FOGALMAK, MÓDSZEREK

FELTÉTELES KÖVETELÉSEK ÁRAZÁSA – KOPULA MÓDSZEREK ALKALMAZÁSA TELJES PIACOKON[1]

VARGA JÓZSEF
PTE Közgazdaságtudományi Kar

Bevezetés

Ennek a rövid ismertetőnek elsődleges célja, hogy szélesebb olvasóközönség számára segítsen könnyebben érthetővé tenni azokat a módszereket, modelleket, amelyek a pénzpiacokon mutatkozó olyan tények kezelésére kínálnak legalább részleges megoldást, mint az eszközhozamok normálistól eltérő eloszlása, a vastag eloszlásszélek vagy általánosabban fogalmazva a hagyományos modellekben feltételezett együttes valószínűség-eloszlások és a piacokon észlelt adatok eloszlásának jelentős eltérése a pénzügyi piacok kiszámíthatatlan viselkedése, a volatilitás nagymértékű megnövekedése következtében. Ezek az utóbbi időben észlelt fejlemények a pénzügyi matematika olyan standard eszközeit érvénytelenítették, mint például a Black-Scholes-modell, amelyet eltérő jellemzőket mutató piacokon *feltételes követelések* árazására alkalmaznak, és amely zárt alakban megadott megoldásokat kínál szigorúan Gauss-eloszlás feltételezésével, majdnem minden árazási problémára. A másik célja a dolgozatnak rámutatni arra, hogy még ezekben az itt bemutatásra kerülő egyszerű esetekben, a teljes piaci környezet feltételezése és a legegyszerűbb kétváltozós digitális opciók esetében is mennyi komoly problémával kell szembenéznie a matematikai szempontból tökéletesen kidolgozott elméleti modellek alkalmazóinak. Ezek alapján talán elképzelhető a modellezési problémáknak a súlyossága, valamint az így nyert következtetések kétségbe vonható megfelelősége az általánosabb (kettőnél több dimenzió, nem teljes piaci környezet és nem csak egyszerű digitális opció) esetekre nézve.[2]

A többváltozós feltételes követeléseket matematikai fogalmakkal

$$g(f(S_i(T), T; i = 1, 2, \dots, n))$$

alakban felírható kifizetésként jellemezhetjük, ahol $g(\cdot)$ egyváltozós kifizetőfüggvény a származtatott ügylet azonosítására szolgál, $f(\cdot)$ n-változós függvény, amely azt írja le, hogy az n-számú alaptermék hogyan határozza meg

[1] Beérkezett: 2009. április 10. E-mail: `varga@ktk.pte.hu`.

[2] Az eszközárazás elméleti összefüggéseibe, matematikai alapjaiba nyújt betekintést Medvegyev Péter: A pénzügyi eszközök árazásának alaptétele diszkrét idejű modellekben c. dolgozata. (Ld. irodalomjegyzék)

a végső pénzfolyamot, S_i az i-edik alaptermék árfolyamát, T pedig a szerződés lejárati idejét jelöli. Például szivárvány vételi opció esetében a kifizető függvény

$$g(f) = \max(f - K, 0)\ ,$$

ahol K a lehívási árfolyam, míg $f(\cdot)$ az n számú eszköz minimumát határozza meg:

$$f(S_i(T), T; i = 1, 2, \dots, n) = \min(S_i(T); i = 1, 2, \dots, n)\ .$$

Másik példaként említhető a *többváltozós digitális opció*. Ebben az esetben a $g(\cdot)$ függvény egyszerűen egy multiplikatív állandó, az $f(\cdot)$ pedig azt jelzi, hogy minden alaptermék árfolyama magasabb vagy megegyező-e a megfelelő K_i, $i = 1, 2, \dots, n$ lehívási árfolyamnál:

$$f(S_i(T), T; i = 1, 2, \dots, n) = I_{(S_1(T) \geq K_1) \cap \cdots \cap (S_n(T) \geq K_n)}$$

ahol I indikátorfüggvényt jelöl.

Olyan árazási modelleket mutatunk be, amelyek érvényesek a standard Black-Scholes modell feltételeit meghaladó nagyon általános valószínűségeloszlás feltételezések mellett. Ezek a modellek képesek szétválasztani a változók függőségi struktúráját és a marginális eloszlásokat. Az elemzésekben nagyon fontos szerepet játszó függőség modellezése fáradságos munka. Ennek elsősorban az az oka, hogy a kétváltozós függőségi mértékek általánosításai nem egyértelműek. Az alkalmazott eszköz a kopula függvény[3], amely egyre népszerűbb a pénzügyi piacok elemzői körében, a vele foglalkozó publikációk száma exponenciálisan növekszik mind az elmélet, mind pedig az alkalmazások területén. Az egyik ilyen többváltozós kiterjesztés például a Kendall τ-ra vonatkozó, amelyet Barbe, Ghoudi, Genest és Rémillard (1996) javasolt:

