [6].

2 Halmazértékű kontrakciók

Ebben a szakaszban röviden összefoglaljuk a halmazértékű kontrakciók azon legfontosabb tulajdonságait, amelyeket a későbbiekben használni fogunk.

Legyen (Y, d) metrikus tér, és tekintsük az Y-on értelmezett és Y nemüres zárt részhalmazaiba képező T halmazértékű leképezéseket. A T halmazértékű

[1] Beérkezett 2020. december 7. E-mail: `szaboim@uni-corvinus.hu`.

leképezést *kontrakciónak* nevezzük, ha létezik olyan $0 < \gamma < 1$ konstans, hogy minden $x,\ y \in Y$ esetén

$$h\left(T(x), T(y)\right) \leq \gamma\ d(x,y)\,,$$

ahol h a Hausdorff-metrikát jelöli. Szokás egy ilyen halmazértékű leképezést *γ-kontrakciónak* is nevezni. Emlékeztetőül, az Y-beli A és B zárt halmazok *Hausdorff-távolsága*

$$h(A,B) = \max\{\sup_{y\in B} d(y,A),\ \sup_{x\in A} d(x,B)\}\,,$$

ahol $d(x,B) = \inf_{y\in B} d(x,y)$. A Hausdorff-távolság végtelen értéket is felvehet.

Ha az Y metrikus tér teljes, akkor minden T nemüres zárt halmaz értékű kontrakciónak létezik fixpontja, azaz olyan $x \in Y$ pont, amelyre $x \in T(x)$. Lásd például Deimling [5], Theorem 11.1. Ezen T halmazértékű leképezés fixpontjainak a $\mathrm{Fix}(T)$-vel jelölt halmaza nyilvánvalóan zárt.

A következő stabilitási eredmény Lim [9]-ben található.

1. Lemma. *Legyen Y teljes metrikus tér, és tegyük fel, hogy a T és R az Y-on értelmezett nemüres zárt halmaz értékű γ-kontrakciók. Ekkor*

$$h\left(\mathrm{Fix}(T), \mathrm{Fix}(R)\right) < \frac{1}{1-\gamma} \sup_{x\in Y} h\left(T(x), R(x)\right)\,.$$

3 A probléma ismertetése

Legyen E egy valós szeparábilis Banach-tér, és tekintsünk egy $[0,\infty)\times E$-n értelmezett, az E nemüres zárt részhalmazaiba képező F halmazértékű leképezést. Tegyük fel, hogy F teljesíti még a következő feltételeket.

(i) Minden $x \in E$ esetén $F(\cdot, x)$ mérhető.

(ii) Majdnem minden $t \in [0,\infty)$ esetén $F(t,\cdot)$ Lipschitz-folytonos, pontosabban mondva létezik a $[0,\infty)$-n értelmezett lokálisan integrálható ℓ függvény, hogy majdnem minden $t \in [0,\infty)$ és minden $x, y \in E$ esetén

$$h\left(F(t,x), F(t,y)\right) \leq \ell(t)\|x-y\|\,,$$

ahol h az E normája által indukált Hausdorff-metrikát jelöli.

(iii) Majdnem minden $t \in [0,\infty)$ esetén $d\left(\mathbf{0}, F(t,\mathbf{0})\right) \leq \ell(t)$, ahol d az E normája által indukált metrikát jelöli.

A halmazértékű leképezések és a differenciáltartalmazások alapvető fogalmainak definiálásakor Deimling [5] átfogó monográfiájára hivatkozunk.

Tekintsük a következő differenciáltartalmazási feladatot:

$$\begin{cases} x'(t) \in F\left(t, x(t)\right) \\ x(0) = \xi\,. \end{cases} \tag{1}$$

Egy abszolút folytonos függvényt a differenciáltartalmazás megoldásának nevezünk, ha majdnem minden $t \in [0,\infty)$ esetén kielégíti a fenti összefüggést. Jelölje $S(\xi)$ a megoldások halmazát.

