

NŐK40 ÉS A REÁLBERROBBANÁS¹

SIMONOVITS ANDRÁS

MTA KRRTK Közgazdaság-tudományi Intézet, BME Matematikai Intézet

A Nők40 program 2011 óta minden magyar nőnek, aki legalább 40 évnyi jogviszonyt szerzett, lehetővé teszi, hogy az általános korhatár elérése előtt csökkentés nélküli nyugdíjjal vonuljon vissza. Mérsékelt átlagos reálbér-növekedési ütem és pesszimista várakozások esetén érdemes ezt a lehetőséget maximálisan kihasználni, de gyorsabb növekedés és pontos előrelátás esetén nem.

Kulcsszavak: tb-nyugdíj, Nők40, optimális nyugdíjba vonulási kor. *JEL szám:* H55.

1 Bevezetés

A Nők40 program Magyarországon 2011 óta érvényes: minden nő, akinek legalább 40 éves jogviszonya van, életkorától függetlenül, az általános nyugdíjkorhatár elérése előtt bármikor nyugdíjba mehet – csökkentés nélküli nyugdíjjal. Ezt a rendszert a kormány a családpárti nyugdíjpolitika vívmányának tekinti, és folyamatosan propagálja. Korábban munkatársaimmal (*Czeplédi és szerzőtársai* [2016]) és egyedül (*Simonovits* [2018a]) azért bíráltuk e rendszert, mert méltánytalanul kedvezményt nyújt egy jelentős kisebbségnek, miközben önkényesen büntet másokat.

Gál Róbert Iván megjegyzésén túl az utóbbi évek jelentős reálbér-növekedései döbentettek rá arra, hogy a bírálatunk alapjául szolgáló modellek eltekintettek a valorizáció egyre fontosabb ellenhatásától. Például egy 2016-ban 40 éves jog- és munkaviszonnyal visszavonuló, mindig átlagosan kereső 60 éves nő – ha a kieső munkajövedelmét éppen kiegyensúlyozza a többlet szabadidő – jobban tette volna, ha még vár 3 évet, és a 28 százalékkal nagyobb reálbérhez adódó 7,5 százalékos járadékszorzót is kihasználva menne nyugdíjba. Bár 20 év helyett csak 17 évig kapná a 37 százalékkal nagyobb évi nyugdíjat, tömegében sokkal többet kapna. Ez nem módosít azonban korábbi kritikánk azon részén, hogy az egyébként merev korhatárt épp elérő 63 évesen és 39 éves jogviszonnyal nyugdíjba vonuló nő (és férfit) további méltánytalanság ér a Nők40-nel.

Az alapmodellben (2. szakasz) tökéletes előrelátást feltételezve évről évre kiszámítjuk a Nők40-beli optimális nyugdíjba vonulási életkort. Kiemeljük, hogy változó reálbér növekedési ütem mellett az optimális életkor is évről évre

¹Köszönetem fejezem ki Gerencsér Lászlónak, az ONYF egykori fősztályvezetőjének és egy névtelen lektornak értékes tanácsaikért. Köszönetet mondok az NKF K 129 078 számú pályázati támogatásért. E-mail: simonovits.andras@krtk.mta.hu. Beérkezett: 2018. december 10.

változhat: nőhet is, csökkenhet is. Pontosabb következtetések levonásához figyelembe kell vennünk a mellékszabályokat (3. szakasz): például a 2013 és 2015 közti túlindezáást és a 2017–2018-as nyugdíjprémiumot, valamint az Erzsébet-utalványt. (Az első beépül a már megállapított nyugdíjba, a második és a harmadik nem.) 2011-ben érdemes halasztani 1 évet, 2013-ban viszont a 3-éves halasztás helyett azonnal célszerű kiugrani.

Foglalkoznunk kell a tökéletlen előrelátás következményeivel is (4. szakasz) és az átlagosnál rövidebb és a hosszabb várható élettartammal is (5. szakasz). A következtetéseket a cikk főrészen a végére tesszük (6. szakasz). Végül a Függelékben egy olyan minimodellet elemzünk, amelyben a reálbér növekedési üteme állandó és az idő folytonos. Ekkor 3 és 4 százalékos reálnövekedés esetén 1, illetve 4 évvel érdemes tovább dolgozni, mint muszáj lenne.

A korábbi irodalomból megemlítjük, hogy *Simonovits* [2018a] egy hagyományos optimalizálási modellben már vizsgálta a kérdést, és szerény (2 százalékos) reálbér-növekedés mellett is megmutatta, hogy még a Nők40-ben is érdemes lehet 1 évvel halasztani a visszavonulást. *Simonovits* [2018c] az árindexált nyugdíjak problémáit taglalva, jegyezte meg, hogy az árindexálásnál évjáraty szempontból méltányosabb bérindexálás előrehozza az optimális nyugdíjba vonulás időpontját.

2 Alapmodell

Legyen a naptári év indexe t , az azévi nettó kereset reálértéke v_t , ahol t_0 -ban rögzítjük az árszintet. Föltesszük, hogy hősnőnk mindenkor az éves átlagos bért kereste, jogviszonya megegyezett a munkaviszonyával, és t -ben éppen elérte a minimálisan előírt $S = 40$ évet. Életkora jóval alacsonyabb, mint az általános nyugdíjkorhatár: R_t , amely 2013-ban 62, 2016-ban 63, 2019-ben 64 és 2022-ben 65 év. (A valóságban a köztes éveken előbb a tavasszal, majd az ősszel születettek nyugdíjkorhatára emelkedik fél évvel. És ha egy Marsról jött nő mondjuk 2013-ban elérte a 62 éves általános korhatárt, de csak 2016-ban ment nyugdíjba, akkor az itt nem vizsgált bónusza nem az emelt 63 év fölötti korra, hanem az egykori 62 évre vonatkozna.) 40 és 50 évi szolgálati idő között az éves járadékszorzó $\delta = 0,02$. Tegyük föl, hogy Q éves korában kezdett el dolgozni, tehát t -ben $Q + S$ éves volt. Ha azonnal nyugdíjba megy, akkor kezdőnyugdíja reálértékben

$$b_t = \delta S v_{t-1}, \quad Q + S < R_t, \quad (1)$$

ahol v_{t-1} a $t - 1$ -edik év átlagos nettó reálbére.

Egyelőre feltesszük, hogy nincs túlindezáás és nyugdíjprémium (lásd 3. szakasz), ezért reálértékben ez a nyugdíj marad élete végéig. Ebben a szakaszban még nem teszünk különbséget kezdő és már megállapított nyugdíj között.

Tegyük föl, hogy hősnőnk nem megy azonnal nyugdíjba, hanem tovább dolgozik $s = 1, 2$ és 3 évvel, de még mindig nem éri el a számára rögzített korhatárt, tehát nem kap bónuszt. Ekkor $-v_{t+s-1}$ -gyel jelölve a $t + s - 1$ -edik

év nettó átlagbérét – az emelt nyugdíja

$$b_{s,t} = \delta(S + s)v_{t+s-1}, \quad Q + S + s < R_t, \quad s = 0, 1, 2, 3. \quad (2)$$

Tegyük föl, hogy hősnőnk nem hal meg a $t+3$ -adik évig, és várható értékben T évet él még, azaz a $t+T-1$ -edik év végén hal meg. Döntésének a maradék életpályára kiterjedő következményeit legegyszerűbben a nyugdíjazása és halála között kapott reálnyugdíjai tömege méri:

$$B_{t,s} = (T - s)b_{s,t}. \quad (3)$$

Behelyettesítve (3)-ba (2)-t:

$$B_{t,s} = (T - s)\delta(S + s)v_{t+s-1}. \quad (4)$$

Feltesszük, hogy hősnőnk célja a reálnyugdíj-tömeg maximalizálása. (Szokásosabb, de jóval kevésbé áttekinthető a *Simonovits* [2018a] által is vizsgált életpálya-hasznosságfüggvény maximalizálása.) Ekkor az optimális halasztást $B_{t,s^o} > B_{t,s}$, $s \neq s^o$ definiálja. Felhasználva (4)-et, adódik az

1. tétel. *Mindentudó hősnőnk arra az évre halasztja nyugdíjba vonulását, amelyre*

$$(T - s^o)\delta(S + s^o)v_{t+s^o-1} > (T - s)\delta(S + s)v_{t+s-1}, \quad s^o \neq s; \quad Q + S + s^o < R_t.$$

Az 1. táblázat bemutatja a 2010-hez viszonyított nettó reálbérek idősorát. A 2011 és 2018 közötti nettó reálbér-növekedés ma már ismert, és feltesszük, hogy 2019-ben már csak 6, aztán meg 4 százalék lesz. (Más kérdés, hogy *Dedák* [2018] és *Oblath* [2018a, b] szerint a tényleges reálbér-növekedési dinamika jóval mérsékeltabb volt, de a tényleges valorizálás az itt közölt adatokon alapult.)

Év	Nettó reálbér	Év	Nettó reálbér
t	v_t	t	v_t
2010	1,000	2016	1,179
2011	1,024	2017	1,299
2012	0,989	2018	1,403
2013	1,020	2019	1,487*
2014	1,052	2020	1,547*
2015	1,098	2021	1,609*

Megjegyzés. A *-gal jelölt évek saját előrejelzésem. $v_{2010} = 132,6$ ezer forint.

1. táblázat. Nettó reálbérek idősora, 2010–2021

Simonovits [2018a] bemutatta, hogy 2015-ben milyen kevesen dolgoztak tovább a Nők40-esek közül. Itt most elméletileg vizsgáljuk, hogy milyen években jártak jól a túldolgozók.

$T = 20$ évnvi nyugdíjban töltött év és $\delta = 0,02$ járadékszorzó alapján kiszámítható a 2. táblázat 3. és 4. oszlopa: a $b_{s,t}$ nyugdíj és a $B_{t,s}$ nyugdíjtömeg alakulását, és minden blokkban dőlti a maximális nyugdíjtömeget. (Az 5. oszlop a később bemutatandó mellékhatásokat is figyelembe veszi.) 2011-ben és 2012-ben a Nők40 program azonnali igénybe vétele valóban optimális volt, de 2013-tól már érdemes lett volna 3 évet rádolgozni.

Legkorábbi év	Halasztás év	Kezdő	Tisztán összes reál nyugdíj	Mellékhatásokkal $\tilde{B}_{s,t}$
t	s	$b_{s,t}$	$B_{s,t}$	
2011	0	0,800	16,0	19,4
	1	0,840	16,0	19,5
	2	0,831	15,0	17,9
	3	0,877	14,9	17,5
2012	0	0,819	16,4	20,1
	1	0,811	15,4	18,5
	2	0,857	15,4	18,2
	3	0,905	15,4	18,0
2013	0	0,791	15,8	19,1
	1	0,836	15,9	18,9
	2	0,884	15,9	18,6
	3	0,944	16,0	18,5
2014	0	0,816	16,3	18,5
	1	0,863	16,4	19,3
	2	0,922	16,6	19,2
	3	1,014	17,2	19,8
2015	0	0,842	16,8	19,9
	1	0,900	17,1	19,9
	2	0,990	17,8	20,5
	3	1,117	19,0	21,6
2016	0	0,878	17,6	20,5
	1	0,967	18,4	21,2
	2	1,091	19,6	22,4
	3	1,207	20,5	23,3
2017	0	0,943	18,9	21,9
	1	1,065	20,2	23,2
	2	1,179	21,2	24,1
	3	1,279	21,7	24,6
2018	0	1,039	20,8	23,9
	1	1,151	21,9	24,9
	2	1,249	22,5	25,4
	3	1,330	22,6	25,5

Megjegyzés. Minden nyugdíjszám a 2010. évi átlagos nettóbérben van kifejezve.

2. táblázat. Mennyire érdemes halasztani a Nők40-et tisztán és mellékhatásokkal?

3 Túlindexálás és nyugdíjprémium

Eddig eltekintettünk a mellékszabályok hatásától. Érdemes azonban figyelembe venni őket. Ismert, hogy 2013 és 2016 között a magyar kormányzat minden évben több százalékponttal túlbecsülte az inflációt, és ezért a már megállapított nyugdíjak reálértéke rendre 3,4 (2013), 2,6 (2014), 1,9 (2015) és 1,9 (2016) százalékkal nőtt, s ezek az emelések beépültek a további emelések alapjául szolgáló nyugdíjakba. Emellett az Erzsébet-utalvány és a nyugdíjprémium az átlagos nyugdíjra vetítve 2017-ben 1,5 és 2018-ben 1,9 százalékkal emelte a nyugdíjakat az adott évben – ezek a kiegészítések viszont *nem* épültek be a nyugdíjakba. Önkényesen feltesszük, hogy 2019-től nem lesz mód nyugdíjprémium fizetésére, de az évi 10 ezer forintos Erzsébet-utalványt a mindenkor havi átlagnyugdíj 1 százalékára emelik, például 2019-re már 13

ezer forintra. Itt a valóságban élesen megjelenik a kereseti pálya eddig elhanyagolt eltérése az átlagtól: az átlag többszörösét kereső szerencséseknél alig számítanak a be nem épülő juttatások, az átlag töredékét keresőknél viszont nyomtatékosan számítanak. E kérdések vizsgálata meghaladja a cikk kereteit.

Ekkor a t -edik évben indítható, de csak s évvel később induló nyugdíjak folytatásának reálértéke évről évre változik, emiatt kettő helyett három alsó indexre lesz szükségünk, a 3. index a nyugdíjazás óta eltelt évek száma: u . A kezdő nyugdíj (2) képlete marad érvényben: $b_{s,t,0}$, a folytatott $b_{s,t,u}$ nyugdíjat viszont a túlindexálási k_t tényező és az egyszerű m_t kiegészítés módosítja:

$$b_{s,t,0} = \delta(S + s)v_{t+s-1}, \quad (2)$$

és

$$b_{s,t,u} = b_{s,t,u-1}k_{t+s+u} + m_{t+s+u}, \quad u = 1, 2, \dots, T - s - 1. \quad (\tilde{2})$$

A nyugdíjtömeg kiszámítása is bonyolultabbá válik:

$$\tilde{B}_{t,s} = \sum_{u=0}^{T-1-s} b_{t,s,u}. \quad (\tilde{3})$$

Az új nyugdíjtömegek a 2. táblázat utolsó, 5. oszlopában kapnak helyet. Felhívjuk a figyelmet a mellékszabályok hosszú távú hatására. Például a 2011-es évben azonnal nyugdíjba vonuló nő nyugdíjtömegét a mellékszabályok annak ellenére emelik 3,4 egységgel, hogy sem 2011-ben, sem 2012-ben nem volt hatása a mellékszabályoknak. Érdekes változásokat figyelhetünk meg: például a mellékhatások figyelembe vételével 2011-ben megnyíló lehetőséget érdemes volt 1 évvel elhalasztani, 2012-ben és 2013-ban viszont nem volt érdemes 3 évvel halasztani, azonnal célszerű volt nyugdíjba menni. Aztán 2014-től megint a maximális halasztás lett optimális.

4 Hiányos előrelátás

Eddig feltettük, hogy a dolgozó pontosan látja előre a nettó reálbér-dinamikát és a mellékszabályokat. Mindkét feltevés azonban gyenge lábakon áll. Félretéve a mellékszabályok hatását, érdemes megnézni, mi történik, ha a bérdinamika tökéletesen előrelátását elvetjük. Rögzített t nyitóévre dinamikus időinkonzisztencia léphet föl, azaz később megbánhatjuk, amit korábban tettünk.

Tegyük föl, hogy hősönök már s évet rádolgozott a 40 évre ($s = 0, 1, 2$), és múltként ismeri a $v_{t-1}, \dots, v_{t+s-1}$ értékét is, azaz a kihagyott $b_{t,0}, \dots, b_{t,s}$ nyugdíjakat, amelyeket $T, \dots, T - s$ évig kapna, sőt ismeri a

$$b_{t,s+1} = \delta(S + s + 1)v_{t+s} \quad (5)$$

értéket. De még nem ismeri az esetleges további értékeket.

Egyelőre rövidre zárjuk az elemzést, és feltesszük, hogy hősönök mindig csak egy évre gondol előre, és kiszámítja az új nyugdíjtömeget:

$$B_{t,s+1} = (T - s - 1)b_{t,s+1}.$$

Egyszerű a választás: a $t + s$ -edik évben a dolgozó (t, s) helyett pontosan akkor választja $(t, s + 1)$ -t, ha

$$B_{t,s+1} > B_{t,s}, \quad \text{azaz} \quad (T - s - 1)b_{t,s+1} > (T - s)b_{t,s}. \quad (6)$$

Figyelembe véve (5)-öt, (6) ekvivalens

$$(T - s - 1)(S + s + 1)v_{t+s} > (T - s)(S + s)v_{t+s-1}$$

-gyel. Felhasználva, hogy $v_{t+s} = g_{t+s}v_{t+s-1}$, – ahol g_{t+s} a $t + s$ -edik évi nettó reálbér növekedési együtthatója – egyenlőtlenségünk egyszerűsíthető:

$$(T - s - 1)(S + s + 1)g_{t+s} > (T - s)(S + s). \quad (7)$$

Ha viszont egyszer nyugdíjba vonul hősnőnk, akkor nem módosíthatja döntését.

Eljutottunk a következő tételhez:

2. tétel. *Egyéves előrelátás esetén a női dolgozó addig halasztja a nyugdíjba vonulást, amíg fennáll (7) vagy $s = 3$.*

Visszatérve a 2. táblázat 4. oszlopához, látható, hogy a konkrét paraméterértékeink mellett a naiv eljárás ugyanazt adja, mint az előrelátó. Ez azonban általában nem igaz.

5 Rövid és hosszú élettartam

Eddig a legkorábbi nyugdíjazáskor átlagos várható élettartammal számoltunk, most megvizsgáljuk, hogyan változnak eredményeink, ha az átlagnál rövidebb ($T = 15$ éves) és hosszabb ($T = 25$ éves) várható élettartammal számolunk, és a szereplőknek viszonylag pontos elképzeléseik vannak saját várható élettartamukról. Egyszerűség kedvéért továbbra is a mellékhatások nélküli esetet mérlegeljük.

Azt sejtjük, hogy rövidebb élettartamnál rövidül az optimális életkor, hosszabbnál pedig hosszabbodik. Esetünkben azonban az élettartam hosszának a hatása az optimumra mérsékelt, mert általában sarokoptimumokat érint: 40 évnél rövidebb jogviszonnnyal nem lehet nyugdíjba menni, 44 éves jogviszony viszont elhanyagolhatóan ritka. A rövid élettartam esetén 2015-ig bezárólag az azonnali nyugdíjba vonulás az optimális, aztán pedig az 1–3 éves halasztás. A hosszú élettartam esetén 2011-ben az 1 éves halasztás, 2012-ben az azonnali nyugdíjba vonulás az optimális, aztán pedig a 3 éves halasztás.

Legkorábbi év t	Halasztás év s	Rövid várható élettartam összes reál nyugdíj $B_{s,t}^{15}$	Hosszú várható élettartam $B_{s,t}^{25}$
2011	0	12,0	20,0
	1	11,8	20,2
	2	10,8	19,1
	3	10,5	19,3
2012	0	12,3	20,5
	1	11,3	19,5
	2	11,1	19,7
	3	10,9	19,9
2013	0	11,9	19,8
	1	11,7	20,1
	2	11,5	20,3
	3	11,3	20,8
2014	0	12,2	20,4
	1	12,1	20,7
	2	12,0	21,2
	3	12,2	22,3
2015	0	12,6	21,0
	1	12,6	21,6
	2	12,9	22,8
	3	13,4	24,6
2016	0	13,2	22,0
	1	13,5	23,2
	2	14,2	25,1
	3	14,5	26,5
2017	0	14,1	23,6
	1	14,9	25,6
	2	15,3	27,1
	3	15,4	28,1
2018	0	15,6	26,0
	1	16,1	27,6
	2	16,2	28,7
	3	16,0	29,3

3. táblázat. Mennyire érdemes halasztani a Nők40-et rövid és hosszú várható élettartam esetén?

6 Következtetések

Ebben a dolgozatban körüljártuk a Nők40-ben kínált azonnali nyugdíjba vonulás optimalitását. Az alapmodellben feltettük, hogy a nyugdíjazás előtt álló dolgozók előre látják a következő évek reálbér-alakulását, és úgy döntenek nyugdíjba vonulásuk idejéről, hogy várható nyugdíj-bértömegük reálértékét maximalizálják. Kiderül, hogy gyors reálbér-növekedés esetén érdemes 1-2-3 évvel elhalasztani a nyugdíjba vonulás idejét. A mellékszabályok és a pontatlan előrelátás miatt azonban a halasztás optimuma változhat: csökkenhet is, nőhet is.

Ebben a dolgozatban mindvégig feltettük, hogy a nyugdíjba vonuláshoz közeledők értik a nyugdíjszabályokat, különösen a valorizálást. Személyes

tapasztalataim alapján bátran állíthatom, hogy ez nagyon heroikus feltevés (vö. *Simonovits* [2015]). Sok, egyébként kiváló közgazdász is azt hiszi, hogy a valorizálás az infláción és nem a reálbér-dinamikán alapul (*Simonovits* [2018c]). De még a magyar kormány, amikor 2011-ben a kötelező magánnyugdíj-pénztárból visszalépőknek visszaadta a keletkezett reálhozamot, azt az érzést erősítette a társadalomban, hogy a tb-nyugdíjrendszerben nincs reálhozam. Mit várhatunk egy átlag magyar állampolgártól? Ennek vizsgálata azonban egy további cikk feladata.

Irodalom

1. Czeglédi T., Simonovits A., Szabó E., Tir M. [2016]: Nyugdíjba vonulási szabályok Magyarországon: nyertesek és vesztesek, *Közgazdasági Szemle*, 63, 1261–1288.
2. Dedák I. [2018]: [www.portfolio/gazdasag/munkaugy/a nagy magyar berrobbanas](http://www.portfolio/gazdasag/munkaugy/a_nagy_magyar_berrobbanas), szeptember 3.
3. Oblath G. [2018a]: www.mta.krtk.kti-blog: A magyarországi bér-paradoxon. Mennyivel nőttek a hazai reálbérek 2010 és 2017 között?
4. Oblath G. [2018b]: Körkérdés a bérfelzárkóztatás hatásairól, *Külgazdaság*, 62, 61–70.
5. Simonovits A. [2015]: Hogyan hat a nyugdíjszabályok hiányos ismerete a dolgozók döntéseire? *Közgazdasági Szemle*, 62, 263–283.
6. Simonovits A. [2018a]: Merevség és rugalmasság a magyar nyugdíjrendszerben, *Sigma*, 59, 1–10.
7. Simonovits A. [2018b]: Hogyan tervezzük a nyugdíjjáradék-függvényt, ha a halandóság a kereset csökkenő függvénye? *Közgazdasági Szemle*, 65, 831–846.
8. Simonovits A. [2018c]: Miért kell a nyugdíjvalorizálást és -indexálást a pontrendszerrel felváltani? *Közgazdasági Szemle*, 65, 903–922.

Függelék. Egy analitikus példa

A fenti modellek, még az alapmodell is túl bonyolultak ahhoz, hogy analitikusan (papíron, ceruzával) elemezhesük őket. Ebben a függelékben ezért egy olyan minimodellt mutatunk be, amelyben a továbbdolgozás előnye és hátránya viszonylag könnyen tanulmányozható. Lényegében megtartva a korábbi jelöléseket, két drasztikus egyszerűsítéssel élünk: 1) a reálbér növekedési együtthatója állandó; 2) a szolgálati idő és vele együtt a nyugdíjkorhatár folytonos változó. Az 1. feltevés miatt rögzíthetjük a naptári időt: $t = 0$. A 2., folytonossági feltevés a valóságban nem érvényesül: 40 hónap fölött 11 hónapos szolgálati idő után indokolt 1,8 helyett 0 százalékot “hoz”. Az éves, illetve összes nyugdíj képlete $v_0 = 1$ mellett

$$b(0, s) = \delta(S + s)g^{s-1} \quad (F.1)$$

és

$$B(0, s) = (T - s)b(0, s). \quad (F.2)$$

Behelyettesítve (F.1)-et (F.2)-be:

$$B(0, s) = \delta(T - s)(S + s)g^{s-1}. \quad (F.3)$$

Elhagyva δg^{-1} -et, célfüggvényünk egyszerűsödik:

$$f(s) = (T - s)(S + s)g^s = [TS - (S - T)s - s^2]g^s. \quad (F.4)$$

Deriválva (F.4)-et (és a természetes logaritmust $\log g$ -al jelölve):

$$f'(s) = [-(S - T) - 2s]g^s + [TS - (S - T)s - s^2](\log g)g^s. \quad (F.5)$$

Bevezetve a $\gamma = \log g$ jelölést és elhagyva a pozitív g^s szorzót, egy egyszerűbb, de a derivált előjele szempontjából ekvivalens másodfokú függvényt kapunk:

$$h(s) = \gamma TS - (S - T) - [2 + \gamma(S - T)]s - \gamma s^2. \quad (F.6)$$

A közgazdasági korlátok miatt nincs szükség $h(s)$ teljes elemzésére. Elegendő, ha megvizsgáljuk, hogy $h(0) > 0$ vagy sem. A valósággal összhangban feltesszük, hogy a kritikus szolgálati idő hosszabb, mint a nyugdíjban töltött idő: $S > T$. Bevezetjük a logaritmikus növekedési ütem elválasztó értékét, amely reális esetben pozitív:

$$\gamma_0 = \frac{S - T}{ST} > 0, \quad \text{azaz} \quad g_0 = e^{\gamma_0} > 1. \quad (F.7)$$

Kimondhatjuk elemi tételünket:

F.1. tétel a) Ha a reálbér növekedése lassú: $1 \leq g \leq g_0$, akkor a Nők40-et érdemes azonnal kihasználni: $s^0 = 0$.

b) Ha a reálbér növekedése gyors: $g > g_0$, akkor a Nők40 optimális halasztása kielégíti a $h(s^0) = 0$ másodfokú egyenletet.

Megjegyzések. 1. Emlékeztetünk korábbi feltevésünkre: az így adódó optimális nyugdíjba vonulási kor nem haladja meg az illetőre vonatkozó általános korhatárt, ezért a maximális halasztás 3 év.

2. Könnyen belátható, hogy adott g növekedési együttható esetén a nyugdíjban töltött idővel növekszik (legfeljebb változatlan marad) az optimális halasztás.

Mivel a másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazása az elemzésben közvetlenül nem sokat segítene, nem is közöljük, helyette bekapcsoljuk a számítógépet. Kiderül, hogy rövid (15 éves) élettartam esetén még 5 százalékos reálbér-növekedés esetén is csak 1 évet érdemes halasztani, hosszú élettartam (25 év) mellett viszont évi 3 százalékos tartós reálbér-növekedés esetén már érdemes maximálisan halasztani a legkorábbi életkorhoz képest.

Növekedési ütem % $100(g - 1)$	Nyugdíjban töltött évek		
	Rövid ($T = 15$)	Közepes ($T = 20$)	Hosszú ($T = 25$)
	o p t i m á l i s h a l a s z t á s (é v)		
	$s(1)$	$s(2)$	$s(3)$
1	0,0	0,0	0,0
2	0,0	0,0	2,1
3	0,0	1,4	3,0
4	0,0	3,0	3,0
5	1,3	3,0	3,0

F.1. táblázat. Növekedés és optimális halasztás, a Nők40-ben

FEMALES40 AND THE EXPLOSION OF REAL WAGES

Since 2011, the program Females40 allows every Hungarian woman, who accumulated at least 40 years of eligibility, to retire before reaching the full retirement age, without suffering any actuarial deduction. For moderate rise in average real wages and pessimistic expectations, it is worth retiring as soon as possible. But for faster growth and precise expectations, it is better to delay retirement.

AZ ALUL- ILLETVE TÚLÉRTÉKELTSÉG VIZSGÁLATA FORDÍTOTT DISZKONTÁLT CASH-FLOW MODELLEL¹

ULBERT JÓZSEF – TAKÁCS ANDRÁS – POSZA ALEXANDRA
PTE KTK Pénzügy és Számvitel Intézet

A hagyományos diszkontált cash-flow (DCF) modell meghatározott tervezési időszakra előrejelzett pénzáram-sorozat, növekedési ráta és diszkontráta alapján a vállalat jelenlegi értékét igyekszik megbecsülni. A befektető az így kapott értéket az aktuális részvényárfolyammal összevetve tudja megítélni az adott cég illetve részvény alul- vagy túlértékelttségét. Az utóbbi évtized értékelési gyakorlatában egyre nagyobb teret nyer az ún. fordított DCF modell, amely új megközelítést alkalmazva a belső érték helyett a jelenlegi tőzsdei árat tekinti kiindulópontnak, és visszafelé dolgozva a többi paraméter azon értékét keresi, amely az árfolyam igazolásához, „megszolgáltatásához” szükséges. Ily módon a másik négy paraméter (tervezési időszak hossza, a növekedési ráta, a diszkontráta és a jelenlegi cash-flow) közül hármat a jelenben ismert tényadattal helyettesítve meghatározható a negyedik paraméter „kritikus” értéke, melynek validálásával, realitásának tesztelésével lehet következtetést levonni az alul- vagy túlértékelttség tekintetében. Tanulmányunkban bevezetjük a szakirodalomban eddig nem használt kritikus cash-flow fogalmát, valamint bemutatjuk a fordított DCF modell működését és használatának előnyeit, kiegészítve azt a gyakorlati alkalmazás szemléltetésével három magyar nagyvállalat (MOL, Magyar Telekom, OTP) példáján keresztül.

Kulcsszavak: diszkontált cash-flow, fordított DCF modell, kritikus cash-flow, alulértékelttség, túlértékelttség. *JEL-kódok:* G12, G17, G32

1 A hagyományostól a fordított DCF modellig

Egy vállalat értéke nem más, mint az általa a jövőben megtermelt pénzáramok megfelelő kamatlábbal számított jelenértéke. Ez az állítás a több évtizede uralkodó értékelési eljárás, a diszkontált cash-flow (DCF) módszer alapvetése, ami a szakterülethez köthető valamennyi alapműben megjelenik (pl. Fernandez 2002, Koller és társai 2010, Damodaran 2012)). A DCF eljárás nemcsak a szakirodalomban, hanem a gyakorlati alkalmazások terén is a legkedveltebb és leginkább elfogadott módszernek tekinthető (Hongjiu és Yanrong 2009).

