

TERMELÉSI ÉS SZOLGÁLTATÁSI FOLYAMATOK FELFUTÁSÁNAK MODELLEZÉSE¹

JÓNÁS TAMÁS – TÓTH ZSUZSANNA ESZTER
BME GTK

Vállalati folyamatokat vizsgálva arra kívánunk kísérletet tenni, hogy termelési és szolgáltatási folyamatok aggregált minőségi és megbízhatósági jellemzőinek változását a folyamatok felfutási időszakában modellezzük. A leszűkített, lineárisra visszavezetett logisztikus regressziós modell alkalmazása megteremti annak lehetőségét, hogy a technológia és a termelési kultúra termelési és szolgáltatási folyamatok felfutásában betöltött szerepét számszerűsítsük. Megközelítésünk lehetőséget nyújt a térben, illetve időben elkülönülő felfutási görbék kvantitatív összehasonlítására.

Kulcsszavak: aggregált megbízhatósági és minőségi mutatók, logisztikus értékelés, szigmoid függvény, lineáris regresszió, tanulási görbe

1 Bevezetés

A tanulási görbét a szakirodalomban először Wright (1936) említi: a legyártott termékek számának a megduplázódásával az egyes darabok előállítására fordított idő egyenletesen csökken. A tanulási görbe tulajdonképpen matematikai kapcsolatot teremt valamely teljesítmény mérőszám (így pl. költség, minőség, ciklusidő) és a vállalat adott termék előállításához vagy adott szolgáltatás nyújtásához kapcsolódó tapasztalata között. A háború utáni időszakban a tanulási folyamattal kapcsolatos kutatások az egyes darabok előállítására fordított közvetlen munkaóra helyett az egy darabra jutó költségeket vagy árat vették alapul.

A legtöbb tanulási folyamattal kapcsolatos kutatás középpontjában az aggregált tanulási hatás meghatározása áll. Wright (1936) a kumulált outputot, Arrow (1962) és Sheshinski (1967) pedig a kumulált befektetéseket veszi alapul a tanulási hatás vizsgálatakor. Alchian (1959) és Hirschleifer (1962) különbséget tesz a kibocsátás sebessége, valamint a kibocsátás tervezett volumene között. Cooper és Charnes (1954), Rapping (1965), Sheshinski (1967), Fellner (1969), Stobaugh és Townsend (1975) a kumulált kibocsátás alternatívájaként vagy kiegészítőjeként az idővel foglalkoznak. A tanulási görbe gyakorlatban megvalósuló alakjával foglalkozó kutatások közül némelyek a lapos szakaszok létezését (Carr, 1946; Conway és Schultz, 1959; Baloff, 1966, 1971), mások az ún. Stanford-B hatást (Garg és Milliman, 1961), vagy a harmadfokú alakot (Carlson, 1973) vizsgálták. Az említett modellezési problémák azonban nem szorítják háttérbe azt az alapvető ténytet,

¹Beérkezett: 2010. február 9. E-mail: tothzs@mvt.bme.hu.

hogy az egyes üzemekben a tanulási ráták meglehetősen különbözőek lehetnek még akkor is, ha a termékek és a mérések hasonlóak (Alchian, 1959).

Számos tanulmány foglalkozik a berendezések cseréjének hatásával (pl. Arrow, 1962, Sheshinski, 1967), Hollander (1965) a nagyobb és kisebb jelentőségű technológiai változások szerepét kutatja, és néhány tanulmány az indirekt és direkt munkaerő tanulásra gyakorolt hatásait szemlélteti tőkeintenzív esetekben (pl. Andress, 1954, Hirshmann 1964). Conway és Schultz (1959) a tanulásra hatással lévő, a termelést megelőző műveleti fázisokban és a termelési folyamatokban szerepet játszó tényezőket veszi számba. Baloff (1970) olyan eseteket mutat be, ahol a technikai támogatás vagy a munkaerő motivációja hatással van a tanulási rátára. Hayes és Wheelwright (1984) a tényezők egy olyan csoportját gyűjtik össze, amellyel mind egyéni, mind pedig csoportos szinten ösztönözhető vagy éppen visszafogható a tanulás.