A megoldások végtelen intervallumon való kezelésére az alábbi normát vezetjük be. Legyen $L(t) = \int_0^t \ell(s)\,\mathrm{d}s$. Legyen $\alpha > 1$, és vezessük be a lokálisan integrálható függvényeknek a következő vektorterét:

$$U_\alpha = \left\{ u : [0,\infty) \to E\,,\ u \in L^1_{\mathrm{loc}}[0,\infty)\,,\ \int_0^\infty e^{-\alpha L(t)} \|u(t)\|\,\mathrm{d}t < \infty \right\}.$$

Világos, hogy az U_α tér az

$$\|u\|_\alpha = \int_0^\infty e^{-\alpha L(t)} \|u(t)\|\,\mathrm{d}t$$

normával Banach-teret alkot.

Vezessük be még az

$$X_\alpha = \{x : [0,\infty) \to E\,,\quad \text{abszolút folytonos, } x' \in U_\alpha\}\ .$$

vektorteret, és lássuk el a következő normával:

$$\|x\|_{X_\alpha} = \|x(0)\| + \int_0^\infty e^{-\alpha L(t)} \|x'(t)\|\,\mathrm{d}t\,.$$

Ezzel X_α szintén Banach-teret alkot. Megmutatjuk, hogy az (1) feladat megoldásai benne vannak a $\cap_{\alpha>1} X_\alpha$ halmazban.

1. Állítás. *Minden $\alpha > 1$ és ξ esetén $S(\xi) \subseteq X_\alpha$.*

Bizonyítás. Legyen $\alpha > 1$ és $x \in S(\xi)$, jelölje továbbá minden $t \in [0,\infty)$ esetén

$$f(t) = \int_0^t \|x'(s)\|\,\mathrm{d}s\,.$$

Ekkor majdnem minden t-re teljesül, hogy

$$\begin{aligned} f'(t) &= \|x'(t)\| \le d(0, F(t,0)) + h\left(F(t,0), F(t,x(t))\right) \\ &\le \ell(t)\left(1 + \|x(t)\|\right) \le \ell(t)\left(1 + \|\xi\| + f(t)\right)\ . \end{aligned}$$

Ezért a Grönwall-lemma alapján

$$f(t) \le (1 + \|\xi\|)\, e^{L(t)} - (1 + \|\xi\|)\ .$$

Mivel

$$\|x'(t)\| = f'(t) \le \ell(t)\left(1 + \|\xi\| + f(t)\right) \le \ell(t)\left(1 + \|\xi\|\right) e^{L(t)}\,,$$

ezért helyettesítéses integrálással azt kapjuk, hogy

$$\int_0^\infty e^{-\alpha L(t)} \|x'(t)\|\,\mathrm{d}t \le \int_0^\infty \ell(t)\left(1 + \|\xi\|\right) e^{-(\alpha-1)L(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1 + \|\xi\|}{\alpha - 1} < \infty\,.$$

Ezek szerint $x \in X_\alpha$. □

Ezek után megfogalmazhatjuk a fő eredményünket.

1. Tétel. *Minden $\alpha > 1$ esetén az (1) differenciáltartalmazás megoldásai az E halmazon értelmezett, az X_α nemüres zárt halmazaiba képező Lipschitz-folytonos $\xi \mapsto S(\xi)$ halmazértékű leképezést alkotnak.*

4 A tétel bizonyítása

Legyen $\alpha > 1$, $\xi \in E$ és $u \in U_\alpha$ rögzített, és tekintsük a következő halmazt:

$$G_\xi^u(t) = F\Big(t, \xi + \int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s\Big).$$

Értelmezzük U-n a következő halmazértékű leképezést:

$$T_\xi = \big\{\varphi \in U_\alpha \;:\; \varphi(t) \in G_\xi^u(t) \;\text{ m.m. }\; t \in [0,\infty)\big\}.$$

A definíció szerint egy $x \in X_\alpha$ függvény pontosan akkor megoldása az (1) differenciáltartalmazásnak, ha x' a T_ξ halmazértékű leképezés fixpontja, másképpen akkor és csak akkor $x \in S(\xi)$, ha $x' \in T_\xi(x')$. A tétel bizonyítása három lépésből áll.

1. lépés. Először megmutatjuk, hogy minden $u \in U_\alpha$ esetén $T_\xi(u)$ nemüres és zárt halmaz.