A DCF eljárás a teljes vállalati érték (enterprise value), a tulajdonosi érték (shareholder value, azaz a saját tőke értéke, ami a teljes vállalati érték és az

¹A kutatást a Felsőoktatási Intézményi Kiválósági Program támogatta (szerződés száma: 20765-3/2018/FEKUTSTRAT). E-mail: ulbert@ktk.pte.hu. Beérkezett: 2018. január 11.

idegen tőke értékének különbsége) és az egyedi vállalati részvény értékének megbecslésére is alkalmazható. A diszkontált cash-flow alapú részvényértékelés kiindulópontját egy megfelelően felépített értékelési modell képezi, amely a jövőbeli cash-flow-kra, a növekedési rátára és a diszkontrátára vonatkozó becslések, előrejelzések alapján – melyhez az aktuális piaci információk és az értékelő szubjektív ítéletei egyaránt nélkülözhetetlenek – megbecsli a saját tőke aktuális piaci értékét, azaz a tulajdonosi értéket. Az értékelendő vállalatokra – az eleve határozott időre létrehozott cégek, a nonprofit illetve a felszámolás alatt álló vállalatok kivételével – általában teljesül a vállalkozás folytatásának elve, ami alapján feltételezzük a vállalatnak a meghatározatlanul hosszú jövőben történő továbbműködését, hozamgenerálását (Takács 2015). Éppen ezért a tulajdonosi érték számításakor nem egy véges, hanem egy végtelen hozamsort kell diszkontálni, amit az értékelési szituációtól, a környezeti feltételektől és a jövőre vonatkozó várakozásoktól függően egyszerű vagy növekvő örökjáradékos, vagy két- illetve többfázisú modellekkel hatékonyan lehet kezelni (lásd pl. Ulbert 1997, Berkman, Bradbury és Ferguson 2000, Levin és Olsson 2000, Koller és társai 2010, Damodaran 2012). A megfelelő modellel megállapított tulajdonosi értéket a forgalomban lévő részvények számával elosztva adódik a részvény belső értéke (intrinsic value). Ezt az elemzők egyben a részvény céláraként azonosítják, így azt az aktuális részvényárfolyammal összevetve tudják kialakítani saját értékítéletüket és befektetési stratégiájukat. Amennyiben az aktuális árfolyam magasabb a belső értéknél, akkor túlértékelésre és az árfolyam jövőbeli csökkenésére következtetnek, ami az eladást ösztönzi, míg ha alulértékelt, azaz a belső értéknél alacsonyabb áron cserél gazdát a részvény a tőzsdén, akkor árfolyamemelkedést várnak és a vásárlást tekintik a helyes döntésnek.

Kaplan és Ruback (1995) állítása szerint egy jól átgondolt és megbízható paraméterekkel feltöltött DCF modell 10%-os hibahatáron belül képes megbecsülni a részvény aktuális piaci értékét, míg más szerzők aggályokat fogalmaztak meg a módszerrel szemben. A DCF modellt egyébként támogató szerzők (pl. a már hivatkozott Damodaran 2012, illetve Koller és társai 2010) is kiemelik, hogy az érték relevanciája a modellben felhasznált paraméterek minőségétől, megbízhatóságától függ. Más szerzők, mint például Rappaport és Mauboussin (2001) viszont felvetik, hogy a diszkontált cash-flow módszer gyakorlati alkalmazása során komoly kihívást jelent a paraméterek meghatározása, ami kellő szakismeret és tapasztalat hiányában jelentős torzításokhoz vezethet.

Ez a kritika mindig is együtt létezett a DCF módszerrel, ugyanakkor a kritikusok sokáig a lehetséges hibák megnevezésén túl nem mutattak rá, hogy miben látnák a megoldást, így a módszer népszerűsége továbbra is fennmaradt. A 2000-es évek második felében jelentek meg az első olyan írások, melyek megoldási javaslattal is előálltak a módszer szubjektív elemeinek csökkentése érdekében. Az elsők között Montier (2009) írta le azt, hogy egy viszonylag egyszerű szemléletváltás eredményeképpen a DCF módszer becsült paramétereinek száma csökkenthető, ezáltal az értékelés megbízhatóbbá tehető. Javaslata szerint meg kell fordítani a modell logikáját. A hagyományos

DCF megközelítés a jövőbeli hozamok jelenértékének meghatározására irányul, mely során egy vélt növekedési rátával képzett jövőbeli hozamsort egy szintén becsült jövőbeli tőkeköltséggel diszkontálunk, majd a kapott jelenértéket a részvények számával elosztva adódik a részvény célára. Ezt az árat az aktuális tőzsdei árfolyammal összevetve következtethet a befektető az értékpapír alul- vagy túlértékelttségére. A Montier által leírt „fordított DCF modell” (reverse DCF model) ugyanakkor az aktuális tőzsdei árfolyamot adottnak véve az értékelést végző befektetők által a számításaik során alkalmazott növekedési ráta (implied growth rate) megállapítására koncentrál. A fordított DCF modell az utolsó ismert éves cash-flow-ból indul ki, a diszkontáláshoz a jelenben ismert tőkeköltséget veszi alapul, így arra a kérdésre keresi a választ, hogy a jelenlegi cash-flow milyen mértékű növekedésének kellene bekövetkeznie a jövőben ahhoz, hogy az így keletkező jövőbeli hozamsor jelenértéke éppen az aktuális részvényárfolyamot adja. Másképpen fogalmazva: a befektetők milyen növekedési rátával számoltak, melynek eredményeképpen az aktuális árfolyam adódott. Az alul- vagy túlértékelttséget ezután szakértői elemzéssel, a jelenben érvényes piaci viszonyok, illetve megfelelő benchmarkok alapján ítélni tudjuk meg. Azt a kérdést kell megválaszolni, hogy az alkalmazott növekedési ráta reális-e. Ha az elemző úgy látja, a vállalat az alkalmazottnál nagyobb növekedésre is képes lesz a jövőben, akkor a részvényt alulértékeltnek, ellenkező esetben túlértékeltnek minősíti. *A fordított modell tehát koncepcióját tekintve egy ponton jelentősen eltér a hagyományos DCF modelltől, mégpedig abban, hogy eredményváltozója nem a belső érték (intrinsic value), hanem a tőzsdei ár.*

A fordított DCF modell hasonló gondolatmenet alapján nemcsak a növekedési ráta, hanem az alkalmazott tőkeköltség (implied cost of equity) meghatározására is módot ad, melyet Easton (2007) fejtett ki mélyreható módszertani alapossággal. Modelljeit Nekrasov és Ogneva (2011) azzal fejlesztette tovább, hogy az alkalmazott diszkontráta becsléséhez a vállalat endogén növekedési rátáját vették alapul. Fitzgerald és társai (2013) szintén a fordított DCF elvén az értékeléskor alkalmazott piaci kockázati prémiumokat vetette össze a tényleges részvény-megtérülésekkel. A hivatkozott külföldi szerzők írásaiban közös jellemző, hogy a fordított DCF értékelési modellt a növekedési ráta, illetve a diszkontráta meghatározására használták fel. Nem tértek ki azonban annak lehetőségére, hogy e két paramétert a jelenben érvényes szinteken rögzítve a fordított modell segítségével az *aktuális részvényárfolyamot alátámasztó jelenbeli hozam (cash flow) is meghatározható.*

Tekintve, hogy irodalomkutatásunk során fordított DCF modellel kapcsolatos magyar nyelvű művet nem találtunk, meggyőződésünk szerint pusztán a modell ismertetése is hozzáadott értéket képvisel. Tanulmányunk legfontosabb hozzájárulásának ugyanakkor a *kritikus cash-flow* fogalmának bevezetését, valamint az ezzel kiegészített fordított DCF megközelítés hazai környezetben való gyakorlati alkalmazásának bemutatását tekintjük. Mindezeket túl külön foglalkozunk a többfázisú modellek esetében az egyes fázisok teljes jelenértékhez való hozzájárulásával, aminek a fordított DCF modellekkel foglalkozó hivatkozott művek szerzői viszonylag kevés figyelmet szenteltek.

2 A fordított DCF modell alapjai

A fordított DCF modellt kezdetben elsősorban részvények első tőzsdei bevezetésére (initial public offering, IPO) irányuló ügyletek elemzésére használták fel. Jó példa erre Cogliati és társai (2011) munkája, akik az ún. „reverse engineering” DCF modell segítségével az 1995–2001 időszak vonatkozásában vizsgálták meg 184 IPO-t. Elemzésük során arra keresték a választ, hogy a vizsgált vállalatoknak mekkora növekedést kell produkálniuk annak érdekében, hogy a tőzsdei bevezetést követően „igazolni” tudják a kibocsátási árat. A fordított modell legfontosabb előnyei között azt említik a szerzők, hogy megszünteti az előrejelzés szükségességét, hiszen tényadatokból indul ki, valamint hogy könnyen alkalmazható egyéni befektetők által is, mivel nem igényel bennfentes információkat, előrejelzéseket, különleges szakértelmet vagy tapasztalatot. A modellt hasonlóképpen jellemzi French és Javakhadze (2013). A legegyszerűbb – növekvő örökjáradékon alapuló – fordított modell a következőképpen írható fel:

$$P_0 = ECF_0 \frac{1 + g^*}{r - g^*}. \quad (1)$$

Tekintve, hogy a modell eredményváltozója a részvények aktuális időszaki összesített tőzsdei ára, azaz a cég piaci kapitalizációja (P_0), a képlet jobb oldalán szükségszerűen a saját tőkéhez köthető, aktuális időszaki cash-flow-t és tőke költséget (a tulajdonosok által elvárt megtérülést) kell szerepeltetni, melyekre ECF_0 (Equity Cash Flow) illetve r (required return on equity) jelöléseket használunk. Az ECF nem más, mint a vállalkozás tulajdonosai számára a tartós eszközök és a forgótőke pénzügyi szükségletének finanszírozása után, valamint az idegen tőke kamatainak és törlesztéseinek levonása és az új adósság bevonása után elérhető szabad pénzügyi összeg, melynek levezetése az alábbi:

$$\begin{aligned} & \text{Adózás előtti eredmény} \\ - & \text{Számított adókötelezettség} \\ = & \text{Adózott eredmény} \\ - & \text{Befektetett eszközök nettó növekménye} \\ - & \text{Forgótőke növekménye} \\ + & \text{Finanszírozási kötelezettség növekménye} \\ = & \text{Equity Cash Flow} \end{aligned}$$

Mivel az ECF a tulajdonosok számára (hozamvárásaik kielégítésére) rendelkezésre álló pénzáramlást fejezi ki, annak diszkontálásához a módszertanilag helyes ráta a fent kifejtett saját tőke-költség (r). A modellben szereplő változók közül a tőzsdei ár, a tulajdonosi cash-flow és a saját tőke költsége a jelenben ismert tényadatok, így az egyetlen feladat az egyenlőséget biztosító növekedési ráta (g^*) meghatározása. Ezen eredeti modell gyakorlati felhasználása során az elemzők a g^* rátát vizsgálták, és amennyiben azt a reálisan teljesíthetőnél magasabbnak ítélték, akkor a cég részvényeit túlértékeltnek, ellenkező esetben pedig alulértékeltnek minősítették. A kezdeti alkalmazások során – amint fent már írtuk – ez azt az egyetlen célt szolgálta, hogy a tőzsdére

bevezetett részvények kibocsátási árának helyességét igazolják vagy megcáfolják. Ritkábban bár, de a modellt olyan formában is alkalmazta néhány szerző (pl. a már hivatkozott Easton (2009)), amikor a tőzsdei ár (P_0) és a jelenbeli cash flow (ECF_0) mellett a növekedési rátát is rögzítettnek, ismertnek vették (g), és az egyenlet megoldása annak a maximálisan vállalható tőkeköltésnek (r^*) a keresésére irányult, amely mellett a jelenérték-számítás az aktuális árfolyamot adja. Ha a vállalat tényleges tőkeköltése (tulajdonosi hozamvárása) ennél magasabb, akkor a részvény túlértékelt, ha pedig alacsonyabb, akkor alulértékelt.

E ponton megemlíjtjük, hogy több empirikus kutatás is arra utal, hogy a cash-flow jóval intenzívebben ingadozik, mint a vállalat adózott eredménye, melynek eredményeképpen a számviteli (adózott) eredmény magyarázó ereje az árfolyamra nézve jelentősen magasabb, mint a cash-flow-é (lásd pl. Dechow és társai (1998), Landsman és Maydew (2012), Takács (2014)). Ennek egyik fő oka az, hogy a viszonylag stabil trendet követő számviteli eredményt módosító mérlegbeli állományváltozások (nettó befektetett eszközök növekménye, forgótőke növekménye, finanszírozási kötelezettségek növekménye) gyakran nagymértékben tartalmaznak egyedi hatásokat, melyek kiszűrése nélkül hektikus pénzáram-idősor tapasztalható az adott vállalatnál. Broere (2014) szerint a vállalatok jelentős része nem a tankönyvekben foglalt kalkulációs sémákat követi a pénzáram meghatározásakor, hanem ehelyett különböző saját korrekciókat végez. Egyik ilyen lehetőség, hogy a mérlegbeli állományváltozások (befektetett eszközök növekménye, forgótőke növekménye, finanszírozási kötelezettségek növekménye) adott évi értéke helyett azok többéves átlagát vesszük alapul, vagy e mérlegtételeket hosszú távon konstansnak, azaz változásukat nullának vesszük, mert ezáltal az egyes évek között bekövetkező jelentős ingadozások tompíthatók, és az ECF árfolyamra gyakorolt magyarázó ereje jelentősen emelkedik (lásd pl. Ulbert és társai (2017)).

3 A kritikus cash-flow és a növekedési periódushossz megállapítása kétfázisú fordított DCF modellel

A fordított DCF modell előző fejezetben ismertetett eredeti alkalmazásai a jelenérték-formulában lévő változók közül két paraméter – elsősorban a növekedési ráta, ritkább esetekben a saját tőke költsége – kritikus (értsd: a többi paraméter rögzített értéke mellett az aktuális piaci árat eredményező) értékének meghatározására irányultak. További fejtegetéseink középpontjában két másik paraméter áll, melyek fordított DCF-alapú vizsgálatára az irodalomkutatásunk során feltárt publikációkban (különösen a hazai írásokban) nem találtunk példát.

Az egyik ilyen tényező a cash-flow. Ha feltesszük, hogy adott értékelési időpontban a vállalat piaci kapitalizációja, a tulajdonosi hozamvárás és a növekedési ráta a befektetők számára ismert, akkor meghatározható az

a jelenben elérendő tulajdonosi pénzáramlás, amelyből kiindulva az ismert növekedési ráta mellett generálódó jövőbeli hozamoknak a szintén ismert sajáttőke-költséggel diszkontált értéke megegyezik a saját tőke aktuális piaci árával. Ezt a pénzáramot a továbbiakban *kritikus cash-flow*-nak nevezzük.

Az általunk elemzett másik paraméter a növekedési periódus hossza. Az előző fejezetben bemutatott hagyományos fordított modell az örökjáradék elvén nyugszik, azaz végtelen időtávon keresztül feltételezi a pénzáramok g ráta melletti évenkénti növekedését. Ez a feltételezés azonban csak ritka esetekben tekinthető reálisnak. Sokkal gyakoribb az, hogy a hozamok folyamatos növekedését csak a jövő egy véges szakaszára (az első n évre) vonatkozóan tekinti reálisnak az értékelő, az azt követő végtelen fázisban pedig már konstans hozamokat feltételez. Erre adnak módszertani megoldást a kétfázisú modellek. A vizsgálat tehát olyan kontextusban is értelmezhető, hogy a tőzsdei ár, a növekedési ráta és a tőkeköltség mellett a jelenlegi cash-flow-t is adottnak vesszük, és a szélsőérték-keresés tárgya annak az időszaknak a hossza, ameddig a hozamok növekednek. Ezt az n értéket a továbbiakban növekedési periódushossznak nevezzük, melynek elemzésével lehetőség nyílik például különböző iparágakat összehasonlítani abból a szempontból, hogy a befektetők melyik iparágnál bíznak tartósabb, és melyiknél kevésbé hosszú távú növekedésben. A fentiekben leírtakat is integráló kétfázisú fordított modell a következőképpen írható fel:

$$P_0 = ECF_0^* \left(\sum_{i=1}^n \frac{(1+g)^i}{(1+r)^i} + \frac{(1+g)^n}{r(1+r)^n} \right), \quad (2)$$

vagy másképpen:

$$P_0 = ECF_0^* \left(\frac{1+g}{r-g} \left(1 - \frac{(1+g)^n}{(1+r)^n} \right) + \frac{(1+g)^n}{r(1+r)^n} \right). \quad (3)$$

A (3) egyenletben tehát a P_0 , g , r és n változókat adottnak tekintjük, így azt a tárgyidőszaki cash-flow-ra megoldva kapjuk a *kritikus cash-flow*-t (ECF_0^*), melyet a ténylegesen realizált Equity Cash Flow összeggel összevetve közvetlenül következtethetünk az alul- vagy túlértékeltségre. A kritikus cash-flow abszolút összegének meghatározásán túl hasznos információt jelent és az összehasonlítást még hatékonyabban szolgálja annak tőzsdei árhoz viszonyított aránya, melyet a képlet megfelelő átrendezésével fejezhetünk ki:

$$\frac{ECF_0^*}{P_0} = \frac{1}{\frac{1+g}{r-g} \left(1 - \frac{(1+g)^n}{(1+r)^n} \right) + \frac{(1+g)^n}{r(1+r)^n}}. \quad (4)$$

Mint a képletből látható, ez az arány rögzített növekedési periódushossz (n) esetén a diszkontráta (r) és a növekedési ráta (g) értékéből determinisztikus módon adódik. Tegyük fel, hogy a növekedési periódust a szakirodalomban leggyakrabban előforduló 10 évben rögzítjük, továbbá r és g értékeit 1%-15%-os intervallumban vizsgáljuk. Ekkor felírható az alábbi általános *kritikus cash-flow-hányad* tábla (1. táblázat).

(g)	Diszkontráta (r)														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	-	1,83	2,75	3,68	4,61	5,55	6,49	7,44	8,39	9,34	10,30	11,26	12,22	13,19	14,15
2	0,83	-	2,52	3,38	4,25	5,13	6,02	6,92	7,82	8,73	9,64	10,56	11,49	12,42	13,35
3	0,75	1,52	-	3,11	3,92	4,74	5,58	6,43	7,28	8,15	9,02	9,90	10,79	11,68	12,58
4	0,69	1,39	2,12	-	3,61	4,39	5,17	5,97	6,78	7,61	8,44	9,28	10,13	10,99	11,86
5	0,63	1,27	1,94	2,63	-	4,06	4,79	5,55	6,32	7,10	7,89	8,69	9,51	10,33	11,17
6	0,57	1,16	1,78	2,42	3,07	-	4,44	5,15	5,88	6,62	7,37	8,14	8,92	9,71	10,51
7	0,52	1,07	1,63	2,22	2,84	3,47	-	4,79	5,47	6,17	6,89	7,62	8,36	9,12	9,89
8	0,48	0,98	1,50	2,05	2,62	3,21	3,82	-	5,09	5,75	6,44	7,13	7,84	8,56	9,30
9	0,43	0,89	1,38	1,89	2,41	2,96	3,54	4,13	-	5,36	6,01	6,67	7,35	8,04	8,74
10	0,40	0,82	1,27	1,74	2,23	2,74	3,28	3,83	4,41	-	5,61	6,24	6,88	7,54	8,22
11	0,36	0,75	1,16	1,60	2,06	2,54	3,04	3,56	4,10	4,66	-	5,83	6,45	7,08	7,72
12	0,33	0,69	1,07	1,47	1,90	2,35	2,82	3,30	3,81	4,34	4,89	-	6,04	6,64	7,25
13	0,31	0,63	0,99	1,36	1,75	2,17	2,61	3,07	3,55	4,05	4,56	5,10	-	6,22	6,81
14	0,28	0,58	0,91	1,25	1,62	2,01	2,42	2,85	3,30	3,77	4,26	4,77	5,29	-	6,39
15	0,26	0,54	0,84	1,16	1,50	1,86	2,24	2,65	3,07	3,51	3,97	4,45	4,95	5,47	-

1. táblázat. Kritikus cash-flow-hányad mátrix (% , n = 10, r, g = 1%, . . . , 15%)

Nyilvánvaló, hogy minél alacsonyabb a kritikus cash-flow-hányad, annál jobb megítélésnek örvend a vállalat: ez azt jelenti, hogy elegendő az aktuális piaci árfolyam alátámasztásához annak egy kis hányadát jelenlegi pénzáramlásként produkálnia, a piac ugyanis dinamikus növekedési várakozást és relatív alacsony megtérülési elvárást társít a céghez, azaz az ár mögött meghúzódó érték jelentős részét a jövőbeli hozamoknak tulajdonítják a befektetők. Erről árulkodnak a táblázatban szereplő adatok is, az alacsony növekedési ráta – magas diszkontráta kombinációknál (a tábla jobb felső részén) az ECF_0^*/P_0 arány magasabb, míg értelemszerűen magas növekedés és kicsi megtérülési elvárás együttes fennállása esetén (a tábla bal alsó részén) alacsonyabb.

Ez a jelenség megragadható annak vizsgálatával is, hogy a befektetők az értékelésük (melynek eredményét a tőzsdei ár testesíti meg) során mekkora súlyt tulajdonítanak a véges növekedési szakasznak illetve az azt követő végtelen szakasznak (maradványértéknek). A növekedési szakasz (growth period, GP) árfolyamhoz való hozzájárulásának mértékét az (5), míg a maradványérték (residual value, RV) hozzájárulását a (6) képlet fejezi ki:

$$\frac{GP}{P_0} = \frac{\frac{1+g}{r-g} \left(1 - \frac{(1+g)^n}{(1+r)^n} \right)}{\frac{1+g}{r-g} \left(1 - \frac{(1+g)^n}{(1+r)^n} \right) + \frac{(1+g)^n}{r(1+r)^n}}, \tag{5}$$

$$\frac{RV}{P_0} = \frac{\frac{(1+g)^n}{r(1+r)^n}}{\frac{1+g}{r-g} \left(1 - \frac{(1+g)^n}{(1+r)^n} \right) + \frac{(1+g)^n}{r(1+r)^n}}. \tag{6}$$

Nem igényel különösebb magyarázatot, hogy a (4), (5) és (6) képletek összefüggnek: az alacsonyabb kritikus cash-flow-hányad mutató alacsonyabb GP/P_0 és magasabb RV/P_0 mutatóval jár együtt.

Az eddigi képletek mind a kritikus cash-flow-ra, tehát arra az esetre irányultak, amikor a szélsőérték-keresés középpontjában a tárgyévben elérendő pénzáram áll. A vizsgálat fókuszát ugyanakkor módosíthatjuk oly módon, hogy a tárgyévi cash-flow-t is adottnak tekintjük, és arra keressük a választ,

hogy a kétfázisú modellben milyen hosszú növekedési periódust kell figyelembe vennünk ahhoz, hogy a számítás eredménye a jelenlegi tőzsdei árral egyezzen meg. Erre a célra is a (3) képletet alkalmazhatjuk azzal a különbséggel, hogy itt az ECF_0 helyére a tényleges tárgyévi cash-flow-t írjuk, és megkeressük az egyenlőséghez szükséges növekedési periódushosszt (n^*). Értelemszerűen egy alacsony n^* érték arra utal, hogy a meglévő növekedési rátát a vállalatnak elegendő rövid ideig fenntartania a jelenlegi árfolyam alátámasztásához, ami egyben azt is jelenti, hogy nagyobb mértékben járul hozzá az aktuális árfolyamhoz a maradványérték, azaz a végtelen szakaszban keletkező pénzáramok jelenértéke.

A fordított modell 2. fejezetben bemutatott eredeti felhasználási területeit (növekedési ráta és a tőkeköltség kritikus értéke), valamint a jelen fejezetben kifejtett új felhasználási lehetőségeket (kritikus cash-flow és kritikus növekedési periódushossz) összefoglalva az alul- illetve túlértékeltségre utaló jeleket a 2. táblázatban gyűjtöttük össze.

Alulértékeltségre utaló jelek	Tulértékeltségre utaló jelek
$ECF_0 > ECF_0^*$	$ECF_0 < ECF_0^*$
$g > g^*$	$g < g^*$
$r < r^*$	$r > r^*$
$n > n^*$	$n < n^*$

2. táblázat. Az alul- illetve túlértékeltségre utaló jelek a fordított modell alapján

A vállalat részvényét tehát akkor tekinthetjük alulértékeltnek, ha a tényleges cash-flow, a tényleges növekedési ráta vagy a tényleges növekedési periódushossz nagyobb, vagy a tényleges sajáttőke-költség kisebb, mint a modellből számított kritikus érték, ellenkező esetben a részvény túlértékeltnek minősül.

4 A MOL, a Magyar Telekom és az OTP összehasonlító elemzése a fordított DCF modell segítségével

Az előzőekben ismertetett fordított DCF modell gyakorlati alkalmazását három hazai nagyvállalat, a MOL, a Magyar Telekom és az OTP, illetve ezek részvényei példáján keresztül mutatjuk be. E három vállalat kiválasztásának kettős oka volt: egyrészt részvényeik hosszú ideje vannak jelen a Budapesti Értéktőzsdén, a legkeresettebbek közé tartoznak, másrészt pedig ezek a vállalatok hiteles reprezentánsai a hazai termelő (MOL), szolgáltató (Magyar Telekom) és pénzügyi (OTP) szektornak, így a konkrét vállalatoknál akár általánosabb, az iparági sajátosságokra is irányuló következtetésekre juthatunk az eredmények által.

A fő kérdés, amire választ keresünk az, hogy az érintett részvények 2017. évi záró árfolyama mögött milyen befektetői feltételezések húzódnak meg. Az elemzés módjára, az alkalmazott konkrét fordított modellre, valamint az adatforrásokra vonatkozóan előljáróban rögzítjük az alábbiakat:

- Az Equity Cash Flow meghatározásakor az aktuális évi (2017-es) adózott eredményt a befektetett eszközök, a forgótőke és a finanszírozási kötelezettségek 5 éves időtávon (2013-2017) tapasztalt átlagos éves állományváltozásával korrigáljuk, tompítva ezzel a nem rendszeresen előforduló egyedi torzító tényezők hatásait.
- Mindhárom részvény esetében a (3) egyenletben leírt kétfázisú modellt alkalmazzuk, ahol a növekedési periódus hosszát (n) egységesen 10 évben határozzuk meg.
- Tekintve, hogy tőzsdei vállalatcsoportokról van szó, akik konszolidált beszámolóikat az IFRS szerint kötelesek készíteni (Fenyves és társai 2015), az adózott eredmény adatokat a cégek honlapjain közzétett 2017. évi, IFRS-alapú beszámolók eredménykimutatásából vesszük át.
- A forgalomban lévő részvények száma, valamint a 2017. évi záróárfolyam tekintetében a www.portfolio.hu weboldalon elérhető nyilvános információkat vesszük alapul, az aktuális piaci kapitalizációt (P_0) e két adat szorzataként határozzuk meg.
- Az egyes vállalatokra jellemző tulajdonosi megtérülési elvárást (r) és növekedési rátát (g) nem a vállalatok egyedi adataiból számítjuk, hanem az Aswath Damodaran honlapján (www.damodaran.com) elérhető nyilvános adatbázisból, a 2017. december 31-én elérhető legfrissebb, Európa-pára leszűkített, adott iparágakra („Oil/Gas (Integrated)”, „Telecom Services”, „Banks (Regional)”) vonatkozó átlagértékeket vesszük alapul. Az r paramétert a „Cost of Equity”, a g paramétert pedig a „CAGR in Net Income – Last 5 years” adattal azonosítjuk.

A kiválasztott három vállalatnak a fordított modell alkalmazásához szükséges adatait a fentiekben rögzített feltételezések alapján a 3. táblázatban foglaltuk össze.

Megnevezés	Adatforrás / kiszámítás módja	MOL	Magyar Telekom	OTP
Forgalomban lévő részvények száma (db)	www.portfolio.hu	819 424 824	1 042 742 543	280 000 010
2017. évi záróárfolyam (Ft/db)	www.portfolio.hu	3 028	458	10 720
2017. év végi piaci kapitalizáció (mFt, P_0)	részvények száma \times év végi záró árfolyam	2 481 218	477 576	3 001 600
Equity Cash Flow (mFt, ECF)	vállalati pénzügyi kimutatások (2013-17)	231 462	14 177	413 388
Iparági besorolás	www.damodaran.com	Oil/Gas (Integrated)	Telecom. Services	Banks (Regional)
Diszkontráta (% , r)	www.damodaran.com	15,01	9,22	6,58
Növekedési ráta (% , g)	www.damodaran.com	4,78	7,85	13,10

3. táblázat. A MOL, a Magyar Telekom és az OTP felhasznált alapadatai

A táblázatban látható adatokat a (3) egyenletben kifejtett fordított modellbe helyettesítettük be. Szélsőérték-keresés segítségével meghatároztuk a kritikus cash-flow-t (ECF_0^*) és a (4) képletben bemutatott kritikus cash-flow-hányadot (ECF_0^*/P_0), a növekedési ráta és a diszkontráta kritikus értékeit (g^* , r^*), valamint a növekedési periódus és a maradványérték aktuális piaci kapitalizációhoz való hozzájárulását (GP/P_0 ill. RV/P_0) az (5) és (6) egyenletekben leírtak szerint. Végül, újabb szélsőérték-kereséssel megállapítottuk a kritikus növekedési periódushosszt (n^*) is. A kapott eredmények a 4. táblázatban láthatók.

Megnevezés	Jelölés	MOL	Magyar Telekom	OTP
Kritikus cash-flow (mFt)	ECF_0^*	280 934	25 275	72 181
Tárgyévi tényleges cash flow (mFt)	ECF_0	231 462	14 177	413 388
Kritikus cash-flow-hányad (%)	ECF_0^*/P_0	11,32	5,29	2,40
Tényleges cash-flow-hányad (%)	ECF_0/P_0	9,33	2,97	13,77
Kritikus növekedési ráta (%)	g^*	7,96	15,89	-9,94
Iparági szokásos növekedési ráta (%)	g	4,78	7,85	13,10
Kritikus tőkeköltség (%)	r^*	12,62	5,54	25,56
Iparági szokásos tőkeköltség (%)	r	15,01	9,22	6,58
Növekedési periódus érték-hozzájárulása (%)	GP/P_0	70,28	49,41	33,82
Maradványérték érték-hozzájárulása (%)	RV/P_0	29,72	50,59	66,18
Kritikus növekedési periódushossz (év)	n^*	50+	32,5	-4,71
Alkalmazott növekedési periódushossz (év)	n	10	10	10

4. táblázat. A MOL, a Magyar Telekom és az OTP fordított modellel meghatározott értékei

Az adatok elemzését az alábbiakban vállalatonként külön-külön végezzük el. Célunk annak szemléltetése, hogy a fordított modellt bármelyik paraméterre vonatkozó célérték-keresésre fel lehet használni, valamint hogy az alul- vagy túlértékeltségre vonatkozó következtetés független attól, hogy melyik paraméter kritikus értékét keressük meg a többi értékének rögzítése mellett.