$$\tau_d = \frac{2^d}{2^{d-1} - 1} E(V) - 1 = \frac{2^d}{2^{d-1} - 1} \int_{-\infty}^{\infty} t\, dK(t) - 1\ ,$$

a becslő függvénye pedig

$$\hat{\tau}_{dn} = \frac{2^d}{2^{d-1} - 1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} V_{in} - 1 = \frac{2^d}{2^{d-1} - 1} \int_{-\infty}^{\infty} t\, dK_n(t) - 1\ ,$$

ahol

$$V_{in} = \sum_{m=1}^{n} \prod_{j=1}^{d} 1(x_{jm} \leq x_{im}) \quad \text{és} \quad V = C\big\{F_1(X_1), \dots, F_d(X_d)\big\} \in [0, 1]\ .$$

$K_n(t)$ és $K(t)$ rendre a V_{in} és V_n eloszlásfüggvényei. A formula szerint τ_d a kopula várható értékének affin transzformáltja. A Spearman ρ többváltozós kopulán alapuló kiterjesztését Wolff (1980) publikálta:

[3] A kopula módszerek matematikai alapjairól magyar nyelven Varga J., pénzügyi alkalmazásairól pedig Benedek, G., Kóbor, Á., Pataki A., illetve Varga J., Lukács P. dolgozataiból tájékozódhat az Olvasó.

$$\rho_d = \frac{d+1}{2^d - d - 1}\left\{2^d \int \dots \int_{[0,1]^d} C(u_1, \dots, u_d)\, du_1 \dots du_d - 1\right\}.$$

Schmid és Schmidt (2006a) és Schmid és Schmidt (2006b) vizsgálták a mérték tulajdonságait és részletesen elemezték a

$$\hat{\rho}_{dn} = \frac{d+1}{2^d - d - 1}\left\{\frac{2^d}{n}\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{d}\left(1 - \hat{F}(x_{ij})\right) - 1\right\}$$

becslőfüggvényét. A kétváltozós Spearman ρ egy változata Kendall (1970) nevéhez fűződik:

$$\rho_r = 2^2 \sum_{m<l} \binom{d}{2}^{-1} \int\int_{[0,1]^d} C_{ml}(u, v)\, du dv - 1 \,,$$

ahol C_{ml} az m és l változók kétváltozós kopuláját jelöli.

A szűkre szabott terjedelmi korlát miatt most csak a teljes piac feltételezése mellett vizsgáljuk néhány nagyon egyszerű származtatott termék árazási problémáját kopula függvények alkalmazásával.

Opcióárazás teljes piac feltételezésével

Tekintsük az S_1 és S_2 alaptermékekre kiírt származtatott termékeket. Az információ struktúrát a szokásos módon az $\{\Omega, \mathcal{F}_t, P\}$ valószínűségi mező reprezentálja, amelyet az $S_1(t)$, $S_2(t)$, $t \in [0, T]$ sztochasztikus folyamatok generálnak, $\mathcal{F}_t$ pedig a filtrációt jelöli. A továbbiakban feltesszük, hogy $S_1(t)$ és $S_2(t)$ folytonos valószínűségi változók nem-negatív támasszal. Vegyünk az egyszerűség kedvéért kétváltozós európai derivatívát, amelynek a kifizetése teljes általánosságban $G(S_1(t), S_2(t)) : \mathcal{R}^3_+ \to \mathcal{R}$ alakban írható függvény.[4]

A feladatunk olyan $g(S_1(t), S_2(t))$ árazó függvény meghatározása, amely kizárja a piacon az arbitrázs lehetőségét. Tudjuk, hogy teljes piac esetében ez a termék, és bármely más termék is pontosan replikálható (szintetikusan előállítható), és az ára egyértelműen meghatározott. Ez az egyértelműen meghatározott ár a szintén egyértelműen meghatározott $Q(S_1(t), S_2(t) \mid \mathcal{F}_t)$ kockázat-semleges valószínűség-eloszláshoz tartozik, amelynek sűrűségfüggvényét jelölje $q(S_1, S_2 \mid \mathcal{F}_t)$, amely a gazdaság árazási kernelét képviseli. A kétváltozós bizonytalan követelés ára ekkor a következőképpen írható integrál alakban:

$$g(S_1(t), S_2(t), t) =$$

$$= B(t,T) \int_0^\infty \int_0^\infty G(S_1(t), S_2(t), T) q(S_1(T), S_2(T) \mid \mathcal{F}_t)\, dS_1(T) dS_2(T) \,,$$

[4]A származtatott termékekről jól tájékozódhat az Olvasó Száz János: Kötvények és opciók árazása, illetve M. Baxter és A. Rennie: Pénzügyi kalkulus c. könyvéből.

ahol $B(t,T)$ a kockázatmentes diszkont tényezőt jelöli. Elemzésünkben a továbbiakban feltesszük, hogy a kockázatmentes kamatláb független az alaptérméktől vagy nem sztochasztikus. Az általánosabb esetre vonatkozó kiterjesztés egyenesen adódik, ha a mértéket forward kockázat-semleges mértékre cseréljük.