Könnyen látható, hogy a G_ξ^u halmazértékű leképezés mérhető. Valóban, ha $y(t) = \xi + \int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s$, akkor y lépcsősfüggvénnyel közelíthető, ezért alkalmazható a Castaing-Valadier [3], Theorem III.40. Mivel az F halmazértékű leképezés zárt értékű és az E Banach-tér szeparábilis, ezért a mérhető szelekciós tétel (*lásd [3], Theorem III.6.*) szerint a G_ξ^u halmazértékű leképezésnek létezik mérhető φ szelekciója. Egy egyszerű számolással, amely analóg az 1. Állítás bizonyításával, igazolható az alábbi becslés:

$$\|\varphi(t)\| \le \ell(t)\left(1 + \|\xi\| + \int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

Innen parciális integrálással adódik, hogy

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\alpha L(t)}\|\varphi(t)\|\,\mathrm{d}t &\le \frac{1}{\alpha}(1+\|\xi\|) + \int_0^\infty \ell(t)e^{-\alpha L(t)}\int_0^t \|u(s)\|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&\le \frac{1}{\alpha}(1+\|\xi\|) + \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha L(t)}\|u(t)\|\,\mathrm{d}t \\
&\le \frac{1}{\alpha}(1+\|\xi\|+\|u\|_\alpha) < \infty.
\end{aligned}$$

Ezzel beláttuk, hogy

$$\text{ha } \varphi \text{ a } G_\xi^u \text{ leképezés mérhető szelekciója, akkor } \varphi \in U_\alpha, \qquad (2)$$

emiatt tehát $T_\xi(u)$ nemüres halmaz. Továbbá a $T_\xi(u)$ halmaz zárt is. Ugyanis, ha $\varphi_n \in T_\xi(u)$, és $\|\varphi_n - \varphi\|_U \to 0$, akkor van olyan φ_{n_k} részsorozat, amelyre m.m. $t \in [0, \infty)$ esetén $\varphi_{n_k}(t) \to \varphi(t)$, amiből következik, hogy $\varphi \in T_\xi(u)$.

2. lépés. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a T_ξ halmazértékű leképezés kontrakció az U_α halmazon.

Legyen $u, v \in U_\alpha$ tetszőleges függvények, valamint $\varphi \in T_\xi(u)$ adott, végül $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám. Tekintsük a következő halmazértékű leképezést:

$$\Gamma(t) = G_\xi^v \cap \left\{ z \in E \ : \ \|\varphi(t) - z\| \le \ell(t) \left\| \int_0^t (u(s) - v(s))\, \mathrm{d}s \right\| + \varepsilon \right\} .$$

Ekkor a (ii) feltétel alapján a Castaing-Valadier [3], Proposition III.4 szerint a Γ halmazértékű leképezés nemüres zárt értékű és mérhető. Legyen ψ a Γ halmazértékű leképezés egy mérhető szelekciója. Ekkor (2) szerint ψ mérhető szelekciója a G_ξ^v halmazértékű leképezésnek is, így $\psi \in T_\xi(v)$. A norma definíciója alapján

$$\begin{aligned} \|\varphi - \psi\|_\alpha &= \int_0^\infty e^{-\alpha L(t)} \|\varphi(t) - \psi(t)\|\, \mathrm{d}t \\ &\le \int_0^\infty \ell(t) e^{-\alpha L(t)} \int_0^t \|u(s) - v(s)\|\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t + \int_0^\infty \varepsilon e^{-\alpha L(t)}\, \mathrm{d}t . \end{aligned}$$

Vezessük be a

$$\lambda = \int_0^\infty e^{-\alpha L(t)}\, \mathrm{d}t$$

jelölést. A fenti integrálások sorrendjét felcserélve a fenti egyenlőtlenség a következő alakba írható

$$\begin{aligned} \|\varphi - \psi\|_\alpha &\le \int_0^\infty \int_0^t \ell(t) e^{-\alpha L(t)} \|u(s) - v(s)\|\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t + \lambda\varepsilon \\ &= \int_0^\infty \int_s^\infty \ell(t) e^{-\alpha L(t)} \|u(s) - v(s)\|\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}s + \lambda\varepsilon \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty e^{-\alpha L(s)} \|u(s) - v(s)\|\, \mathrm{d}s + \lambda\varepsilon = \frac{1}{\alpha} \|u - v\|_\alpha + \lambda\varepsilon . \end{aligned}$$