A MOL részvényeiről a felírt kétfázisú fordított modell alapján arra következtetünk, hogy a részvények túlértékelték, amely az alábbiak közül bármelyik érveléssel alátámasztható:

- A cég kritikus cash-flow-ja (ECF_0^*) 280 934 mFt. A kétfázisú fordított modellben rögzített növekedési periódushossz, növekedési ráta és diszkontráta (n , g és r) mellett tehát ekkora éves tulajdonosi pénzáramlás lenne szükséges az aktuális árfolyam igazolásához, alátámasztásához. A tényleges 2017. évi Equity Cash Flow (ECF_0) ennél alacsonyabb (231 462 mFt), a cég tehát nem tudja produkálni a modell által meghatározott kritikus pénzáramot.
- A cash-flow-hányad mutatók alapján a tárgyévi cash-flow-nak a piaci kapitalizáció 11,32%-át kellene kitennie (ECF_0^*/P_0), a tényérték viszont (ECF_0/P_0) csak 9,33%, ami alacsonyabb árfolyamot indokolna.
- A tényleges cash-flow növekedési ráta ($g = 4,78\%$) elmarad a jelenlegi árfolyam alátámasztásához szükséges kritikus szinttől ($g^* = 7,96\%$).

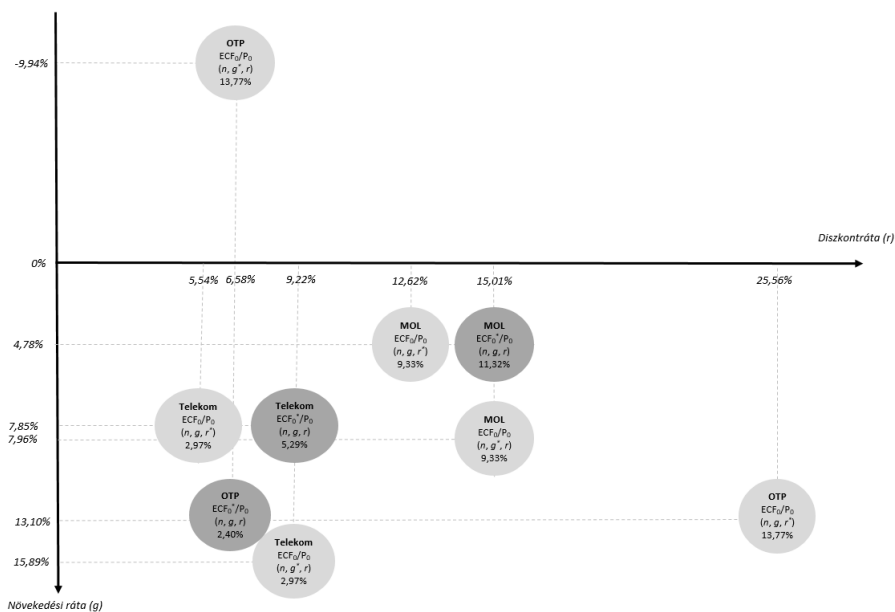
- A vállalat jelenben fennálló tőkeköltsége ($r = 15,01\%$) magasabb, mint ami a jelenlegi árfolyam megszolgáltatásához megengedhető lenne ($r^* = 12,62\%$).
- A kritikus növekedési periódushossz (n^*) magasan meghaladja a modellben alkalmazott $n = 10$ évet (több mint 50 év, a szélsőérték-keresést észszerűségi okokból 50 éven túl már nem folytattuk). Mindez arra utal, hogy a tárgyévben megtermelt cash-flow-t és az ismert diszkontrátát alapul véve, a cégnek az aktuális piaci kapitalizáció igazolásához nem elegendő a jelenlegi növekedési ráta melletti növekedést a modellben alkalmazott 10 évig fenntartania, hanem annál jóval hosszabb (50+ év) perióduson keresztül kellene évről évre növelnie a pénzáramait, mielőtt azok egy konstans összegben stabilizálódnak.

A viszonylag alacsony növekedési ráta és magas diszkontráta következménye, hogy a befektetők szemében az aktuális tőzsdei árat nagyobb részt a növekedési időszak hozamai magyarázzák ($GP/P_0 = 70,28\%$), a végtelen fázis (maradványérték) hozzájárulása (RV/P_0) mindössze 29,72%.

A Magyar Telekom esetében hasonlóan túlértékeltiségre következtethetünk, hiszen itt is fennállnak a MOL-nál látott relációk ($ECF_0 < ECF_0^*$, $g < g^*$, $r > r^*$). A kritikus növekedési periódushossz (n^*) 32,5 év, szemben a modellben alkalmazott 10 évvel. Az iparági szokásos paraméterek alapján a MOL-hoz képest a Telekomot magasabb növekedés és alacsonyabb tőkeköltség jellemzi, ennek köszönhető, hogy a maradványérték piaci kapitalizációhoz való hozzájárulása is magasabb ($RV/P_0 = 50,59\%$), tehát a tőzsdei értékítélet nagyobbik része már a végtelen jövő szakaszában keletkező pénzáramokból származtatható.

Az OTP-vel kapcsolatos eredmények az ellenkező esetre mutatnak példát. A tárgyévi (2017-es) Equity Cash Flow összege és piaci kapitalizációhoz viszonyított aránya is közel hatszorosan meghaladja a kritikus szintet, míg a valós tőkeköltség alig több mint negyede annak, mint ami az aktuális árfolyam alátámasztásához még vállalható lenne. Mindez jelentős alulértékeltiségről árulkodik, amit tovább erősít az az információ, miszerint a kritikus növekedési ráta negatív ($g^* = -9.96\%$). Ez az érték úgy interpretálható, hogy a kétfázisú modell abban az esetben adná eredményül az OTP 2017. év végi árfolyamát, ha a vállalat cash-flow-ja a következő 10 évben évi 9.96%-kal csökkenne a többi paraméter változatlanlansága mellett. Az iparágra jellemző tényleges növekedés (g) azonban 13,10%, mely alapján jelentősen magasabb árfolyam lenne indokolt. Ez, és a másik két vállalathoz viszonyított alacsony diszkontráta ($r = 6,58\%$) okozza azt, hogy a jelenlegi befektetői értékítélet túlnyomó része (66,18%-a) a végtelen jövő szakaszában keletkező hozamokból ered.

Az 1. ábra grafikus formában foglalja össze a kritikus és a tényleges cash-flow hányadok viszonyát a három vállalat esetében.



1. ábra. A kritikus és a valós cash-flow hányad összevetése a három vállalat esetében

Az ábrán a sötét körök a vállalatok kritikus cash-flow-hányadait fejezik ki (a korábbi magyarázatok alapján tehát azt, hogy a jelenben érvényes növekedési ráta és diszkontráta fennmaradása esetén a piaci kapitalizáció mekkora hányadát kell a jelenben pénzáram formájában realizálni az aktuális részvényár igazolásához). A világosabb körök pedig a tényleges cash-flow-hányadokat mutatják. Az ábrán a kritikus értéket kifejező körtől balra, illetve lejjebb elhelyezkedő körök arra utalnak, hogy a tényleges teljesítmény elmarad az árfolyam által indokolt szinttől, másként fogalmazva: a jelenlegi cash-flow változatlan növekedési ráta esetén csak alacsonyabb tőkekölttség, illetve változatlan tőkekölttség esetén csak magasabb növekedési ráta mellett igazolná az aktuális árfolyamot. Ezek a részvények tehát túlértékelték (MOL, Telekom). Értelemszerűen a kritikustól jobbra, illetve felfelé elhelyezkedő körök (OTP) pedig azt jelzik, hogy a tárgyevi cash-flow-ból kiindulva, a jelenlegi növekedési ráta fennmaradása mellett nagyobb tőkekölttség, illetve a jelenlegi tőkekölttség fennmaradása mellett kisebb (sőt, ez esetben negatív) növekedési ráta is vállalható lenne az árfolyam igazolásához. Mindez tehát a részvény alulértékelttségét jelzi.

Az eddigi gondolatmenethez hozzá kell fűznünk, hogy a kiválasztott három részvény alul- illetve túlértékelttségének megállapítása minden esetben azon alapult, hogy az értékelést befolyásoló paraméterek a jövőben a jelenlegi szinten maradnak. A jelenség azonban másképp is megközelíthető: az árazás helyessége ellenőrizhető a vizsgált változók kritikus értékeinek validálásával, realitásának tesztelésével. Ezt az alábbi rövid példával szemléltetjük: a MOL jelenlegi cash-flow-növekedési rátáját (g) – az európai iparágra jellemző szokásos mérték alapján – 4,78%-nak vettük, a fordított modellel pedig meg-

állapítottuk, hogy a többi paraméter változatlansága mellett a kritikus növekedési ráta (g^*) 7,96%. Amennyiben a vállalatot, a piaci környezetet és egyéb tényezőket elemezve arra jutunk, hogy a jövőre vonatkozóan reálisnak tekinthető az évi 7,96%-os növekedés, akkor a jelenlegi tőzsdei árazás helyes, azaz az ár megfelel a belső értéknek. Ha viszont ennél alacsonyabb vagy magasabb jövőbeli növekedést tartunk megalapozottnak, akkor a korábbiakban leírtak alapján túl- vagy alulértékeltnek fogjuk minősíteni a részvényt.

A fordított modell segítségével meghatározott kritikus paraméterek tehát nem a belső értékhez vezető „helyes” értékeket, csupán a tőzsdei befektetők várakozásait kifejező, az árazáskor alkalmazott értékeket fejezik ki. A szakértői értékítélet szerepe itt abban jelenik meg, hogy az értékelő az így számított kritikus paraméter-értékeket összeveti a saját maga által reálisnak, a belső érték szempontjából megalapozottnak tartott értékekkel, és így alakítja ki álláspontját arról, hogy a piac a vállalatot/részvényt megfelelően árazza-e vagy sem.

5 Összegzés

Tanulmányunkban a fordított diszkontált cash-flow modell logikáját és gyakorlati alkalmazásának lehetőségeit mutattuk be. Kiterjedt irodalomkutatót végeztünk, mely során arra jutottunk, hogy bár ez a módszer a külföldi gyakorlatban elterjedt, tudományos publikációknak még nemzetközi szinten is csak kevésbé képezi tárgyát, a hazai szakirodalomban pedig egyáltalán nem találtunk ezzel foglalkozó írást. Munkánkban új, eddig nem használt formulákat és fogalmakat is bevezettünk, valamint részletesen foglalkoztunk a gyakorlati alkalmazással, melyekkel meggyőződésünk szerint hozzá tudunk járulni a meglévő (különösen a hazai) szakirodalomhoz.

A fordított DCF értelemszerűen a hagyományos DCF modellből ered. Egy ponton azonban mégis jelentős koncepcionális különbség mutatkozik: a modellszámítások középpontjában értékelés helyett árazás van, azaz a modellszámítások eredményváltozójaként a hagyományos megközelítésben használt belső érték (intrinsic value) helyett az aktuális piaci kapitalizációt – vagy másként fogalmazva a részvények összesített piaci árát – használja fel. A fordított logika alkalmazásának célja a modell bizonytalanságának csökkentése, ahol a jelenlegi befektetői értékítéletből (tőzsdei árból) kiindulva, a jelenben ismert alapparamétereket egy kivételével a jövőben is jellemzőnek feltételezve azt keressük, hogy egy konkrét paraméternek mekkora értéket kell felvennie az aktuális tőzsdei ár igazolásához. E megközelítés többféle vizsgálatra is lehetőséget ad. Egyrészt megállapíthatóvá válik egy adott paraméter (cash-flow, növekedési ráta, diszkontráta, növekedési periódushossz) azon kritikus értéke, amely mellett az érték és az ár megegyezik, másrészt pedig a kritikus érték és a jelenbeli tényérték összevetésével következtetni tudunk a vállalat vagy részvény alul- illetve túlértékelttségére. Az itt felsoroltak közül egyedi vállalatok értékelésekor *jelentős gyakorlati haszna lehet az eredeti alkalmazáshoz képest újszerű megközelítést jelentő kritikus cash-flow alapján történő elemzésnek*. A növekedési ráta és a tulajdonosi hozamelvárás esetében

ugyanis egy kisebb szakismerettel vagy tapasztalattal rendelkező befektető számára dilemmát okozhat, hogy a kritikus értékkel összehasonlítandó tényleges jelenbeli értéket miképpen határozza meg. Gondot okozhat számára például az, hogy a növekedési rátánál az utolsó év növekedését vagy hosszabb múltbeli időszak átlagos éves növekedését vegye alapul, vagy hogy a saját tőke költségét a Tőkepiaci Árazás Modelljével (CAPM) vagy nyilvánosan elérhető adatbázisok empirikus adatai alapján határozza meg. A tárgyévi cash-flow-t illetően ilyen probléma nem léphet fel, hiszen az Equity Cash Flow a cég pénzügyi kimutatásaiból az ismert számítási formula segítségével könnyen és egyértelműen kiszámítható, így a kritikus értékkel való összevetése alapján a befektető gyors és megbízható ítéletet tud alkotni a részvénnel kapcsolatban.

Elemzésünk látóköre természetesen tovább bővíthető konkrét tőzsdei vállalatok helyett nagyobb vállalati minták alapján iparágakra, vállalat típusokra (termelő, kereskedelmi, szolgáltató, pénzügyi) vonatkozó empirikus vizsgálatokkal, következtetések levonásával, amely későbbi kutatásaink tárgyát képezi.

Irodalom

1. Berkman, H., Bradbury, M. E., Ferguson, J. (2000): The Accuracy of Price Earnings and Discounted Cash Flow Methods of IPO Equity Valuation, *Journal of International Financial Management & Accounting* 11(2):71–83.
2. Broere, M. (2014): *Decision-Making in Private Equity Firms*, Springer Fachmedien Wiesbaden.
3. Cogliati, M.G., Paleari, S., Vismara, S. (2011): IPO pricing: growth rates implied in offer prices, *Annals of Finance*, 7(1):53–82.
4. Damodaran, A. (2002): *Investment valuation*, 2nd edition, John Wiley & Sons
5. Dechow, P. M., Kothari, S. P., Watts, R. L. (1998): The relation between earnings and cash flows, *Journal of Accounting and Economics* 25: 133–168.
6. Easton, P. (2007): Estimating the Cost of Capital Implied by Market Prices and Accounting Data, *Foundations and Trends in Accounting*, 2(4):241–364.
7. Fenyves V., Orbán, I., Bács, Z., Böcskei E. (2015): Representation of the going concern concept in the financial statements. *Nauki Finansach* (Financial Sciences), 4(25):24–38.
8. Fernandez, P. (2002): Company Valuation Methods. The most common errors in valuations, Research Paper No. 449, IESE University of Navarra, January.
9. Fitzgerald, T., Gray, S., Hall, J., Jeyaraj, R. (2013): Unconstrained estimates of the equity risk premium, *Review of Accounting Studies* 18:560–639.
10. French, D. W., Javakhadze, D. (2013): Avoiding Unpriced Risk Using a Probability-Based Approach to Security Selection (August 29, 2013). Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=2284586>.
11. Hongjiu L., Yanrong H. (2009): Improvement of Discounted Cash Flow Theory in Mergers and Acquisitions Based on Games, International Conference on Electronic Commerce and Business Intelligence, Beijing, China, 6–7 June.
12. Kaplan, S., N., Ruback, R. S. (1995): The Valuation of Cash Flow Forecasts: An Empirical Analysis, *The Journal of Finance*, 50(4):1059–1093.
13. Koller, T., Goedhart, M., & Wessels, D. (2010). *Valuation: Measuring and Managing the Value of Companies* (5th ed.). Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc.

14. Landsman, W. and Maydew, A. (2002): Has the information content of quarterly earnings announcements declined in the past three decades? *Journal of Accounting Research*, 40(3):797–808.
15. Levin, J., Olsson, P. (2000): Terminal value techniques in equity valuation — implications of the steady state assumption. Working Paper, Stockholm School of Economics.
16. Montier, J. (2009): *Value Investing: Tools and Techniques for Intelligent Investment*. John Wiley & Sons, ISBN: 978-0-470-68359-0.
17. Nekrasov, A., Ogneva, M. (2011): Using earnings forecasts to simultaneously estimate firm-specific cost of capital and long-term growth. *Review of Accounting Studies* 16:414–457.
18. Rappaport, A., Mauboussin, M. J. (2001): *Expectations Investing: Reading Stock Prices for Better Returns*. Boston, MA: Harvard Business School Press, pp. 40–46.
19. Takacs, A. (2014): The Relationship between Appraised Company Values and Future Stock Prices in the International Banking Sector, *International Research Journal of Finance and Economics*, 118:113–123.
20. Takács, A. (2015): *Vállalatértékelés magyar számviteli környezetben*, PerFekt
21. Ulbert, J. (1997): *A vállalat értéke*, második kiadás, Janus Pannonius Tudományegyetem, Pécs.
22. Ulbert, J., Takacs, A., Csapi, V. (2017): *The Relevance of the DCF Valuation Model in Investor Decisions*, Globe Edit, p. 58. , ISBN: 978-620-2-48672-9.

EXAMINING UNDER- AND OVERVALUATION WITH THE REVERSE DISCOUNTED CASH-FLOW MODEL

The traditional discounted cash flow (DCF) model is used to estimate the actual firm value (or by excluding debt, the shareholder value) by discounting a future cash flow series with an appropriate discount rate, where an expected growth rate is also built in the model. The computed shareholder value can be compared with the actual market capitalization, based on which the investor can judge whether the share is under- or overvalued. During the last decade, the so-called reverse DCF approach has arisen in the valuation practice, which takes the actual share price as a starting point in the analysis, and using a reverse engineering technique, seeks those 'critical' values of key valuation parameters (annual cash flow, explicit forecast period, growth rate, discount rate) that can justify the current share price. Then, under- or overvaluation can be judged by testing the feasibility of these critical values, that is, the company's ability to reach the critical level of annual cash flows, growth rate or cost of equity. In this study, we introduce the logic and the advantages of the reverse DCF model, and we illustrate its application by valuing the shares of three well-known Hungarian quoted companies (MOL, Magyar Telekom and OTP).

The value of a company can be originated from its future cash flows. This is confirmed by both the relevant literature and the practical applications. With the discounted cash flow (DCF) model, valuers compute the firm value or the shareholder value by discounting the future flows of cash with an appropriate discount rate. In such calculations, the valued firm is normally regarded as a going concern, which means that the valuer will create prognoses for an infinite future. In most cases, this is handled by simple or growing annuity, or by multi-stage models. Then the present value of future cash flows is computed, the valuer regards it as a target

price for the firm's stock. If the current stock price is lower than this, then the stock is regarded as undervalued, while if it's higher than the target price, the valuer will think it is overvalued.

Authors usually agree that the DCF is the first choice among valuation methods, however, they point out that the relevance of the results always depend on the quality of input parameters. To build up a consistent valuation model and to put the appropriate parameters in it requires above-average knowledge and experience, therefore, if the valuer does not possess these, then the valuation results might be highly distorted and unreliable.

Based on this argument, from the late 2000's some authors started to apply the DCF logic in a modified form, using a reverse engineering technique. The original reverse model seeks the growth rate that the company has to achieve to validate its current stock price. Then it has to be judged whether the company will be able to achieve this 'critical' level of growth in the future or not, based on which the investor will conclude to under- or overvaluation. However, the critical value can be determined not just for the growth rate, but for any other parameters such as the discount rate, the annual cash flow or the growth period. For our examination, we built up the following two-stage Equity Cash Flow model:

$$P_0 = ECF_0^* \left(\frac{1+g}{r-g} \left(1 - \frac{(1+g)^n}{(1+r)^n} \right) + \frac{(1+g)^n}{r(1+r)^n} \right).$$

where P_0 shows the value of shareholders' equity, ECF_0 stands for the annual cash flow, g for the growth rate, r for the discount rate, while n expresses the length of the growth period. By substituting P_0 with the actually known market capitalization of the firm, the model can be applied as a reverse model, where with a goal-seek technique, the critical value of each parameter can be determined. Then, by comparing the computed critical values (ECF_0^* , g^* , r^* , n^*) with the actually known values (ECF_0 , g , r , n), under- or overvaluation can be detected. Based on this comparison, if the firm's actual cash flow, growth rate or growth period exceeds the critical level, or the actual discount rate is lower than the critical one, then the firm's share is regarded undervalued. In the opposite case, the investor will think it is overvalued.

In our study, we conducted an empirical examination based on the above described reverse model, using the data of three well-known Hungarian companies: MOL, Magyar Telekom and OTP. These three companies were also regarded as authentic representatives of manufacturing (MOL), service (Telekom) and financial (OTP) firms in Hungary. Based on their published financial statements and publicly available market information retrieved from websites portfolio.hu and damodaran.com, we determined the critical values for all parameters of our two-stage Equity Cash Flow model. Our highlighted results are shown in the following table:

Name of the parameter	Notation	MOL	Magyar Telekom	OTP
Critical cash flow (mHUF)	ECF_0^*	280 934	25 275	72 181
Actual cash flow (mHUF)	ECF_0	231 462	14 177	413 388
Critical growth rate (%)	g^*	7,96	15,89	-9,94
Actual industry growth rate (%)	g	4,78	7,85	13,10
Critical discount rate (%)	r^*	12,62	5,54	25,56
Actual industry discount rate (%)	r	15,01	9,22	6,58
Critical growth period (years)	n^*	50+	32,5	-4,71
Growth period applied in the model (years)	n	10	10	10

The results are analyzed company by company as follows: In case of MOL, the critical cash flow is 280 934 mHUF. This level of annual cash flow would be needed

to validate the actual stock market price of the firm's shares. However, the real cash flow realized in the current year is lower (231 462 mHUF), which means the company cannot generate the required level of cash to „serve” its current stock price. The same is indicated by the facts that the actual growth rate cannot match the critical growth, and that the critical growth period is longer than the period applied in the two-stage model. Moreover, the discount rate (which expresses the cost of capital) actually valid for the company is higher than the critical level, at which the result of the model would equal the current market capitalization. All these lead to the conclusion that the shares of MOL are overvalued, so investors should set a lower target price when making their investment decisions.

Similarly, we can conclude to overvaluation based on the results for Magyar Telekom, as the relations between the actual and the critical values of parameters are the same ($ECF_0 < ECF_0^*$, $g < g^*$, $r > r^*$, $n < n^*$).

Finally, opposite and in some ways interesting results were obtained for OTP. The annual cash flow presented by the firm is far bigger than the level required to validate the actual market cap, and the present value of future cash flows would equal the current stock market value at a much higher discount rate than the actual one used in the model. The interesting result is that the critical growth rate (and the critical growth period, too) is negative ($g^* = -9,94\%$). This means that, in order to justify the actual market cap, the company could decrease its annual cash flows by close to 10% per year within the 10-year growth period used in the model. To summarize, the firm's real cash generating ability is much stronger than that expressed in the stock market price of the firm's share, so the OTP shares are significantly undervalued on the Budapest Stock Exchange. We believe that the three companies analyzed above are authentic representatives of the Hungarian manufacturing, service and financial companies. So with an extension of our conclusion, we can state that, based on our results, Hungarian manufacturing and service companies' shares are overvalued, while financial firm's shares are undervalued on the stock market.

The reverse DCF model gives investors the opportunity to simplify the calculations behind their investment decisions. In contrast to the original model, where several parameters must be estimated, which requires significant specific knowledge and experience, the reverse model uses the actually known values of parameters. With a goal-seek approach, the investor has to choose just one parameter (annual cash flow, growth rate, growth period, or discount rate), and conduct a goal-seek analysis for this particular parameter to obtain its critical value. Then, under- or overvaluation can be detected by simply judging whether the company will be able to achieve this critical level in the future or not. Such investigations cannot only be done for single companies, but it can be used for examining different industries, or even for conducting global comparisons. Answering such questions may be the subject of further research.

INSTABILITÁSI PROBLÉMÁK AMA MODELLEKBEN¹

GÁLL JÓZSEF – NAGY GÁBOR – SZINI RÓBERT
Debreceni Egyetem – Magyar Nemzeti Bank – OTP Bank

A Bázeli III szabályozásnak megfelelő, a hitelintézetek működési kockázati tőkekövetelmény számítására alkalmazott AMA modelleket az utóbbi időben több kritika is illette a szakirodalomban. A feltárt problémák leginkább a modell által számszerűsített tőkekövetelmény instabilitásával kapcsolatosak, ugyanakkor kritika illette a modellek validálhatóságát és az eredmények összehasonlíthatóságát is, melyek alapvetően a modellek módszertani diverzitásából fakadnak. Cikkünk fő célja, hogy AMA megközelítést használó LDA modellekben saját számításokon keresztül mutassunk be olyan főbb hiányosságokat, melyek a tőkekövetelmény instabilitását eredményezik. Egyben célunk az instabilitás fogalmának, okainak tisztázása is. Ehhez a HUNOR adatbázison végzett számításokat és szimulációkat hívunk segítségül. Számításaink során bemutatjuk a tőkekövetelmény-számítás extrém eseményekre vonatkozó érzékenységet, a mintaelemszám nagyságából eredő problémákat, az adatgyűjtési küszöb okozta információvesztés hatását, valamint kitérünk a gyakorisági és az egyedi veszteségek eloszlása esetén a választás nehézségeire. A cikkünkben közölt eredmények összességében rávilágítanak arra, hogy egyes instabilitási problémák az LDA alapú AMA keretrendszer inherens részét képezik, azaz a kiküszöbölésük helyett csak azok minimalizálása lehet reális cél.

Kulcsszavak: működési kockázat, tőkekövetelmény számítás, instabilitás.
JEL kódok: G18, G28, C52, C63

1 Bevezetés

A Bázeli Bankfelügyeleti Bizottság 2010 óta tervezi a működési kockázatok nem modell alapú tőkekövetelmény számítási módszertanainak felülvizsgálatát², illetve 2014-től a fejlett mérési módszertan (AMA³) jövőjének újragondolása, újratervezése is elkezdődött. A Bizottság 2014 októberében megjelent anyagában (BCBS [2014]) az AMA tőkekövetelmény számításra alkalmazott belső modellek jelentős egyszerűsítésének szükségességére hívta fel a figyelmet, mivel véleménye szerint a szabályozói tőkekövetelmény számításhoz jellemzően kisebb hozzáadott értéke van, mint amennyivel komplexebb a többi kockázattípus tőkekövetelmény számítási módszertanához képest, és arány-

¹E-mail: gall.jozsef@inf.unideb.hu, nagyga@mb.hu, robert.szini@otpbank.hu.
Beérkezett: 2018. április 9.

²Alapmutató módszere (BIA), sztenderd módszer (TSA), alternatív sztenderd módszer (ASA)

³Advanced Measurement Approach

talánul több erőforrást igényel az üzemeltetése a többi kockázattípushoz viszonyítva.

A Bizottság 2015 szeptemberében fogalmazta meg először határozottan az AMA jövője kapcsán alkotott véleményét, mely szerint az AMA módszertant ki kell vezetni a bázeli keretrendszerből és a nem modell alapú módszertanokat egy új módszertan (SMA⁴) váltaná fel, mely azt jelenti, hogy a tervek szerint 1. pillérben csak és kizárólag egyetlen módszertannal lehessen működési kockázati tőkekövetelményt számszerűsíteni. A Bázeli Bizottság 2016 márciusában publikálta (BCBS [2016]) konzultációs célból az új SMA módszertant, mely kisebb módosítások mellett a 2017 decemberében megjelent új Bazel IV javaslatcsomag (BCBS [2017]) részét képezi, mint a jövőben egyetlen módszertan, melynek segítségével számszerűsíthető a szabályozói⁵ működési kockázati tőkekövetelmény. Az új szabályrendszer várható jogszabályi implementációja 2022. január 1., mely azt jelenti, hogy 2022-ig az AMA modellek továbbra is alkalmazhatóak szabályozói tőkekövetelmény számításra, 2022 után pedig a hitelintézetek dönthetnek úgy, hogy a kérdéses modellt továbbra is alkalmazzák, de már csak gazdasági⁶ tőkekövetelmény meghatározására, és vállalatirányítási, belső riporting folyamatokban.

A Bázeli Bizottság a nem modell alapú tőkekövetelmény számítási módszertanok megfelelőségének felülvizsgálatát már a Bazel II szabályrendszer megjelenésekor célul tűzte ki tekintettel arra, hogy megfelelő adatok hiányában nem lehetett egyértelműen igazolni, hogy a kérdéses módszerek alapját jelentő bruttó bevétel⁷ mutató egy hitelintézet működési kockázati profilját kellőképp ragadja-e meg. Továbbá a felülvizsgálat szükségességét a sztenderd módszertan esetén az egyes üzletágakhoz rendelt súlyok⁸ szakértői úton történő meghatározása is indokolta, melyek megfelelőségének igazolása a kezdetekkor adatok hiányában szintén nem volt lehetséges. A nem modell alapú tőkekövetelmény-számítások várható kivezetését és az új SMA módszertan bevezetését a kérdéses felülvizsgálat eredményei mellett a Bizottság 2008–2009-es gazdasági válság alatti tapasztalatai is indokolták. A válság időszaka alatt a hitelintézetek bruttó bevétele csökkent, ezáltal csökkent a nem modell segítségével számított működési kockázati tőkekövetelményük is, ugyanakkor válság időszak alatt a hitelintézetek működési kockázatnak való kitettsége egyértelműen növekedett, amely azt jelenti, hogy ellentétes irányú kapcsolatot tapasztalt a szabályozó a működési kockázatnak való kitettség és a tőkekövetelmény mértéke között.

A Bázeli Bizottság a modell alapú AMA módszertan kapcsán számos alkalommal fogalmazta meg kritikus észrevételeit, melyek leginkább a módszertan komplexitására, valamint az AMA modellek által számszerűsített tőkekövetelmények összevethetőségének hiányára vonatkoztak. Az Európai Bankhatóság (EBA) több olyan, az AMA modellek módszertani diverzitását csökkenteni

⁴Standardized Measurement Approach

⁵A Bazel II szabályrendszer alapján 1. pilléres tőkekövetelmény.

⁶A Bazel II szabályrendszer alapján 2. pilléres tőkekövetelmény.