A minőségmenedzsment rendszerek és filozófiák folyamatos fejlesztésének elve a termelő és szolgáltató vállalatokat teljesítményük állandó javítására ösztönözi. E fejlődés vizsgálatára és nyomon követésére a tanulási görbe számos eszközt kínál. Zangwill és Kantor (1998) a folyamatos fejlesztés és a tanulási görbe közötti kapcsolatot ragadja meg, és egy olyan differenciálegyenletet mutatnak be, amelynek segítségével a menedzsment a különböző folyamatok eredményességét értékelni tudja és így az ipari folyamatok gyorsabb fejlesztése válik lehetővé. Megközelítésük szerint a tanulás ciklusokban megy végbe, az egyik ciklus végpontja a következő ciklus kiindulópontja, és minden egyes ciklus valamilyen „pazarlást” szüntet meg a termelési rendszerben, amely lehet hibás termék, a kihozatal csökkenése, elvesztegetett idő, a termelés lassulása vagy a készletek felhalmozása. Amikor egy vállalkozás egy új termékkel vagy szolgáltatással jelenik meg a piacon, szinte természetes a kísértés az eladási kapacitás mielőbbi felfuttatására, hiszen ez szükséges feltétele annak, hogy a vállalkozás gyorsan új vevőket hódítson meg (Leslie és Holloway, 2006; Zoltners et al., 2006). A tanulási görbe „bejárásának” sebessége stratégiai versenyelőnyt befolyásoló tényező, ráadásul a tanulás révén előálló versenyelőny belépési korlátot is jelenthet egy adott piacon (Lee, 1975; Spence, 1981).

A termékek életciklusának rövidülése és a magas fejlesztési költségek arra kényszerítik a vállalatokat, hogy ne csak a piacra jutás idejét, vagyis a fejlesztési időt, hanem az optimális kapacitásra való felfutás idejét is csökkentse. Az eladási kapacitás kívánt szintjének elérése a termelési, szolgáltatási folyamatok optimális kapacitásra történő felfuttatását igényli, így a vállalkozás versenyképességének egyik meghatározó tényezője a termelési, szolgáltatási folyamatok bevezetési, felfutási sebessége. A fejlesztés befejezése és az optimális kapacitáskihasználási szint elérése között a termelési folyamat alaposabb megértése folyik. Mindez kezdetben alacsony kihozattal és alacsony termelési rátával eredményez (mivel pl. a berendezések meghibásodnak, az átállások/beállítások még lassúak, speciális műveletek, beavatkozások szükségesek, az ellenőrzés módszerei fejlesztésre szorulnak stb.). Terwiesch és Bohn (2001) új termékek termelési folyamatának felfuttatása kapcsán vizsgálja a tanulás és a folyamatfejlesztés kapcsolatát, a tanulás felgyorsításával járó

költségeket, az optimális kapacitás eléréséig bekövetkező hibás termékek költségét és a hibák bekövetkezésének valószínűségét.

Az effektív termelési vagy szolgáltatási kapacitást a folyamatok jóságát meghatározó minőségi és megbízhatósági jellemzők nagymértékben befolyásolják (Koltai, 2006), így pl. a kihozatal, a termelés sebessége vagy a „jó”, vagyis minőségileg kifogástalan outputok száma e felfutási időszak fontos mérőszáma (Terwiesch és Bohn, 2001). Bohn és Terwiesch (1999) kutatása során arra az eredményre jut, hogy új termékek gyártásának felfuttatásakor a kihozatal alakulása nagyobb hatással van a vállalat nyereségére, mint az egy termékre jutó költségek.

Kutatásunk során vállalati folyamatokat vizsgálva arra kívántunk kísérletet tenni, hogy alkalmas regressziós függvények segítségével termelési és szolgáltatási folyamatok aggregált minőségi és megbízhatósági mutatóinak a folyamatok felfutási időszakában tapasztalható változását modellezzük. Bemutatjuk a lineárisra visszavezetett, leszűkített logisztikus regressziós modell alkalmazását olyan aggregált megbízhatósági és minőségi mutatók változásának modellezésére, amelyek több mérés összesítése révén előálló mérési változóknak tekinthetők.