Mivel ε tetszőleges, ezért ebből következik, hogy $d(\varphi, T_\xi(v)) \le \frac{1}{\alpha} \|u - v\|_\alpha$. Az u és v szerepét felcserélve ebből az következik, hogy

$$h_\alpha \left(T_\xi(u), T_\xi(v) \right) \le \frac{1}{\alpha} \|u - v\|_\alpha ,$$

(ahol h_α az $\|.\|_\alpha$ norma által indukált Hausdorff-metrika), ami azt jelenti, hogy a T_ξ halmazértékű leképezés kontrakció az U_α halmazon.

Emiatt a T_ξ halmazértékű leképezésnek létezik $u \in U_\alpha$ fixpontja. Legyen minden $t \in [0, \infty)$ esetén $x(t) = \xi + \int_0^t u(s)\, \mathrm{d}s$, ekkor $x \in S(\xi)$, azaz az (1) differenciáltartalmazás megoldása. Mivel a $\mathrm{Fix}(T_\xi)$ zárt halmaz, ezért $S(\xi)$ zárt részhalmaza az X_α halmaznak.

3. lépés. Végül igazoljuk, hogy minden $U \in U_\alpha$ és $\xi, \eta \in E$ esetén

$$h_\alpha\left(T_\xi(u), T_\eta(u)\right) \le \frac{1}{\alpha}\|\xi - \eta\|\,.$$

Megismételjük a 2. lépést Γ helyett a következő halmazértékű leképezéssel:

$$\hat{\Gamma}(t) = G_\eta^u \cap \{z \in E \ : \ \|\varphi(t) - z\| \le \ell(t)\|\xi - \eta\| + \varepsilon\}\ , \tag{3}$$

ahol φ a G_η^u halmazértékű leképezés mérhető szelekciója, és $\varepsilon > 0$. Az 1. Lemma alapján a (3) kifejezésből következik, hogy

$$h\left(\mathrm{Fix}(T_\xi), \mathrm{Fix}(T_\eta)\right) \le \frac{1}{\alpha - 1}\|\xi - \eta\|\,.$$

Legyen $\xi, \eta \in E$, és $x \in S(\xi)$. Mivel $x' \in \mathrm{Fix}(T_\xi)$, ezért minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $v \in \mathrm{Fix}(T_\eta)$, hogy

$$\|x' - v\|_\alpha \le \frac{1}{\alpha - 1}\|\xi - \eta\| + \varepsilon\,.$$

Legyen minden $t \in [0, \infty)$ esetén $y(t) = \eta + \int_0^t v(s)\,\mathrm{d}s$, ekkor $y \in S(\eta)$, és

$$\begin{aligned} \|x - y\|_{X_\alpha} &= \|\xi - \eta\| + \|x' - v\|_{U_\alpha} \le \|\xi - \eta\| + \frac{1}{\alpha - 1}\|\xi - \eta\| + \varepsilon \\ &= \frac{\alpha}{\alpha - 1}\|\xi - \eta\| + \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Ezek szerint minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$d\left(x, S(\eta)\right) \le \frac{\alpha}{\alpha - 1}\|\xi - \eta\| + \varepsilon\,,$$

ami azt jelenti, hogy $d\left(x, S(\eta)\right) \le \frac{\alpha}{\alpha-1}\|\xi - \eta\|$. A ξ és η szerepét felcserélve ebből az következik, hogy

$$h_{X_\alpha}\left(S(\xi), S(\eta)\right) \le \frac{\alpha}{\alpha - 1}\|\xi - \eta\|_\alpha\,,$$

ezzel a tételt bebizonyítottuk. □

5 Normák összehasonlítása

Jelentősen szigorúbb feltételek mellett Constantin [4] bebizonyította, hogy az

$$\|x\|_L = \sup_{t \in [0,\infty)} e^{-\alpha L(t)}\|x(t)\|$$

norma által indukált Hausdorff-metrika mellett az S megoldás leképezés folytonos. Feltette, hogy az F egy véges dimenziós tér nemüres, konvex, kompakt halmazaiba képező leképezés, amely a (t, x) változóban együttesen folytonos, az x változóban Lipschitz-folytonos. Belátjuk, hogy az X_α halmazon értelmezett fenti norma által indukált topológia erősebb, mint a Constantin által definiált.