Jelölje S_1 és S_2 feltételes marginális eloszlásait rendre $Q_1(S_1 \mid \mathcal{F}_t)$, illetve $Q_2(S_2 \mid \mathcal{F}_t)$, a sűrűségfüggvények pedig legyenek $q_1(S_1 \mid \mathcal{F}_t)$ és $q_2(S_2 \mid \mathcal{F}_t)$. A feltételes marginális sűrűségfüggvények szintén származtathatók az árazási kernelből a következők szerint:

$$q_1(S_1 \mid \mathcal{F}_t) = \int_0^\infty q(S_1(T), S_2(T) \mid \mathcal{F}_t)\, dS_2(T)\ ,$$
$$q_2(S_2 \mid \mathcal{F}_t) = \int_0^\infty q(S_1(T), S_2(T) \mid \mathcal{F}_t)\, dS_1(T)\ .$$

Az egyváltozós bizonytalan követelések árát a megfelelő marginális kockázatsemleges eloszlás melletti diszkontált várható értékként nyerjük. Ha tehát $G(S_1(T), S_2(T), T) = G(S_1(T), T)$ úgy, hogy a feltételes követelést az S_1 termékre írták ki, akkor

$$g(S_1(t), t) = B(t,T) \int_0^\infty G(S_1(T), T) \int_0^\infty q(S_1(T), S_2(T) \mid \mathcal{F}_t)\, dS_1(T) dS_2(T) =$$
$$= B(t,T) \int_0^\infty G(S_1(T), T) q_1(S_1(T) \mid \mathcal{F}_t)\, dS_1(T)\ .$$

Árazási kernel kopula alkalmazásával

Teljes piaci környezetben az árazási összefüggés a kétváltozós feltételes követelésekre könnyen felírható kopula függvények és a marginális eloszlások kifejezéseként. Ehhez csupán a Sklar-tétel feltételes eloszlásokra vonatkozó kiterjesztésére van szükség.

A Sklar-tétel feltételes eloszlásokra

Bármely $Q(S_1, S_2 \mid \mathcal{F}_t)$ együttes feltételes eloszlás esetében létezik olyan $C(u,v)$ kopula függvény, amellyel fennáll

$$Q(S_1, S_2 \mid \mathcal{F}_t) = C(Q_1(S_1 \mid \mathcal{F}_t), Q_2(S_2 \mid \mathcal{F}_t))\ ,$$

és megfordítva, ha adott két feltételes eloszlás, $Q_1(S_1 \mid \mathcal{F}_t)$ és $Q_2(S_2 \mid \mathcal{F}_t)$ és a $C(u,v)$ kopula függvény, akkor a $C(Q_1(S_1 \mid \mathcal{F}_t), Q_2(S_2 \mid \mathcal{F}_t))$ együttes feltételes eloszlásfüggvény (Patton (2001)). Megjegyezzük, hogy a fenti összefüggés csak akkor áll fenn, ha az $\mathcal{F}_t$ feltételi információ megegyezik a marginálisokra és az együttes eloszlásra. Az így előálló kopula a kockázat semleges valószínűség eloszlás függőségi struktúrájának felel meg, ezért *kockázatsemleges kopulának* nevezzük.

Kopula függvények alkalmazása az együttes eloszlás modellezésére lehetővé teszi számunkra, hogy elkülönítsük a marginális árazási kernelek és az alaptermék függőségi struktúráját. Ez azért nagyon fontos, mert így ellenőrizni tudjuk az egyváltozós és a többváltozós bizonytalan követelések konzisztenciáját, különös tekintettel az arbitrázsmentesség követelményére.

A kétváltozós árazási problémára összpontosítva feltesszük, hogy replikálhatunk és árazhatunk két egyszerű digitális opciót ugyanarra a T lejárati időpontra az S_1 és S_2 alaptermékekre kiírva rendre K_1 és K_2 lehívási árfolyamokkal. Ekkor a feladatunk az, hogy ezeket a termékeket olyan kétváltozós digitális opció replikálására használjuk fel, amely 1 egységnyit fizet, ha $S_1 \geq K_1$ és $S_2 \geq K_2$, egyébként pedig nem fizet semmit. Először osszuk fel az eseményteret reprezentáló pozitív kvadránst négy tartományra a következőképpen:

Állapot	H	L
H	$(S_1 \geq K_1) \cap (S_2 \geq K_2)$	$(S_1 \geq K_1) \cap (S_2 < K_2)$
L	$(S_1 < K_1) \cap (S_2 \geq K_2)$	$(S_1 < K_1) \cap (S_2 < K_2)$