⁷Gross Income

⁸CRR 317. cikk (4)

hivatott dokumentumot (pl. EBA [2015]) publikált, melyek az AMA modellek felé eredetileg megfogalmazott általános elvárásokat specifikálták, ugyanakkor a Bázeli Bizottság véleménye szerint ezen egységesítő, módszertani közelítést célzó tevékenységek csak közvetetten érték el céljukat. Ennek megfelelően a Bázeli Bizottság az AMA modellek komplexitásának csökkentését és az eredmények összevethetőségét célzó újabb módszertanok és szabályozás kidolgozása helyett inkább a módszer kivezetése mellett foglalt állást.

Cikkünkben bemutatjuk azon AMA keretrendszert érintő problémák körét, melyek már a Bazel II szabályrendszer megjelenésekor is nyilvánvalók voltak. Összefoglaljuk, hogy milyen jelenségek és problémák gyűjtőfogalomként hivatkozunk a tőkekövetelmény instabilitásának fogalmára. Ezt követően saját számítások és elemzések alapján több, az AMA modell által számszerűsített, a tőkekövetelmény instabilitásával kapcsolatos jelenséget tárgyalunk, illetve mutatunk be. Az instabilitási hiányosságok kapcsán továbbá rávilágítunk arra, hogy egy részük az LDA⁹ alapú AMA keretrendszer inherens részét képezik, azaz a teljes eliminálásuk lehetetlen feladatot jelent, így alapvetően célt csak az egyes elemekkel kapcsolatos instabilitás minimalizálása jelenthet.

2 Nyilvánvaló és már a keretrendszer bevezetésekor is ismert problémák

Egy intézmény működési kockázati tőkekövetelményének meghatározása céljából igen fontos szerepet játszanak a belső (intézményben felmerült) veszteségadatok, melyek a szervezetben szétszórtan jelennek meg. Ennek megfelelően a működési kockázatkezelés fontos feladata ezen veszteségadatok gyűjtésének megszervezése, valamint az intézmény különböző területeiről származó veszteség információk minőségbiztosítása. Tekintettel arra, hogy az adatok gyűjtése, rendszerezése az egész szervezetet igénybe veszi, értelemszerűen adódik, hogy nem éri meg minden apró veszteséget feltárni, és az adatbázisban rögzíteni az erőforrásokkal való optimális gazdálkodás jegyében. Ennek következménye, hogy maga a szabályozó a tőkekövetelmény mind sztenderd, mind fejlett mérési módszer szerinti meghatározása esetén elvárja¹⁰ a hitelintézetektől, hogy a szervezet határozzon meg egy alsó küszöbértéket, ami fölött gyűjti a veszteségeit. A kérdéses alsó küszöbérték meghatározása a hitelintézet feladata, ugyanakkor annak megfeleltetését bizonyítani, alátámasztani szükséges a hitelintézet felügyeletét ellátó szerv felé. A cikk későbbi fejezeteiben bemutatjuk az alsó küszöb megválasztásával kapcsolatos nehézségeket és problémákat, valamint megmutatjuk, hogy a kérdéses küszöb milyen mértékű hatást képezt gyakorolni a működési kockázati tőkekövetelményre.

Az adatok gyűjtéséhez kapcsolódóan, a modellezési keretrendszert illetően további problémát jelent a modellezési dátum kiválasztása. A szervezet számos időpontot feljegyezhet egy működési kockázati eseménnyel kapcsolatban,

⁹Loss Distribution Approach

¹⁰A TSA módszer esetén a CRR 320. cikk a) pontja, míg az AMA esetén a CRR 322. cikk (3) c) pontja a mérvadó.

melyek adott időintervallumra történő használata akár jelentős mértékben különböző tőkekövetelmény számokat is eredményezhet:

- az esemény bekövetkezésének dátuma,
- az esemény észlelésének dátuma,
- az eseményhez tartozó veszteség könyvelésének a dátuma,
- az esemény adatbázisban történő rögzítésének a dátuma.

Egy működési kockázati esemény bekövetkezése sokszor nem ismert, így adott esetben az sem eldönthető, hogy az eseményhez tartozó veszteségnek bele kell-e tartoznia abba az idősorba, amiből a tőke meghatározása történik. Az észlelés dátuma egy újabb lehetőség a működési kockázati esemény hatásának modellezésére, hiszen akkor vesszük figyelembe az eseményt, amikor már tudjuk, hogy viselnünk kell annak következményeit, hiszen az események melyek a (rég) múltban következtek be, bekövetkezésük után sokkal később is okozhatnak gazdasági hatást. Ez utóbbi esetén olyan események kerülhetnek be az idősorba és a tőkekövetelmény-számításba, melyek adott esetben már nem is relevánsak az intézmény szempontjából¹¹. A könyvelés és rögzítés dátuma mindössze technikai dátumok, így egy kockázatérzékeny tőkekövetelmény megállapítására nem javasoltak.

Újabb, már a keretrendszer bevezetésekor is látható problémát jelent a modellezés kapcsán a múltbeli megfigyelési időszak hosszának megválasztása. A szabályozó habár egy legalább 5 éves időintervallum¹² alkalmazását várja el a működési kockázati tőkekövetelmény meghatározásához, ugyanakkor az időintervallum hosszának meghatározása során azt szükséges mérlegelni, hogy az intézménynek legyen „elégleges” adata a kockázatok becsléséhez, tehát egyfelől legyen minél hosszabb az idősor, másrészt nem szabad arról sem megfeledkeznie, hogy az intézmény egy állandóan változó környezetben működik, tehát a valós kockázati profilját az időben legfrissebb események jellemzik leginkább. Ezt a képet árnyalja, hogy lehetnek olyan típusú események (pl. bírósági ügyek), ahol a veszteségek és a kapcsolódó megtérülések időben távol vannak egymástól, így egy akár 5 éves időtáv választása is értelmét veszti.

A működési kockázati tőkekövetelmény modell alapú meghatározásának sajátossága, hogy a tőkekövetelmény szintjét gyakorlatilag az extrém, azaz a ritkán előforduló, de potenciálisan súlyos veszteségesemények határozzák meg leginkább (lásd Aue et al. [2006], Böcker et al. [2005], Embrechts et al. [2003]). Az előzőekben tárgyalt, a múltbeli megfigyelési időszak hosszának megválasztása kapcsán újabb előre látható problémával állunk szemben: a hitelintézetek belső adatai között extrém veszteségek alig, vagy legalábbis modellépítés szempontjából tipikusan elégtelen mennyiségben fordulnak elő. A szabályozó a potenciálisan súlyos, de ritka események számosságához köthető probléma ellensúlyozása kapcsán elvárja¹³ az intézményektől, hogy az extrém-

¹¹Pl. az üzletág már megszűnt, vagy azt a folyamatot már számos kontroll funkció erősíti, ahol az esemény bekövetkezett.

¹²CRR 322. cikk (3) a) alapján

¹³CRR 322. cikk (4) alapján

nek tekinthető belső veszteségadatai mellett külső veszteségadatokat is vegyünk figyelembe a modellezés során annak érdekében, hogy a veszteségeloszlás széle – mely a tőkekövetelmény szintjét leginkább meghatározza – is kellő módon megragadható legyen a későbbi eloszlásillesztés és paraméterbecslés során. A kérdéses külső adatokat az intézmények jellemzően két forrásból nyerhetik: publikus és konzorcium adatok. Az előbbi felsorolt két adatforrás mindegyike rendelkezik előnyökkel és hátrányokkal, a kettő közötti választást ugyanakkor elsődlegesen a felhasználás célja dönti el. A publikus adatok jellemzően részletes leírással rendelkeznek az eseményt illetően, ugyanakkor közzétételük meglehetősen eseti, éppen ezért a felhasználásuk inkább a kockázati önértékelések és szcenárióelemzések során javasolt, mintsem a tőkekövetelmény számítása kapcsán, tekintettel arra, hogy nem lehet rá stabil modell inputként tekinteni. A konzorcium adatok rendszeres és folyamatos rendelkezésre állását a tagok azon vállalása biztosítja, miszerint azok meghatározott időközönként közzéteszik működési kockázati veszteségeiket a konzorcium többi tagjának számára. Ugyanakkor a kockázati eseményekről tipikusan csak az adatkonzorcium által előírt minimális információ áll rendelkezésre, mivel a tagok anonimnak szeretnének maradni az elszenvedett veszteségek tekintetében. Ennek fényében a konzorcium tagjai kénytelenek megbízni egymás adatgyűjtési, rögzítési és kategorizálási folyamatában, hiszen utólag a veszteségesemény leírásából jellemzően nem lehet teljesen rekonstruálni a teljes működési kockázati eseményt.

Az előzőekben említett, a külső veszteségadatok gyűjtésével és felhasználásával kapcsolatos nehézségek mellett a kérdéses adatok modellben való figyelembe vétele is kellő körültekintést igényel. A már említett adatkonzorcium tartalmazhat olyan adatokat, melyek egyáltalán nem relevánsak az azt felhasználó számára¹⁴, így azokat mellőzni szükséges a tőkekövetelmény számítása során. A relevánsnak tűnő adatok bevonása pedig azt eredményezheti, hogy a tőkekövetelmény az iparági tőkekövetelmény irányába fog torzítani tekintettel arra, hogy a megképzett tőkekövetelményt leginkább más intézmények által elszenvedett veszteségek indukálják. A tőkekövetelmény becslésének külső adatok miatti torzítását ugyanakkor ellensúlyozhatja a külső adatok figyelembe vételéhez kapcsolódó növekvő stabilitás az illesztett eloszlások paraméterbecslése során. Ennek megfelelően egy intézmény számára arra a kérdésre kell választ adni, hogy mennyire hasonlít vagy különbözik működési kockázati profil alapon az iparági átlaghoz képest, mivel ennek függvényében fogja használni (súlyozni) a külső adatokat. Számos szerző (pl. Dahlen et al. [2008]) javasolja a külső adatok skálázását¹⁵, ami az iparági tőkekövetelmény felé kevésbé torzító tőkeértékhez vezethet.

Itt jegyezzük meg, hogy Gáll és Nagy [2007] már korábban felhívta a figyelmet néhány, az LDA módszeren alapuló tőkekövetelmény-számítást érintő

¹⁴Pl. nagyon eltérő működési környezet okán elszenvedett veszteség vagy olyan üzletághoz kapcsolódó veszteségek, amellyel az adatot felhasználó intézmény nem is rendelkezik.

¹⁵Azon külső adatok arányos figyelembe vétele a tőkekövetelmény számítása során, melyet az adott intézményhez képest jóval nagyobb mérlegfőösszegű (vagy egyéb méret indikátorral rendelkező) hitelintézet szenvedett el.

problémára. Az említett cikkben részletesen ismertetésre kerül az LDA modell, mely a teljes veszteségelosztást egy összetett eloszlásként vezeti be, így annak kvantilisei adják az alkalmas tőkekövetelményeket. Jelen cikkben eltekintünk a modell részletes ismertetésétől.

Jegyezzük meg továbbá, hogy cikkünkben AMA alapján készült tőkekövetelmény-becsléseket vizsgálunk. Ennek során rendre az LDA modellből indulunk ki, azaz a teljes veszteség eloszlását egy ún. összetett eloszlás modellezi, amelyet egyrészt a (független és azonos eloszlásúnak feltételezett) egyedi veszteségek eloszlása, másrészt (az egyedi veszteségektől szintén független) veszteségek számának eloszlása (gyakorisági eloszlás) adja meg. A tőkekövetelményt pedig az összetett eloszlás VaR értéke adja. Utóbbit számos módszerrel lehet becsülni, pl. Monte Carlo szimuláció vagy Single Loss Approximation (SLA), amennyiben a modell paraméterei ismertek, vagy azok becslései adtak. Bár az AMA más megközelítéseket, módszereket is megengedne a gyakorlatban, s különösen a magyar gyakorlatban az említett LDA alapú tőkekövetelmény szinte kizárólagos. Az LDA modell és abban a tőkekövetelmény becslésének alapjait tárgyalja többek között Panjer [2006], továbbá Gáll és Nagy [2007] ad egy összefoglalást, így ennek részleteitől itt eltekintünk.

3 A tőkekövetelmény instabilitása és esetei

A következőkben az instabilitást gyűjtőfogalomként használjuk, azaz nem közlünk egységes, precíz matematikai definíciót, tekintettel arra, hogy az instabilitás fogalmának konkretizálására az egyes vizsgált problémák kapcsán jellemzően külön-külön kerül sor. A működési kockázatok esetén az instabilitás alatt a továbbiakban a tőkekövetelmény nagyfokú változékonyságát értjük, melynek elsődleges forrása a szabályozói definíció, konkrét megjelenési formái pedig a következő okokból adódhatnak:

- nagyfokú becslési hiba,
- extrémekre való érzékenység,
- nem megfelelő eloszlások választása, használata,
- különböző becslési módszerek segítségével kapott jelentősen eltérő eredmények.

Extrém események modellezésével kapcsolatos bizonytalanság

A következőkben a működési kockázati tőkekövetelmény instabilitásával kapcsolatos számításainkat a HUNOR adatbázison¹⁶ végeztük el, mely a magyarországi piacvezető bankok által közösen létrehozott operációs kockázati adatbázis. Célunk a tárgyalt problémák bemutatása során olyan esetek (pl.

¹⁶Hungarian Operational Risk Database (Magyar Működési Kockázati Adatbázis), melyben az adatkonzorcium tagok anonim módon osztják meg egymással az adatgyűjtési küszöb feletti veszteségeik megfelelő adatait.

paraméterválasztások, mintaméret) választása, melyek életszerűek a hazai környezetben is.¹⁷ Az érdeklődő olvasó figyelmébe ajánljuk, hogy a HUNOR-hoz hasonló adatbázisok más földrajzi területeken (országokban) is létrejöttek, lásd például SAS OpRisk Global Data és ORX¹⁸ adatbázisokat.

Jegyezzük meg, hogy a HUNOR adatbázison végzett számításainkhoz a vizsgált célokra megfelelően hosszú időintervallumot választottunk. Másfelől viszont az is fontos, hogy ez az időintervallum ne legyen túl hosszú ahhoz, hogy a vizsgált eloszlások paramétereinek időbeli stabilitása teljesüljön. Jegyezzük meg továbbá, hogy a szabályozói elvárás¹⁹ szerint a tőkekövetelménynek 99,9%-os konfidenciaszint mellett, 1 éves időszakra kell megfelelő biztonságot nyújtania. Továbbá a tőkekövetelmény instabilitásával kapcsolatos számítások szempontjából a válságidőszak adatain végzett vizsgálatok különösen indokoltak lehetnek, mivel a tőkekövetelmény szintjét leginkább meghatározó, az eloszlás szélét reprezentáló események vélhetően épp ezen időszak alatt következtek be, míg az AMA modellek sajátossága miatt a tőkekövetelmény a relatíve gyakori, de kevésbé súlyos eseményekre nem tekinthető érzékenynek. Az 1. táblázatban foglaltuk össze a legfontosabb leíró statisztikákat²⁰ az általunk felhasznált adatbázis kapcsán, a CRR 324. cikke szerinti eseménytípusok bontásában²¹.

Esemény-típus	Db	Minta- átlag (mHUF)	Empirikus szórás (mHUF)	Maxi- mum (mHUF)	μ becslése	σ becslése	p-érték K-S	p-érték A-D
Belső csalás (ET1)	27	84	250	1220	15,14	2,75	0,99	0,99
Külső csalás (kiv. kártya) (ET2)	287	5	39	521	12,42	2,20	0,51	0,48
Munkáltatói gyakorlat (ET3)	133	4	13	92	13,10	2,18	0,49	0,52
Ügyfelek, termékek (ET4)	413	6	43	602	12,36	2,42	0,14	0,27
Tárgyi eszközök (ET5)	1465	0	1	25	11,96	1,34	0,03	0,00
Üzletmenet, rendszerhiba (ET6)	202	2	10	136	11,85	1,91	0,53	0,37
Végrehajtás, folyamatok (ET7)	2344	2	27	931	11,98	2,04	0,03	0,06
Kártya- csalás (ET2)	2205	0	1	27	11,46	1,45	0,01	0,01

1. táblázat. HUNOR adatbázis leíró statisztikai, az illesztett lognormális eloszlások becslült paramétereit (μ ill. σ). Forrás: saját számítás.

Az 1. táblázat alapján láthatjuk, hogy az ET1 eseménytípus esetén a minta elemszáma nem elégséges ahhoz, hogy a későbbiekben az eloszlás szélét

¹⁷A Bankszövetség és a Nemzetközi Bankárképző a 2009.06.30-2012.06.30 hároméves időszakra bocsátotta rendelkezésünkre a HUNOR adatokat, így ezeket használjuk fel a munkánkban az elemzésekhez.

¹⁸Operational Riskdata eXchange Association

¹⁹CRR 322. cikk (2) a)

²⁰A táblázatbeli átlagok kerekített értékek, a Tárgyi eszközök és Kártyacsalás esetén például 410, ill. 287 ezer HUF a mintaátlag.

²¹A bázeli üzletág-dimenzió vizsgálatát mellőzzük, mivel azon veszteségesemények, melyek több üzletágot is érintenek, azok a bázeli üzletágak szerint százalékosan megosztva kerülnek be a HUNOR adatbázisba, azaz részarányosan egy esemény több üzletághoz is rögzítésre kerülhet.

vizsgáljuk, továbbá az ET3 esetén, habár a szokásos hüvelykujjszabályok alapján éppen elégségesnek tekinthető a mintaelemszám, az eredményeket ugyanakkor kellő megfontolással kell majd kezelni. Az ET2 (kivéve kártya), ET4 és ET7 eseménytípus kategóriákban látható, hogy a szórás arányaiban itt haladja meg leginkább az átlagot. Megjegyezzük továbbá, hogy a minta ferdesége és csúcossága ezen kategóriák esetén a leginkább jelentős. Továbbá a maximum és átlag arány esetenként a több százat is meghaladja. Az előzőek összességében éppen arra utalnak, amire számítottunk: a kategóriánkénti eloszlások közül több is erősen vastag szélű.

A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy az igen népszerű (és hasonló problémáknál gyakran jól viselkedő) lognormális egyedi veszteségeloszlás mennyire jól illeszkedik a kategóriánkénti adatokra. Az eloszlás illesztése során az eredeti mintát eltoltuk 0-ba és az így kapott adatokra illesztettünk²² lognormális eloszlást. Az illesztések²³ során maximum likelihood becslést használtunk, továbbá az illeszkedés jóságáról a grafikus módszerek mellett a Kolmogorov-Smirnov és Anderson-Darling tesztek alapján is meggyőződünk, melyekhez tartozó p értékeket a paraméterek (μ és σ) becslt értékével együtt az 1. táblázatban is közöltük.

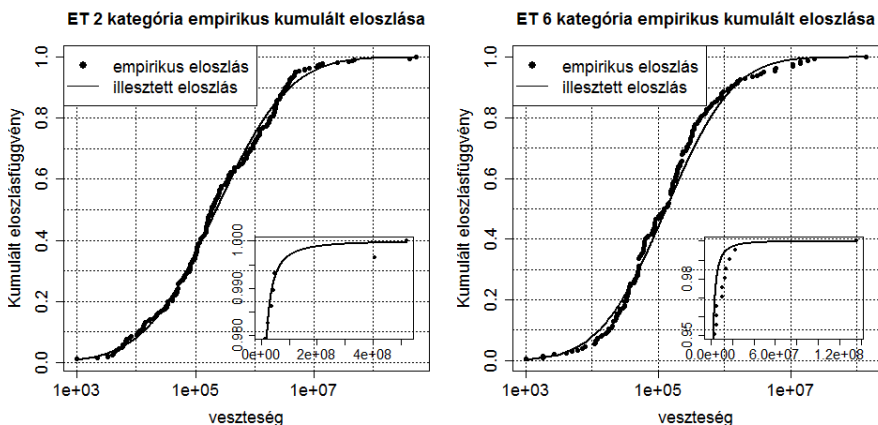
Az 1. táblázat p értékeket tartalmazó oszlopai alapján látható, hogy a Tárgyi eszközök és a Kártyacsalás kategóriák esetén utasítható el egyértelműen a nullhipotézis, akár 4-5%-os szignifikanciaszint mellett, mely szerint a veszteségadatok az adott kategóriában lognormális eloszlást követnek. Továbbá a Végrehajtás, folyamatok kategória esetén bizonytalanabb a döntés a kissé magasabb p értékek miatt, ám itt is megkérdőjelezhető a lognormalitás. Ha megfigyeljük, hogy hol sikerültek a „legjobban” az illesztések, akkor éppen a legkisebb mintaelemszámú kategóriák köszönnek vissza. Megjegyezzük, hogy az egyes eseménytípus szerinti kategóriák számos esetben tartalmaznak azonos veszteségértékeket, melyeket a szabályozó nem enged kiszűrni annak ellenére sem, hogy az azonos értékeknek köszönhetően ugrik az empirikus kumulált eloszlásfüggvény, mely jelentősen negatív irányban módosítja az illeszkedésvizsgálatok eredményét (így a probléma nagyságának függvényében más modellspecifikációra lehet szükség).

Annak ellenére, hogy a becslés összességében több kategóriában is megkérdőjelezhető, több fontos eredményt is kaptunk. Azon kategóriák esetén, melyek kapcsán a lognormális eloszlás illeszkedése elfogadható a tesztjeink eredményei alapján, ott nagyságrendileg leolvashatók a lognormális eloszlás paramétereinek (μ és σ) azon tartományai, melyek mellett érdemes további szimulációkat, vizsgálatokat folytatnunk. Látható például, hogy a gyakran

²²Az érdeklődő olvasó figyelmébe ajánljuk Baud et al. [2002] és Ergashev et al. [2012] eredményeit, melyek alapján látható, hogy a tőkeképzés szempontjából nem mindegy – akár jelentős különbségek is adódhatnak –, hogy feltételes eloszlást használunk-e vagy a 0-ba eltolt adatokra illesztjük a feltétel nélküli eloszlást. Jelen cikk esetében a 0-ba való eltolást, mint módszertant az előzőekben hivatkozott szerzők eredményei alapján választottuk, tekintettel a feltételes eloszlás illesztésével kapcsolatos nehézségekre.

²³Az illesztett eloszlások paramétereinek becslését, valamint a későbbiekben ismertetett számításokat és a cikkben szereplő grafikonokat az R 3.4.2. szoftver segítségével végeztük, illetve készítettük el.

használt $\mu = [11, 13]$ és $\sigma = [2, 3]$ paraméterek közel állnak a realitáshoz, azaz egy-egy intézmény kapcsán relevánsak lehetnek. Ezen túl ugyanakkor grafikus úton vizsgálhatjuk azt a kérdést, mely szerint amennyiben az illeszkedésvizsgálat eredményei alapján elfogadható a lognormális eloszlás, úgy ez az elméleti eloszlás alulbecsli-e a kockázatot a veszteségeloszlás szélén. Másképp fogalmazva, a teljes veszteségtartományon jól illeszkedő lognormális eloszlás kellően vastag szélű-e ahhoz, hogy megfelelő módon lefedje a veszteségeloszlás szélét. Az 1. ábrán két olyan szegmens esetén vetjük össze az empirikus veszteségeloszlás és az illesztett eloszlás kumulált eloszlásfüggvényeit, melyek esetében a p értékek alapján nem tudtuk elvetni a lognormális eloszlást.



1. ábra. Az eloszlásfüggvények összevetése. *Forrás:* saját számítás.

A fenti összevetés alapján jól látható, hogy a teljes veszteségtartományt tekintve mind a Külső család (kivéve kártya) (ET2), mind az Üzletmenet, rendszerhiba (ET6) kategóriák esetén valóban jól illeszkedő eloszlásokat kapunk, ugyanakkor ha tekintjük a veszteségeloszlás magas percentiliseit, azaz az eloszlás szélét mutató kisebb ábrákat, úgy látható, hogy az Üzletmenet, rendszerhiba kategória esetén vastagabb szélű eloszlásra lenne szükségünk a lognormális helyett. Hasonlóan a teljes veszteségtartományon jól illeszkedő eloszlásokat kapunk az ET3 és ET4 kategóriák esetén, ugyanakkor ezen jól illeszkedő eloszlások szintén alulbecslik a kockázatot az eloszlás szélén, azaz az eredmények alapján látható, hogy érdemes a vastagabb szélű eloszlások felé elmozdulni.

Itt szeretnénk megemlíteni, hogy az egyes eseménytípusokba tartozó veszteségek kapcsolatának (függőségi struktúrájának) modellezése, továbbá a VaR nem szubadditív jellege számos további problémát vet fel a teljes tőkekövetelmény számítása során. Az eseményosztályokra számolt vagy becsült VaR értékek összeadásával nyert tőkeszükséglet a fenti problémák miatt gyakorolta a tőkekövetelmény túlbecsléséhez vezet. A szabályozó engedélyezi²⁴ az

²⁴EBA/RTS/2015/02 Article 40

egyes eseménytípusok közötti függőség modellezésének figyelembe vételét a tőkekövetelmény számítása során, melynek egy lehetséges eszköze a kopulák alkalmazása. A pénzügyi kockázatok kopulákkal történő modellezése kapcsán sok probléma merül fel, a témakörben számos tudományos publikáció ismert, ezek közül megemlítjük Mikosch [2006] és Bugár [2017] áttekintő cikkeit az érdeklődő olvasónak.

Az elégséges mintaelemszámról

Számos szerző foglalkozik azzal a kérdéssel, hogy mekkora a VaR^{25} (azaz a tőkekövetelmény) becslés hibája, illetve mi lenne az a már elégségesnek tűnő (megfelelő) mintaméret, amely mellett a tőkekövetelmény már elfogadható hibával becsülhető. Szabályozói szemszögéből a VaR alulbecslése, míg a hitelintézet tulajdonosának szemszögéből nézve a tőke túlbecslése jelenti a problémát. A becslés hibáját számos oldalról megközelíthetjük a modellezés során, ugyanakkor a következőkben mi csak a megfelelő mintaelemszám nagyságrendjének függvényében vizsgáljuk a kérdéses problémát.

Az egyedi veszteségek éves gyakoriságának és eloszlásának tükrében Frachot et al. [2004] szimulációs kísérletek segítségével adott választ a tőke becslési hibájára és az elégséges mintaelemszámra. Elemzésében arra a kérdésre ad választ, hogy mekkora mintaelemszám szükséges ahhoz, hogy a becsült tőke (VaR_{EST}) a tényleges tőke (VaR_{TRUE}) $1 - c$ százalékánál α valószínűséggel nagyobb legyen. Eredményét az elfogadható mintanagyság tekintetében $\lambda = 100$ paraméterű Poisson gyakorisági eloszlás, valamint $\mu = 9$ és $\sigma = 2$ paraméterű lognormális veszteségeloszlás alkalmazása mellett kapta α és c paraméterek függvényében, melyet az alábbi 2. táblázat foglal össze.²⁶

c / α	60%	70%	80%	90%
10%	400	1740	4500	10430
20%	100	430	1120	2600
30%	40	190	500	1150
40%	20	100	280	650
50%	10	60	180	410

2. táblázat. Optimális mintaelemszám α és c függvényében, $\lambda = 100$, $\mu = 9$, $\sigma = 2$ esetén. *Forrás:* Frachot et al. [2004].

A 2. táblázat alapján látható, hogy egy átlagosan évi 100 adatot gyűjtő bank esetében több mint 10 ezer elemű mintára lenne szükség ahhoz, hogy 90%-os valószínűséggel ne becsüljük több mint 10 százalékkal alá a működési kockázati tőkekövetelményt, miközben egy intézmény a fenti paraméterek mellett várhatóan csak 500 eseménnyel fog rendelkezni 5 év után is. Ezt a mintaelemszámot a bank csak alkalmas (ugyanolyan eloszlásból származó) külső adatok bevonásával tudja elérni. A szakirodalomban továbbá Cope et

²⁵Value-at-Risk

²⁶Frachot et al. [2004] cikkében az optimális mintaelemszámot egy analitikus összefüggés segítségével kapja. Az optimális elemszámot megadó összefüggés levezetéséhez felhasználta, hogy az ML módszer mindig konzisztens és aszimptotikusan hatásos becslőfüggvényt eredményez normális határeloszlással. Az érdeklődő olvasó a pontos levezetést a hivatkozott cikk 6. fejezetében találja meg.

al. [2009] vizsgálta az elégséges mintanagyság kérdését, ugyanakkor lognormális eloszlás helyett Pareto-eloszlások²⁷ mentén, melyhez a kvantilis szten-derd hibájára vonatkozó becslést alkalmazta. Eredményei alapján a fentiek-hez hasonló 10 százalékos relatív hiba eléréséhez a 99,9%-os valószínűséghez tartozó kvantilis becslése során nagyobb, mint százezres mintaelemszámra lenne szükségünk.

Az előbb bemutatott eredmények alapján láthatjuk, hogy a különböző szerzők más és más mintanagyságot javasolnak vagy határoznak meg – természetesen nem teljesen ugyanabban a kontextusban a gyakorisági és az egyedi veszteségeket leíró eloszlások tekintetében –, ugyanakkor a közös vonás bennük az, hogy a tőkekövetelmény relatíve pontos meghatározásához olyan nagy mintára van szükség, mely a hitelintézet számára nem áll rendelkezésre. A szükséges minta nagyságát részben a veszteséggeneráló folyamat határozza meg, azaz milyen gyakorisággal és mennyire vastag szélű eloszlásból származnak az adatok, ugyanakkor nem szabad megfeledkeznünk a szabályozó által determinált tőkekövetelmény definícióról sem, azaz éves időtávon, 99,9%-os valószínűséggel kell a tőkének fedezetet nyújtania a veszteségekre. Ez utóbbi fontos következménye, hogy a hitelintézet a gyakorlatban sosem rendelkezhet megfelelő mintaelemszámmal a tőkekövetelményének megfelelő becsléséhez. Ezt az alábbi logika mentén mutatjuk be. Tegyük fel, hogy évente átlagosan k darab veszteséget figyelünk meg. Ahhoz, hogy a szabályozó által meghatározott tőkekövetelményt közvetlenül meg tudjuk határozni, 1000 év aggregált veszteségét kell megfigyelniünk, azaz ekkor tudjuk a tőkét 99,9%-os biztonsággal közvetlenül meghatározni. Ez számunkra azt jelenti, hogy az egyedi veszteségeloszlásból $k \times 1000$ darab megfigyeléssel kell rendelkezniünk, tehát az adott intézménynek 1000 év adatára van szüksége. Ehhez képest mindössze 5 évnyi, azaz $k \times 5$ darab veszteséggel rendelkezik a tőkeszámításhoz.