2. Állítás. *Minden $\alpha > 1$ esetén az X_α-n értelmezett $\|.\|_{X_\alpha}$ norma által indukált topológia erősebb, mint a $\|.\|_L$ norma általi.*

Bizonyítás. Egyrészt megmutatjuk, hogy van olyan $K > 0$ konstans, hogy minden $x \in X_\alpha$ esetén $\|x\|_L \le K\|x\|_{X_\alpha}$. Jelölje $g(t) = x(t)e^{-\alpha L(t)}$, ekkor

$$g'(t) = x'(t)e^{-\alpha L(t)} - \alpha\ell(t)x(t)e^{-\alpha L(t)}\,.$$

Mivel $g(t) = x(0) + \int_0^t g'(s)\,\mathrm{d}s$, ezért minden $t \in [0, \infty)$ esetén

$$\begin{aligned}
\|g(t)\| &\le \|x(0)\| + \int_0^t e^{-\alpha L(s)}\|x'(s)\|\,\mathrm{d}s + \left\|\int_0^t \alpha\ell(s)e^{-\alpha L(s)}x(s)\,\mathrm{d}s\right\| \\
&\le \|x\|_{X_\alpha} + \left\|\int_0^t \alpha\ell(s)e^{-\alpha L(s)}\left(x(0) + \int_0^s x'(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\right\| \\
&\le \|x\|_{X_\alpha} + \int_0^t \alpha\ell(s)e^{-\alpha L(s)}\|x(0)\|\,\mathrm{d}s + \\
&\quad + \left\|\int_0^t\int_0^s \alpha\ell(s)e^{-\alpha L(s)}x'(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}s\right\|.
\end{aligned}$$

A Fubini-tétel értelmében ez az egyenlőtlenség a következőképpen írható át:

$$\begin{aligned}
\|g(t)\| &\le \|x\|_{X_\alpha} + \|x(0)\| + \alpha\left\|\int_0^t\int_0^s \ell(s)e^{-\alpha L(s)}x'(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}s\right\| \\
&\le \|x\|_{X_\alpha} + \|x(0)\| + \alpha\left\|\int_0^t\int_\tau^t \ell(s)e^{-\alpha L(s)}x'(\tau)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau\right\| \\
&\le \|x\|_{X_\alpha} + \|x(0)\| + \left\|\int_0^t \left(e^{-\alpha L(\tau)} - e^{-\alpha L(t)}\right)x'(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\| \le 2\|x\|_{X_\alpha}\,,
\end{aligned}$$

összefoglalva: $\|x\|_L \le 2\|x\|_{X_\alpha}$.

Másrészt az ellenkező irányú egyenlőtlenség nem igaz. Például legyenek x_n szakaszonként lineáris periodikus függvények alternáló $+1$ és -1 meredekségekkel, miközben az amplitúdók a nullához tartanak. Ekkor $\|x_n\|_L \to 0$, ugyanakkor $\|x_n\|_{X_\alpha}$ alulról korlátos $\lambda = \int_0^\infty e^{-\alpha L(t)}\,\mathrm{d}t$ alsó korláttal, így nem létezik olyan $K > 0$ konstans, hogy minden n esetén $\|x_n\|_{X_\alpha} \le K\|x_n\|_L$. Ezek szerint a két norma nem ekvivalens. □

Megjegyezzük, hogy az $\|\,.\,\|_L$ norma függ az α-tól. Ezért a releváns kérdés az $\{\|\,.\,\|_{L,\alpha} : \alpha > 1\}$ és az $\{\|\,.\,\|_{X_\alpha} : \alpha > 1\}$ normacsaládok által indukált lokálisan konvex topológiák összehasonlítása.

Tekintsük az $X = \cap_{\alpha>1}X_\alpha$ vektorteret, és jelölje τ_X az $\{\|\,.\,\|_{X_\alpha} : \alpha > 1\}$ normacsalád által, valamint τ_L az $\{\|\,.\,\|_{L,\alpha} : \alpha > 1\}$ normacsalád által indukált lokálisan konvex topológiát.