A lineárisra visszavezetett, leszűkített logisztikus regressziós modell alkalmazásával az esettanulmányokban példaként felhasznált aggregált minőségi és megbízhatósági mutatók változásának modellezését termékek és szolgáltatások bevezetése kapcsán kívánjuk elemezni azt feltételezve, hogy az aggregált mutató változása a folyamat javulásáról az adott technológiai és termelési kultúra által meghatározott változást, tanulási görbét szemléltet. Célunk olyan módszer kidolgozása volt, amely lehetővé teszi a technológia és a vállalati kultúra meghatározó szerepének szemléltetését és számszerűsítését, továbbá lehetőséget nyújt a tanulási görbék összehasonlítására is.

Kutatásunk a fentieknek megfelelően az alábbi hipotézisek vizsgálatára épül.

- 1. hipotézis: A leszűkített, lineárisra visszavezetett logisztikus regressziós modell alkalmazása lehetővé teszi, hogy termelési és szolgáltatási folyamatok aggregált minőségi és megbízhatósági jellemzőinek változását $R(t)$ a folyamatok felfutási időszakában modellezzük.*
- 2. hipotézis: E regressziós modell lehetővé teszi, hogy a technológia és a termelési kultúra termelési és szolgáltatási folyamatok felfutásában betöltött meghatározó szerepét számszerűsítsük.*
- 3. hipotézis: A megközelítés alkalmazásával a térben, illetve időben elkülönülő felfutási görbék kvantitatív összehasonlítása is megvalósítható.*

Cikkünk a következő tagolást követi: az analitikus háttérben (2. fejezet) bemutatjuk a logisztikus növekedés leírására alkalmazott logisztikus egyenletet és azt a függvényt, amelyet aggregált megbízhatósági és minőségi mutatók növekedésének modellezésére alkalmazni kívánunk. A 3. fejezetben a korreláció- és regressziószámítás módszereire építve tárgyaljuk a kutatásunk során alkalmazott leszűkített, lineárisra visszavezetett regressziós modellt,

majd a 4. fejezetben e regressziós modell vállalati gyakorlati alkalmazásait mutatjuk be a *minőségi kihozatal*, a *Minutes per Unit* (MPU) és az *Overall Equipment Efficiency* (OEE) mutatókon keresztül. Végül összegezzük főbb eredményeinket és felvázoljuk a további kutatási lehetőségeket.

2 Analitikus háttér

Tekintsük valamely termelési vagy szolgáltatási folyamat egy jellemző aggregált minőségi vagy megbízhatósági mutatóját, amelyet a továbbiakban jelölünk R -rel. Azt kívánjuk vizsgálni, hogy ez a mutató a termelési vagy szolgáltatási folyamat bevezetése során hogyan változik a bevezetésre fordított t idő függvényében. Hangsúlyozzuk, hogy itt a bevezetésre fordított idő alatt azt a nettó időt értjük, amely kizárólag a folyamat bevezetése érdekében végzett tevékenységek végrehajtási idejével egyenlő. Tegyük fel, hogy a vizsgált mutató javulása annak növekedését jelenti. Látni fogjuk, hogy ez a megkövetés nem megy az általánosság rovására, ugyanakkor segíti és egyszerűsíti a téma további tárgyalását. Tapasztalataink szerint a vizsgált mutató változási (növekedési) sebessége alapvetően attól függ, hogy a mutató a folyamat bevezetése során milyen szinten áll. Kezdetben, amikor a folyamattal kapcsolatos ismeretek és a műveletek végzéséhez szükséges készségek és tapasztalatok még csekélyek, a mutató változási sebessége is kismértékű és $R(t)$ értéke közel áll annak R_I kezdeti értékéhez. Amikor ezek az ismeretek, készségek és tapasztalatok elérnek egy bizonyos kritikusként mondható szintet, a vizsgált mutató változási sebessége felgyorsul. Egy idő után azonban, amikor a mutató értéke közelít ahhoz az értékhez, melyet a termelés vagy szolgáltatás technológiája, vagy valamilyen fizikai korlát meghatároz, a vizsgált mutató növekedési sebessége lelassul, majd egy adott R_T felső korláthoz közeli szinten stagnál.