A működési kockázati veszteségek eloszlása a szubexponenciális eloszláscsaládba tartozik, ami azt jelenti, hogy az éves aggregált veszteséget tipikusan 1 veszteség, a maximális veszteség határozza meg. Ebből adódik, hogy az egyedi veszteségeloszlás viselkedése a szélső tartományban fogja meghatározni az aggregált eloszlás VaR-ját, a tőkét.

A 99,9%-os konfidenciaszint melletti VaR meghatározása 5 éves időszorból a veszteségek $1000/5 = 200$ -szoros extrapolálását, és egyben parametrikus modell használatát teszi szükségessé. Az eloszlás extrapolálása olyan tartományba (a becslni kívánt kvantilis tartományába), ami nem megfigyelhető és ezáltal visszamérhető az intézmény számára, óriási bizonytalanságot rejt magában. Ezt a problémát a későbbiekben extrapolációs problémaként hivatkozunk (Cope et al. [2009]).

A gyakorisági eloszlás választása

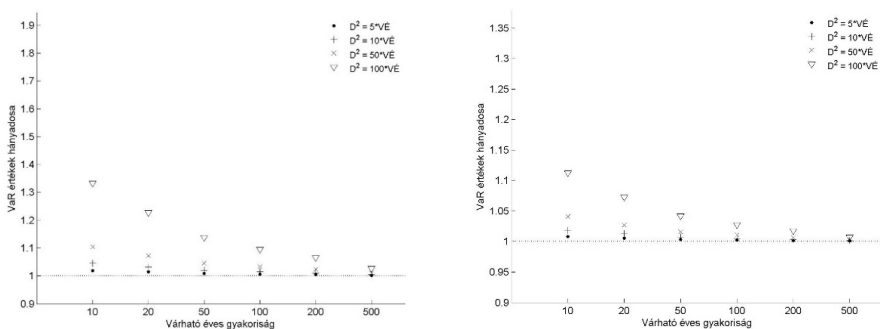
A gyakoriság modellezéséhez leginkább az ún. $(a, b, 0)$ típusú eloszláscsaládokat – így Poisson, binomiális és negatív binomiális eseteket – szokás használni működési kockázatok esetén. Az ezzel kapcsolatos egyszerű statisztikai

²⁷ $F(x) = 1 - x^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, $x \geq 1$.

(pontbecslések, illeszkedés vizsgálata) eszközök tárgyalása jelen cikkben nem cél, az érdeklődő olvasónak javasoljuk Gáll és Nagy [2007] cikkét.

Működési kockázatok esetén különösen kicsinek tekinthető a gyakorisághoz tartozó minták mérete, tekintettel arra, hogy egy-egy megfigyelt időszak csak egy újabb mintaelemet ad. Ezt a tényt figyelembe véve – bár matematikailag könnyen kezelhető lenne a három klasszikus gyakorisági eloszlás, sőt az azok közötti választás is könnyen megoldható²⁸, továbbá ezen eloszlások esetén jól használható rekurziós képlet is ismert az együttes veszteségeloszlás meghatározására (pl. Panjer [2006]). Ennélfogva azt javasolhatjuk általánosságban, hogy mindössze csak az egy paraméterrel rendelkező Poisson-eloszlást érdemes használni a működési kockázatok esetén, hiszen – ahogy ezt a későbbi példáinkban alá is támasztjuk – a tőkekövetelmény becslési hibáját érdemben nem a gyakoriságválasztás okozza a gyakorlatban.

A 2. ábrával azt illusztráljuk, hogy milyen esetekben számít a gyakorisági eloszlás alakja, illetve bármilyen tulajdonsága annak várható értékén túl. Az ábrákon azonos várható értékű (de különböző varianciájú) negatív binomiális és Poisson-eloszlások felhasználásával előállított tőkekövetelmények (VaR) hányadosát ábrázoljuk a gyakorisági eloszlások várható értékének függvényében. A lenti ábrán látható, hogy a gyakoriságok tekintetében négy különböző összehasonlítást végeztünk, miszerint az alkalmazott negatív binomiális eloszlás varianciája 5, 10, 50 és 100-szorosa volt a gyakoriság eloszlás várható értékének (az ábrán „ VE ”), és egyben a Poisson-eloszlás varianciájának (az ábrán „ D^2 ”). Megjegyezzük, hogy a VaR értékek számítása során a két megnevezett gyakorisági eloszlás mellett súlyossági eloszlásként lognormális eloszlást alkalmaztunk $\mu = 10$ és $\sigma = \{2, 2, 5\}$ paraméterekkel, azaz a jobb oldali ábra a lognormális eloszlás σ paraméterében különbözik a másiktól. Tekintettel arra, hogy lognormális eloszlás esetén a lapultság csak a σ függvénye, így a magasabb σ paraméterű eloszlás számít „vastagabb szélűnek”.



2. ábra. Negatív binomiális és Poisson eloszlások melletti VaR hányados a várható éves gyakoriság függvényében. A gyakoriságeloszlásokhoz tartozó lognormális eloszlások paraméterei rendre: $\mu = 10$ és $\sigma = \{2; 2, 5\}$. VE : várható érték, D^2 : szórás. Forrás: saját számítás.

²⁸Klugman [2004], valamint Arató [1997] és Gáll és Nagy [2007] alapján az alábbi hüvelykujj szabályt fogalmazhatjuk meg a gyakoriság eloszlások közötti választásra: ha $E\eta < D^2\eta$, akkor negatív binomiális, ha $E\eta = D^2\eta$, akkor Poisson, ha $E\eta > D^2\eta$, akkor binomiális eloszlás választása szükséges, ahol E és D^2 rendre a várható értéket és a varianciát jelölik.

A 2. ábráról két fontos következtetést vonhatunk le:

- A VaR hányados a várható éves gyakoriság függvényében konvergál 1-hez, azaz jellemzően csak a kis várható értékű gyakoriságok esetén fontos az, hogy milyen eloszlástípust választunk a gyakorisági eloszlás modellezésére. Érdeemes megjegyezni, hogy a Single Loss Approximation (SLA) módszerén alapuló VaR becslés egybecseng ezzel a megjegyzéssel, hiszen az azzal megadott tőkekövetelmény a gyakoriságeloszlástól már csak a várható értékén keresztül függ.
- Vastagabb szélű lognormális eloszlás alkalmazásával a VaR hányados közelebb van 1-hez azonos várható éves gyakoriság mellett, mint a kevésbé vastag szélű esetben. Ebből következik, hogy a nagyobb varianciájú negatív binomiális eloszlás jelentősége annál inkább csökken, minél vastagabb szélű a veszteség eloszlás.

A fenti eredmények kapcsán megjegyezzük, hogy a kérdéses (a gyakorisági eloszlás választásához kapcsolódó) hiba alapvetően eltörpül a veszteségeloszlás nem megfelelő választásából, valamint annak paraméterbecsléséből származó hibához képest. Ez az elsődleges oka annak, hogy jelen cikk és a szakirodalom súlypontját is sokkal inkább a veszteségeloszlás becslésével kapcsolatos problémák adják.

Az egyedi veszteségeloszlás választása

Az egyedi veszteségeket nemnegatív értékű valószínűségi változóval írhatjuk le, melyet egy alkalmas eloszláscsaládból kaphatunk. A különböző eloszláscsaládok közül a megfelelő kiválasztása, továbbá az illesztett eloszlás illeszkedése kiemelt szerepet tölt be a veszteségeloszlás modellezése szempontjából, különös tekintettel az eloszlás szélére vonatkozóan, ahol éppen azok az események helyezkednek el, melyek a leginkább meghatározzák a működési kockázati tőkekövetelmény értékét. A paraméterbecsléshez, az eloszlások szelekciójához, az illeszkedés jóságának vizsgálatához tipikusan a statisztikából jól ismert standard eljárásokat használhatjuk: illeszkedésvizsgálatokat (pl. χ^2 -próba, Kolmogorov-Szmirnov és Anderson-Darling próbák stb.), grafikus eszközöket (pl. hisztogram, PP-plot, QQ-plot), pontbecslési módszerek (pl. momentumok módszere, maximum likelihood módszer, kvantilis módszer). Mivel ezen eljárások alkalmazása során nem vetődnek fel működési kockázatra jellemző specifikus problémák, így ezeket jelen írásban nem tárgyaljuk részletesen. Az érdeklődő olvasónak javasoljuk Gáll és Nagy [2007] cikkét, ahol az alkalmas eloszláscsaládok, valamint az illeszkedéshez kapcsolódó eszközök tárgyalása részletesebb operációs kockázatok esetére.

A megfelelő mintaelemszám tárgyalásakor már vizsgáltuk, hogy mennyire nagy mintaelemszám kell ahhoz, hogy a VaR értéket kis hibával tudjuk meghatározni. Ezen a ponton felmerülhet az a kérdés, hogy mennyire pontosan tudjuk meghatározni a működési kockázati tőkekövetelményt. A konkrét számítások és eredmények kapcsán felhívánk az érdeklődő olvasó figyelmét,

hogy vessen össze a 2. táblázatban közölt, a megfelelő mintanagyságra vonatkozó eredményeket a HUNOR adatbázis deskriptív statisztikáit tartalmazó 1. táblázattal, valamint vegye figyelembe, hogy a HUNOR adatok töredéke kerül csak felhasználásra a gyakorlatban, mivel külső adatokat jellemzően csak a széleloszlás paraméterbecslése során kevernek be az intézmények. A táblázatok összevetéséből adódik, hogy az intézmények számára rendelkezésre álló veszteségek száma messze elmarad attól, hogy az adatokból direkt kvantilis becsléssel határozzuk meg a VaR-t. Épp ezért csak a paraméteres modellek alkalmazása kerülhet szóba, ugyanakkor itt ütközünk az úgynevezett extrapolációs problémába: az illesztést csak a megfigyelhető tartományból származó információ alapján végezhetjük el, ugyanakkor a tőkekövetelmény az esetek túlnyomó többségében azon túl helyezkedik el. Továbbá a későbbiekben az illesztés jóságát is csak abban a tartományban tudjuk tesztelni, ahol megfigyelések állnak a rendelkezésünkre. A következő példában két olyan eloszlásillesztést mutatunk be, ahol a tesztelt eloszlások nagyon jól teljesítettek a megfigyelhető tartományban az illeszkedésvizsgálat során (lásd 3. táblázat), ugyanakkor a hozzájuk tartozó tőkekövetelmények mégis jelentősen különböznek (lásd 4. táblázat).

A vizsgálat elvégzéséhez egy 200 elemű (évi 40) mintát generáltunk lognormális eloszlásból²⁹, melyre Burr³⁰ és lognormális eloszlásokat illesztettünk maximum likelihood módszerrel³¹. A 3. táblázat alapján jól látható, hogy a generált mintára illesztett lognormális és Burr-eloszlások megfelelően illeszkednek, sem az illeszkedésvizsgálatra (Goodness of Fit – GoF) alkalmas Kolmogorov-Smirnov, sem az Anderson-Darling tesztek p értékei alapján nem tudjuk elvetni a nullhipotézist.

Illesztés	K-S teszt p érték	A-D teszt p érték
Lognormális	0,9311	0,9232
Burr	0,9454	0,9162

3. táblázat. Az illesztett eloszlások GoF tesztjeinek p értékei.

Forrás: saját számítás.

A 4. táblázat a generált 200 elemű mintából számolt VaR értékeket, valamint a 3. táblázat szerint jól illeszkedő eloszlások VaR értékeit foglalja össze különböző megbízhatósági szintek mellett.

p	igazi VaR	Burr VaR	Lognormális VaR
0,9	4 934	3 310	3 643
0,99	67 230	48 797	37 202
0,999	453 877	599 296	203 410
0,9999	2 185 907	7 159 036	823 549
0,999975	5 071 096	31 789 076	1 741 037

4. táblázat. A generált minta, valamint az illesztett eloszlások VaR értékei. Forrás: saját számítás.

²⁹ $\mu = 5,3$ $\sigma = 2,5$ paraméterek mellett.

³⁰A Burr-eloszlás egy olyan folytonos egymódusú eloszlás, melyet gyakran alkalmaznak kockázatkezelési, aktuáriusi és opcióárazási modellek fejlesztése során, továbbá ökonometriai modellekben való felhasználása is elterjedt. A Burr-eloszlás sűrűségfüggvénye a következő: $f(x, c, k) = ckx^{c-1}/(1+x^c)^{k+1}$, ahol c és k pozitív valós paraméterek. Amennyiben $c = 1$, úgy a Pareto-eloszlást kapjuk.

³¹Számos hasonló példa található a szakirodalomban, lásd pl. Mignola et al. [2006] cikke.

A 4. táblázat utolsó sorában található percentilis alapját a Single Loss Approximation (Böcker, K., Klüppelberg, C. [2005]) adja, amely lehetőséget teremt arra, hogy az aggregált eloszlás tőkekövetelményhez használt 0,999-es percentilisét az éves gyakoriságok várható értékének függvényében (esetünkben ez 40) az egyedi veszteséeloszlás percentilisének (esetünkben 0,999975) megfeleltessük. Másképp fogalmazva, (modell feltételektől eltekintve) állíthatjuk, hogy az aggregált eloszlás 0,999 percentilisének megfelelő értéket az egyedi veszteséeloszlás 0,999975. percentilise adja a fenti példában.

A 4. táblázat alapján világosan látható, hogy a szabályozó által kért 99,9%-os megbízhatósági szint mellett is jelentősen eltér a két illesztett eloszlás VaR értéke (közel 3-szoros különbség), valamint a szabályozó által kért megbízhatósági szint felett ez az eltérés akár 20-szoros is lehet. Továbbá az is látható a táblázatból, hogy a két jól illeszkedő eloszlás közül a Burr alapján kapott VaR erősen felülbecsli, míg az illesztett lognormális alapján kapott VaR erősen alulbecsli a valós VaR értéket.

Az egyedi veszteséeloszlás választásával kapcsolatos problémát és a kapcsolódó bizonytalanságot a tőkekövetelmény szintjére vonatkozóan a következőkben egy újabb példán keresztül is szemléltetjük. Ha a cikk 1. táblázatát újra áttekintjük, látható a p értékek alapján, hogy a Belső csalás (ET1) eseménytípus esetén mondható legjobbnak az illeszkedés, így azt gondolhatjuk, hogy legalább ebben a kategóriában egyértelmű, mennyi tőkét kell egy adott hitelintézetnek képeznie. A következő szemléletes példa az előzőekben említett extrapolációs probléma okozta instabilitásra világít rá: egy ugyanolyan jó illesztés ugyanazon eloszláscsaládon belül is akár 100%-os eltérést okozhat a tőkében.

Tegyük fel, hogy egy hitelintézet által a HUNOR külső adatbázis alapján meghatározott veszteséeloszlás megegyezik a saját belső adatainak veszteséeloszlásával, ugyanakkor az események éves gyakorisága eltérő: mindössze 4 évente egyszer ($\lambda = 0,25$) következik be belső csalás az adott intézményben. Az 5. táblázat tartalmazza a Belső csalás kategória MLE becslését, mely alapján látható, hogy kvantilis-quantilis illesztéssel több olyan hasonlóan jó becslés is adható, melyek KS vagy AD értékei az MLE becsléssel azonos konklúziót adnak, ráadásul nagyon magas (> 0.9) p -értékek mellett.

Becslés típusa	Való- színű- ség1	Való- színű- ség2	μ	σ	p érték KS	p érték AD	Tőke- követelmény
Maximum likelihood	-	-	15,1432	2,7453	0,9877	0,9911	5 477 569 095
Kvantilis-quantilis	0,30	0,84	15,0983	2,9008	0,9932	0,9912	7 910 241 101
Kvantilis-quantilis	0,27	0,78	15,0492	2,5755	0,9876	0,9666	3 178 279 311

5. táblázat. Egymással azonosan jó becslések, melyek jelentősen különböző tőkekövetelményt eredményeznek. *Forrás:* saját számítás.

Az 5. táblázat kiemelt példáin túl még számos olyan jó becslést lehet adni csak a lognormális eloszlásra (tehát más eloszláscsaládot nem is vizsgálva), amely a fentiekől eltérő tőkét eredményez. Az általunk vizsgált esetek kö-

zül³² azokat kiválasztva, ahol mind a KS-hez, mind az AD-hez tartozó p érték a 0,9-et meghaladta, a legkisebb becsült tőkekövetelmény 2,31 milliárd forint, míg a legnagyobb becsült tőkekövetelmény 14,79 milliárd forint volt. Ez egy 6-7-szeres különbséget jelent a tőkekövetelményben, miközben a becslés eredménye akár tankönyvi példa is lehetne a 0,9 fölötti p értéknek köszönhetően.

Adatgyűjtési küszöb

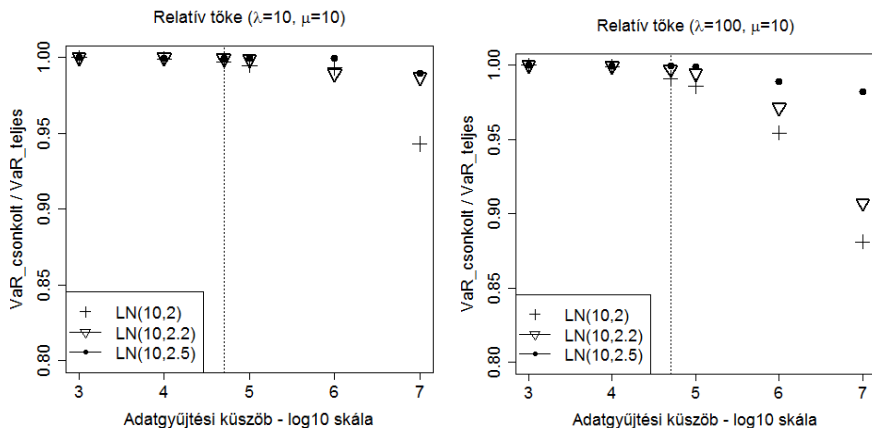
Az intézményekben csak egy adott szint fölötti veszteségek kerülnek be a működési kockázatok adatbázisába (összhangban a Basel II ajánlásokkal). Ennek legfőbb oka az, hogy a veszteségek súlyosságától függetlenül minden egyes esemény gyűjtése jelentős erőforrást igényel a hitelintézetben. A fentieknek megfelelően egy szűrt mintánk van, ahol a szűrési feltételt a megadott limit (HUNOR esetén 50 ezer HUF) jelenti. Ekkor, ha körültekintően akarunk eljárni, akkor az egyedi veszteségeknél és gyakoriságoknál ezen szűrési feltételt figyelembe véve kell elvégezni a paraméterbecsléseket (akár momentumok módszerének alkalmazása esetén, akár maximum likelihood becslés esetén). Ezt a korrekciót a maximum likelihood módszerre illusztráljuk is, az érdeklődő olvasónak pedig javasoljuk Klugman et al. [2004] és Panjer [2006] műveit.

A HUNOR adatkonzorcium tagjai csak az 50 ezer forint feletti veszteségeket kötelesek továbbítani a HUNOR adatbázisba. A fentiek alapján felmerülhet a cikkünk fő témája kapcsán az a kérdés, hogy a tőkekövetelmény számítása szempontjából van-e jelentősége a kérdéses küszöb alatti veszteségeknek. Továbbá szintén felmerülhet az a kérdés, hogy a kérdéses küszöb alatti veszteségek eldobása milyen hatást gyakorolhat a paraméterbecslésre. A küszöb alatti veszteségek tőkekövetelményre gyakorolt hatásának elemzését Mignola et al. [2006] ötlete alapján a következő Monte Carlo szimulációs kísérlet segítségével végeztük el:

1. Poisson-folyamatból λ éves gyakorisággal lognormális egyedi veszteségeket generálunk;
2. az előre rögzített K küszöb fölötti veszteségekből meghatároztuk az éves aggregált veszteséget;
3. az 1-2. lépéseket megismételtük 10 000-szer, és meghatároztuk az aggregált veszteségek eloszlásának $p = 0,999$ konfidenciaszint melletti VaR_K értékét;
4. képeztük a $\text{VaR}_K/\text{VaR}_0$ hányadost, ahol VaR_K a K , míg VaR_0 a 0 küszöbértékhez tartozó kockázatosított érték.

A szimulációs eredményeinket a 3. ábra tartalmazza a küszöbérték (K) függvényében.

³²Kvantilis-kvantilis becslés, ahol az első valószínűség a $[0,1;0,3]$, míg a második valószínűség a $[0,7;0,9]$ intervallumban vehet fel értéket.

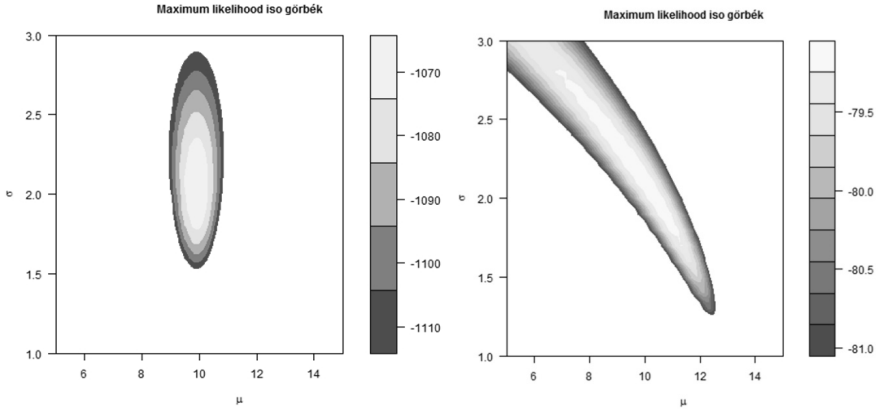


3. ábra. A relatív tőkekövetelmény alakulása az adatgyűjtési küszöb (K) függvényében.
 Forrás: saját számítás.

A 3. ábra az adatgyűjtési küszöb függvényében (logaritmus skálán) mutatja a relatív tőkekövetelmény (VaR_K/VaR_0) alakulását. A szimuláció során az egyik ábra előállításához $\lambda = 10$, míg a másik esetben $\lambda = 100$ paraméterű Poisson-eloszlást alkalmaztunk, továbbá a lognormális eloszlás μ paraméterének értéke a két ábra 3-3 esete kapcsán egységesen 10, míg a σ paraméter a $\{2; 2,2; 2,5\}$ halmazból vesz fel értéket. A két ábrán látható szaggatott vonal a Magyarországon tipikus 50 ezer forintos adatgyűjtési küszöböt jelenti. A 3. ábrából két következtetést vonhatunk le:

- minél kevésbé vastag szélű az eloszlás, annál inkább számít az adatgyűjtési küszöb, azaz kisebb σ mellett romlik a becslés;
- minél nagyobb az események éves gyakorisága, annál inkább számít az adatgyűjtési küszöb, azaz a két ábrán az eloszlások páronkénti (különböző gyakoriság, de ugyanazon egyedi veszteséeloszlás) összehasonlítása mutatja, hogy ugyanazon küszöb mellett nagyobb gyakoriság esetén jobban alábecsüljük a tőkét.

A következő vizsgálandó kérdést a küszöb alatti veszteségek kiszűrésének az eloszlások paraméterbecslésére gyakorolt hatása adja. Az magától értetődő, hogy az egyedi veszteséeloszlás becslésének bizonytalansága a csökkenő mintaelemszám miatt bizonyos mértékben nő, ami a becsült tőkekövetelmény növekvő instabilitásához vezet. Ugyanakkor az továbbra is kérdés a jelen cikkben már említett extrapolációs probléma ismeretében, hogy mennyire kell az egyedi veszteséeloszlás becslésének jóságával foglalkoznunk. A GoF tesztek csak a megfigyelhető tartományra korlátozódnak, és az előzőekben (3. és 4. táblázatok) bemutatottak alapján a becsült tőkekövetelmény egy jó illesztés esetén is instabil lehet. A továbbiakban azt mutatjuk meg, hogy az adatgyűjtési küszöb ugyan közvetlenül kis hatással van a becsült tőkekövetelményre, viszont jelentős hatással bírhat az egyedi veszteséeloszlás paramétereinek a becslésére.



4. ábra. Lognormális eloszlásból ($\mu = 10$ és $\sigma = 2$) generált véletlen számokra illesztett lognormális és feltételes lognormális eloszlás log-likelihood függvényének izofelülete. A második ábra esetén küszöbértéknek 200 ezer forintot feltételeztünk. *Forrás:* saját számítás.

Feltétel nélküli eloszlások paramétereinek MLE becslése esetében a becült paraméterek aszimptotikusan normális eloszlásúak és korrelálatlanok, és a becslés szórásában a Fisher-féle információs mátrixának inverze $[I(\Theta)]^{-1}$ játszik kulcsszerepet³³ (Lynch [2007]). A szokásos lognormális eloszlás esetén amennyiben feltételes eloszlásról beszélünk, úgy az információs mátrix megváltozik³⁴ és a Cramer-Rao féle korlát a küszöb függvényében átalakul (Roehr [2002]). Az előbbi következménye, hogy csonkolt (feltételes) eloszlás használata esetén a log-likelihood függvény izofelülete eltorzul, megnyúlik, keskeny formájúvá válik (melyet a 4. ábra szemléltet), emiatt a becslés során instabil helyzetet eredményez (Frachot et al. [2004]).

A fentiek következménye, hogy a konfidenciaintervallumok kitágulnak, információértéküket pedig fokozatosan elveszítik. Az eredmények kapcsán jogosan merül fel a kérdés, hogy mennyire bízhatunk, vagy bízhatunk-e egyáltalán a becült paraméterekben. Léteznek javaslatok, robosztus becslések a probléma bizonyos szintű kezelésére, ilyen pl. Cope [2011] munkája, ugyanakkor itt nem célunk ennek bemutatása, elsődlegesen a probléma természetére kívántuk felhívni a figyelmet.

GPD szimulációs elemzés

Az extrémek vizsgálatának egyik eszköztára³⁵ (Embrechts et al. [2003]) a Peaks Over Threshold (POT) módszer, ami szerint az eloszlás széle egy bizonyos u küszöbön túl az általánosított Pareto-eloszláshoz (GPD) közeleli. Bár a név azt sugallja, hogy itt mindig vastag szélű eloszlásokról van szó, tudni

³³Az MLE klasszikus becslési tulajdonságait nem célunk természetesen tárgyalni ebben a cikkben. Ezeket számos statisztikai monográfia tartalmazza.

³⁴Vegyes tagok jelennek meg az információs mátrix inverzében, tehát a becült paraméterek korrelálttá válnak.

³⁵Lásd még GEV – generalized extreme value distribution.

kell, hogy az eloszlás szélének viselkedését egyetlen paraméter írja le (ξ , azaz shape parameter vagy tail index), ami bizonyos érték mellett pontosan az exponenciális eloszlást adhatja vissza. A gyakorlatban a hitelintézetek a működési kockázati tőkekövetelmény számítása során gyakran alkalmazzák a POT módszert annak érdekében, hogy a veszteségeloszlást két részletben modellezhessék: a gyakori és kevésbé súlyos eseményekre a kiválasztott u küszöb alatt jellemzően egy kevésbé vastag szélű eloszlást (pl. lognormális), míg a ritka és súlyos veszteséget jelentő eseményekre a küszöb felett egy vastag szélű (pl. GPD) eloszlást illesztnek. A veszteségeloszlás két részletben történő modellezésének célja kettős:

- A leggyakrabban használt becslési eljárás (MLE) jellemzően olyan paramétereket határoz meg, mely mellett az illesztett eloszlás összességében a legjobban illeszkedik az adatokra: természeténél fogva ott fog a legjobban illeszkedni az eloszlás, ahol a legtöbb adat van, és nem az eloszlás szélén, ahol jellemzően csak néhány megfigyeléssel rendelkezik a hitelintézet, melyek ugyanakkor a leginkább befolyásolják a tőkekövetelmény szintjét. Ennek a jelenségnek a hatását lehet tompítani a két részletben történő modellezéssel.
- A kevésbé vastag szélű eloszlások, melyek jól alkalmazhatóak a gyakori és kevésbé súlyos események modellezésére, jellemzően nem tudják megragadni a veszteségeloszlás szélét, emiatt fennáll annak a veszélye, hogy a 99,9%-os percentilis alulbecsli a szükséges tőke mértékét.

A következőkben azt fogjuk vizsgálni, hogy a szakirodalomban is javasolt, valamint a gyakorlatban is alkalmazott GPD eloszlás felhasználásával mekkora a bizonytalanság egy hitelintézet működési kockázati tőkekövetelményének meghatározása kapcsán. A kérdés megválaszolásához szimulációs kísérletet végzünk azzal a céllal, hogy a modell keretein belül megismerjük a GPD eloszlás paramétereinek eloszlását, valamint hatását a működési kockázati tőkekövetelményre. A kísérletben $n = 1000$ elemű, küszöbön túli mintákat fogunk generálni adott paraméterű GDP eloszlásból, amely esetén a paraméterek reálisak abban az értelemben, hogy előzetesen a HUNOR adatbázison kalibráltuk őket. A kísérletek során a szimulációk³⁶ száma 100 ezer, melyek során számos változó befolyását vizsgáljuk a tőkekövetelményre, így a legtöbb esetben a változóknak csupán két értékét tudtuk egyidőben megvizsgálni, és következtetést levonni arra vonatkozóan, hogy melyik állapot a kedvezőbb. A kísérletben tehát az előre definiált paraméterekkel GPD eloszlású mintát generáltunk, majd MLE és PWM³⁷ módszerekkel visszabecsültük a GPD paramétereit, és azok felhasználásával meghatároztuk a VaR értéket. A vizsgálati szempontok a következők:

³⁶Felhívjuk az érdeklődő olvasó figyelmét, hogy a szimuláció során az SLA (Single Loss Approximation) keretrendszer alkalmaztuk a cikkben eddig alkalmazott LDA (Loss Distribution Approach) helyett, mivel minden egyes VaR értéket csak egy újabb időigényes szimulációval, vagy Fourier transzformációval tudnánk előállítani.

³⁷Probability Weighted Moments – súlyozott momentumok módszere.

- ξ (shape) paraméter nagyságrendjének a hatása a tőkére
- β (scale) paraméter nagyságrendjének a hatása a tőkére
- becslési módszer (MLE, PWM) hatása a paraméterekre és a tőkekövetelményre.

