FOGALMAK, MÓDSZEREK

ISMERKEDÉS A PONTATLAN VALÓSZÍNŰSÉG FOGALMÁVAL[1]

PINTÉR MIKLÓS
BME, Budapesti Corvinus Egyetem

Cikkünkben áttekintjük a pontatlan valószínűség (ambiguity) fogalmát. Egy motiváló, jól ismert példától, az Ellsberg-paradoxontól (Ellsberg, 1961) indulunk, és két alapmodellt (Schmeidler, 1989 és Gilboa és Schmeidler, 1989) ismertetünk. Egy rövid fejezetben az alkalmazások felé is kikacsintunk.

Kulcsszavak: Döntéselmélet, Pontatlan valószínűség, Ellsberg-paradoxon

1 Bevezető

A magyarországi felsőoktatásból fájóan hiányzik a pontatlan valószínűségek (ambiguity) fogalmának oktatása. Ezzel a cikkel az a célunk, hogy bemutassuk a pontatlan valószínűség fogalmát, egyfajta ismertetőt, bevezetőt adjunk a témában, és nem utolsó sorban felkeltsük a hazai szakmai közönség érdeklődését a fogalom iránt.

A pontatlan valószínűség intenzíven kutatott és fontos területe a döntéselméletnek, lásd többek között a Schmeidler (1989), Gilboa és Schmeidler (1989), Ghirardato és Marinacci (2002), Klibanoff et al. (2005), Gilboa (2006), Marinacci és Montucchio (2006), Maccheroni et al. (2006), Gilboa (2009), Ghirardato és Siniscalchi (2010), Cerreia-Vioglio et al. (2011), Lehrer (2012), Gilboa és Marinacci (2016) munkákat, ill. lásd még Machina és Siniscalchi (2014) alapos és kimerítő áttekintését a területnek.

A pontatlan valószínűség több szempontból is fontos a döntéselméletben. Egyrészt érdekes tisztán elméleti szempontból, mint a valószínűségeloszlás egy általánosítása, mint nem-additív valószínűség. Ebben az esetben már az is kérdés. hogy milyen halmazfüggvény a nem-additív valószínűség. Abban az esetben, ha rögzítjük a nem-additív valószínűség fogalmát, akkor még mindig kérdés, hogy milyen integrálfogalommal párosítva alkalmazzuk (lásd pl. Schmeidler (1989)). Ezek a kérdések nyitottak, nincs rájuk széles körűen elfogadott válasz.

Az alkalmazások szempontjából a pontatlan valószínűségek legalább két szempontból érdekesek. Egyrészt, mint a játékelméletben alkalmazott kevert

[1] A szerző köszönetet mond a bíráló alapos és konstruktív bírálatáért. Ez a cikk Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal (NKFIH K 133882 és K 133883) támogatásával készült. Beérkezett 2019. március 25. E-mail: `pinter@math.bme.hu`.

stratégiák általánosításai segíthetnek olyan játék-kimeneteleket egyensúlyi (Nash 1950, 1951) kimenetté ,,emelni", amik nem kevert Nash-egyensúlyok. Ilyen nem Nash-egyensúlyi szituációk vizsgálatára lásd a Greenberg (2000), Lehrer (2012), Riedel és Sass (2014) cikkeket. Másrészről a pontatlan valószínűség segíthet jobban megérteni olyan piaci jelenségeket, mint az egyensúlyi árak változékonysága, vagy a piaci bizonytalanság hatásai és stratégiai lehetőségei.

Még egy fontos kérdést említünk, mielőtt belekezdünk a pontatlan valószínűség fogalmának bemutatásába. Összevetve a kockázattal foglalkozó alapmodelleket, azok közül is a von Neumann és Morgenstern (1944), Savage (1954) és az Anscombe és Aumann (1963) modelleket, a következő két alapvető megközelítést látjuk. Von Neumann és Morgenstern (1944) esetében a kockázat alapfogalma a modellnek, azaz a kockázat objektív. Savage (1954) modelljében a kockázat a döntéshozó ,,preferenciáiba van kódolva", azaz a kockázat szubjektív. Anscombe és Aumann (1963) egy vegyes modell, mind az objektív, mind a szubjektív kockázat megjelenik benne. Fontos látni azonban, hogy akár objektív, akár szubjektív a kockázat, a fenti modellekben (és más modellekben is) annak matematikai modellje a valószínűségeloszlás és a hagyományos (absztrakt) integrál páros.

A korábbiakban már utaltunk rá, hogy a pontatlan valószínűség modellezés szempontjából is jelentősen különbözik a kockázattól. Egyrészt gyakorlatilag minden modellben a pontatlan valószínűség szubjektív. Egyetlen kivételt ismerünk[2] Riedel és Sass (2014), de ott a szerzők felteszik, hogy valamilyen szerkezet tud pontatlan valószínűséget generálni, úgy, mint a valószínűség esetén egy véletlenszám-generátor (vagy pszeudo véletlenszám-generátor). Másrészről, még a szubjektív pontatlan valószínűség esetében is a különböző modellek jellemezően különböző nem-additív valószínűség- és különböző integrálfogalmakkal operálnak.