2.1 Logisztikus növekedés

A fentiek alapján a mutató kicsiny $dR(t)$ változását a bevezetésre fordított idő függvényében úgy modellezhetjük, hogy $dR(t)$ arányos $R(t)$ kezdeti R_I -től és végső R_T -től mért eltéréssel. Ezt a

$$\frac{dR(t)}{dt} = \lambda_S [R(t) - R_I] [R_T - R(t)] \quad (1)$$

differenciálegyenlettel írhatjuk le, ahol $\lambda_S > 0$ az arányossági tényező. Mivel a vizsgált mutató növekedését feltételeztük, ezért $R_I \leq R(t) \leq R_T$. Az (1) differenciálegyenletet *logisztikus egyenletnek* nevezik. A logisztikus egyenletnek számos biológiai, kémiai, gazdasági és számítástudományi alkalmazása ismert. Alkalmazásának gyökerei egészen a 19. századig nyúlnak vissza, amikor Verhulst (1838) belga matematikus elsőként használta az egyenletet és segítségével populációk növekedését modellezte. Csaba (1978) az egyenlet egy biológiai alkalmazását mutatja be, Lewandowski (1974) pedig gazdasági területeken alkalmazza annak különböző változatait. Megjegyezzük, hogy a

logisztikus egyenlet segítségével konstruált, úgynevezett értékelő függvények szintén alkalmazhatók a megbízhatóság alapú menedzsmentben (Jónás és Kövesi, 2009).

Az általunk felvett (1) differenciálegyenlet a változók szétválasztása után az

$$\frac{1}{[R(t) - R_I][R(t) - R_T]} dR(t) = -\lambda_S dt \quad (2)$$

alakba írható, majd (2) bal oldalát parciális törtekre bontva az

$$\frac{1}{R_T - R_I} \left[\frac{1}{R(t) - R_T} - \frac{1}{R(t) - R_I} \right] dR(t) = -\lambda_S dt$$

egyenlethez jutunk. Az integrálás elvégzése után

$$\frac{1}{R_T - R_I} \left[\ln |R(t) - R_T| - \ln |R(t) - R_I| \right] = -\lambda_S t + C, \quad (3)$$

ahol C egy tetszés szerinti integrálási konstans. $R_I \leq R(t) \leq R_T$, így a (3) egyenletből

$$R(t) = \frac{R_T + R_I e^{(-\lambda_S t + C)(R_T - R_I)}}{1 + e^{(-\lambda_S t + C)(R_T - R_I)}}. \quad (4)$$

Ha az $R(t)$ függvénytől elvárjuk, hogy az a t_0 helyen az R_0 ($R_I < R_0 < R_T$) értéket vegye fel, akkor a (4) egyenlet és az $R(t_0) = R_0$ elvárás alapján

$$C = \lambda_S t_0 + \frac{1}{R_T - R_I} \ln \frac{R_T - R_0}{R_0 - R_I} \quad (5)$$

adódik, s a C -re kapott kifejezést $R(t)$ (4)-es alakjába írva

$$R(t) = S_{t_0, R_0, R_I, R_T}^{(\lambda_S)}(t) = R_I + (R_T - R_I) \frac{1}{1 + \frac{R_T - R_0}{R_0 - R_I} e^{-\lambda_S (t - t_0)(R_T - R_I)}}. \quad (6)$$