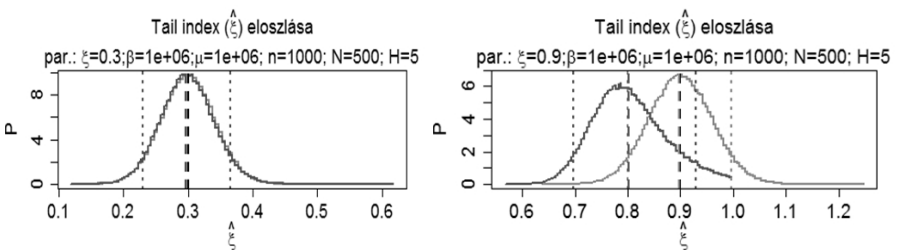
A kísérlet során $N = [50, 500]$ értékkel dolgoztunk, habár itt csak az $N = 500$ -hoz tartozó eredményeket mutatjuk be. A H paraméter jelenti az intézmény összes (külső adatbázis nélküli) veszteségszámának és a küszöbön túli veszteségek számának az arányát, melynek értéke a bemutatott kísérletekben egységesen öt. Az eredményeinket összefoglaló ábrákon a későbbiekben a szürke szín az MLE, míg a fekete szín a PWM becslésekhez tartozó eredményt jelenti, továbbá a paraméterek vagy jellemzők igazi értékét minden esetben függőleges vastag szaggatott vonal jelzi, míg a vékony szürke és fekete függőleges szaggatott vonalak az MLE és PWM becsléseket reprezentálják. Az ábrák tartalmaznak még szürke és fekete függőleges pontozott vonalakat, melyek 90 százalékos biztonsággal tartalmazzák az adott paramétert vagy jellemzőt az MLE és a PWM becslés vonatkozásában.

A már említett tail index (ξ) becslésének eloszlását (pontosabban annak sűrűségfüggvényének a becslését) az 5. ábra mutatja (terjedelmi okok miatt csak két tail index melletti eloszlást mutatunk be). A grafikonok előállításánál a tail index kivételével minden paramétert³⁸ rögzítettünk.

A szimulációs eredményekből a következő következtetések vonhatóak le:

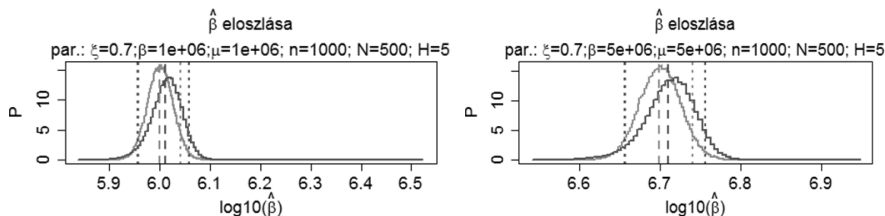
- Az MLE becslés (aszimptotikusan) torzítatlanságát tükrözi vissza a szimuláció, míg a PWM becslőfüggvény alulbecsli az igazi paramétert. A torzítás mértéke annál nagyobb (PWM esetén), minél közelebb van az igazi paraméter 1-hez.
- Az MLE becslés szimmetrikus, míg a PWM jobbra ferde.
- Minél közelebb van ξ értéke az 1-hez, annál inkább különbözik az MLE és a PWM becslés.

A scale paraméter (β) becslésének eloszlását a 6. ábra szemlélteti két rögzített érték mellett.



5. ábra. A tail index becslésének eloszlása (az eloszlások sűrűségfüggvényeinek becslései).
Forrás: saját számítás.

³⁸A grafikonokon a H paraméter értékeként a küszöbön túli veszteségek teljes mintán belüli arányának reciprokát tüntettük fel. Azaz $H = 5$ a grafikonon 20%-os arányt jelent.



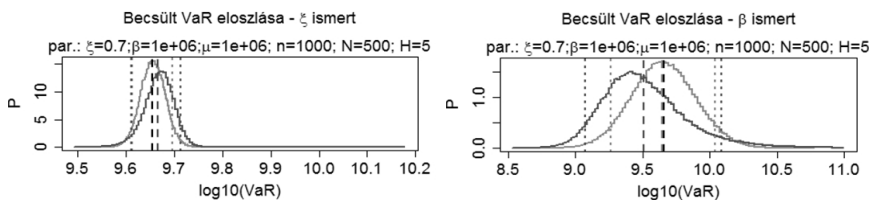
6. ábra. A scale paraméter becslésének eloszlása logaritmus skálán. *Forrás:* saját számítás.

A következőket lehet megállapítani a szimuláció eredményei alapján:

- A scale paramétert a PWM becslőfüggvény rendre felülbecsli, míg az MLE aszimptotikus torzítatlanságát illusztrálja az eredmény.
- A 90%-os konfidencia sáv a PWM esetében szélesebb.
- A nagyobb β nagyobb szórással is jár, de a relatív szórások már megegyeznek.

Számunkra ugyanakkor a legfontosabb kérdés, hogy a becslési hiba következtében hogyan alakul a tőkekövetelmény. A korábban vázolt szempontok mindegyike befolyásolja a tőkekövetelményt, így itt sem teszünk közzé minden eredményt, csak az általunk legrelevánsabbnak tartottakat, azaz mind a ξ , mind a β paraméter becslésének hibáját figyelembe véve mutatjuk be az eredményeinket. A 7. ábra³⁹ esetén az első grafikon a valódi (azaz ismert, nem becsült) ξ paraméter mellett mutatja a VaR eloszlását, melyen így a β becslése okozta bizonytalanság hatása látszik, míg a második grafikon a valódi β mellett (minden más paraméter értéke változatlan), azaz utóbbi a tail index becslésének VaR-ra gyakorolt következményét szemlélteti.

A 7. ábra két grafikonjának összehasonlítása alapján jól látszódik a VaR szélesebb konfidencia intervalluma alapján, hogy ξ becslésének hibája lényegesen nagyobb hatással van a tőkére, mint β becslésének hibája. Ez megerősít minket abban a hitünkben, hogy a Pareto-eloszlás illesztése során ξ becslésre kell nagyobb hangsúlyt fektetni, illetve a VaR becslésben elkövetett hiba elsődlegesen a ξ becslésében elkövetett hibára vezethető vissza.



7. ábra. A VaR eloszlása logaritmus skálán. *Forrás:* saját számítás.

³⁹Természetesen több esetre is elvégeztük az elemzést, ugyanakkor a terjedelmi korlátok miatt csak két szemléletes VaR eloszlást mutató grafikont közlünk.

4 Összegzés

Cikkünkben a működési kockázati tőkekövetelmény számítására alkalmas AMA modellek instabilitási problémáira kívántuk felhívni az érdeklődő olvasó figyelmét. A problémakörnek aktualitást ad az a tény, hogy a Bázeli Bizottság a Bazel IV javaslatcsomaggal várhatóan kivezeti a fejlett mérési módszert, mint tőkekövetelmény számítására alkalmas eszközt a működési kockázatok tekintetében. Célunk volt, hogy a cikkünkben bemutatott, a tőkekövetelmény instabilitását eredményező problémákkal rávilágítsunk arra, hogy egyes modellezési nehézségek az AMA modellek inherens részei, ezért teljességgel nem eliminálhatóak, így a Bázeli Bizottság szemszögéből valóban egyszerűbb egy új módszertant kidolgozni a tőkekövetelmény számítására, mintsem orvosolni a jelenlegi hiányosságait.

Cikkünkben bemutatásra került az alkalmas mintaelemszám problémája, mely szerint a kívánt biztonsági szintnek való megfeleléshez egy hitelintézet soha nem rendelkezhet kellően nagy mintával. Továbbá bemutattuk a modell-szelekciós nehézségeket is: egy eloszlás illeszkedésének megfelelését csak a megfigyelhető tartományban tudjuk tesztelni. Emiatt cikkünk eredménye szerint két hasonlóan jól illeszkedő eloszlás segítségével akár többszörös eltérések is tapasztalhatóak a tőkekövetelmény mértékében. Hasonló problémával állunk szemben a cikkünkben bemutatott, az intézmények által alkalmazott adatgyűjtési küszöb miatt. A kérdéses küszöbérték hatására feltétel nélküli eloszlás helyett feltételelssel kell dolgoznunk, mely esetén a loglikelihood függvény izofülete eltorzul (cikkünkben lognormális eloszlás esetére mutattuk be), melynek eredményeképp a paraméter konfidenciaintervalluma kitágul, és emiatt veszít információértékéből. Továbbá cikkünk eredményei segítségével felhívtuk a figyelmet a gyakorlati eloszlás megválasztásával kapcsolatos hibalehetőségre: minél inkább magasabb a várható érték, a konkrét eloszlás fontossága csökken, ugyanakkor a várható érték alacsony tartományában már számít, hogy Poisson vagy negatív binomiális eloszlás alkalmazása mellett döntünk.

Irodalom

1. Arató, M., [2001]: *Nem-életbiztosítási matematika*, egyetemi tankönyv, ELTE, Eötvös Kiadó, Budapest.
2. Aue, F., Kalkbrenner, M. [2006]: LDA at work: Deutsche Bank's approach to quantifying operational risk. *Journal of Operational Risk*. 1(4):49–93.
3. Baud, N., Frachot, A., Roncalli, T., [2002]: How to Avoid Over-estimating Capital Charge for Operational Risk? Groupe de Recherche Operationnelle, Credit Lyonnais. France.
4. Basel Committee on Banking Supervision (BCBS) [2014]: Operational Risk – Revisions to the simpler approaches. Consultative Document. <https://www.bis.org/publ/bcbs291.pdf>. Letöltés ideje: 2017.12.08.
5. Basel Committee on Banking Supervision (BCBS) [2016]: Standardised Measurement Approach for Operational Risk. Consultative Document. <https://www.bis.org/bcbs/publ/d355.pdf>. Letöltés ideje: 2017.12.10.

6. Basel Committee on Banking Supervision (BCBS) [2017]: Basel III: Finalising post-crisis reforms. <https://www.bis.org/bcbs/publ/d424.pdf> Letöltés ideje: 2018.01.15.
7. Böcker, K., Klüppelberg, C. [2005]: Operational VAR: a closed-form approximation. *Risk*. 2005. 90–93.
8. Bugár, Gyöngyi [2017]: Mérföldkövek a befektetési kockázat modellezésében. *Sigma* 48(1-2):19–32.
9. Cope., E. W, Mignola, G., Antonini G., Ugoccioni. R. [2009]: Challenges and pitfalls in measuring operational risk from loss data. *Journal of Operational Risk*. 4(4):3–27.
10. Cope, E. W. [2011:] Penalized likelihood estimators for truncated data. *Journal of Statistical Planning and Inference*. 01/2011.
11. CRR (Capital Requirement Regulation) – az Európai Parlament és a Tanács 575/2013/EU rendelete a hitelintézetekre és befektetési vállalkozásokra vonatkozó prudenciális követelményekről és a 648/2012/EU rendelet módosításáról
12. Dahlen, H., Dionne, G. [2008]: Scaling Models for the Severity and Frequency of External Operational Loss Data. *Journal of Banking and Finance*. 34(7):1484–1496.
13. Embrechts, P., Furrer H., Kaufmann R. [2003]: Quantifying regulatory capital for operational risk. *Derivatives Use, Trading and Regulation*. 9. 217–233.
14. Ergashev, B., Pavlikov, K., Uryasev, S., Sekeris, E., [2012]: Estimation of Truncated Data Samples in Operational Risk Modeling, http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2193493
15. European Banking Authority (EBA) [2015]: Final Draft RTS on AMA assessment for operational risk. <https://www.eba.europa.eu/documents/10180/1100516/EBA-RTS-2015-02+RTS+on+AMA+assessment.pdf>. Letöltés ideje: 2017.12.10.
16. Frachot, A., Moudaoulaud, O., and Roncalli, T. [2004]: Loss distribution approach in practice. in M. K. Ong (Ed.), *The Basel*. 369–398.
17. Gáll, J., Nagy, G. [2007]: A működési kockázat veszteségeloszlás-alapú modellezése (Loss Distribution Approach – LDA), *Hitelintézeti Szemle*, 6(4): 386–412.
18. Klugman, S., Panjer, H. and Willmot, G., [2004]: *Loss Models, From Data to Decision*. Wiley, Hoboken, New Jersey.
19. Lynch, S. M. [2007]: *Introduction to Applied Bayesian Statistics and Estimation for Social Scientists*. Springer-Verlag, New York.
20. Mikosch, T. [2006]: Copulas: Tales and facts, *Extremes*, 9(1):3–20.
21. Mignola, G., Ugoccioni, R. [2006]: Sources of uncertainty in modelling operational risk losses. *Journal of Operational Risk*. 1(2):33–50.
22. Panjer, H., [2006]: *Operational Risk, Modeling Analytics*. Wiley, Hoboken, New Jersey.
23. Roehr, A. [2002]: Modelling Operational Losses. *Algo Research Quarterly* 53. 5/2. 53–64.

INSTABILITY PROBLEMS IN AMA MODELS

The Basel Committee on Banking Supervision (BCBS) planned to review the non-model based capital requirement calculation methods in case of operational risk since 2010 and the model based Advanced Measurement Approach (AMA) was also criticized in the literature in recent years. Many problems presented by professionals and researchers are due to some instability issues of the capital requirement calculated in LDA models. However, the difficulty of validation and the benchmarking of the results are criticized as well which are mostly caused by the diversity of methodologies used in such models. In this paper we discuss a notion of instability regarding capital requirement, where instability is used as a set of different (estimation or sensitivity) problems. The main purpose of this article is to present the main deficiencies of capital estimations in LDA models within the AMA framework, for which we show some empirical examples as well as simulations, which can lead to the instability of the capital requirement. We show the sensitivity of the capital requirement estimations to extreme loss events, we discuss problems caused by the small sample sizes, the effect of certain information losses realised during the collection of loss data and selection problems of distributions for frequency and severity.

Our estimations on the sensitivity of the capital requirement to extreme loss events were based on the Hungarian Operational Risk Database (HUNOR) in which the recorded loss events are shared anonymously among the members of the data consortium. We used the classification of loss events in the database according to the event types defined in Article 324 of the Capital Requirements Regulation (CRR) and fitted lognormal distributions on data in each class. For the fitting of distribution, an adequately long time interval was chosen, which is short enough in the sense that one can assume that the distributions at issue are unchanged over the specified interval. Due to data collection practice only loss events above a predefined materiality threshold have to be recorded in HUNOR, thus we needed to work with truncated data.

We chose to shift data to 0 in every segment before the fitting of the distribution rather than fitting conditional probability distribution on the truncated data based on the methodology of Baud et al. [2002] and Ergashev et al. [2012]. To estimate the parameters Maximum Likelihood (ML) method was applied and goodness-of-fit was tested with Kolmogorov-Smirnov and Anderson-Darling tests beside the usual graphical methods (i.e. histograms, Q-Q plots). According to the expectations of the regulator the calculated capital requirement for operational risk has to cover all losses within one year period at a confidence level of 99,9% so one needs to put special focus on the (right) tail behaviour of the distribution. In some categories the lognormal distribution was not accepted by the tests. In two further categories though the tests accepted the lognormality assumptions, the tails seems to be fatter in one case compared to the fitted one, whereas the for the other the tail of the fitted distribution seems to be satisfactory.

Several publications discussed the size of the error of VaR (i.e. capital requirement) estimations and the sufficient sample size in order to obtain a reasonable error. Regarding to the above-mentioned results the only way to have enough observations for modelling purposes is to use external data together with internal data in similar market situations to the ones analysed by us.

For frequency distribution modelling in case of operational risk the so-called $(a, b, 0)$ type distribution family – including the Poisson, binomial and negative binomial distributions – are used in most cases. Sample size for operational risk frequency modelling can be considered small as one more observed period gives only one observation to the sample. It is well known that the three classical frequency distributions are easy to handle statistically and methods are also known for the selection between them, moreover one can also apply the Panjer [2006] recursion

for the aggregate loss distribution. However, we recommend to use in case of operational risk modelling only the Poisson-distribution. We examined the relationship between the VaR ratio and the expected value of the frequency distributions where the VaR ratio is equal to ratio of VaR values estimated using Poisson and negative binomial distributions as frequency distributions and lognormal distribution as a severity distribution in both cases. Based on our results we concluded that the type of frequency distribution is important only if the expected frequency is relatively low and the importance of the negative binomial distribution with higher variance is decreasing with more fat-tailed severity distributions.

Loss events usually modelled by non-negative continuous random variables. As we mentioned above the selection of an appropriate distribution and is crucial, in particular the tail behaviour is also of high importance, since that part corresponds to those loss events, which determine the level of capital requirement for operational risk the most. The sufficient sample size to estimate the VaR with relatively small error was already discussed but further questions may arise concerning the accuracy of the estimation regarding the operational risk capital requirement. When we compare the available sample size from database HUNOR and the necessary sample size based on Frachot et al. [2004] it can be seen that the number of losses available for modelling purposes to the institutions is far from sufficient, the determination of VaR with direct quantile estimation is clearly not possible. We encountered a so-called extrapolation problem: fitting a distribution can only be done on the basis of information from the observable range of losses, however, in most cases the capital requirement is beyond that range. Clearly, the goodness-of-fit tests can only use the information from the same observed range. To draw the attention to the consequences of extrapolation problem we showed an example where we tested the goodness of fit of two (test) distributions to the data. Both distributions were accepted by the tests (with high p -values), however, the corresponding capital requirements calculated from the two fitted distributions are rather different. In our example, we generated a sample of 200 observations (40 on annually basis) from a lognormal distribution, then both lognormal and Burr distribution did fit to the data by the tests. Based on our results a 20 times difference can be seen between VaR values estimated from the two fitted distributions at the required regulatory level of confidence. We also showed that VaR derived from the fitted Burr distribution highly overestimates the real VaR calculated on the generated sample while high underestimation can be seen in case of the fitted lognormal distribution.

To analyse extreme events the Peak Over Threshold (POT) method is an often used method as the tail distribution above a certain threshold u . The Generalized Pareto distribution (GPD) is often used in such cases. The tail behaviour can be characterized by a single parameter (say, ξ , i.e. shape parameter or tail index). In practice, the POT method is often used by credit institutions in capital requirement calculations in order to model the loss distribution in two parts: frequent and less severe events under a certain threshold u are typically modelled with a distribution showing less fat-tail behaviour (e.g. lognormal) while rare and severe events are modelled with distributions showing more fat tail behaviour (e.g. GPD). Those loss events, which determine the level of capital requirement for operational risk can be found in the (right) tail part of the distribution which generally cannot be captured with the rest of normal loss events in the body part of the distribution. So fitting only one probability distribution to the whole sample is often not satisfactory. Taking into account this problem the aim of the modelling the two (body and tail) parts of the distribution separately is to capture rare and severe events that are independent from the mass of typical loss events in order to avoid the underestimation of the capital requirement. In this paper we analysed the uncertainty connected to the estimation of operational risk capital requirement using GPD distribution which is widely used in practice and recommended by many au-

thors in the literature. Samples with 1000 observations were generated above a certain threshold u from a GPD case with given parameters, which were calibrated on database HUNOR. Then GPD distributions were fitted using ML and PWM (Probability Weighted Moments) methods in order to analyse the distribution of the GPD's parameters as well as the effect on capital requirement. We found that the estimation of the tail index (ξ) seems to be (asymptotically) unbiased in case of ML method while significant underestimation of the real parameter can be seen using PWM method. The degree of the underestimation became higher as the real value of ξ was tending to 1. Furthermore, the closer the value of ξ is to 1 the more is the difference of ML and PWM results. According to the results regarding the uncertainty of capital requirement calculation we showed that the estimation error of ξ has a significantly higher impact on capital requirement than estimation error of β (scale parameter). This confirms that more attention has to be paid on estimating ξ when GPD distribution are used and a huge part of the error of VaR is due to the error in the estimation of ξ .

The results presented in our paper reveal that some instability problems are inherent part of the estimation of capital requirement in LDA within AMA framework. A more realistic aim can be the minimization of their effect rather than their elimination from the applications of the model.

BERUHÁZÁSOK IDŐZÍTÉSÉNEK KÉRDÉSEI A VILLAMOSENERGIA SEKTORBAN¹

CSAPI VIVIEN – POSZA ALEXANDRA

PTE Közgazdaságtudományi Kar

A vállalatgazdaságtan egyik központi területe a beruházásokról hozott döntés. Kutatásunk során a beruházási döntéseket befolyásoló tényezők közül a bizonytalansággal, valamint az időzítés kérdésével foglalkozunk. Feltételezésünk szerint a beruházások értékteremtési potenciálját, a bizonytalanság mellett a beruházás megvalósításának időpontja fogja a legnagyobb mértékben befolyásolni. A statikus kereteket feltételező, valamint dinamikus gazdasági körülményekhez alkalmazkodó reálopció alapú időzítési modelleket a villamosenergia-szektoron belül teszteljük. Az általunk felépített modell ötvözi a korábbi kutatások legjobb gyakorlatait, teljesen új megvilágításba helyezve az idő kérdését. Eredményeink alapján az opció futamideje, valamint a reálopciók értéke közötti kapcsolat pozitív, illetve érzékenységvizsgálatok eredményeként azt látszik, hogy e futamidő hatása erősebb a bizonytalanság és növekedési kilátások hatásánál. Az idő, egy adott beruházás megvalósítás végső időpontjának, vagyis egy időzítési reálopció futamidejének hatása erőteljesebb lesz az optimális projektértékre, mint a volatilitás, vagy akár a projekt jövőbeli növekedési kilátásai. A nagyobb növekedési kilátásokkal kezeletlen projektet (megújuló technológiák) előbb érdemes megvalósítani (időzíteni).

Kulcsszavak: reálopció, időzítés, rugalmasság, bizonytalanság. *JEL-kód:* G11, C41

1 Bevezetés

A vállalatgazdaságtan egyik központi területe a beruházásokról hozott döntés. A tényleges befektetői viselkedés néhány aspektusa nehezen hangolható össze a konvencionális elmélettel. A legtöbb vállalat beruházási döntését az értékelt projektből származó jövőbeli pénzáramok alapján hozza meg. Egy beruházás várható értéke alapvetően a belőle származó jövőbeli pénzáramok által determinált. A salamancai iskola képviselője, Martin de Azpilcueta (1491-1586) által már a 16. században matematikailag bizonyított pénz időértéke koncepció szerint a jelenhez az időben közelebb realizált pozitív pénzáramok magasabb értékkel bírnak, mint a távoli jövőben realizált szintén pozitív pénzáramok. Azonban véleményünk szerint a pénzáramok időzítésének hatása

¹A kutatást a Felsőoktatási Intézményi Kiválósági Program támogatta (szerződés száma: 20765-3/2018/FEKUTSTRAT). E-mail: csapiv@ktk.pte.hu, poszaa@ktk.pte.hu. Beérkezett: 2018. augusztus 29.

a beruházási politikára, beruházási döntéshozatalra jóval nagyobb csupán a pénz időértékénél. Az időzítés befolyásolja a különböző jövőbeli időpontokban a beruházások megvalósításához szükséges finanszírozási források nagyságát. Mindez hatással lesz a beruházásra magára, valamint a vállalati projektportfólióban lévő összes beruházásra egyaránt.

Tanulmányunk fókusza a tőkeköltésvetés hagyományos kérdésfeltevéséről, a beruházzunk-e kérdésről a mikor valósuljon meg a beruházás kérdésre tolódik. Ahelyett, hogy egy most vagy soha jellegű lehetőség izolált értékelésére koncentrálnánk, a tőkekiadások ebben az esetben egy sztochasztikus környezetet valamint egy racionális beruházási politika kölcsönhatását tükrözik vissza. A beruházás tehát egy folyamat, mely során újabb és újabb információk folyamatosan napvilágot látnak, vagyis az egyetlen statikus döntés helyett egy dinamikus döntéssorozatra van szükség. Hagományos szemléletben a beruházási probléma feltételezi, hogy az aktuálisan vizsgált döntés nem befolyásolja a döntéshozó további lehetőségeit. Ahhoz, hogy az időzítés vizsgálatának értelme legyen, az aktuális beruházásnak befolyásolnia kell jövőbeli lehetőségeket. A ma megvalósuló beruházások és a maihoz hasonló jövőbeli, akár holnap létrejövők bizonyos mértékig egymást kölcsönösen kizáróak kell, hogy legyenek. Számos okot sorolhatnánk a fenti érvelés jogossága mellett. A ma létrejövő beruházások bizonyos mértékben felhasználják meglévő szűkös erőforrásainkat, szűkös erőforrások megvásárlását eredményezik. A ma felhalmozott olajtartalékokat nem halmozhatjuk fel holnap, vagy egy év múlva újra; vagy a ma kukoricával bevetett termőföldet holnap nem vethetjük be napraforgóval és még sorolhatnánk. A menedzseri vagy technológiai méret-hozadék csökkenésének eredményeként a jelen beruházásai csökkenthetik a jövőbeli beruházások hozamát. A holnap megvalósuló beruházás egységére vetített hozam alacsonyabb, ha az a jövőben a második, azonos beruházás egysége.

2 A beruházási döntés

Kutatásunk fókuszában a beruházások időzítésének kérdése áll, mely kiterjed a beruházás megvalósításának megkezdésére, valamint a beruházás végleges vagy időleges leállítására egyaránt. Véleményünk szerint a beruházási döntés meghozatala önmagában is jelentős bizonytalansággal sújtott, de szintén különösen jelentős projektérték múlhat az időpont megválasztásán. A következőkben e két befolyásoló tényező mentén vizsgálódunk. Választott módszertanunk a reálopció-elmélet, mely véleményünk szerint az első paradigma, amely megfelelően képes közelíteni az egyes bizonytalansági tényezők pénzáramokra, és ezzel projektértékre kifejtett hatását.

A bizonytalanság mellett hozott beruházási döntések kritikus pontja a bizonytalanság projektértékre kifejtett hatásának számszerűsítése. A mai, dinamikusan változó globális gazdasági és vállalkozási környezetben a beruházások számtalan bizonytalansági tényezőnek kitéttek. Egy ilyen kiszámíthatatlan környezetben az optimális beruházási politika kialakítása is nehézségekbe

ütközik, nem is beszélve a beruházások optimális időzítéséről. A világos és határozott beruházási politika hiánya párosulva a fenyegető bizonytalansággal alulberuházást eredményezhet. Mindez különösen jellemző a hosszú hasznos élettartamú, az ehhez viszonyítva rövid, önmagában viszont hosszú kutatási, tervezési, kivitelezési periódussal rendelkező projektekre (jellemzően gyógyszeripari, infokommunikációs és villamosenergia beruházások). A tanulmány további fejezeteiben eddigi kutatási területünkhöz kapcsolódóan a villamosenergia-beruházások bizonytalansági karakterisztikájával, valamint a szektor projektidőzítésének lehetséges módszereivel foglalkozunk. A villamosenergia-szektor a beruházásokat körülvevő jelentős mértékű bizonytalanságnak, valamint a magas elsüllyedt költségek és a beruházás időzítésének rugalmassága közötti interakció kombinálásában rejlő potenciálnak együttese teszi különösen alkalmas iparágá kutatásunk számára.

Egy beruházásra jellemző, hogy egy ismert tőkekiadás eredményeként a jövőben ismeretlen pénzáramokat realizálunk. A beruházás megvalósítója, a beruházás tulajdonosa lemondhat a pénzáramokról például abban az esetben, ha a beruházás leállításából eredő pénzáramok meghaladják a beruházásból az adott időpontot követően realizálható jövőbeli pénzáramokat. Egy pénzpiaci hasonlattal élve, mindez megfeleltethető egy részvény vásárlásának tranzakciós költségek mellett. A részvény birtoklásából a tulajdonos pénzáramokat (osztalékot) realizál. Amennyiben a befektető megítélése szerint a részvény alulértékelt, és a jelenlegi piaci ára alacsonyabb, mint a belőle származó jövőbeli osztalékáramok jelenérték összege, akkor a befektető további részvénybeszerzés mellett fog dönteni. Ugyanakkor, a részvény túlértékeltsége esetén a részvény eladását választja. A befektető ezen vételi (long) és eladási (short) pozíciók nyitását végtelenszer kezdeményezheti. Hasonló példa lehet a gyártási költség csökkentésének esete, mely a jelenben pénzáramlást, ugyanakkor a jövőben a gyártott termék iránti kereslet által befolyásolt pénz be-, és kiáramlásokat eredményez. Egy bizonyos jövőbeli időpontban az előállított termék iránti kereslet csökkenni fog, vagy hasonló pénzáram-hatást eredményezve további versenytársak jelennek meg a piacon. Ezen a ponton a befektető kísértést érezhet a projekt elvetésére, mely minden bizonnyal költséggel jár számára. Egy ilyen döntést csupán egy alkalommal hozhat meg. Mivel a befektető nem köteles sem beruházást kezdeményezni, sem meglévő, futó projektet elvetni, a problémát mérlegelésen alapulónak, diszkrecionálisnak tekintjük.

A bizonytalanság feltárásával egy vállalat képes lehet saját kockázatkiszármazásának csökkentésére, ugyanakkor az értékkeremtésre egyaránt. Értékkeremtés valósulhat meg akkor, ha egy vállalat megtalálja az alsó ági (negatív) kockázat (downside risk) csökkentésének módját, a bizonytalanság kedvező (upside) hatásainak fenntartása mellett (Billington – Kuper, 2000). Kutatók sokasága kísérlete meg az utóbbi évtizedekben, elsősorban a liberalizációt követően a villamosenergia piaci kockázati taxonómia elméleti megalkotását (Pilipovic, 2007; Weber, 2005; 2009; Burger et al., 2007), de ezek közül egyik sem nyújt teljes képet a lehetséges bizonytalansági tényezőkről. Beruházási szempontból véleményünk szerint elsősorban azon bizonytalanságtípusok

lás a legcélszerűbb, mely képes az optimális beruházási döntést leginkább befolyásoló tényezők azonosítására, illetve elkülönítésére. Helytállónak tartjuk Botterud (2003) hosszú és rövid távú bizonytalanságcsoportjait, ugyanis ezekkel azonosíthatóak a rugalmasság tulajdonságával is jellemezhető villamos-energia beruházások hagyományos érték kategóriáit mozgató tényezők mellett egy flexibilitási (opciós) érték legfőbb determinánsai. Az optimális beruházási döntés szempontjából a hosszú távú bizonytalansági tényezők a legfontosabbak, hiszen évenkénti korrelációjukból adódóan ezek hozzájárulnak a beruházási lehetőség opciós értékéhez.