A cikk felépítése a következő. A következő fejezetben bevezetjük a pontatlan valószínűség fogalmát. A 3. fejezetben a Schmeidler (1989) és a Gilboa és Schmeidler (1989) modelleket tekintjük át. A 4. fejezetben a pontatlan valószínűség alkalmazás szempontjából érdekes tulajdonságaiból adunk ízelítőt. Az utolsó fejezetben összefoglaljuk cikkünk fő üzeneteit.

2 Pontatlan valószínűség

Ebben a fejezetben bemutatjuk a pontatlan valószínűség (ambiguity) fogalmát. A döntéselméletben és általában a közgazdaságtudományban a nem tökéletes informáltságnak, bizonytalanságnak több fajtája ismert. Talán a legismertebb bizonytalanság a kockázat, amikor nem ismert a világ pontos állapota, a világállapot, hanem csak egy, a világállapotokon definiált valószínűségeloszlás ismert. Tehát ebben az esetben a döntéshozó azt ,,tudja" csak, hogy az egyes világállapotok milyen valószínűséggel következnek be. Például,

[2] A Choquet (1954), Nguyen (1978), Castaldo et al. (2004) által vizsgált véletlen halmaz tekinthető úgy, mint ami az objektív pontatlan valószínűség alapja, alapfogalma.

lehet piaci konszenzus abban, hogy 5%-os eséllyel lesz fizetésképtelen Törökország 2021. december 1-én, és 95%-os valószínűséggel fizetőképes lesz az adott napon.

Fontos látni, hogy még ha piaci konszenzusról beszélünk is, az adott valószínűségeloszlás szubjektív, a piaci konszenzus szubjektív, nem objektív (Bayes-i megközelítés), ezért szerepel „tudja”, nem pedig tudja a fenti mondatban.

A pontatlan valószínűség (az első hasonló fogalom Knight (1921)-ben fordul elő) esetében – szemben a kockázattal, ahol minden kimenetel valószínűsége ismert – vannak olyan események, amiknek nem ismert a valószínűsége, pontosabban az ismert csak, hogy az adott esemény „valószínűsége” egy intervallumba esik. Ilyen esetek fordulnak elő pl. szakértői vélemények összesítésekor, nevezetesen, amikor a szakértők véleménye egy adott esemény valószínűségéről egy intervallumban szóródik (Dempster, 1967, 1968; Shafer, 1976). A következőkben egy példán keresztül mutatjuk be a pontatlan valószínűség fogalmát.

Ez a példa az ún. Ellsberg-paradoxon (Ellsberg, 1961). Egy urnában 30 piros és 60 fekete vagy sárga golyó van, tehát 90 golyó van egy urnában, a golyókról azt tudjuk, hogy három színűek lehetnek, piros, sárga vagy fekete, illetve a piros golyók száma 30.

A döntéshozó véletlenszerűen kivesz az urnából egy golyót, és két döntési szituációban dönt (1. táblázat). A B akció esetén, mivel a fekete golyók száma nem ismert, a döntéshozó pontatlan valószínűséggel szembesül. Hasonlóan, a C akció esetén, mivel a sárga golyók száma nem ismert, és a piros golyók száma ismert, így nem ismert annak valószínűsége sem, hogy a döntéshozó piros vagy sárga golyót húz.

A tipikus döntéshozó az első esetben az A akciót választja a B-vel szemben, míg a második esetben a D akciót preferálja a C-vel szemben.

A akció	100 \$-t kap, ha piros golyót húz
B akció	100 \$-t kap, ha fekete golyót húz
	illetve
C akció	100 \$-t kap, ha piros vagy sárga golyót húz
D akció	100 \$-t kap, ha fekete vagy sárga golyót húz

1. táblázat. Ellsberg-paradoxon

A „probléma” ezekkel a döntésekkel a következő. Legyen P_R, P_B és P_Y annak a valószínűsége, hogy a döntéshozó rendre piros, fekete vagy sárga golyót húz. Ekkor, ha a döntéshozó preferálja az A akciót a B-vel szemben, akkor a várható hasznosság szerint

$$P_R u(100\$) + (1 - P_R)u(0\$) > P_B u(100\$) + (1 - P_B)u(0\$),$$

ahol u a döntéshozó (Bernoulli-féle) hasznossági függvénye.

Hasonlóan, ha a döntéshozó a D akciót preferálja a C-vel szemben, akkor

$$(P_R+P_Y)u(100\$)+(1-P_R-P_Y)u(0\$) < (P_B+P_Y)u(100\$)+(1-P_B-P_Y)u(0\$)$$

Tegyük fel, hogy a döntéshozó többre értékeli a 100\$-t, mint a 0\$-t. Ekkor

$$P_R(u(100\$) - u(0\$)) > P_B(u(100\$) - u(0\$)),$$

azaz

$$P_R > P_B,$$

és

$$(P_R + P_Y)(u(100\$) - u(0\$)) < (P_B + P_Y)(u(100\$) - u(0\$)),$$

azaz

$$P_R < P_B,$$

ami ellentmondás.

Vegyük észre, hogy mindkét döntési helyzetben a tipikus döntéshozó a pontos valószínűséggel leírható akciót választja a pontatlan valószínűséggel leírhatóval szemben, azaz azt mondhatjuk, hogy a tipikus döntéshozó pontatlan valószínűség kerülő.