Az $R(t)$ függvény grafikonja egy olyan S-alakú görbe, mely aszimptotikusan simul az R_I kezdeti és R_T végső értékekhez. Az $S_{t_0, R_0, R_I, R_T}^{(\lambda_S)}(t)$ jelöléssel a függvénygörbe alakjára, paramétereire, illetve arra utalunk, hogy ez a függvény az úgynevezett szigmoid függvény lineáris transzformáltja. Az $R(t)$ függvény az

$$R(t) = S_{a, R_I, R_T}^{(\lambda_S)}(t) = R_I + (R_T - R_I) \frac{1}{1 + e^{-\lambda_S (t - a)(R_T - R_I)}} \quad (7)$$

alakban is felírható, ha

$$a = t_0 + \frac{\ln \frac{R_T - R_0}{R_0 - R_I}}{\lambda_S (R_T - R_I)},$$

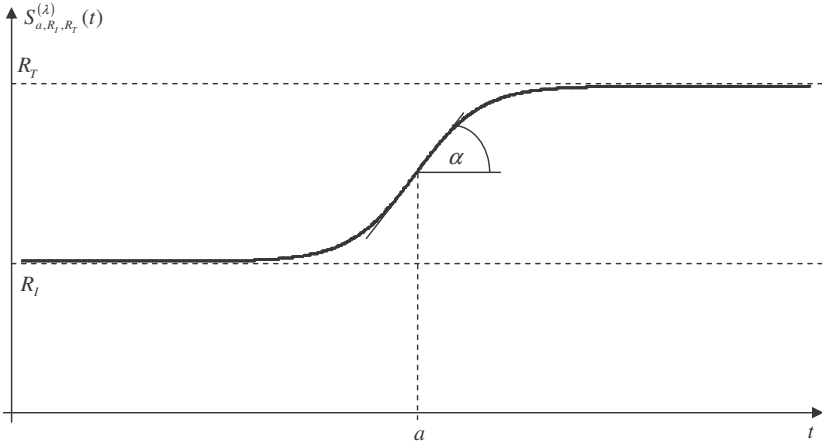
továbbá

$$R(t) = S_{a, R_I, R_T}^{(\lambda_S)}(t) = R_I + (R_T - R_I) \frac{1}{1 + e^{-\lambda (t - a)}} \quad (8)$$

ha

$$\lambda = \lambda_S(R_T - R_I) .$$

A későbbiekben az $R(t)$ függvényt az $R(t) = S_{a,R_I,R_T}^{(\lambda)}(t)$ szerinti alakban fogjuk aggregált megbízhatósági és minőségi mutatók növekedésének modellezésére alkalmazni. Az 1. ábra egy $S_{a,R_I,R_T}^{(\lambda)}(t)$ függvény grafikonját mutatja.



1. ábra. Egy $S_{a,R_I,R_T}^{(\lambda)}(t)$ függvény grafikonja

Az $S_{a,R_I,R_T}^{(\lambda)}(t)$ függvényről könnyen beláthatók a következő tulajdonságai:

- $R_I < S_{a,R_I,R_T}^{(\lambda)}(t) < R_T$ és a függvény az R_I kezdeti, illetve R_T végső értékhez tart, ha t a negatív, illetve pozitív végtelenhez tart. (A függvény negatív t -kre vonatkozó vizsgálata természetesen csak egy elméleti lehetőség, hiszen t maga időt reprezentál.)
- A függvénygörbének inflexiósi pontja van a $t = a$ helyen, és a görbe meredeksége ezen a helyen $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda}{4}(R_T - R_I)$ (1. ábra). Ez azt jelenti, hogy az a paraméter a görbe alakváltási helyét, míg λ az alakváltás meredekségét adja meg. ($\lambda \rightarrow \infty$ esetén a függvény az

$$S(t) = \begin{cases} R_I & , \text{ ha } t \leq a \\ R_T & , \text{ ha } t > a \end{cases}$$

karakterisztikus függvényhez tart.) A függvény λ paraméteréről eddig annak pozitív voltát feltételeztük. Ha $R_I > R_T$, akkor $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda}{4}(R_T - R_I)$ alapján az $S_{a,R_I,R_T}^{(\lambda)}(t)$ függvény grafikonja csökkenő S-görbét ír le, így segítségével csökkenési folyamatok is modellezhetők. Ezt az esettanulmányokról szóló részben fogjuk bemutatni.

Általánosan elmondható, hogy a fent vázolt logisztikus egyenlettel leírható növekedési folyamatok jelleggörbéi S-alakúak. Ilyen például egy technológia teljesítőképességének alakulása (Pataki, 1999), vagy a világegyetem komplexitásának változása (Modis, 2002).