Bizonytalansági szint				
1. szint	2. szint	3. szint	4. szint	
HOSSZÚ TÁVÚ BIZONYTALANSÁG	Technológiai bizonytalanság	Technológiai bizonytalanság	technológia elérhetősége, rendelkezésre állás	
			technológia élettartama	
			technológiai fejlődés	
			technológia társadalmi elismertsége	
	Gazdasági bizonytalanság	Piaci bizonytalanság		Fűtőanyag ár
				Villamos-energia ár
				Terhelés változás; kereslet
		Pénzügyi bizonytalanság		Likviditás
				Hitelezés
				Árfolyamváltozás
				Kamat
		Költség bizonytalanság		beruházási költségek
				változó működési költségek
				fix működési és karbantartási költségek
Szabályozási bizonytalanság	Jogszabályi bizonytalanság	Környezeti előírások		
	Piaci szerkezet	liberalizációs intézkedések		
	Engedélyezési bizonytalanság	Technológia bevezetés		
RÖVID TÁVÚ BIZONYTALANSÁG	Erőforrás bizonytalanság	Működési bizonytalanság	Termelésmenedzsment	
			Hiba, leállás, kiesés	
	Időjárási bizonytalanság	Extrém időjárás	Extrém hőmérsékleti, csapadék viszonyok	
		Természeti katasztrófák	Hurrikánok, áradások, földrengések	

1. táblázat. A villamos-energia szektor bizonytalansági tényezői. Forrás: saját szerkesztés

Az első szintű bizonytalansági csoportosítást követően a bizonytalansági tényezőket három csoportra osztottuk: gazdasági, technológiai és szabályozási bizonytalanságra (lásd *1. táblázat*). Reedman és társainak (2006) eredményeire hivatkozva a következőkben kiemelten egy bizonytalansági kategória beruházási politikára, és a beruházások időzítésére kifejtett hatásával, a piaci bizonytalansággal foglalkozunk.

A piacialapú bizonytalanság az egyes piaci szereplők által nem befolyásolható makroökonomiai tényezőkből ered (*fűtőanyagár, villamosenergia-piaci ár, kamat, árfolyam*). A világszerte előállított villamos energia jelentős részét a szén, a kőolaj, a földgáz, a víz, az uránium elsődleges energiaforrások valamelyikéből termelik. A megújuló energiák fosszilis energiaforrásokkal szembeni egyik legnagyobb előnye, hogy viszonylag közömbösen reagálnak a fosszilis üzemanyag árak emelkedésére. Azonban a megújuló energiaforrás alapú technológiák sem tekinthetők kockázatmentesnek. A villamos energia nagykereskedelmi ára a villamos energia speciális fizikai tulajdonságaiból adódóan a többi tőzsdén kereskedett termékhez képest *jelentős volatilitást* mutat. Pilipovic (1998) például egyenesen a legnagyobb volatilitási kockázattal bíró piaci árucikknek nevezi a villamos energiát, melyet elsősorban annak tárolhatatlansága okoz.

3 Az időzítési probléma definiálása

A beruházások optimális időzítésével foglalkozó irodalom két részre osztható. A statikus kereteket feltételező nettó jelenérték maximalizáláson alapuló kutatásokra, valamint a dinamikus gazdasági körülményekhez alkalmazkodó, és ezt a menedzseri rugalmasságot értékelni képes reálopció alapú munkákra.

Jelölés	Jelentés
B_C	éves nettó működési pénzáram bizonyosság esetén
B_T	éves nettó működési pénzáram tradicionális eset
B_U	éves nettó működési pénzáram bizonytalanság esetén
C_C	bizonyosság melletti V/X kritikus érték
C_T	tradicionális V/X kritikus érték
C_U	bizonytalanság melletti V/X kritikus érték
f	terhelési faktor %
F	üzemanyag költség \$/MWh
FC	működési és karbantartási állandó költség \$/kW
FCF	szabad pénzáram \$
m	projektérték-változás egységnyi idő alatt (drift)
n	projekt hasznos élettartam év
NPV	nettó jelenérték \$
P	villamosenergia piaci ára \$/MWh
Q	erőmű mérete, kapacitása MW
r	diszkontráta, kockázatmentes ráta %
S	opció alaptermékének (beruházásnak) jelenértéke \$
S^*	optimális lehívási időponthoz tartozó alaptermék érték (trigger érték) \$
t	projekt megvalósítási időpontja év
T	opció futamideje év

Jelölés	Jelentés
u	azonnali lehívás/halasztás kontrollváltozó
V	projektérték
VC	működési és karbantartási változó költség \$/MWh
X	beruházás megvalósítási költsége \$/kW
σ	projektérték volatilitás %
τ	optimális opció lehívási időpont év

2. táblázat. A tanulmányban alkalmazott jelölések jegyzéke (folyt.)

3.1 Statikus időzítési szabályok

A nettó jelenérték maximalizálása hasznosítható az időzítési szabályok levezetéséhez. Az optimális időzítés akkor következik be, ha a beruházási célt sikerül az adott vállalatnak megvalósítania, amely a bizonytalanságot figyelembe vevő, maximális, pozitív nettó jelenérték elérésén keresztül jön létre (Damodaran, 2002). A statikus kutatók közül kerül ki Chu és Polzin (1997), akik az időzítési szabályok három típusát különböztetik meg. Két tényező, a beruházás nettó jelenértékének maximalizálása, illetve a beruházás éves nettó működési pénzáramainak bizonytalansága befolyásolja az időzítési szabályok kiválasztását. A hagyományos szabály akkor alkalmazható, ha a célunk csupán az értékkerentés, vagyis a pozitív nettó jelenérték elérése. A bizonyossági szabály esetén a beruházás pénzáramait befolyásoló tényezők jövőbeli értéke ismert és a célunk a nettó jelenérték maximalizálása. A bizonytalansági szabály alkalmazása esetén pedig a beruházás pénzáramait befolyásoló tényezők bizonytalanok és a célként a várható nettó jelenérték maximalizálása jelenik meg. Mindegyik időzítési szabály három tényezőt vesz figyelembe, melyek közül az első a projektérték, valamint a beruházás megvalósítási költségének aránya (V/X), a második az éves nettó működési pénzáram (B), a harmadik pedig a projekt időtartama (t). Az időzítési szabályokat, valamint a felsorolt tényezőket és az azok közti összefüggéseket a 3. táblázatban foglaltuk össze.

Szabálytípusok	S z a b á l y o k é s s z a b á l y t é n y e z ő k					
	Projektérték és a beruházási költség aránya (V/X)		Éves működési pénzáram (B)		Projekt beruházási időpont (t)	
Hagyományos	$V/X \geq C_T$	SZ1	$B \geq B_T$	SZ2	$t \geq T_T$	SZ3
Bizonyosság	$V/X \geq C_C$	SZ4	$B \geq B_C$	SZ5	$t \geq T_C$	SZ6
Bizonytalanság	$V/X \geq C_U$	SZ7	$B \geq B_U$	SZ8	$t \geq T_U$	SZ9

3. táblázat. Statikus időzítési szabályok (SZ1–9). Forrás: saját szerkesztés Chu-Polzin (1997) alapján

A statikus időzítési szabályok tehát a három tényező kritikus értékekhez viszonyított relációja alapján nyújtanak információt az optimális beruházási időpontról. A kritikus értékeket a következőképpen határozhatjuk meg bizonyosság, bizonytalanság, valamint a tradicionális, pozitív nettó jelenérték elérésére koncentráló esetekben:

$$C_T = 1 \quad (1)$$

$$C_C = \frac{r}{r - m} \quad (2)$$

$$C_U = \frac{\beta}{\beta - 1} \quad (3)$$

$$\beta = 0,5 - \frac{m}{\sigma^2} + \sqrt{\left| \frac{m}{\sigma^2} - 0,5 \right| + 2 \cdot \frac{r}{\sigma^2}} \quad (4)$$

$$B_T = (r - m) \cdot X \quad (5)$$

$$B_C = r \cdot X \quad (6)$$

$$B_U = C_U \cdot (r - m) \cdot X \quad (7)$$

$$T_T = \ln \left[C_T \cdot \frac{X}{V(0)} \right] / m \quad (8)$$

$$T_C = \ln \left[C_C \cdot \frac{X}{V(0)} \right] / m \quad (9)$$

$$T_U = \ln \left[C_U \cdot \frac{X}{V(0)} \right] / m \quad (10)$$

A szabályok alkalmazhatósága érdekében feltételezzük, hogy az általunk vizsgált beruházás legalább részben irreverzibilis, a projekt halasztható a piaci körülményekről megjelenő további információkig; az éves nettó működési pénzáramok idővel változnak, jelenértékük ismert, de jövőbeli értékeik lognormális eloszlást követnek σ^2 varianciával és m éves növekedési rátával, ahol $m > 0$ (mind σ , mind m előre rögzített, ismert paraméterek). Matematikailag mindez azt jelenti, hogy az éves működési pénzáramok geometriai Brown-mozgást követnek, ahol a bizonytalanság e formájú közelítésének előnye a várható nettó jelenérték maximalizálás zárt megoldása. A beruházási költségek előre ismertek és rögzítettek.

Attól függően, hogy a döntéshozó milyen célt tűzött ki maga elé a beruházás megvalósításával kapcsolatosan (pozitív nettó jelenérték; maximális nettó jelenérték bizonyosság esetén; vagy várható nettó jelenérték maximalizálás bizonytalanság mellett), képesek vagyunk egy optimális beruházási időpontot meghatározni a szabályok alkalmazásával. Az időpontok azonosítását első lépésben a nettó jelenértékkel (NPV) közelítjük:

$$NPV(t) = (V(t) - X) \cdot e^{-rt} \quad (11)$$

ahol r a diszkontráta, $V(t)$ a t -edik időpontban megvalósított projektérték. Dixit és Pindyck (1994) alapján a t -edik időpontbeli projektérték, valamint a t -edik időpontbeli éves nettó működési pénzáramok ($B(t)$) közötti összefüggés a következőképpen írható fel, n hasznos projektélettartam feltételezés mellett:

$$V(t) = E \int_t^\infty B(n) e^{-r(n-t)} dn = \frac{B(t)}{r - m} \quad (12)$$

Annak érdekében, hogy a probléma tovább vizsgálható legyen, feltesszük, hogy $r > m$, ellenkező esetben a várakozás minden körülmények között kifizetődőbb.

Tradicionalis befektetői körülmények között a döntéshozó akkor valósítja meg a projektet, bizonytalanságtól függetlenül, amikor a nettó jelenérték pozitívvá válik ($NPV(t) > 0$), vagy másképpen $V(t) > X$. Az azonnali beruházást fogja választani, amennyiben $V(0) > X$, és a várakozást, amennyiben $V(0) < X$. Utóbbi esetben a várakozás értékkel bír, hiszen $V(t)$ végső soron idővel meghaladja a beruházási költségeket.

Bizonyosság esetében, amikor az éves nettó működési pénzáramok biztos pénzáramok, azok volatilitása zéró, a t -edik időpontbeli értékük:

$$B(t) = B(0)e^{mt}. \quad (13)$$

Vagyis az éves nettó működési pénzáramok konstans, éves m %-os növekedését feltételezzük. Amennyiben a (13)-as egyenletet behelyettesítjük a (12)-es egyenletbe, a jövőbeli, t -edik időpontbeli projektértékre az alábbi összefüggést kapjuk:

$$V(t) = V(0)e^{mt}. \quad (14)$$

Ez alapján a projekt nettó jelenértéke idővel pozitívvá válik, még abban az esetben is, ha a jelenben $V(0) < X$. A tradicionalis értékteremtés keresés, valamint a bizonyosság esetében alkalmazott döntési szabály közötti alapvető különbség, hogy az utóbbi esetben a döntéshozó számára a várakozás kifizetődőbb, még akkor is, ha a jelenben $V(0) > X$. A projekt maximális nettó jelenértéke ($NPVC^*$) $V(0) - X$, ha

$$V(0) > \frac{rX}{r-m}, \quad (15)$$

ellenkező esetben

$$NPVC^* = \frac{mX}{r-m} \left[\frac{(r-m)V(0)}{rX} \right]^{\frac{r}{m}}. \quad (16)$$

A vonatkozó SZ4–6 időzítési szabályokat a (11)-es nettó jelenérték képlet (14)-es képletben definiált jövőbeli projektértékkel való maximalizálásával vezethetjük le (a levezetés elsőrendű feltétele $-[(r-m)V(t) - rX]e^{-rt} = 0$).

Mindaddig, amíg a projekt jelenértéke $V(0)$ nem sokkal haladja meg a beruházás megvalósítási költségét (X), optimális a várakozás.

Bizonytalanság esetén az SZ7–9 döntési szabályok értelmezése érdekében a sztochasztikus kereteket vonjuk be a vizsgálatba, feltételezzük, hogy az éves nettó működési pénzáramok sztochasztikus eloszlást követnek. Ebben az esetben nem vagyunk képesek a nettó jelenérték maximalizáláshoz hasonló módon optimális jövőbeli beruházási időpontot javasolni a döntéshozók számára. Sokkal inkább célszerű bizonytalanság esetén egy kritikus projektértéket azonosítani, mely elérésekor optimális a beruházás megvalósítása. A dinamikus programozás, valamint a feltételes követelésértékelés használatával Dixit és Pindyck (1994) bebizonyították, hogy abban az esetben optimális a beruházási projektbe belevágni, amennyiben annak értéke meghaladja a következő kritikus értéket:

$$V^* = \frac{\beta}{\beta-1} X, \quad (17)$$

ahol Dixit és Pindyck (1994) a $V(0) = 0$; $V(S^*, \tau^*) = S^* - X$ és $V_S(S^*) = 1$ korlátozó feltételek mellett a folytonos sztochasztikus folyamatot követő dS Bellman-egyenlet megoldásakor azonosították a béta tényezőt (erről bővebben a 3.2-es fejezettrészben):

$$\beta = 0,5 - \frac{m}{\sigma^2} + \sqrt{\left| \frac{m}{\sigma^2} - 0,5 \right| + 2 \frac{r}{\sigma^2}}. \quad (18)$$

Ebből következik, hogy a SZ7-es időzítési szabály abban az esetben lesz érvényes, ha

$$\frac{V(t)}{X} \geq \frac{\beta}{\beta - 1}.$$

Az SZ8-as szabály az SZ7-es szabályból vezethető le az éves nettó működési pénzáramok és a projektérték közötti, (12)-es képletben levezetett kapcsolat felhasználásával. A bizonyosság melletti döntéstámogatással ellentétben, ahol a kritikus érték az optimális beruházási időpontot azonosítja, az SZ9-es szabályban azonosított kritikus értékhez tartozó beruházási időpont csupán a várható optimális beruházási időpont lesz. Ahogyan arra Martzoukos és Templitz-Sembitzky (1992) rávilágítottak, a várható optimális projektmegvalósítási időpont:

$$T_U = \frac{1}{m} \ln \left[\frac{\beta}{\beta - 1} \cdot \frac{X}{V(0)} \right]. \quad (19)$$

A projekt maximális várható nettó jelenértéke:

$$NPV_U^* = (V^* - X) \left[\frac{V(0)}{V^*} \right]^\beta. \quad (20)$$

3.2 Dinamikus időzítésvizsgálat reálopciók módszertanul

A piaci környezet dinamikus változásának hatására Myers (1977) használta elsőként a reálopció kifejezést. A vállalat jövőbeni beruházási stratégiájától tette függővé a vállalat értékét, melyhez két eszközcsoportot különböztetett meg reáleszközök és reálopciók formájában. Reáleszközöknek nevezte a vállalat beruházási stratégiájától független piaci értékeket, reálopcióknak pedig azokat a lehetőségeket, amelyek a reáleszközök megszerzését teszik lehetővé egy jövőbeni időpontban vagy időpontig, kedvező feltételek mellett. Mindez a beruházások rugalmas időzithetőségének felismerését és modellbe építését jelentette. Az időzítési flexibilitás azt jelenti, hogy a beruházás megvalósítható ma, abban az esetben, ha a belőle származó hozamok várhatóan elegendőek lesznek a költségek fedezetére; illetve a beruházást el is halaszthatjuk egy későbbi, a bizonytalansági forrásokról szerzett bővebb információ megszerzésének időpontjáig. A befektetők rendelkeznek egy adott időszakon keresztül a projektbe történő beruházás lehetőségével, de hangsúlyosan nem a kötelezettségével (Rózsa, 2016).

A reálopció-elmélet alkalmazása révén a vállalati működés hatékonyságának növelése, valamint a beruházások optimális kivitelezése valósulhat meg.

Az időzítés kérdését kutatók közül McDonald és Siegel (1986), Dixit és Pindyck (1994) egyopciós modellt építettek fel, vagyis azt feltételezték, hogy jövőben újberuházás nem valósulhat meg, csak egy adott opció lehívására van lehetőség. A beruházások optimális időzítése esetén a projektből származó éves nettó működési pénzáramok, illetve a beruházási költség időben folytonosnak tekinthetők, sztochasztikus folyamatot követnek (irreverzibilis projektek). Közös volt időzítési kutatásaikban, hogy a beruházási lehetőségre, mint egy amerikai opcióra tekintenek, vagyis egy olyan pénzügyi opcióra, amely lehívására az opció lejáratá előtt bármikor lehetőség nyílik. A pénzügyi opciók kapcsán az értékpapír értéke és a bizonytalanság közötti kapcsolat pozitív, illetve a reálopció-elmélet szerint a bizonytalanság növekedésének eredményeként megemelkedik az opció halasztásával realizálható érték szintje.

Sarkar (2000), Dixit és Pindyck (1994), valamint McDonald és Siegel (1986) modelljéhez hasonlóan a reálopció-elméletet veszi alapul, viszont a vállalatérték helyett a lognormális eloszlást követő éves működési pénzáramot határozza meg, mint állapotváltozót, valamint a szisztematikus kockázatot explicit módon veszi számításba. Chang és Chen (2011) Sarkar modelljét használták fel egy olyan reálopció-szerű modell felépítése során, melyben a pénzáramok geometriai Brown-mozgást és átlaghoz visszatérő folyamatot követnek. A bizonytalanság növekedése a beruházások valószínűségének emelkedéséhez vezet és pozitívan hat a beruházásokra.

A szakirodalom egyik legismertebb és a beruházási időzítést közérthetően tárgyaló modelljét Luehrman (1998) alkotta meg, aki a beruházásidőzítés problémáját stratégiai szempontból közelítette meg. A vállalati stratégiát sokkal inkább opciók sorozataként képzelte el, mint statikus pénzáramok sokaságaként, így hangsúlyozta a reálopció-elmélet létjogosultságát. Modellje egy paradicsomos kert analógiájára épült, melynek részletesen leírja körülményeit és a kertben rejlő lehetőségeket. Érvelése szerint a „most vagy soha” döntés a biztos pénzáramok vagy a bizonytalanság nagyon alacsony szintje mellett valósul meg, a beruházás megvalósítása, a reálopciók lehívása azonnal érdemes. A bizonytalanság szintjének emelkedésével a halasztás válhat kifizetődővé. Emellett tovább szelgetve a döntési teret, a reálopciókat benső értékük alapján is differenciálta. A pozitív benső értékkel bíró és alacsony bizonytalanságú projekteket azonnal érdemes lehívni, ugyanakkor a negatív benső értékkel bíró reálopciókat, melyek alacsony volatilitással bírnak, el kell vetni, de a bizonytalanság magas szintje mellett a jövőbeni megvalósítást, a reálopció lehívásának lehetőségét fenn kell tartani. Luehrman (1998) szerint a projektek egyszerű kombinációinak meghatározása, valamint információ gyűjtése révén a döntéshozói képességek, kompetenciák fejleszthetők, általuk megvalósulhat az optimális döntés, a projekt optimális időzítése.

Mit is jelent mindez a gyakorlatban? Amennyiben kiindulunk az opció benső értékéből, az időzítés kapcsán arra keressük a választ, hogy mikor érdemes egy amerikai típusú opciót lehívni? A nettó jelenérték maximalizálás analógiájára az opciós érték maximalizálására törekszünk, mely akkor követ-

kezik be, ha a τ (optimális lehívási időpont) maximalizálja a

$$\mathbf{E}_x[(S_\tau - X)e^{-r\tau}] \quad (21)$$

opciós benső értéket. A kifejezés arra keresi a választ, hogy mikor optimális a projekt megvalósítás, melynek értéke S állapotváltozó által, valamint egy X nagyságú kezdő tőke által determinált, ahol r a diszkontráta, τ pedig az optimális lehívási időpont (*a továbbiakban az opciós jelölésrendszernek megfelelően az alaptermék, tehát a beruházási projekt t-edik időpontban értelmezett értékét S_t -vel jelöljük, ahol S_τ az optimális lehívási időponthoz tartozó alaptermék érték*). Amennyiben abból indulunk ki, hogy a projekt értéke (S) geometriai Brown-mozgást követ, a modell eredményei szerint a befektető vagy azonnal megvalósítja a projektet, vagy minél tovább vár (matematikailag akár a végtelenségig), a lehetőség értéke annál nagyobb.

Vagyis várjunk a végtelenségig. Nyilvánvaló, hogy a stratégiai menedzsment értékteremtés-orientált világában mindez csak elméletben eredményezheti a legnagyobb projektértéket. Ugyanakkor a másik véglet, melynek hasonlóan hatalmas irodalma keletkezett mára, az ún. elsőként piacra lépők előnyeinek elmélete (*first mover advantage theory*) szintén kikezdzhető több szempontból. Az elsőség számos kontextusban létrejöhet: start-up vállalkozások révén, új termék bevezetéssel, M&A ügyletek eredményeként. Az elmélet klasszikusának számító Lieberman – Montgomery (1988) tanulmányban az előny forrása lehet a technológiai vezető szerep, eszközök megszerzése mások előtt, valamint a fogyasztók áttérési költsége illetve ennek bizonytalansága. Ugyanakkor az elsőség nem mindig eredményez előnyöket. Ugyanezen szerzők a free-rider hatást, a technológiai bizonytalanságot sorolják, és számos egyéb forrás (Suarez – Lanzolla, 2007; Conner, 1988. Shankar et al., 1998; Carrow et al., 2004) osztja a véleményüket, mely szerint az elsőség értéke (amely mérőszám megválasztásának kérdésével e tanulmány keretében nem foglalkozunk) nem egyértelmű. Amennyiben kiindulunk abból, hogy a vállalati értékteremtés alapja az elérhető legnagyobb értéket teremtő projektek kiválasztása, akkor egyértelmű, hogy ha elsőként, ha követőként, de a vállalatnak lépnie kell, vagyis projektek megvalósítása mellett kell elköteleznie magát. Mindez szinkronban van azzal a gyakorlatban tapasztalható menedzseri magatartással, mely szerint azok egyfajta belső ösztön által vezérelten a projektérték egy küszöbszintjét elérve cselekednek.

Ezen a ponton kanyarodunk vissza elsődleges kérdésfelvetésünkhöz: Pontosan mikor valósítsuk meg a beruházást? Legyen szó termékbevezetésről, földrajzi terjeszkedésről, felvásárlási ügyletről, és még sorolhatnánk, a továbbiakban ezeket a projekteket vételi típusú reálopcióként vizsgáljuk. Vagyis a kérdés immáron így tehető fel: Mikor érdemes egy amerikai típusú vételi reálopciót hívni? Barone-Adesi és Whaley (1987) egy közelítéses megoldást javasoltak amerikai típusú pénzügyi opciók esetében. A közelítéses módszer véleményünk szerint teljesen új vetületet ad a reálopciók alkalmazásának azal, hogy a való élethez közeli feltételezéseivel támogatja a stratégiai döntéshozatalt. Ugyanakkor fontos kiemelnünk, hogy az, hogy mikor valósítsuk meg a projektet, vagyis az optimális időzítés ezen módszer esetében is csupán

a közelítés egy melléktermékeként adódik.

Feltételezzük, hogy a projekt értéke S , míg annak lehíváskor felmerülő megvalósítási költsége X . A végtelen futamidőtől immáron elvonatkoztatva, egy időkorlátot feltételezünk, mely szerint a befektető számára T időpontig nyitott az X nagyságú tőke kiadásának, és ezzel az opció lehívásának (τ) lehetősége. Minden esetben $\tau < T$, vagyis a befektető vállalat dönthet a projekt azonnali megvalósítása, vagy halasztása mellett annak érdekében, hogy további információt szerezzen be S alakulásáról. Legyen a lehívásra, illetve halasztásra vonatkozó döntés a kontrollváltozónk u , mely csupán két értéket (1 és 0) vehet fel, attól függően, hogy lehívjuk, vagy nem hívjuk le az opciót. V_t a jövőben, egy adott időpontban beruházás, lehívás cselekedetének értéke. A beruházás értéke az időzítési flexibilitással:

$$V(S, 0) = \max_u \{S(0) - X; \mathbf{E}_0[(S_\tau - X)e^{-r\tau}]\}, \quad (22)$$

ahol $(S_\tau - X)$ nem más, mint $V(S, \tau)$, vagyis a képlet a következőképpen egyszerűsíthető:

$$V(S, 0) = \max_u \{S(0) - X; \mathbf{E}_0[V(S, \tau)e^{-r\tau}]\}. \quad (23)$$

Jelenben, a projekt megvalósítás értéke a τ -adik időpontban történő beruházás r -rel diszkontált jelenértékének várható értéke, valamint az azonnali megvalósítás ($\tau = 0$) értéke közül a nagyobb. Ezt a maximalizálást a kontrollváltozó (u), vagyis a vállalat döntése irányítja. Az a (23) képletből egyértelműen látszik, hogy a projektérték (V) mindig nagyobb, vagy egyenlő, mint nulla, ugyanakkor az időzítési problémánk kapcsán hozzáadott értékkel nem szolgál, hiszen az időnek egyetlen pontját sem specifikálja. Ahhoz, hogy közelebb kerüljünk a vágyott trigger-időponthoz, célszerű a (23) képletet egy dinamikus programozási problémaként, az optimalitás alapfeltételeként Bellman-egyenletként felírni (Simonovits, 2003), vagyis a lehívás állapotának, a kontrollváltozó $u = 1$ értékének hasznosságát a lehívás állapotában tartózkodás jutalmának, valamint a következő állapot hasznosságának összegeként:

$$V(S, \tau) = \max_u \{S(\tau) - X; \mathbf{E}_\tau[V(S + \Delta S, \tau + \Delta\tau)e^{-r\Delta\tau}]\}. \quad (24)$$

Ezt a dinamikus programozási problémát a beruházás megvalósításához elérhető végső időpontból (T) kiindulva egy visszafelé haladó megoldással közelíthetjük. Vagyis egy maximalizálási problémával állunk szemben u kontrollváltozóra. A problémát egészen addig nem tudjuk megoldani, amíg nem rendelkezünk információval a projektértékről (S). Ahogyan azt a korábbiakban már leszögeztük, a pénzáramok, és ezzel a projektérték geometriai Brown-mozgását feltételezzük, vagyis ha a projektérték (S) változása egységnyi idő alatt (drift) m , a variancia pedig σ , akkor

$$dS = mSd\tau + \sigma Sdz, \quad (25)$$

ahol dz egy Wiener-folyamat. A (24) egyenletet ezzel folytonos időben felírva:

$$V(S, \tau) = \max_u \{S(\tau) - X; \mathbf{E}_\tau[V(S + dS, \tau + d\tau)e^{-rd\tau}]\}. \quad (26)$$

Mivel a vizsgált probléma kapcsán kijelenthetjük, hogy mind a projekt-érték %-os változása egységnyi idő alatt (m), mind a volatilitás (σ) idő és állapotfüggő, a (26) képlet az Ito-lemma² (a) behelyettesítésével a következőképpen írható át:

$$(1 - rd\tau)V(S, \tau) + V_\tau(S, \tau)d\tau + V_S(S, \tau)mSd\tau + \frac{1}{2}V_{SS}\sigma^2S^2d\tau. \quad (27)$$

Ezt az összefüggést a (26) egyenletbe behelyettesítve, a maximalizálási feltételeket megfogalmazva arra jutunk, hogy

$$\frac{1}{2}V_{SS}(S, \tau)\sigma^2S^2 + V_S(S, \tau)mS + V_\tau(S, \tau) - rV(S, \tau) = 0, \quad (28)$$

ahol a feltételek $V(0) = 0$; $V(S^*, \tau^*) = S^* - X$ és $V_S(S^*) = 1$. Vagyis a jövő egy adott pillanatában létezhet az az időpont, ahol optimális lehet az opció lehívása, vagyis a projekt megvalósításáról döntés, vagyis fennállhat az $u = 1$ állapot. Ezeket a feltételeket már Dixit és Pindyck (1994), valamint Merton (1973) is megfogalmazták. Az előbbieket az értékillesztés feltételét, míg utóbbiak a „high contact” feltételt, mely a lehívási idő optimalizálás egyik elsőrendű feltétele. Amennyiben létezik egy optimális S^* érték, az független kell, hogy legyen a projekt jelenértékétől. Amennyiben az S jelenlegi projekt-érték eléri S^* -ot, a jelenlegi megvalósítás értéke, valamint a várakozás értéke megegyezik, vagyis nincs további előnye a várakozásnak.

Ahhoz, hogy rátaláljunk arra a (idő)pontra T előtt, melyben érdemes az opció lehívása, a projekt megvalósítása, a korlátozó feltételek megváltoztatására van szükség. Első lépésben feltételezzük, hogy a projekt nem valósítható meg T időpont előtt, vagyis:

$$V(S, T) = \max(S(t) - X; 0) \quad (29)$$

Ez lesz a (28) egyenlet új korlátozó feltétele. Ingersoll (1987) a várakozás transzformálás és S , mint megoldás, (25) differenciálegyenletbe helyettesítését követően a következő egyenletet kapta:

$$V(S, \tau) = e^{(m-r)(T-\tau)}SN(d_1) - Xe^{-r(T-\tau)}N(d_2), \quad (30)$$

ahol

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{X} + (m + 0,5\sigma)(T - \tau)}{\sigma\sqrt{T - \tau}} \quad (31)$$

és

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - \tau}. \quad (32)$$

²Amennyiben a V projektérték S és t függvénye, az Ito-lemma szerint V -nek a következő folyamatot kell követnie:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial S}mS + \frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) d\tau + \frac{\partial V}{\partial S}\sigma Sdz. \quad (a)$$

A következő lépés az m növekedési ráta, valamint az r diszkontráta közötti kapcsolat feltérképezése. A pénzügyi opció-elmélet ezt a problémát a növekedési ráta megfelelő kockázati szinthez igazításával, majd a kockázatmentes rátával történő diszkontálással oldja fel. Mindezt Merton (1973) az arbitrázsmentesség feltételezésével, míg Black és Scholes (1973) egyensúlyi modellel vezeti le.