Ugyanakkor a fenti ellentmondás azt mutatja, hogy a szokásos additív valószínűségekkel és a megfelelő várható hasznossággal nem írható le a (pontatlan valószínűség kerülő) döntéshozó viselkedése. Tehát a várható hasznosság alapmodellje (Savage, 1954) nem tudja a fenti paradoxont magyarázni. Magyarán szólva az Ellsberg-paradoxon magyarázatához új megközelítésre van szükség.

3 A pontatlan valószínűség modellezése

A pontatlan valószínűségnek több modellje ismert az irodalomban, ebből itt kettőt ismertetünk vázlatosan: Schmeidler (1989) és Gilboa és Schmeidler (1989); további fontos modellek pl. Ghirardato és Marinacci (2002), Klibanoff et al. (2005), Gilboa (2006), Marinacci és Montucchio (2006), Maccheroni et al. (2006), Gilboa (2009), Ghirardato és Siniscalchi (2010), Cerreia-Vioglio et al. (2011), Lehrer (2012), Gilboa és Marinacci (2016).

3.1 Schmeidler (1989) modellje

Schmeidler (1989) modelljében a pontatlan valószínűségek matematikai modellezésére az úgynevezett kapacitások használatosak. A kapacitások olyan monoton halmazfüggvények, amik az üres halmazhoz 0-t rendelnek. Nem belemenve a matematikai részletekbe, a lényeges eltérés a szokásos várható hasznosság-modellekhez (Savage, 1954) képest az, hogy itt az integrálás nem egy valószínűség szerint, hanem egy kapacitás szerint történik. Sokféle integrál ismert, a következőkben – Schmeidler (1989)-et követve – a Choquet-integrált fogjuk használni (Choquet, 1954). A Choquet-integrál definíciója a következő:

1. Definíció. *Legyen $(\Omega, \mathcal{A})$ egy mérhető tér, azaz $\mathcal{A}$ egy σ-algebra Ω-n. Legyen továbbá $f : \Omega \to \mathbb{R}$ egy korlátos mérhető függvény és ν egy olyan* *monoton halmazfüggvény az $\mathcal{A}$ σ-algebrán, hogy $\nu(\emptyset) = 0$ és $\nu(\Omega) = 1$. Ekkor az f függvény ν szerinti Choquet-integrálja a következő:*

$$(C)\int f\,\mathrm{d}\nu \overset{\circ}{=} \int_{-\infty}^{0} \nu(\{\omega \in \Omega : f(\omega) \geq s\}) - \nu(\Omega)\,\mathrm{d}s + \\ + \int_{0}^{\infty} \nu(\{\omega \in \Omega : f(\omega) \geq s\})\,\mathrm{d}s\,,$$

ahol a jobb oldalon az integrál a Riemann-integrál.

Illusztrációként lássuk az Ellsbeg-paradoxonra alkalmazva a fenti fogalmat. Az előző fejezetben láttuk, hogy a kockázat fogalmával az Ellsberg-paradoxon nem magyarázható. A következőkben megmutatjuk, hogy Schmeidler modelljében már feloldható az Ellsberg-paradoxon.

Legyen $S = \{s_f, s_p, s_s\}$ a világállapotok halmaza, s_f azt ,,jelenti", hogy fekete golyót húz a döntéshozó, hasonlóan értelmezhető s_p és s_s is. Vegyük észre, hogy a húzás véletlenszerű, annak eredménye nem függ a döntéshozótól, tehát a javasolt értelmezés értelmes. Legyen továbbá $\mathcal{A} = \mathcal{P}(S)$, azaz minden lehetséges világállapot-kombináció esemény ebben a konkrét modellben.

Az egyes akciók minden világállapothoz hozzárendelnek egy kimenetelt, jelen esetben egy pénzbeli kifizetést. Jelölje $X = \{0, 100\}$ a kimenetelek (pénzbeli kifizetések) halmazát. Minden egyes kimenetelnek van egy a döntéshozó általi értéke, hasznossága. Legyen $u(x) = \mathrm{id}_X$, tehát a Bernoulli-féle hasznossági függvény egyszerűen csak az identitás függvény, azaz 100\$ érjen 100-at a döntéshozónak.

Legyen továbbá $\nu(\{s_p\}) = \frac{1}{3}$, $\nu(\{s_f, s_s\}) = \frac{2}{3}$, $\nu(\{s_f\}) = \nu(\{s_s\}) = 0$ és $\nu(\{s_f, s_p\}) = \nu(\{s_p, s_s\}) = \frac{1}{3}$, a döntéshozó nem-additív valószínűsége, azaz a döntéshozó preferenciáját ,,reprezentáló" nem-additív valószínűség. Ekkor ν a Choquet-integrál fogalmán keresztül meghatároz egy funkcionált.

Továbbá, legyen

$$f_p(s) = \begin{cases} 100, & \text{ha } s = s_p \\ 0 & \text{különben} \end{cases},$$

a pirosra teszünk akció,

$$f_f(s) = \begin{cases} 100, & \text{ha } s = s_f \\ 0 & \text{különben} \end{cases},$$

a feketére teszünk akció,

$$f_{ps}(s) = \begin{cases} 100, & \text{ha } s \in \{s_p, s_s\} \\ 0 & \text{különben} \end{cases},$$

a pirosra vagy sárgára teszünk akció,

$$f_{fs}(s) = \begin{cases} 100, & \text{ha } s \in \{s_f, s_s\} \\ 0 & \text{különben} \end{cases},$$

a feketére vagy sárgára teszünk akció. Ekkor

$$(C)\int u \circ f_p\,\mathrm{d}\nu = \frac{100}{3} > 0 = (C)\int u \circ f_f\,\mathrm{d}\nu$$

és

$$(C)\int u\circ f_{ps}\,\mathrm{d}\nu = \frac{100}{3} < \frac{200}{3} = (C)\int u\circ f_{fs}\,\mathrm{d}\nu\,,$$

tehát megkaptuk a paradoxon során tipikusan megfigyelt választásokat.