1. táblázat. A pozitív kvadráns felosztása a lehívási árfolyamok alapján

Egyszerű példaként a kétváltozós digitális opciót választjuk. A digitális opciók rögzített összeget fizetnek, ha valamely esemény bekövetkezik. Az egyszerűség kedvéért, de az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy ez a rögzített összeg 1 egységnyi pénzzel egyenlő. A kérdéses esemény pedig a vételi digitális opció esetében az, hogy az alaptermék árfolyama magasabb valamely lehívási árfolyamnál. Az *eladási opció* esetében pedig ez az esemény akkor következik be, ha az alaptermék árfolyama alacsonyabb egy lehívási árfolyamnál. Teljes piacon tehát az egyváltozós digitális opciók, vagyis az egyetlen eszközre kiírt opciók árai megegyeznek a kockázat-semleges valószínűség-eloszlások diszkontált értékeivel. A *2. táblázat* összegzi ezeknek a különböző eszközöknek a kifizetéseit, és mutatja, hogy milyen árfolyamot figyeltünk meg a piacon.

	Árfolyam	HH	HL	LH	LL
Digitális opció1	DC_1	1	1	0	0
Digitális opció2	DC_2	1	0	1	0
Kockázatmentes eszköz	$B(t,T)$	1	1	1	1
Kétváltozós digit. opció	X	1	0	0	0

2. táblázat. Kétváltozós digitális vételi opció kifizetései

Az S_1 és S_2 eszközökre kiírt vételi opciók árfolyamai

$$DC_1(K_1) = B(t,T)\overline{Q}_1(K_1 \mid \mathcal{F}_t) \quad \text{és} \quad DC_2(K_2) = B(t,T)\overline{Q}_2(K_2 \mid \mathcal{F}_t)\,,$$

ahol $\overline{Q}_i(u) \equiv 1 - Q_i(u)$, $i = 1,2$, a K_1 és K_2 pedig a lehívási (kötési) árfolyamokat jelöli. A megfelelő eladási digitális opciók árazása a $DP_i = B - DC_i$, $i = 1,2$ összefüggéssel történik.

Tekintsük most annak a kétváltozós digitális opciónak az esetét, amely 1 egységnyi pénzt fizet, ha mind az S_1, mind az S_2 árfolyama magasabb rendre a K_1 és K_2 lehívási árfolyamoknál. Jelölje D_{HH} ezt a digitális opciót, amelyet olyan kopula függvény segítségével írhatunk fel, amelynek változói az egyváltozós digitális opciók forward értékei:

$$D_{HH}(K_1, K_2) = B(t,T)C_{HH}\left(\frac{DC_1}{B(t,T)}, \frac{DC_2}{B(t,T)}\right),$$

ahol $C_{HH}(u,v)$ az ún. *továbbélési kopula.* Miután a kopula függvényt megválasztottuk, a többi digitális opció ugyanazokkal a lehívási árfolyamokkal arbitrázs alkalmazásával meghatározható. Például a D_{HL} digitális opció, amely 1 egységnyi pénzt fizet, ha $S_1 > K_1$ és $S_2 \leq K_2$, a következő összefüggéssel határozható meg:

$$\begin{aligned} D_{HL}(K_1, K_2) &= DC_1 - D_{HH}(K_1, K_2) = \\ &= DC_1 - B(t,T)C_{HH}\left(\frac{DC_1}{B}, \frac{DC_2}{B}\right). \end{aligned}$$

A kopulákkal foglalkozó szakkönyvekben megtalálható annak bizonyítása, hogy ha $C_{HH}(u,v)$ kopula függvény, akkor $C_{HL}(u, 1-v) = u - C_{HH}(u,v)$ szintén kopula függvény, amely annak valószínűségét mutatja, hogy az első (egyenletes eloszlású) marginális nagyobb értéket vesz fel u-nál, a második pedig alacsonyabbat v-nél.[5]

A D_{HL} digitális opció árfolyama a következőképpen adható meg:

$$\begin{aligned} D_{HL}(K_1, K_2) &= B(t,T)\left[\frac{DC_1(K_1)}{B(t,T)} - C_{HH}\left(\frac{DC_1(K_1)}{B(t,T)}, \frac{DC_2(K_2)}{B(t,T)}\right)\right] = \\ &= B(t,T)C_{HL}\left(\frac{DC_1(K_1)}{B(t,T)}, \frac{DP_2(K_2)}{B(t,T)}\right), \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk a $DP_2 = B(t,T) - DC_2$ összefüggést. Ugyanilyen megfontolással nyerhetjük a