Vagyis a (28) egyenletre abban az esetben, ha a reálopció bármikor lehívható, ezzel a korlátozó feltétellel nem találunk megoldást, ugyanakkor nyilvánvaló, hogy a gyakorlat erre igényt tart. Barone-Adesi és Whaley (1987) egy közelítéssel megoldást javasoltak amerikai típusú pénzügyi opciók esetében. A pénzügyi és reálopciók közötti értékelési analógiából kiindulva a következőkben ezt alkalmazzuk a várakozás értékének meghatározásához. A közelítéshez szükségesek kiegészítő feltételek. Legyen $M = 2r/\sigma^2$, $N = 2m/\sigma^2$ és $t = T - \tau$ a lehívásig hátralévő idő. Ezen feltételek mellett a (28) egyenlet közelítő megoldása:

$$V(S, \tau) = \begin{cases} v(S, \tau) + A_2 \left(\frac{S}{S^*} \right)^{q_2} & \text{ha } S < S^*; \\ S - X & \text{ha } S \geq S^*. \end{cases} \quad (33)$$

$$A_2 = [1 - e^{(m-r)\tau} N(d_1(S^*))] \frac{S^*}{q_2} \quad (34)$$

$$q_2 = 0,5 \left[-(N-1) + \sqrt{(N-1)^2 + \frac{4M}{N}} \right]. \quad (35)$$

S^* a következő egyenlet implicit megoldása:

$$S^* - X = v(S^*, \tau) + \frac{[1 - e^{(m-r)\tau} N(d_1(S^*))] S^*}{q_2}, \quad (36)$$

ahol $v(S, \tau)$

$$v(S, \tau) = e^{(m-r)\tau} S N(d_1) - e^{-r\tau} X N(d_2), \quad (37)$$

d_1 és d_2 paraméterek a következők:

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{X} + (m + 0,5\sigma)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad (38)$$

és

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}. \quad (39)$$

4 Empirikus kutatás és esettanulmány

A következőkben öt, potenciálisan a hazai összetételbe vonható villamosenergia-termelési technológia időzítési modelljét vizsgáljuk (*nukleáris erőmű, szárazföldi szélenergia, biomassza-erőművek, nap PV (fotovoltaikus) napelem, geotermikus erőművek*). Miért ezen technológiákra esett a választásunk? Az

adott villamosenergia-termelési technológia egyetlen, átlagos méretű blokkjának megvalósításának feltételezése helyett, a technológiák összehasonlíthatósága érdekében egy hipotetikus 3,6 TWh-s villamosenergia-fogyasztás mellett születtek. A villamosenergia-fogyasztás e feltételezett szintjének kielégítése érdekében kiépítendő kapacitás nagysága, illetve ezzel a beruházási költségek jelentősen megnövekednek a kis egységméretű, jellemzően megújuló technológiák esetében, hiszen több mint hatszor annyiba kerül egy (az átlagos blokkméret alapján több mint 230 elemből álló) napenergiapark kiépítése, üzembe helyezése, mint egy (közepes méretű) szénerőmű felépítése, felszerelése a szükséges kereslet kielégítése érdekében. A villamosenergia termelés ellátásbiztonsági szempontjait figyelembe véve nyilvánvaló, hogy a 100%-ban egy-egy technológiából álló összetétel csupán a hagyományos erőművek esetében kifizetődő, a megújuló energiaforrás alapú erőművek közül a biomassza, valamint a geotermikus technológiák kapcsán tűnhet egy ilyen elgondolás racionálisnak. A jelentős földrajzi és időjárásbi bizonytalanság által sújtott, ugyanakkor napjainkban rendkívül felkapott szél-, illetve naperőművek esetében pedig azoknak irracionális kapacitásbővülése tenné csupán lehetővé a kereslet, mellesleg értékrombolással történő kielégítését.

A korábban bemutatott statikus, valamint a dinamikus időzítési megközelítések gyakorlati alkalmazását megelőzően a szükséges input adatok előállítását, valamint egyes paraméterek esetében feltételezéseink megfogalmazását végezzük el. Számításaink során két paraméter esetében éltünk feltételezéssel, a kockázatmentes hozam (r) igazodva a vizsgált villamosenergia termelési típusok átlagélettartama alapján determinált futamidejű fix kamatozású állampapír éves hozamához, 3,00%; míg a pénzáramok átlagos növekedési rátája (m) 1%. A számított paraméterek: a reálopció alaptermék (termelési technológia) jelenértéke (V), melyet a szabad pénzáram számításán keresztül határoztunk meg (Takács, 2009) az éves villamosenergia-kibocsátás utáni, az erőmű-technológiai paraméterrel, a terhelési faktorial (erőmű teljesítményének annak maximális teljesítményéhez viszonyított hányadosa) korrigált bevétele mínusz a terhelési faktorial korrigált működési és karbantartási fix és változó költségek, valamint az éves üzemanyagköltség; a projekt érték volatilitás, melyet közelítettünk Copeland és Antikarov (2002) javaslatára a projekt opció nélkül feltételezett érték (NPV) Monte Carlo (MC) szimulációjának eredményeként kapott kockázatbecsléssel ($365\text{nap} \cdot 24\text{h} = 8760$).

$$FCF = \sum_{t=1}^n 8760 \cdot f \cdot Q \cdot P - FC \cdot 1000 \cdot Q - VC \cdot 8760 \cdot f \cdot Q - F \cdot 8760 \cdot f \cdot Q \quad (40)$$

$$V = \sum_{t=1}^n \frac{FCF_n}{(1+r)^n} \quad (41)$$

	Nukleáris	Onshore szél	Biomassza	Nap PV	Geotermikus
$V(0)$ m\$	5 686,0	4 987,0	4 149,0	4 058,0	4 291,0
X m\$	2 715,0	1 837,0	1 877,0	6 457,0	776,0
$X/V(0)$	0,5	0,4	0,5	1,6	0,2
V/X	2,1	2,7	2,2	0,6	5,5
B m\$	639,0	392,0	297,0	288,0	331,0
B_T m\$	54,3	36,7	37,5	129,1	15,5
B_C m\$	81,5	55,1	56,3	193,7	23,3
B_U m\$	141,8	120,4	125,4	454,9	53,7
C_T	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
C_C	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
C_U	2,6	3,3	3,3	3,5	3,5
T_T év	0,0	0,0	0,0	15,5	0,0
T_C év	0,0	0,0	0,0	29,0	0,0
T_U év	7,3	6,3	13,8	57,5	0,0
r	0,030	0,030	0,030	0,030	0,030
m	0,010	0,010	0,010	0,010	0,010
σ	0,180	0,280	0,290	0,320	0,310
β	1,621	1,439	1,427	1,396	1,406

4. táblázat. Statikus időzítési modellek és szabályok alkalmazása az öt választott villamosenergia termelési technológia esetében. *Forrás:* Saját számítások U.S. Department of Energy (2015), EIA (2017a), EIA (2017b), EIA (2018), IRENA (2018), NEI (2017) adatai alapján

A három statikus időzítési szabály típus közül a hagyományos szabályt emelnénk ki, mely esetében a cél a pozitív nettó jelenérték elérése, illetve a beruházás jövőbeli értékeinek ismerete mellett és bizonytalan értékek esetén is alkalmazható. A projekt érték és a tőkeköltségek arányának (V/X) a hagyományos szabály (SZ1) esetében az (1) egyenletben leírtak szerint, egynél nagyobb értéket kell felvennie, ami megfeleltethető a jövedelmezőségi index (PI) döntési szabályának. A kritikus értéket mindegyik villamosenergia-termelési technológia esetében meghaladja a V/X arány, kivéve a Nap PV-t, amely a kiemelkedően magas beruházási költségekre vezethető vissza. A (12) egyenletben leírt projekt érték kapcsán belátható, hogy tradicionális befektetői körülmények között a geotermikus, az onshore szél, a biomassza és a nukleáris villamosenergia-termelési technológia esetében az azonnali megvalósítás mellett döntenek, míg a Nap PV esetében a várakozás teremt értéket.

A második vizsgált szabálytényező az éves nettó működési pénzáramok (B) elemzésén alapul, melynél a 4. táblázatban látható számított értékek szintén meghaladják az (5) egyenletben leírtak alapján meghatározott kritikus értéket mindegyik termelési technológia esetében, így a fennálló $B \geq B_T$ reláció az azonnali megvalósítást ösztönzi.

A statikus modell harmadik tényezője a projekt időzítése, mely az optimális beruházási időpontot mutatja a kiindulási évhez képest a döntéshozó számára. A kritikus értéket (T_T) (8) egyenlet segítségével határozzuk meg, ahol C_T kritikus érték a korábbiaknak megfelelően 1. Megfigyelhető az eredmények alapján, hogy a Nap PV esetében az optimális beruházási időpont 15,5 év, míg a többi termelési technológia esetében az azonnali megvalósítás javasolt az alábbi sorrend szerint: geotermikus, onshore szél, biomassza, nukleáris, Nap PV villamosenergia termelési technológia. A Nap PV jelentős hátrányt szenved a beruházási költség alapján hozott döntések terén, mivel

több mint háromszor annyiba kerül egy napenergia-park kiépítése, üzembe helyezése, mint például egy szélerőmű felépítése, felszerelése a szükséges kereslet kielégítése érdekében. Nyilvánvaló, hogy a kapott statikus eredmények alapján hozott döntések realitása csekély, nem is elsősorban a tényleges eredmények, hanem a hagyományos és megújuló technológiák eredményei közötti relációk érdemelnek kiemelt figyelmet. Az értékteremtési potenciáljuk alapján a megújulók irányába kellene eltolódnuk a jelenlegi villamosenergia-termelési portfólióknak, mely fordulat elsősorban a tanulási hatásnak tudható majd be.

A bemutatott dinamikus közelítési eljárás a termelési technológia optimális értékének, vagyis maximális értékének (hagyományos jelenérték és a várakozás flexibilitási értékével növelt érték összege) determinálásával nyújt információt az időzítésről. A probléma komplexitása miatt a dinamikus eljárás alkalmazását leszűkítettük két technológia, a hagyományos, valamint a megújuló termelési technológiák közül a legnagyobb projektértéket eredményező erőművekre. Ez a nukleáris, valamint a szélenergiára épülő technológia.

A statikus módszernél bemutatott input adatokat alapul véve az optimális lehívási időpontot azonosító S^* trigger érték számítását, valamint a befolyásoló paraméterek változtatásának hatásvizsgálatát végeztük el. Első lépésben a lehíváshoz rendelkezésre álló időkorlátot módosítottuk 3 hónapról egészen 24 hónapig, a technológiára jellemző volatilitást, 3%-os kockázatmentes rátát, valamint a szektorra jellemző 1%-os m növekedési paramétert alapul véve. A kapott eredményekből egyértelműen látszik, hogy a reálopció futamideje, jelen esetben a megvalósítás választott időpontja, tehát időzítése közvetlen kapcsolatban lesz a projekt optimális értékével (S^*). Amint szűkül a megvalósításhoz rendelkezésre álló idő, vagyis minél rövidebb az időzítési opció futamideje, annál kevesebb S érték szükséges a lehívási cselekmény előidézéséhez, hiszen a fent bemutatott amerikai típusú reálopció árazási modell alapján az optimális lehívási időpont ott fog bekövetkezni, ahol S^* trigger érték létrejön. Az 5. táblázat egyes sorai a projekt értékének azon szintjét mutatják, mely adott futamidő mellett a beruházás megvalósítását, a lehívást ösztönzi. Ugyanakkor fontos kiemelnünk, hogy futamidő változtatásának hatása korántsem olyan jelentős, mint a nyereségnövekedési ráta (m) változtatásának hatása. Az általunk alkalmazott módszer lehetővé tette az időbeli flexibilitás hatásának számszerűsítését.

Nukleáris technológia			Onshore szél		
t (hó)	$m = 0,01$	$m = 0,02$	t (hó)	$m = 0,01$	$m = 0,02$
3	3295	3324	3	2482	2533
6	3570	3620	6	2823	2939
9	3801	3877	9	3125	3320
12	4011	4116	12	3408	3695
18	4393	4565	18	3952	4460
24	4747	4996	24	4486	5265

5. táblázat. Az időkorlát változtatásának hatása S^* projektértékre a nukleáris és onshore szél villamosenergia termelési technológia esetében 1 és 2%-os m paraméterek mellett ($S_0^{\text{nukleáris}} = 2715$; $S_0^{\text{szél}} = 1837$). Adatok m\$-ban.

A 6. és 7. táblázattal a volatilitás becslésének fontosságát szemléltetjük. Ebben a futtatásban mind a futamidő, mind a projekt volatilitásváltoztatás hatását elemeztük ceteris paribus.

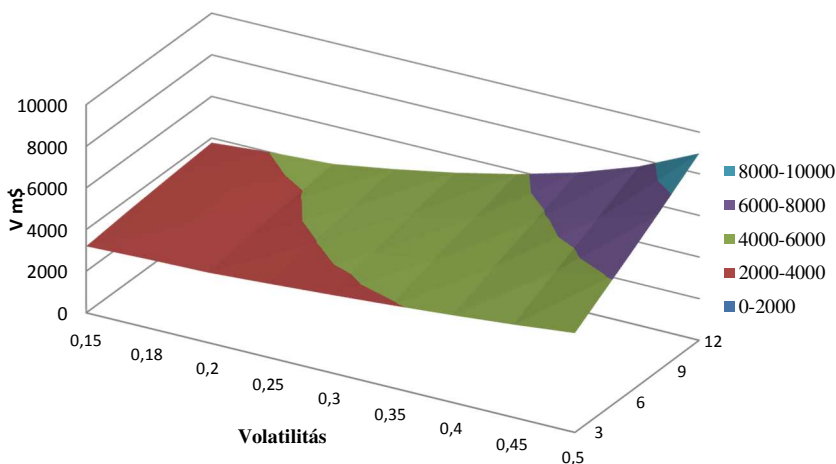
σ (%) / t (hó)	3	6	9	12
16	3198	3421	3607	3775
18	3295	3570	3801	4011
20	3363	3675	3939	4179

6. táblázat. A volatilitás változtatásának ($\pm 2\%$) hatása S^* trigger értékre az időkorlát különböző szintjei mellett, a nukleáris technológia esetében. Adatok m\$-ban.

σ (%) / t (hó)	3	6	9	12
26	2428	2734	3001	3250
28	2482	2823	3125	3408
30	2539	2919	3258	3580

7. táblázat. A volatilitás változtatásának ($\pm 2\%$) hatása S^* trigger értékre az időkorlát különböző szintjei mellett, az onshore szélenergia esetében. Adatok m\$-ban.

Eredményeink alapján a lehívási korlát változtatásának hatása nagyobb a projektértékre, mint a volatilitásváltoztatás hatása (melyet a nukleáris technológia esetében az 1. ábra is szemléltet).



1. ábra. Az idő, valamint a volatilitás változtatásának hatása S^* trigger értékre

Mindkét technológia esetében $+5$ és $+11\%$ közötti a volatilitás növekedésének hatása, ahol a magasabb értékek a nagyobb futamidő esetében következnek be, míg adott kockázati szint mellett az időkorlát 3 hónapról 12 hónapra növekedése a nukleáris technológia esetében a projektértékek $+18$ és 25% -os, a szélenergia park esetében pedig $+33$ és $+41\%$ -os emelkedését eredményezi, vagyis S^* trigger érték meghatározása kapcsán az időkorlát szerepe fontosabb lehet, mint a volatilitás hatása. Csak, hogy érzékeltsük, hogy milyen mértékben tér el a két befolyásoló tényező hatása, a nukleáris technológia esetében a projekt-kockázat 18% -ról közel 38% -ra emelésével érnénk el az

időkorlát változtatásának maximális hatásával, míg a szélerenergia esetében ez, a kockázat inputértékként azonosított 28%-ról 51%-ra növekedését jelentené. Annak ellenére tehát, hogy a legtöbb menedzseri döntés fókuszában a bizonytalanság áll, eredményeink alapján a döntéshez, a döntés alapján megvalósuló cselekményekre rendelkezésre álló idő hasonlóan fontos tényező.

Az a döntéshozó, aki a tradicionális módszerekkel kalkulált, kiindulási projektértékhez képest (S_0) viszonylag magas trigger értéket kap eredményül, az racionális, ha a várakozás mellett teszi le a voksát, ugyanakkor azok, akik S_0 -hoz közeli értéket kalkulálnak, relatíve alacsony projektértéket kockáztatnak a projekt azonnali megvalósításával. Azonban ahhoz, hogy ezt a választást a lehető legpontosabban vizsgáljuk, fontos a projekt időzítéssel kalkulált értékének, vagyis $V(S; \tau)$ -nek azonosítása.

t (hó)	Nukleáris	Onshore-szél
3	579	656
6	849	992
9	1075	1289
12	1278	1566
18	1645	2093
24	1980	2605

8. táblázat. Az időkorlát változtatásának hatása az időzítési rugalmassággal növelt projektértékre. Adatok m\$-ban.

A 8. táblázat alapján újra kijelenthetjük, hogy a reálopció futamideje a projekt volatilitáshoz, valamint a diszkontráta és a projektérték növekedési ráta különbségeként azonosított m paraméterhez képest jelentősebb hatást fejt ki a projekt időzítési flexibilitással növelt értékére $V(S; \tau)$. Az, hogy a futamidő, valamint a vételi és elvetési típusú reálopciók értéke közötti kapcsolat pozitív, az nem újdonság az opciós kutatásokban. Az azonban, hogy a futamidő hatása erősebb a bizonytalanság és növekedési kilátások hatásánál, véleményünk szerint mindenképpen meglepő, és figyelemreméltó eredmény.

5 Következtetések, javaslatok

Kutatásunk során a villamosenergia szektor beruházásainak időzítésével foglalkoztunk, azzal a feltevéssel, hogy ezen időzítési fókuszú beruházási döntésre, mind a terület kutatóinak eddigi eredményei, mind a gyakorlati szakemberek cselekedetei által bizonyítottan a bizonytalanság lesz a legnagyobb hatással. Ennek megfelelően nagy hangsúlyt fektettünk a villamosenergia szektor bizonytalansági tényezőinek azonosítására, azok projektekre kifejtett hatásának becslésére. Ezt követően kezdtünk a rendelkezésünkre álló időzítési módszertan vizsgálatába. Az összegyűjtött és gondosan megválasztott statikus és dinamikus modellek futtatásának empirikus eredményei alapján meglepő jelenségre figyeltünk fel. Az idő, egy adott beruházásmegvalósítás végső időpontjának, vagyis egy időzítési reálopció futamidejének hatása erőteljesebb lesz az optimális projektértékre, mint a volatilitás, vagy akár a projekt jövőbeli növekedési kilátásai. A statikus modellek esetében az eredmények hasznosíthatósága szempontjából elmondhatjuk, hogy nem is igazán azok értéke,

sokkal inkább az azok által felállítható időzítési sorrend a fontos, mely sorrend a dinamikus eredményekből is visszatükröződik. A beruházás kivitelezéséhez jellemzően exkluzív jogokkal rendelkező villamosenergia-termelők számára a versenytársak megelőző fellépése miatti fenyegetés nem jellemző, így a 3 hónap és 2 év közötti megvalósítás esetében adódó optimális projektértéket vizsgáltuk. A flexibilitással növelt projektértéke azonosítására felírt modell lehetővé teszi az optimális beruházási időpont megállapítását, mely hasznos eszköz lehet a döntéshozók kezében akár beruházási, akár befektetési, akár K+F projektek mérlegelése, időbeli ütemezése kapcsán.

Irodalom

1. Billington, C., Kuper, A. (2000): Supply Chain Strategy: Real Options for Doing Business At Internet Speed. *Ascet*, Vol. 2, April.
2. Barone-Adesi, G., Whaley, R. E. (1987): Efficient Analytic Approximation of American Option Values. *The Journal of Finance*, 42(2), pp. 301–320.
3. Black, F., Scholes, M. (1973): The Pricing Of Option And Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, H. 81, pp. 637–654
4. Botterud A., Ilic M. and Wangensteen I. (2003): „Optimization of generation investments under uncertainty in restructured power markets” Proc. 12th Intelligent Systems Application to Power Systems Conference (ISAP 2003), Lemnos – Greece.
5. Burger, M., Graeber, B. and Schindlmayr, G. (2007): *Managing energy risk: an integrated view on power and other energy markets*. Hoboken: Wiley.
6. Carrow, R. N., Stowell, L. and Gelernter, W. - Davis, S. - Duncan, R. R. - Skorulski, J. (2004): Clarifying soil testing: III. SLAN sufficiency ranges and recommendations. *Golf Course Manage.* January, pp. 194–198.
7. Chang, C., Chen, M. (2011): Re-examining the investment-uncertainty relationship in a realoptions model. *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 38. pp. 241–255.
8. Chu, X., Polzin, S. (1997): Timing of major transportation investments, *Transportation*, 27(2), pp. 201–219.
9. Conner, K. R. (1988): Strategies for product cannibalism. *Strategic Management Journal*, 9(1), pp. 9–26.
10. Copeland, T. E., Antikarov, V. (2002): *Real Options: A Practitioner’s Guide*, 2. Aufl., New York 2002
11. Damodaran, A. (2002): *Investment Valuation: Tools and Techniques for Determining the Value of Any Asset*, Wiley and Sons.
12. Dixit, A., Pindyck, R. S. (1994): The Options Approach To Capital Investment, *Harvard Business Review*, May-June, 105–115.
13. Dosi, G., Egidi, M. (1991): Substantive and procedural uncertainty. *Journal of Evolutionary Economics*, 1(2), pp. 145–168.
14. EIA (2016): Capital Cost Estimates for Utility Scale Electricity Generating Plants, U.S. Department of Energy, Washington. Letöltve: <https://www.eia.gov/analysis/studies/powerplants/capitalcost/> (2018.02.20).
15. EIA (2017a): Levelized Cost and Levelized Avoided Cost of New Generation Resources in the Annual Energy Outlook 2017, U.S. Energy Information Administration, Washington. Letöltve: https://www.eia.gov/outlooks/aeo/pdf/electricity_generation.pdf (2018.02.20).

16. EIA (2017b): Construction Cost Data for Electric Generators Installed in 2015, U.S. Energy Information Administration, Washington. Letöltve: <https://www.eia.gov/electricity/generatorcosts/> (2018.02.20)
17. EIA (2018): Assumptions To AEO2018, Electricity Market Module, U.S. Energy Information Administration, Washington. Letöltve: <https://www.eia.gov/outlooks/aeo/assumptions/pdf/electricity.pdf> (2018.02.20)
18. Frayer, J., Uludere, N. Z. (2001): What Is It Worth? Application Of Real Options Theory To The Valuation Of Generation Assets. *The Electricity Journal*, 14(8) pp. 40–51.
19. Gitelman, G. (2002): Use Of Real Options In Asset Valuation. *The Electricity Journal*, 15(11) pp. 58–71.
20. Han, H. J. (2008): Estimating Project Volatility And Developing Decision Support System In Real Options Analysis, Phd Dissertation, Auburn University, Auburn, Alabama, 2007.
21. Ingersoll, J. E. (1987): *Theory of Financial Decision Making*, Savage: Rowman & Littlefield.
22. IRENA (2018): Renewable Power Generation Costs in 2017, International Energy Agency, Abu Dhabi. Letöltve: https://www.irena.org/-/media/Files/IRENA/Agency/Publication/2018/Jan/IRENA_2017_Power_Costs_2018.pdf (2018.02.20)
23. Knight, F. H. (1921): *Risk, Uncertainty and Profit*. Boston: Houghton Mifflin
24. Langlois, R. N. (1986): *Rationality, Institutions, and Explanation in Economics as a Process*. Cambridge: Cambridge University Press.
25. Lieberman, M. B. – Montgomery, D. B. (1988): First-mover (Dis)advantages: Retrospective and Link with the Resource-based View. *Strategic Management Journal*, 19. pp. 1111–1125.
26. Loasby, B. J.(1976): *Choice Complexity and Ignorance*; Cambridge: Cambridge University Press.
27. Luehrman, T. A. (1998): Strategy as a Portfolio of Real Options. *Harvard Business Review*, 76(4), pp. 89–99.
28. McDonald, R. L. – Siegel, D. (1986): The Value of Waiting to Invest. *Quarterly Journal of Economics*, 101(4), pp. 707–727.
29. Merton R. C. (1973): Theory Of Rational Option Pricing, *Bell Journal of Economics And Management Science*, 4(1), 141–183.
30. Mises, L. (1949): *Human Action: Scholar's Edition*. Auburn, AL: Ludwig von Mises Institute.
31. Myers, S. C. (1977): Determinants of Corporate Borrowing, *Journal of Financial Economics*, 5(2) pp. 147–176.
32. NEI (2017): Review of Capital Costs for Generation Technologies, Western Electricity Coordinating Council. Letöltve: <http://www.nei.org/Knowledge-Center/Nuclear-Statistics/Costs-Fuel,-Operation,-Waste-Disposal-Life-Cycle> (2018.02.20)
33. O' Driscoll, G. P., Rizzo, M. (1985): *The Economics of Time and Ignorance*. Oxford: Blackwell.
34. Pilipovic, D. (2007): *Energy Risk*, 2nd Edition, McGraw-Hill.
35. Reedman, L., Graham, P. and Coombes, P. (2006): Using A Real Options Approach To Model Technology Adoption Under Carbon Price Uncertainty: An Application To The Australian Electricity Generation Sector. *The Economic Record*, 82. (Special Issue), pp. 64–73.

36. Rózsa, A. (2016): Tudásteremtés reálopciókkal: a reálopciók jelentősége a vállalatirányításban és a fejlett gyártástechnológiák stratégiai értelmezésében, *Közgazdaság*, 11(2) pp. 107–127.
37. Sarkar, S. (2000): On the investment-uncertainty relationship in a real options model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 24. pp. 219–225.
38. Shackle, G. L. S. (1972): *Epistemics and Economics*. Cambridge: Cambridge University Press.
39. Shankar, G. C., Carpenter, G. S. (1998): *Handbook of Marketing Strategy*. Northampton: Edward Elgar Publishing.
40. Simonovits, M. (2003): How to compute the volume in high dimension? *Mathematical Programming* 97(1-2) pp. 337–374.
41. Suarez, F. F. – Lanzolla, G. (2007): The Role of Environmental Dynamics in Building a First Mover Advantage Theory. *Academy of Management Review*, 32(2), pp. 377–392.
42. Takács, A. (2009): A hozzáadott érték alapú értékelési módszerek gyakorlati alkalmazása, in: Ulbert József (szerk.) *Az Iskolateremtő: Tanulmánykötet Bélyácz Iván 60. születésnapja tiszteletére*, PTE-KTK, pp. 259–281.
43. U.S. Department of Energy (2015): Levelized Cost Analysis. Letöltve: https://www.energy.gov/sites/prod/files/2015/04/f22/CleanLin_ePt2-Appendix-6-B.pdf (2018.02.20)
44. Weber, C. (2005): *Uncertainty In The Electric Power Industry*. New York: Springer.

OPTIMAL INVESTMENT TIMING IN THE POWER GENERATION SECTOR

One of the main focus of corporate economics is the investment decision making process. In this paper, we deal with uncertainty and the investment timing questions, as the drivers of investment decisions. We suppose that besides uncertainty, investment timing will have an influence on the value-creating potential of the firms.

We test the commonly used static, discounted cash-flow models and a newly developed real options based dynamic investment timing model. We have chosen the energy sector, narrowed down to power generation projects as the field of demonstration, since the special characteristic of these projects the irreversibility of them, the uncertainty surrounding them, the long useful life, moreover the features of the sector itself (numerous players with varying preferences and risk attitudes, changing regulatory and market environment, the special nature of electric power as a product) make the timing of these investment crucially important, and real options specially applicable.

Based on the basic investment valuation literature, the discounted cash-flow valuation, and the real option valuation, we conducted a literature review concentrating on time and timing in the decision-making process. Easy to apply discount cash-flow based approaches assume a passive management approach (Kogut – Kulatilaka, 1994); they make the implicit assumption whereby a project will begin immediately and operate continuously until the end of anticipated useful life even if the future is uncertain. As a consequence discount cash-flow procedures disregard the added value that can be incorporated in a project by means of the management's flexible adaptation and innovation, i.e. they systematically underestimate the value of investment projects (Trigeorgis, 1993; Dixit – Pindyck, 1994). The

undervaluation of investment alternatives may lead to underinvestment and losing competitive position (Hayes – Abernathy, 1980). An efficient project valuation procedure takes both uncertainty and active decision-making – essential to the success of a strategy – into account (Luehrman, 1998). The expression real options were first used by Stewart Myers in 1977 when he investigated the possibilities of applying options pricing in the non-financial investment valuation domain, by which he meant flexibility and as an added value, the phenomenon of deferred learning. A real option can be considered the option to defer and adjust investments and production decisions with the purpose of dispelling uncertainty (Triantis, 2000). The time and optimal timing related literature in investment research can be divided into two main streams. To the net present value assuming static framework, which focuses on value maximization and to the dynamic condition assuming direction, which identifies strategic value and derives optimal timing from these. Real option value is actually the sum of net present value and this strategic value, where real option value may never be less than net present value; moreover, a project may carry value regardless of its net present value being negative or equal to zero. Strategic project value appears if some degree of the combination of uncertainty and flexibility is typical to the project, and will be the greater the more this is so. It is important to note at this point that the presence of uncertainty in itself will not result in strategic value without flexibility being present. From the real options perspective, this flexibility is an option, which – in the electrical energy sector – may be the option to defer power plant investment, shut down a power plant, switch combustibles, geographically relocate the power plant, choose technology, go to market, or speed up amortization.

Maximizing the net present value can be used to derive timing rules. Optimal timing occurs when the investment goal is achieved by the company (positive net present value) (Damodaran, 2002). Static researchers include Chu and Polzin (1997), who distinguish three timing rules. The traditional rule can be applied if our goal is merely to create value, that is, to achieve a positive net present value. In the case of the certainty rule, the future value of the factors influencing the cash flows of the investment is known and our goal is to maximize the net present value. If the uncertainty rule is applied, the factors influencing the cash flows of the investment are uncertain and the aim is to maximize the expected net present value. The new element of the method presented in this paper compared to this is the approach of optimal timing, derived from a trigger value of strategic value. The built and applied model of ours combines the available best practices with a new perspective of time and timing. Our key assumptions are that the life of the real option, in this case, the chosen time of exercise, the optimal timing will be directly related to the optimal value of the project (S^*). As soon as the time available for exercise (starting the project) becomes shorter, ie the shorter the maturity of the timing option, the less S value is required to trigger the exercise, as based on the above-described American type real option pricing model, the optimal investment (exercise) time will occur at the S^* trigger value.

Our results show that the timing of real options and the value of these options will have a positive relationship, but what is most interesting is that the effect of time (maturity) will have a stronger effect on the created value than uncertainty and the expected growth potential. The effect of time on the optimal project value is more significant than the effect of volatility or the growth potential of the project. Projects with a higher expected value increase should be started earlier (renewable technologies).

Keywords: real options, timing, flexibility, uncertainty. *JEL-codes:* G11, C41