$R_I = 0$ és $R_T = 1$ választása esetén az

$$S_{a,R_I,R_T}^{(\lambda)}(t) = \frac{1}{1 + e^{-\lambda(t-a)}}$$

úgynevezett *szigmoid függvényt* kapjuk.

Megjegyezzük, hogy a logisztikus függvényen túl más S-alakú görbével rendelkező függvényformák is léteznek hasonló lefutású folyamatok modellezésére. Ilyen például a Gompertz görbe (Laird, 1964) vagy az általánosított Richards-féle logisztikus függvény (Lei és Zhang, 2004).

3 Regressziós modellek

Tegyük fel, hogy rendelkezésünkre áll egy termelési vagy szolgáltatási folyamat bevezetése során egy kiválasztott R aggregált minőségi vagy megbízhatósági mutató n db R_1, R_2, \dots, R_n megfigyelt vagy mért értéke a t_1, t_2, \dots, t_n időpontokban. Ekkor általánosan elmondhatjuk, hogy a mért vagy megfigyelt $(t_i; R_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) összetartozó idő- és mutatóértékek alapján behatárolható egy olyan véges idő-, illetve mutatótartomány, mely az összes $(t_i; R_i)$ párt tartalmazza. Például, ha egy termék gyártásának bevezetése során a minőségi kihozatal heti értékeit az első tizenkét hétben vizsgáljuk, akkor az időtartomány lehet az $1, 2, \dots, 12$ sorszámú hetekből álló halmaz, míg a mutatótartomány lehet az első tizenkét hét során elért heti minimális és maximális minőségi kihozatal által meghatározott intervallum. Az eddigi jelölésekkel összhangban, az időtartomány kezdő-, illetve végpontját t_S -sel, illetve t_E -vel, míg a mutatótartomány minimum értékét R_I -vel, maximumát pedig R_T -vel jelöljük. Az R_I jelöléssel a mutató kezdeti (Initial), míg az R_T jelöléssel a mutató végső (Terminal) vagy cél (Target) értékére kívánunk utalni.

A következő fejezetekben bemutatjuk azt a korreláció- és regressziószámításra épülő modellt, amelynek segítségével a $(t_i; R_i)$ párokra az $S_{a,R_I,R_T}^{(\lambda)}(t)$ logisztikus függvény ráilleszthető, továbbá ismertetni kívánjuk a modell gyakorlati alkalmazásai során szerzett tapasztalatainkat, majd összegezzük következtetéseinket.

3.1 A logisztikus (szigmoid) modell

E modell alkalmazásának lényege abban áll, hogy a vizsgált R mutató logisztikus növekedését feltételezzük az idő függvényében, ezért a $(t_i; R_i)$ párokra az $S_{a,R_I,R_T}^{(\lambda)}(t)$ függvényt próbáljuk illeszteni, azaz azt feltételezzük, hogy

$$R(t) = S_{a,R_I,R_T}^{(\lambda)}(t) = R_I + (R_T - R_I) \frac{1}{1 + e^{-\lambda(t-a)}} \quad (9)$$

A rendelkezésre álló R_1, R_2, \dots, R_n értékekből $R_I = \min\{R_i\}$ és $R_T = \max\{R_i\}$ választása mellett az $S_{a,R_I,R_T}^{(\lambda)}(t)$ függvény R_I és R_T paraméterei

adottak, a λ és a paramétereket pedig a legkisebb négyzetek elvének megfelelően úgy kell meghatározni, hogy a

$$\sum_{i=1}^n \left[R_i - \left(R_I + (R_T - R_I) \frac{1}{1 + e^{-\lambda(t_i - a)}} \right) \right]^2 \quad (10)$$

négyzetösszeg minimális legyen.