$$\begin{aligned} D_{LH}(K_1, K_2) &= DC_2(K_2) - D_{HH}(K_1, K_2) = \\ &= B(t,T)C_{LH}\left(\frac{DP_1(K_1)}{B}, \frac{DC_2(K_2)}{B}\right), \end{aligned}$$

relációt, ahol felhasználtuk, hogy a $C_{LH}(1-u, v) = v - C_{HH}(u,v)$ kopula annak együttes valószínűségét adja meg, hogy az első marginális u-nál alacsonyabb értékű, a második marginális értéke pedig magasabb v-nél. Végül a *kétváltozós digitális eladási opció*, amely akkor fizet 1 egységnyit, ha $(S_1 < K_1) \cap (S_2 < K_2)$ következik be, az alábbiak szerint jellemezhető:

$$\begin{aligned} D_{LL}(K_1, K_2) &= B(t,T) - D_{HL}(K_1, K_2) - D_{LH}(K_1, K_2) - D_{HH}(K_1, K_2) = \\ &= B(t,T) - DC_1(K_1) - DC_2(K_2) + D_{HH}(K_1, K_2). \end{aligned}$$

Felhasználva itt is, hogy $C_{LL}(1-u, 1-v) = 1 - u - v + C_{HH}(u,v)$ szintén kopula függvény, a következőt kapjuk:

[5] Az érdeklődő Olvasó megtalálhatja pl. a következő helyen: Cherubini, U., Luciano, E. és Vecchiato W. (2004). Copula Methods in Finance, John Wiley & Sons, New York.

$$D_{LL}(K_1, K_2) =$$
$$= B(t,T)\left[1 - \frac{DC_1(K_1)}{B(t,T)} - \frac{DC_2(K_2)}{B(t,T)} + C_{HH}\left(\frac{DC_1(K_1)}{B(t,T)}, \frac{DC_2(K_2)}{B(t,T)}\right)\right] =$$
$$= B(t,T)C_{LL}\left(\frac{DP_1(K_1)}{B(t,T)}, \frac{DP_2(K_2)}{B(t,T)}\right) .$$

A kétváltozós digitális opciókra levezetett összefüggések azt bizonyítják, hogy ugyanúgy, mint az egyváltozós esetben, azok a digitális opciók, amelyek 1 egységnyit fizetnek egy bizonyos esemény bekövetkezésekor, kapcsolatban állnak azokkal, amelyek a komplementer esemény bekövetkezésekor fizetnek, és ez arbitrázsmentességi összefüggést teremt a kopulák között. Ezek az összefüggések bizonyos alkalmazásokban különösen hasznosak lehetnek.

Ez az eredmény ez idáig azt állítja, hogy az a követelmény, amely szerint *a kétváltozós árazási kernel kopula függvény legyen szükséges, de nem elégséges feltétel.* Ezenkívül figyelembe kell venni, hogy a C_{HH}, C_{HL}, C_{LH} és C_{LL} kopulák alakja általában különböző. Az, hogy ez csak általában igaz, könnyen bizonyítható a $C_{HH}(u,v) = uv$ szorzat (másképpen függetlenségi) kopula egyszerű elemzésével.

Ha a kétváltozós árazási kernelt kopula függvény reprezentálja, akkor ez lehetővé teszi számunkra az alaptermékek függőségi struktúrájának specifikálását és a kétváltozós feltételes követelés árfolyamára gyakorolt hatásának kalibrálását. A legegyszerűbb esetben, a kétváltozós digitális opció esetében a következőt kapjuk:

$$B(t,T)C^{-}\left(\frac{DC_1(K_1)}{B(t,T)}, \frac{DC_2(K_2)}{B(t,T)}\right) \le D_{HH}(K_1, K_2) \le$$
$$\le B(t,T)C^{+}\left(\frac{DC_1(K_1)}{B(t,T)}, \frac{DC_2(K_2)}{B(t,T)}\right) ,$$

C^{-} és C^{+} rendre a tökéletes negatív, illetve tökéletes pozitív függőséghez tartozó Fréchet-Höffding korlátokat (minimum és maximum kopulákat) jelöli.[6] Ezekkel a korlátokkal

$$\max(DC_1(K_1) + DC_2(K_2) - B(t,T), 0) \le D_{HH}(K_1, K_2) \le$$
$$\le \min(DC_1(K_1), DC_2(K_2)) .$$

Ez az összefüggés azt mutatja, hogy a kétváltozós vételi digitális opció a maximális értékét a tökéletes pozitív függőség esetében éri el, amely maximum ebben az esetben megegyezik az egyváltozós digitális opció árfolyamok közül a kisebbikkel. Visszatérve az arbitrázzsal kapcsolatos érveléshez, beláthatjuk, hogy ha egy ilyen opció maximum, vagyis $D_{HH} = \min(DC_1, DC_2)$, akkor a D_{HL} digitális opció árfolyama, vagyis annak az opciónak az árfolyama,

[6] A minimum (C^{-}) és maximum (C^{+}) kopula definíciója: $C^{-}(u,v) = \max(u+v-1, 0)$, $C^{+}(u,v) = \min(u,v)$.

amely akkor fizet, ha $(S_1 \geq K_1) \cap (S_2 < K_2)$ következik be, minimális: $D_{HL} = \max(DC_1 + DP_2 - 1, 0)$. Ugyanilyen egyszerű válasz adható annak a kétváltozós eladási digitális opciónak az esetére, amelyik akkor fizet 1 egységnyit, ha $(S_1 < K_1) \cap (S_2 < K_2)$ következik be.