Az Ellsberg-paradoxon lényegében a nem ismert valószínűségek során tapasztalt döntésekről szól. A megfigyelések szerint a döntéshozók igyekeznek az ilyen bizonytalanságokat kerülni, tehát amint a paradoxon is mutatja, az ismert valószínűségű eseményekhez köthető akciókat preferálják az ismeretlen valószínűségűekkel szemben. Ez a viselkedés nagyon jól leírható a fenti modellel.

Fontos megjegyezni, hogy Schmeidler (1989) cikkének csupán egy eredménye a fenti modell. Sőt, a fenti modell csak egy másik eredmény tükrében válik igazán érdekessé, mégpedig akkor, amikor Schmeidler (1989) megmutatja, hogy a fenti modell reprezentálja egy axiómákkal leírt preferenciaosztály elemeit. Konkrétan:

2. Tétel (Schmeidler (1989)). *Legyen $(S,\mathcal{A})$ mérhető tér a világállapotok halmaza, $(X,\mathcal{M})$ mérhető tér a kimenetelek halmaza, és $A=\{f: S\to\Delta(X,\mathcal{M})$, korlátos mérhető függvény$\}$, ahol $\Delta(X,\mathcal{M})$ az $(X,\mathcal{M})$ mérhető téren értelmezett valószínűségi mértékek halmaza, és f mérhetősége a $\Delta(X,\mathcal{M})$-en értelmezett gyenge* topológia Borel-halmazai tekintetében értendő. Ekkor egy $\succsim$ bináris reláció A-n pontosan akkor teljesíti a következő axiómákat*

- *Preferencia: teljes és tranzitív,*
- *Folytonosság: tetszőleges, $\mu,\mu',\mu''\in\Delta(X,\mathcal{M})$-re, hogy $\mu\succ\mu'\succ\mu''$ létezik $\alpha,\beta\in(0,1)$, hogy $\alpha\mu+(1-\alpha)\mu''\succ\mu'\succ\beta\mu+(1-\beta)\mu''$,*
- *Nemdegeneráltság: létezik $a,a'\in A$, hogy $a\succ a'$,*
- *Monotonitás: ha minden $s\in S$ világállapotra $a(s)\succsim a'(s)$, akkor $a\succsim a'$,*
- *Komonoton függetlenség: tetszőleges $a,a',a''\in A$ alternatívákra, melyekre $a\succ a'$ és a és a'' komonoton – azaz tetszőleges $s,s'\in S$ világállapotokra igaz, hogy $a(s)\succ a(s')$-ből következik $a''(s)\succsim a''(s')$ és $a(s')\succ a(s)$-ből következik $a''(s')\succsim a''(s)$ –, teljesül, hogy tetszőleges $\alpha\in(0,1]$-re*
$$\alpha a+(1-\alpha)a''\succ\alpha a'+(1-\alpha)a'',$$

ha egyértelműen létezik egy normalizált ($\nu(S)=1$) kapacitás ν az $\mathcal{A}$ σ-algebrán, és létezik egy Bernoulli-féle hasznossági függvény $u: X\to\mathbb{R}$, hogy

$$a\succsim b \ \text{ pontosan akkor, ha } \ (C)\int u\circ a\,\mathrm{d}\nu \geq (C)\int u\circ b\,\mathrm{d}\nu,$$

minden $a,b\in A$-ra, ahol $u\circ a(s)=\int u\,\mathrm{d}a(s)$, $s\in S$.

A fenti tétel egy reprezentációs tétel, ami azt mondja, hogy ha egy preferencia rendelkezik a tételbeli tulajdonságokkal, akkor reprezentálható egy normalizált kapacitás, Bernoulli-féle hasznossági függvény, Choquet-integrálfogalom triásszal, ráadásul a normalizált kapacitás (és a Choquet-integrálfogalom) egyértelmű. Továbbá tetszőleges bináris reláció, amit egy fenti tulajdonságú funkcionál generál, teljesíti a felsorolt axiómákat.

Tehát Schmeidler (1989) megközelítésében az alapfogalmak az adott tulajdonságokkal rendelkező preferenciák, illetve az objektív kockázat ($\Delta(X, \mathcal{M})$ elemei), azaz a „pontatlan valószínűség"-féle bizonytalanság a preferenciákba van kódolva, így az nem objektív, hanem szubjektív.

3.2 A Gilboa és Schmeidler (1989)-féle modell

Gilboa és Schmeidler megközelítése szerint a pontatlan valószínűség, amint a magyar elnevezés mutatja is, tulajdonképpen azt jelenti, hogy a döntéshozó nem egy valószínűségeloszlással szembesül (kockázat), hanem valószínűségeloszlások egy halmazával; a Gilboa és Schmeidler (1989) modell esetében valószínűségeloszlások egy nemüres, konvex, korlátos és zárt halmazával. Tehát Gilboa és Schmeidler modelljében a döntéshozó a valószínűségeloszlások egy nemüres, konvex, kompakt halmazával szembesül.