3. Állítás. *Az X vektortéren értelmezett τ_X topológia erősebb, mint az τ_L topológia. Továbbá a τ_X topológia mellett az $\xi \mapsto S(\xi)$ megoldás leképezés zárt halmaz értékű és folytonos.*

Bizonyítás. Az állítás első része a 2. Állítás következménye. A második része pedig abból következik, hogy ez minden $\|.\|_{X_\alpha}$ norma esetén teljesül. □

A normák fenti összehasonlítása lehetőséget ad a Filippov-Grönwall-egyenlőtlenség (lásd szintén Deimling [5], Theorem 10.2) egy egyszerű bizonyítására.

2. Tétel. *Legyen $\xi \in E$ adott, és tegyük fel, hogy*

$$m.m.\quad t \in [0,\infty) \quad esetén \quad d\left(y'(t), F\left(t, y(t)\right)\right) \le p(t)\,,$$

ahol y abszolút folytonos, $y(0) = \eta$, és p lokálisan integrálható. Ekkor minden $\alpha > 1$ esetén az (1) differenciáltartalmazásnak van olyan $x \in S(\xi)$ megoldása, amelyre minden $t > 0$ esetén

$$\|x(t) - y(t)\| \le \frac{2\alpha+1}{\alpha-1} e^{\alpha L(t)} \left(\|\xi - \eta\| + \int_0^\infty e^{-\alpha L(s)} p(s)\,\mathrm{d}s \right). \tag{4}$$

Bizonyítás. Jelölje B az E-beli zárt egységgömböt, tekintsük az $\hat{F}(t,x) = F(t,x) + p(t)B$ halmazértékű leképezést, és legyen

$$\hat{T}_\eta(u) = \left\{ \psi \in U_\alpha \ :\ \psi(t) \in \hat{F}\Big(t, \eta + \int_0^1 u(s)\,\mathrm{d}s\Big) \text{ m.m. } t \ge 0 \right\}.$$

Az $\hat{F}$ leképezés kielégíti az (i), (ii) és (iii) feltételeket, emiatt a $\hat{T}_\eta$ leképezés $1/\alpha$-kontrakció az U_α halmazon. Legyen a megoldáshalmaza $\hat{S}(\eta)$, ekkor az 1. Állítás szerint, ha $y \in \hat{S}(\eta)$, akkor y' a $\hat{T}_\eta$ leképezés fixpontja. Az 1. Tétel bizonyításának a 2. lépéséhez hasonlóan egy megfelelő szelekciót véve, ugyanolyan számolással kapjuk, hogy

$$h_\alpha\Big(T_\xi(u), \hat{T}_\eta(u)\Big) \le \frac{1}{\alpha}\|\xi - \eta\| + \int_0^\infty e^{-\alpha L(s)} p(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Felhasználva az 1. Lemmát, azt kapjuk, hogy

$$h\Big(\mathrm{Fix}(T_\xi), \mathrm{Fix}(\hat{T}_\eta)\Big) \le \frac{1}{\alpha-1}\|\xi - \eta\| + \frac{\alpha}{\alpha-1}\int_0^\infty e^{-\alpha L(s)} p(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Mivel $y' \in \mathrm{Fix}(\hat{T}_\xi)$, ezért létezik olyan $u \in \mathrm{Fix}(T_\xi)$, amelyre

$$\|y' - u\|_\alpha \le \frac{3}{2(\alpha-1)}\|\xi - \eta\| + \frac{2\alpha+1}{2(\alpha-1)}\int_0^\infty e^{-\alpha L(s)} p(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Legyen $x(t) = \xi + \int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s$, ekkor $x \in S(\xi)$, továbbá

$$\|x - y\|_{X_\alpha} \le \frac{3}{2(\alpha-1)} \left(\|\xi - \eta\| + \int_0^\infty e^{-\alpha L(s)} p(s)\,\mathrm{d}s \right).$$

Az egyenlőtlenséget $e^{\alpha L(s)}$-vel szorozva, és a 2. Állítást felhasználva kapjuk a (4) egyenlőtlenséget. $\square$