Becslési módszerek

A kopula alapú többváltozós eloszlások becslése a θ kopula paraméterek és az F_i, $i = 1, \ldots, n$ marginális eloszlásfüggvények becslését jelenti. A kopula paraméterek becslőfüggvényeinek tulajdonságai, valamint minősége erősen függ a marginális eloszlásfüggvények becslőfüggvényeitől. A marginálisok specifikálása lehet paraméteres és nem-paraméteres. Ha csak a függőségi struktúra megismerésében vagyunk érdekeltek, akkor a θ becslése független lehet a marginálisok paraméteres modelljeitől. A gyakorlati alkalmazásokban azonban a teljes eloszlás modellt kell ismernünk, ezért előnyben részesítik a marginálisok paraméteres modelljeit. (Részletesebben megtalálható: Joe (1997)). A kétváltozós esetben az egydimenziós θ paraméter becslésének standard módszere a Kendall-τ-statisztikán alapul. (Genest és Rivest (1993).) A momentumok módszerével kiegészített τ becslőfüggvényével történik a paraméterek becslése. Genest és szerzőtársai (1995) azonban megmutatták, hogy a maximum-likelihood módszer lényegesen hatékonyabb és általánosabb becslőfüggvényekhez vezet. Igen fontos előnye a maximum-likelihood módszernek, hogy egyidejűleg végrehajtható a marginálisok és a kopula függvény paramétereinek becslése. A nem paraméteresen becsült marginálisokra Genest és szerzőtársai (1995) bizonyították az ML becslőfüggvények konzisztenciáját és aszimptotikus normalitását, valamint meghatározták az aszimptotikus eloszlások momentumait.

Alternatív megoldásként kétlépcsős eljárás alkalmazható. Az első lépcsőben a marginálisok paramétereit, a másodikban pedig a kopula paramétereket becsüljük. (Ld. Joe (1997), Joe (2005). A nem paraméteresen becsült marginálisok esetét Chen, Fan és Patton (2004) valamint Chen, Fan és Tsyrennikov (2006) vizsgálta.

Illeszkedési próbák

Az illeszkedési próbákkal azt ellenőrizzük, hogy a tekintett kopula megegyezik-e valamely cél kopula függvénnyel, vagy hogy tartozik-e valamely kopula családhoz. Ez a feladat összetett vagy egyszerű null-hipotézisként fogalmazható meg:

$$H_0 : C \in \mathcal{C}_0 \quad \text{v.s.} \quad H_1 : C \notin \mathcal{C}_0 \,,$$

$$H_0 : C = C_0 \quad \text{v.s.} \quad H_1 : C \neq C_0 \,,$$

ahol $\mathcal{C}_0$ valamely ismert paraméteres kopula család, C_0 ismert cél kopula és C a vizsgált valódi kopula. A próba általánosságban megegyezik a többváltozós eloszlásokra alkalmazott illeszkedés jósága (GOF) típusú próbákkal. Mivel azonban a marginálisok becsült függvények, a próba eljárások nem alkalmazhatók közvetlenül.

A szakirodalomban különféle próbákat találunk kopula illeszkedés vizsgálatra. A standard χ^2-próba egyszerű általánosításaként adoptált χ^2-próbát javasol Fermanian (2005), amely közvetlenül a C és C_0 közötti távolságon alapul. Genest és Rivest (1993) a kétváltozós esetre a $Z = C_0(X, Y)$ pszeudo változó empirikus és valódi eloszlásaira alapozza a próbát, mértékként L_2 normát alkalmazva. Ezt a megközelítési módszert terjesztik ki a többváltozós esetre és más távolság mértékekre többek között Barbe és szerzőtársai (1996), Wang és Wells (2000), Quessy és Rémillard (2006). Wang és Wells (2000)

$$S_{n\xi} = \int_{\xi}^{1} [K_n(w) - K(w)]^2 \, dw \,, \quad \xi \in (0,1)$$

alakú Cramer-von-Mises statisztikát javasol, ahol $K_n(w)$ és $K(w)$ empirikus, illetve elméleti K eloszlásokat jelölnek. Ehhez a statisztikához azonban pontos p-értékeket nem lehetséges explicit módon kiszámítani.