Fontos megjegyezni, hogy a valószínűségeloszlások nemüres, konvex, korlátos és zárt halmaza fogalom ekvivalens a TU-játékok (átruházható hasznosságú kooperatív játékok) elméletében ismert egzakt TU-játékok fogalmával. Pontosabban ismert (Peleg és Sudhölter, 2007), hogy egy egzakt játék magja nemüres, konvex, korlátos és zárt részhalmaza a kifizetésvektorok halmazának, továbbá a kifizetésvektorok tetszőleges nemüres, konvex, korlátos és zárt részhalmazához egyértelműen létezik egy egzakt TU-játék, aminek a magja pontosan az adott halmaz. Tehát Gilboa és Schmeidler (1989) modelljében a nem-additív valószínűségek normalizált, nem-negatív egzakt TU-játékok.

Gilboa és Schmeidler modelljében a döntéshozó egyszerűen a várható értékre vonatkozó maximin kritérium alapján dönt. Tehát a hasznosság maximalizáció a következőben definiált értékhez kötődik.

3. Definíció. *Adott $u : X \to \mathbb{R}$ mérhető Bernoulli-féle hasznossági függvény, $C \subseteq \Delta(S, \mathcal{A})$ nemüres, konvex, a gyenge* topológiában kompakt részhalmaza az $(S, \mathcal{A})$ mérhető téren értelmezett valószínűségi mértékek halmazának. Legyen továbbá f egy akció, azaz egy S-ből $(X, \mathcal{M})$-be képező korlátos, mérhető leképezés. Ekkor f „hasznossága"*

$$\min_{\mu \in C} \int u \circ f \, \mathrm{d}\mu \, .$$

Tekintsük a bevezetőben tárgyalt példát (Ellsberg-paradoxon) a Gilboa és Schmeidler modell tükrében.

Legyen $(S, \mathcal{A})$, a világállapotok mérhető tere, X a kimenetelek tere, u a Bernoulli-féle hasznossági függvény, f_p, f_f, f_{ps} és f_{fs} akciók pontosan azok, mint a Schmeidler (1989) modelljének illusztrálásakor. Legyen továbbá a lehetséges priorok halmaza

$$C = \left\{ \mu \in \Delta(S, \mathcal{A}) : \mu(\{s_p\}) = \frac{1}{3} \right\} .$$

Tehát C nemüres, konvex, kompakt halmaz, melyet a következő ν egzakt TU-játék karakterizál:

$$\nu(\emptyset) = 0\,, \quad \nu(S) = 1\,,$$
$$\nu(\{s_p\}) = \nu(\{s_f, s_p\}) = \nu(\{s_p, s_s\}) = \frac{1}{3}\,,$$
$$\nu(\{s_f\}) = \nu(\{s_s\}) = 0\,,$$
$$\nu(\{s_f, s_s\}) = \frac{2}{3}\,,$$

azaz ν magja a C halmaz ($C = \{\mu \in \Delta(S, \mathcal{A}) : \mu(A) \geq \nu(A),\ A \in \mathcal{A}\}$).

Ekkor

$$\min_{\mu \in C} \int u \circ f_p \,\mathrm{d}\mu = \frac{100}{3} > 0 = \min_{\mu \in C} \int u \circ f_f \,\mathrm{d}\mu$$

és

$$\min_{\mu \in C} \int u \circ f_{ps} \,\mathrm{d}\mu = \frac{100}{3} < \frac{200}{3} = \min_{\mu \in C} \int u \circ f_{fs} \,\mathrm{d}\mu,$$

tehát megkaptuk a paradoxon során megfigyelt választásokat.

Látható, hogy Gilboa és Schmeidler (1989) és Schmeidler (1989) modelljei nagyon hasonló eredményt adnak az Ellsberg-paradoxon esetén. Az is látható, hogy a Schmeidler (1989) esetén tekintett kapacitás megegyezik a Gilboa és Schmeidler (1989)-féle modellben a priorok C halmazát karakterizáló egzakt TU-játékkal (ennek is köszönhető a számszerűleg is azonos eredmény a két modellben). A két modell azonban nem ugyanazokat a döntéseket adja általában, azaz a két modell – Schmeidler (1989) és Gilboa és Schmeidler (1989) modelljei – különbözőek.

Úgy tűnhet, hogy Gilboa és Schmeidler (1989) modelljében a pontatlan valószínűség (ambiguity) objektív, hiszen a priorok nemüres, konvex, kompakt C halmaza megadja a pontatlan valószínűséget. Ahhoz, hogy lássuk, nem erről van szó, tekintsük Gilboa és Schmeidler (1989) fő eredményét, a reprezentációs tételüket.