1. Megjegyzés. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a $\|.\|_{X_\alpha}$ norma becslését használva egy ,,pontonkénti" becslést kaptunk. Ez a norma olyan erős normát indukál, hogy ebben a térben a Filippov-Ważewski relaxációs tétel (lásd például Deimling [5], Theorem 8.3) már nem marad igaz. Ezt igazolja a következő egyszerű példa. Legyen $E = I\!R$ és $F(t,x) = \{-1,1\}$ konstans halmazértékű leképezés. Jelölje $\hat{S}(0)$ az F helyett a $\operatorname{co} F = [-1,1]$ jobb oldalú differenciáltartalmazásnak az origóból induló megoldásainak, az ún. relaxált megoldások halmazát, ekkor $\mathbf{0} \in \hat{S}(0)$. Másrészt az $S(0)$ megoldáshalmaz alulról korlátos $\lambda = \int_0^\infty e^{-\alpha L(s)}\,\mathrm{d}s > 0$ alsó korláttal. Ezért az $S(0)$ lezárása nem egyezhet meg $\hat{S}(0)$-lal.

Irodalom

1. Aubin, J.-P., (1997) *Dynamic Economic Theory*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York
2. Aubin, J.-P. and Frankowska, H., (1990) *Set Valued Analysis*, Birkhäuser, Boston – Basel – Berlin
3. Castaing, C. and Valadier, M., (1977) *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 580, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York
4. Constantin, A., (1994) Stability of solution sets of differential equations with multivalued right hand side, *J. Differential Equations*, 114, 243–252.
5. Deimling, K., (1992) *Multivalued Differential Equations*, Walter de Gruyter, Berlin – New York
6. Kánnai Z. and Tallos P., (1995) Stability of solution sets of differential inclusions, *Acta Sci. Math.* 61, 197–207.
7. Kánnai Z. and Tallos P., (1999) Selections, differential inclusions and economic modeling, *Szigma* 29(4), 213–220.
8. Kánnai Z., Szabó I. and Tallos P., (2020) Set-Valued Techniques in Dynamic Economic Models, in ,,Games and Dynamics in Economics", edited by G. I. Bischi and F. Szidarovszky, Springer Nature, 195–203.
9. Lim, T. C., (1985) On fixed point stability for set valued contractive mappings with applications to generalized differential equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 110, 436–441.
10. Vörös J., (2017) A minőség és az ár kapcsolatáról, *Szigma* 48(3-4), 133–149.

SENSITIVITY ANALYSIS OF TRAJECTORIES ON INFINITE TIME HORIZON

A central problem in the theory and applications of differential inclusions is the continuous dependence of solutions on the initial conditions. Several papers have studied this problem, and it seems that basically there are two major approaches.

One of them is establishing the existence of a continuous map $\xi \mapsto x_\xi$ such that x_ξ is the Caratheodory-solution to the Cauchy-problem

$$\begin{cases} x'(t) \in F(t, x(t)) \\ x(0) = \xi \,. \end{cases}$$

The other one is proving the continuity of the set valued map $\xi \mapsto S(\xi)$, where $S(\xi)$ denotes the set of solutions starting from ξ. Continuity of the set valued map S is understood with respect to the Hausdorff-metric induced by the norm of the space solutions. Here we refer to Lim [9], who used a contraction principle for set valued maps, or to Deimling [5] Lemma 8.3, about the application of the so-called Filippov-Grönwall-inequality. Ultimately, both methods are based on a certain iteration scheme. In [4] Constantin proved the continuity of the solution map for infinite time horizon problems, by introducing an appropriate norm on the space of continuous functions. His proof relies on stability properties of fixed point sets of set valued contractions obtained by Lim [9].

In the present paper we extend that infinite time horizon result under significantly milder conditions, by observing that much stronger statements can be obtained, if the contraction principle is applied in the space of the derivatives of solutions instead of the space of solutions. In contrast to Constantin [4], we do not need the convexity or the compactness of the right-hand side, nor do we use continuity, only measurability is assumed for F with respect to t. Also, the norm we introduce on the space of solutions generates a stronger topology than that of Constantin, so our continuity result is a refinement of the existing theorems. Finally, the comparison of the norms allows us to derive a Filippov-Grönwall-type inequality in infinite dimensional spaces.