Egy alternatív megközelítés a valószínűségi integrál transzformáción alapul, amelyet Rosenblatt (1952) vezetett be, majd később Breyman, Dias és Embrechts (2003), valamint Chen és szerzőtársai (2004) alkalmazták. A transzformáció alapja az

$$\begin{aligned} Y_1 &= F_1(X_1)\,, \\ Y_j &= C_0\left\{F_j(X_j) \mid F_1(X_1), \ldots, F_{j-1}(X_{j-1})\right\} \quad j = 2, \ldots, n\,, \end{aligned}$$

változók konstruálása, ahol a feltételes kopula

$$C_0(u_j \mid u_1, \ldots, u_{j-1}) = \frac{\frac{\partial^{j-1}}{\partial u_1 \ldots \partial u_{j-1}} C_0(u_1, \ldots, u_j, 1, \ldots, 1)}{\frac{\partial^{j-1}}{\partial u_1 \ldots \partial u_{j-1}} C_0(u_1, \ldots, u_{j-1}, 1, \ldots, 1)}\,.$$

A H_0 hipotézis szerint az Y_i, $i = 1, \ldots, m$ változók függetlenek és egyenletes eloszlásúak a $[0,1]$ intervallumon. Mivel az Y_i változók közvetlenül nem megfigyelhetők, kiszámítjuk az $\hat{Y}_{ji}$ pszeudo változókat a következőképpen:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{1i} &= \hat{F}_1(X_{1i})\,, \\ \hat{Y}_{ji} &= C\{F_j(X_{ji} \mid F_1(X_{1i}), \ldots, F_{j-1}(X_{j-1,i})\}\,, \quad j = 2, \ldots, n, \quad i = 1, \ldots, m\,. \end{aligned}$$

Chen és szerzőtársai (2004) két próbát is javasolnak az $\hat{Y}_{ji}$ pszeudo változókra alapozva. Itt csak azt a próbát említjük, amely a

$$W = \sum_{j=1}^{n} [\Phi^{-1}(Y_j)]^2$$

változót alkalmazza. Megmutatható, hogy a H_0 hipotézis mellett teljesül $W \sim \chi^2_n$. Az Y_j változóhoz hasonlóan W sem megfigyelhető, ezért az ún. pszeudo változóját számítjuk ki a $\hat{W}_i = \sum_{j=1}^{n} [\Phi^{-1}(Y_{ji})]^2$ összefüggéssel.

Breymann et al. (2003) azt feltételezik, hogy a marginálisok és a kopula paraméterek becslése nem befolyásolja szignifikánsan a W_i eloszlását és χ^2 próbát alkalmaznak közvetlenül a pszeudo megfigyelésekre. A fentieken kívül a szakirodalomban még számos más módszer leírása megtalálható.

Az utóbbi évtizedekben a pénzügyben három területen következett be jelentős változás. Az első az eszköz hozamok normálistól eltérő eloszlása, amely az eszköz árazás területén a feltételes követelések értékelése standard megközelítésének, a Black-Scholes modellnek az érvényét kérdőjelezte meg. A második a nem teljes piacok kérdése, amely olyan új dimenziót nyitott az eszköz árazás területén, mint a megfelelő árazási kernel megválasztása mind az eszköz árazás, mind pedig a kockázat menedzsment területén. A harmadik terület a hitel kockázat, amely óriási fejlődésen ment keresztül az eszköz árazásban mind a termékeket, mind pedig az alkalmazott módszereket illetően. A legfőbb tényező, amely a kopula módszereknek a pénzügy számára történő felfedezését előidézte, a pénzpiaci termékek hozamrátája sztochasztikus dinamikájának standard feltételezése volt. Az 1987-es összeomlásig ezeknek a hozamoknak az eloszlására a normális eloszlás volt az általánosan elfogadott. Ezen a feltételezésen, mint alappilléren nyugszik jórészt a modern pénzügy elmélet. Ez az eloszlás feltételezés a kockázatmenedzsmentben a kockázat mérés standard parametrikus megközelítéséhez vezetett, amelyet 1994-től J. P. Morgan a Risk Metrics égisze alatt terjesztett el, és máig alkalmazzák sok pénzintézetben.

A kopula módszerek, amelyek lehetővé teszik a többdimenziós eloszlások függőségi struktúrájának és a marginális eloszlásoknak a szétválasztását, lehetővé teszik a pénzügyi piacokon megfigyelt adatokhoz jól illeszkedő modellek választását és becslését, legalább részleges megoldást kínálva az említett problémákra. Szándékaim szerint ez a rövid tanulmány azt is üzeni, hogy a kopula módszer alkalmazása még az egyszerű esetekben is kellő körültekintést igényel. Ellenkező esetben az a helyzet állhat elő, mint a normális eloszlással kapcsolatban, hogy tudniillik nem csupán a leggyakrabban alkalmazott, hanem a leggyakrabban tévesen alkalmazott eszköz lesz.