4. Tétel (Gilboa és Schmeidler (1989)). *Legyen $(S, \mathcal{A})$ mérhető tér a világállapotok halmaza, ahol S véges halmaz*[3]*, $(X, \mathcal{M})$ mérhető tér a kimenetelek halmaza, és $A = \{f : S \to \Delta(X, \mathcal{M}),\ \text{mérhető függvény}\}$, ahol $\Delta(X, \mathcal{M})$ az $(X, \mathcal{M})$ mérhető téren értelmezett valószínűségi mértékek halmaza, és f mérhetősége a $\Delta(X, \mathcal{M})$-en értelmezett gyenge* topológia Borel-halmazai tekintetében értendő. Ekkor egy $\succsim$ bináris reláció A-n pontosan akkor teljesíti a következő axiómákat*

- *Preferencia: teljes és tranzitív,*
- *Folytonosság: tetszőleges, $\mu, \mu', \mu'' \in \Delta(X, \mathcal{M})$-re, hogy $\mu \succ \mu' \succ \mu''$ létezik $\alpha, \beta \in (0, 1)$, hogy $\alpha\mu + (1 - \alpha)\mu'' \succ \mu' \succ \beta\mu + (1 - \beta)\mu''$,*

[3] Gilboa és Schmeidler tétele általánosabb az itt kimondottnál. Az általánosabb forma kimondásához túlságosan sok új fogalmat és eredményt kéne bemutatni, ezért eltekintünk annak ismertetésétől.

- *Nemdegeneráltság: létezik* $a, a' \in A$*, hogy* $a \succ a'$,
- *Monotonitás: ha minden* $s \in S$ *világállapotra* $a(s) \succsim a'(s)$*, akkor* $a \succsim a'$,
- *Bizonyosság-függetlenség: tetszőleges* $a, a', a'' \in A$ *alternatívákra, hogy* $a \succ a'$, a'' *konstans – azaz tetszőleges* $s, s' \in S$ *világállapotokra igaz, hogy* $a''(s) = a''(s')$ *– továbbá, tetszőleges* $\alpha \in (0,1)$*-re igaz, hogy*
$$\alpha a + (1-\alpha)a'' \succ \alpha a' + (1-\alpha)a'',$$
- *Bizonytalanság-kerülés: tetszőleges* $a, a' \in A$ *alternatívákra, hogy* $a \succsim a'$*, és tetszőleges* $\alpha \in [0,1]$*-re igaz, hogy*
$$\alpha a + (1-\alpha)a' \succsim a',$$

ha egyértelműen létezik egy nemüres, konvex, kompakt halmaz $C \subseteq \Delta(S, \mathcal{M})$*, és létezik egy Bernoulli-féle hasznossági függvény* $u : X \to \mathbb{R}$*, hogy minden* $a, b \in A$*-ra*

$$a \succsim b \quad \textit{pontosan akkor, ha} \quad \min_{\mu \in C} \int u \circ a \, \mathrm{d}\mu \geq \min_{\mu \in C} \int u \circ b \, \mathrm{d}\mu,$$

ahol $u \circ a(s) = \int u \, \mathrm{d}a(s)$*,* $s \in S$.

A fenti tétel, hasonlóan a 2. tételhez, egy reprezentációs tétel, ami azt mondja, hogy ha egy preferencia rendelkezik a tételbeli tulajdonságokkal, akkor reprezentálható egy a priorok nemüres, konvex, kompakt halmaza, Bernoulli-féle hasznossági függvény, hagyományos integrálfogalomra építő maximin kritérium triásszal, ráadásul a priorok nemüres, konvex, kompakt halmaza egyértelmű. Továbbá tetszőleges bináris reláció, amit egy fenti funkcionál generál, teljesíti a felsorolt axiómákat.

Tehát Gilboa és Schmeidler (1989) megközelítésében is az alapfogalmak az adott tulajdonságokkal rendelkező preferenciák, azaz a „pontatlan valószínűség"-féle bizonytalanság ebben az esetben is a preferenciákba van kódolva, tehát a pontatlan valószínűség ebben a modellben is szubjektív.

4 A pontatlan valószínűség egy-két további tulajdonsága

Ebben a fejezetben vázlatosan és röviden, néhány egyszerű példán keresztül bepillantunk a pontatlan valószínűségek (lehetséges) alkalmazásaiba.

A következőkben egy egyszerű példát (Dow és Werlang, 1992) mutatunk a pontatlan valószínűségek pénzügyekbeli használatára.

Tegyük fel, hogy egy pénzügyi termék kifizetése a következő:

$$f(s) = \begin{cases} 1, & \text{ha } s = s_1, \\ 3, & \text{ha } s = s_2, \end{cases}$$

ahol $S = \{s_1, s_2\}$ a világállapotok halmaza. A döntéshozó nem-additív valószínűsége (Schmeidler, 1989) ν (az $(S, \mathcal{P}(S))$ mérhető téren) a következő:

$$\begin{gathered}\nu(\emptyset) = 0\,, \quad \nu(S) = 1\,,\\ \nu(\{s_1\}) = 0{,}3\,,\\ \nu(\{s_2\}) = 0{,}4\,.\end{gathered}$$

Vegyük észre, hogy ν egy egzakt TU-játék, és

$$C = \{\mu \in \Delta(S, \mathcal{P}(S)) : \mu(\{s_1\}) \geq 0{,}3 \ \text{ és } \ \mu(\{s_2\}) \geq 0{,}4\}$$

a priorok nemüres, konvex és kompakt halmaza Gilboa és Schmeidler (1989) modelljében.

Tegyük fel továbbá, hogy a döntéshozó hasznossági függvénye az identitás függvény (1000 Ft 1000 Ft-ot ér a döntéshozónak). Ekkor a döntéshozó várható hasznossága az f pénzügyi termék vásárlásából:

$$(C)\int u \circ f \, \mathrm{d}\nu = \min_{\mu \in C} \int u \circ f \, \mathrm{d}\mu = 0{,}6 f(s_1) + 0{,}4 f(s_2) = 1{,}8\,,$$

tehát ez az az összeg, amennyiért vásárolna a döntéshozó az f pénzügyi termékből (mind Schmeidler (1989), mind Gilboa és Schmeidler (1989) modellje szerint).

Most nézzük meg, hogy az f pénzügyi termék eladása esetén – ahol az árak a -1-szeresei az eredeti árnak – mi a várható hasznosság.

$$(C)\int u \circ (-f) \ \mathrm{d}\nu = \min_{\mu \in C} \int u \circ (-f) \, \mathrm{d}\mu = -(0{,}3 f(s_1) + 0{,}7 f(s_2)) = -2{,}4\,,$$

tehát ez az az összeg, amennyiért eladna a döntéshozó az f pénzügyi termékből (megint mind Schmeidler (1989), mind Gilboa és Schmeidler (1989) modellje szerint).

Tehát a döntéshozó az f pénzügyi termék vásárlását 1,8 hasznosság növekedéseként, míg eladását 2,4 hasznosság csökkenésként értékeli, tehát (a Bernoulli-féle hasznossági függvény az identitás), ha a piaci ár az $[1{,}8, 2{,}4]$ intervallumban van, akkor a döntéshozó nem kereskedik az f pénzügyi termékkel, azaz nem veszi és nem is adja el.

Vegyük észre, hogy a fenti példa a következő egyszerű matematikai tulajdonságra épít: a vizsgált modellekbeli várható hasznosságok nem additívak, azaz

$$\begin{gathered}(C)\int u \circ (f) \ \mathrm{d}\nu + (C)\int u \circ (-f) \ \mathrm{d}\nu = \\ = \min_{\mu \in C} \int u \circ (f) \ \mathrm{d}\mu + \min_{\mu \in C} \int u \circ (-f) \ \mathrm{d}\mu = -0{,}6 < 0\,.\end{gathered}$$

A fenti modellben az árak rögzítettek, tehát nem beszélhetünk egyensúlyról. Fontos továbbá, hogy a fenti modell statikus, ami szintén problematikus. Epstein és Wang (1994) feloldja Dow és Werlang (1992) modelljének említett két gyengeségét, és megmutatja, hogy Lucas (1978) modelljének pontatlan valószínűséggel módosított változatában az egyensúlyi ár Dow és Werlang (1992)-i értelemben nem egyértelmű.

Az egyensúlyi ár nem egyértelműsége, pontosabban az, hogy az egyensúlyi ár egy zárt intervallum, a pénzügyi folyamatok újfajta értelmezését teszi lehetővé. Mintha az történne, hogy az adott intervallumon belüli pontos árnak nem lenne jelentősége, nem lenne információtartalma. További érdekes kérdés lehet, hogy milyen esetekben mekkora az egyensúlyi ár intervalluma. A nem pontos valószínűségek különösen fontosak lehetnek a nagyon komplex, nehezen átlátható termékek, pl. némely származtatott termék viselkedésének megértésében.

A pontatlan valószínűségek segíthetnek a különböző adatok, pl. GDP becslés, hatásainak megértésében is. A hatás illusztrálására Cabantous (2007) cikkére térünk ki röviden. Ebben a cikkben gyakorló aktuáriusokat (biztosításmatematikusokat) kérdeztek meg egy káresemény biztosításának árazásáról (mennyiért ajánlanának biztosítást az adott káreseményre). Pontosan ismert a lehetséges kár nagysága, de nem feltétlenül ismert a káresemény valószínűsége. Három esetet különböztetünk meg:

- pontosan ismert a káresemény valószínűsége,
- két szakértő szubjektíven értékeli a káresemény valószínűségét, és egyezik az értékelésük,
- két szakértő szubjektíven értékeli a káresemény valószínűségét, és nem egyezik az értékelésük.

Minden esetben számszerűen ugyanaz a valószínűség adódik, tehát, pl. 5% az első esetben, mindkét szakértő 5%-ot mond a második esetben, és az egyik szakértő 4%-ot, a másik szakértő 6%-ot mond a harmadik esetben.

A felmérés eredményei szerint az ajánlott biztosítási díj egyre magasabb (az első esetben a legalacsonyabb és a harmadikban a legmagasabb), illetve egyre növekszik a száma azoknak, akik egyáltalán nem ajánlanának biztosítást (piaci kudarc).

Világosan látszik a fenti példa és pl. a GDP-vel kapcsolatos egyes spekulációk közötti analógia. Ha egy országról, pontosabban annak növekedési kilátásairól az ún. szakértői vélemények eltérnek, akkor az ország várhatóan nehezebben és rosszabb feltételek mellett tudja az államkötvényeit értékesíteni. Történik ez függetlenül attól, hogy a szakértői átlag, vagy a „valós” kilátás mi. A bizonytalanság kárt okoz az érintett országnak, és bizonytalanság generálásával kárt lehet okozni az adott országnak.