Irodalom

1. Barbe, P., Genest, C., Ghoudi, K. és Rémillard, B. (1996). On Kendall's process, *J. Multivariate Anal.* 58: 157–229.
2. Baxter, M., és Rennie, A. (2002). *Pénzügyi kalkulus, Bevezetés a származtatott termékek árazásába*, Typotex Kiadó, Budapest.
3. Benedek, G., Kóbor, Á. és Pataki A. (2002). A kapcsolatszorosság mérése m-dimenziós kopulákkal és értékpapír portfólió alkalmazások, *Közgazdasági Szemle*, XLIX. évf. 2002. február, 105–125.
4. Breyman, W., Dias, A. és Embrechts, P. (2003). Dependence structures for multivariate high-frequency data in finance, *Quant. Finance*, 1:1–14.
5. Cherubini, U., Luciano, E. és Vecchiato W. (2004). *Copula Methods in Finance*, John Wiley & Sons, New York
6. Chen, X., Fan, Y. és Patton, A. (2004). Simple tests for models of dependence between multiple financial time series, with applications to U.S. equity

returns and exchange rates, *Discussion paper 483*, Financial Markes Group, London School of Economics.

7. Chan, X., Fan, Y. és Tsyrennikov, V. (2006). Efficient estimation of semiparametric multivariate copula models, *J. Amer. Statist. Assoc.* 101 (475): 1228–40.
8. Fermanian, J.-D. (2005). Goodness-of-fit tests for copulas, *J. Multivariate Anal.* 95. (1): 119–152.
9. Genest, C. és Rivest, L.-P. (1993) Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas, *J. Amer. Statist.Assoc.* 88: 1034–43.
10. Genest, C., Ghoudi, K. és Rivest, L.-P. (1995). A semi-parametric estimation precedure of dependence parameters in multivariate families of distributions, *Biometrika* 82: 543–552.
11. Joe, H. (1997) *Multivariate Models and Dependence Concepts.* Chapman & Hall, London.
12. Joe, H. (2005). Asymptotic efficiency of the two-stage estimation method for copula-based models, *J. Multivariate Anal.* 95 (1): 119–152.
13. Kendall, M. (1970). *Rank Correlation Methods*, Griffin, London.
14. Medvegyev, P. (2002). A pénzügyi eszközök árazásának alaptétele diszkrét idejű modellekben, *Közgazdasági Szemle*, XLIX. évf. július-augusztus, 597–620.
15. Rosenblatt, M. (1952). Remarks on a multivariate transformation, *Ann. Math. Statist.* 23: 470–472.
16. Schmid, F. and Schmidt, R. (2006a). Bootstrapping Spearman's multivariate rho, in A. Rizzi and M.Vichi (eds) *COMPSTAT, Preceedings in Computational Statistics*, 759–766.
17. Schmid, F. and Schmidt, R. (2006b). Multivariate extensions of Spearman's rho and related statistics, *Statist. Probab. Letters* 77 (4): 407–416.
18. Száz, J. (2003) *Kötvények és opciók árazása*, Gazdálkodástani Doktori Program PTE KTK.
19. Varga, J., Kopulák alkalmazása a pénzügyi kockázatmenedzsmentben – Matematikai alapok, *Szigma*, XXXV. évf. 3-4. sz., 91–106.
20. Varga, J. és Lukács P., Valószínűség-eloszlások szélfüggősége, tőzsdeindex portfólió szélsőséges veszteségeinek elemzése kopula alkalmazásával, *Szigma*, XXXVI. évf. 1-2. sz. 77–91.
21. Wang, W. and Wells, M. (2000). Model selection and semi-parametric inference for bivariate failure-time data, *J. Amer. Statist. Assoc.* 95: 62–76.
22. Wolff, E. (1980) *N*-dimensional measures of dependence, *Stochastica* 4(3): 175–188.

PRICING OF CONTINGENT CLAIMS ON COMPLETE MARKETS

The modelling of multivariate distributions is one of the most critical issues in financial applications. The distributions are usually restricted to the class of multivariate elliptical distributions limiting the analysis to a narrow class of distributions and requires the estimation of a large number of parameters. Further problems arise from

the fact that extreme values occur simultaneously exhibiting strong negative movements on financial markets and the observed non-symmetric dependency structure cannot be modelled by elliptical distribution. The assumption of Gaussian distribution is therefore rarely consistent with the empirical evidence and possibly leads to incorrect inference from financial and economic models. The copula-based approach proposed in this article has several important advantages. It allows a simple construction of distributions with less parameters than imposed by elliptical models, significantly widens the class of candidate distributions, and the copula-based models reflect the real-world relationships on financial markets better. It is also shown that even in the very simple bivariate digital options cases and on complete markets, it is not a simple task to use the method appropriately.