5 Összefoglalás

Ebben a cikkben röviden bemutattuk a pontatlan valószínűség fogalmát, két alapmodelljét (Schmeidler, 1989, Gilboa és Schmeidler, 1989) vázlatosan ismertettük, és két alkalmazás felé tett lépést is tárgyaltunk. Célunk a hazai közönség figyelmének felhívása a pontatlan valószínűség fogalmára és annak fontosságára. Reményeink szerint sikerült kedvet csinálni a hazai kollégáknak a téma oktatásához és kutatásához.

Irodalom

1. Anscombe F. J., Aumann R. (1963) A Definition of Subjective Probability. *The Annals of Mathematical Statistics,* 34(1):199–205
2. Cabantous L. (2007) Ambiguity Aversion in the Field of Insurance: Insurers' Attitude to Imprecise and Conflicting Probability Estimates. *Theory and Decision,* 62(3):219–240
3. Castaldo A., Maccheroni F., Marinacci M. (2004) Random correspondences as bundles of random variables. *The Indian Journal of Statistics,* 66:409–427
4. Cerreia-Vioglio S., Ghirardato P., Maccheroni F., Marinacci M., Siniscalchi M. (2011) Rational Preferences under Ambiguity. *Economic Theory,* 48:341–375
5. Choquet G. (1954) Theory of capacities. *Annales de l'institut Fourier,* 5:131–295.
6. Dempster A. P. (1967) Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. *The Annals of Mathematical Statistics,* 38(2):325–339
7. Dempster A. P. (1968) A generalization of Bayesian inference. *Journal of Royal Statistical Society,* 30:205–247
8. Dow J., Werlang S. R. C. (1992) Uncertainty aversion, risk aversion, and the optimal choice of portfolio. *Econometrica,* 60(1):197–204
9. Ellsberg D. (1961) Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms. *Quarterly Journal of Economics,* 75(4):643–669
10. Epstein L. G, Wang T. (1994) Intertemporal asset pricing under Knightian uncertainty. *Econometrica,* 62:283–322
11. Ghirardato P., Marinacci M. (2002) Ambiguity made precise: A comparative foundation. *Journal of Economic Theory,* 102:251–289
12. Ghirardato P., Siniscalchi M. (2010) A more robust definition of multiple priors, mimeo
13. Gilboa I. (ed) (2006) *Uncertainty in Economic Theory, Essays in honor of David Schmeidler 65's birthday.* Routledge Press
14. Gilboa I. (2009) *Theory of Decision under Uncertainty.* Econometric Society Monographs, Cambridge University Press
15. Gilboa I., Marinacci M. (2016) *Ambiguity and the Bayesian Paradigm,* Springer Graduate Texts in Philosophy, vol. 1, Springer
16. Gilboa I., Schmeidler D. (1989) Maxmin Expected Utility with a Non-Unique Prior. *Journal of Mathematical Economics,* 18:141–153
17. Greenberg J. (2000) The right to remain silent. *Theory and Decision,* 48:193–204
18. Klibanoff P., Marinacci M., Mukerji S. (2005) A Smooth Model of Decision Making under Ambiguity. *Econometrica,* 73(6):1849–1892
19. Knight F. H. (1921) *Risk, uncertainty and profit.* Houghton Mifflin Company
20. Lehrer E. (2012) Partially specified probabilities: Decisions and games. *American Economic Review: Microeconomics,* 4(1):70–100

21. Lucas R. E. J. (1978) Asset Prices in an Exchange Economy. *Econometrica,* 46:1429–1445
22. Maccheroni F., Marinacci M., Rustichini A. (2006) Ambiguity Aversion, Robustness, and the Variational Representation of Preferences. *Econometrica,* 74(6):1447–1498
23. Machina M. J., Siniscalchi M. (2014) *Handbook of the Economics of Risk and Uncertainty,* vol. 1, Elsevier, chap Ambiguity and Ambiguity Aversion, 729–807
24. Marinacci M., Montucchio L. (2006) Introducion to the mathematics of ambiguity. In: Gilboa I. (ed) *Uncertainty in Economic Theory, Essays in honor of David Schmeidler 65's birthday*, Routledge, 46–107
25. Nash J. (1950) Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences,* 36(1):48–49
26. Nash J. (1951) Non-Cooperative Games. *The Annals of Mathematics,* 54(2): 286–295
27. Nguyen H. T. (1978) On random sets and belief functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 65:531–542
28. Peleg B., Sudhölter P. (2007) *Introduction to the theory of cooperative games*, second ed. Springer-Verlag
29. Riedel F., Sass L. (2014) Ellsberg games. *Theory and Decision,* 76(4):469–509
30. Savage L. J. (1954) *The Foundations of Statistics.* John Wiley and Sons
31. Schmeidler D. (1989) Subjective Probability and Expected Utility without Additivity. *Econometrica,* 57(3):571–587
32. Shafer G. (1976) *A Mathematical Theory of Evidence.* Princeton University Press
33. von Neumann J., Morgenstern O. (1944) *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton University Press

INTRODUCTION TO AMBIGUITY

This paper considers the notion of ambiguity. We start from the Ellsberg paradox, we discuss two important models of the field (Schmeidler, 1989, Gilboa and Schmeidler, 1989). In a short section we consider applications of models of ambiguity too.