A (9) egyenletet az

$$\frac{R(t) - R_I}{R_T - R_I} = \frac{1}{1 + e^{-\lambda(t-a)}} \quad (11)$$

alakba írva, és bevezetve az

$$y(t) = \frac{R(t) - R_I}{R_T - R_I}$$

változót az

$$y(t) = \frac{1}{1 + e^{-\lambda(t-a)}} \quad (12)$$

szigmoid függvény adódik. Az $y(t)$ függvényt a $(t_i; y_i)$ pontokra kívánjuk illeszteni, ahol

$$y_i = \frac{R_i - R_I}{R_T - R_I}.$$

Az $y(t)$ függvény λ és a paramétereit a legkisebb négyzetek módszere szerint a

$$f(\lambda, a) = \sum_{i=1}^n \left[y_i - \frac{1}{1 + e^{-\lambda(t_i - a)}} \right]^2$$

négyzetösszeg minimalizálásával határozhatjuk meg. Belátható, hogy ez akkor minimális, ha az

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\lambda, a)}{\partial \lambda} &= 0 \\ \frac{\partial f(\lambda, a)}{\partial a} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

egyenlőségek teljesülnek. A fenti egyenletrendszer megoldása adja λ , illetve a azon $\hat{\lambda}$, illetve \hat{a} becsléseit, melyek mellett az $y(t)$ függvény a legkisebb négyzetek elvének értelmében a legjobban illeszkedik a $(t_i; y_i)$ ponthalmazra. A parciális deriválásokat elvégezve a (13) normálegyenletek:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\lambda, a)}{\partial \lambda} &= \sum_{i=1}^n e^{-\lambda(t_i - a)} (t_i - a) \left[\frac{1}{1 + e^{-\lambda(t_i - a)}} \right]^2 \left[\frac{1}{1 + e^{-\lambda(t_i - a)}} - y_i \right] = 0 \\ \frac{\partial f(\lambda, a)}{\partial a} &= \sum_{i=1}^n -\lambda e^{-\lambda(t_i - a)} \left[\frac{1}{1 + e^{-\lambda(t_i - a)}} \right]^2 \left[\frac{1}{1 + e^{-\lambda(t_i - a)}} - y_i \right] = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Sajnos a (14) egyenletrendszer az ismeretlenekben nem lineáris, ezért megoldása meglehetősen nehéz. McCullagh és Nelder (1989) egy iteratív, a súlyozott legkisebb négyzetek elvére épülő eljárást mutat be az egyenletrendszer megoldására.

3.2 A logisztikus regresszió visszavezetése lineáris regresszióra

A (12) függvény paraméterei úgy is meghatározhatók, hogy a függvényt először egy alkalmas transzformációval lineáris függvénné transzformáljuk, majd a transzformációval kapott új paraméterek becsléseit a lineáris regresszió jól ismert módszerével határozzuk meg. Ezt követően a λ és a paraméterek becslései már könnyen megadhatók. Látni fogjuk, hogy ez a módszer csak bizonyos korlátokkal alkalmazható, de mivel e korlátok a gyakorlati alkalmazás szempontjából nem jelentenek lényeges megkötéseket, illetve a lineáris regresszióra visszavezetett módszer jóval egyszerűbb, mint a (14) normálegyenletek megoldása, ezért a következőkben e módszer alkalmazását mutatjuk be. Mivel $R_I \leq R(t) \leq R_T$, így a (3) egyenletből

$$\frac{R_T - R_I}{R(t) - R_I} = 1 + e^{-\lambda(t-a)},$$

majd rendezés után

$$\frac{R_T - R(t)}{R(t) - R_I} = e^{-\lambda(t-a)},$$

adódik. $R(t) < R_T$, így ez utóbbi egyenlet mindkét oldalának természetes alapú logaritmusát véve az

$$\ln \frac{R_T - R(t)}{R(t) - R_I} = -\lambda t + \lambda a$$

egyenlet adódik, mely az

$$Y(t) = \ln \frac{R_T - R(t)}{R(t) - R_I}, \quad \beta_1 = -\lambda, \quad \beta_0 = \lambda a$$

helyettesítések alkalmazásával az

$$Y(t) = \beta_1 t + \beta_0 \tag{15}$$

lineáris függvényt eredményezi. Ez azt jelenti, hogy ha feltételezhető, hogy a $(t_i; R_i)$ pontokra egy $S_{a, R_I, R_T}^{(\lambda)}(t)$ logisztikus függvény illeszkedik, akkor a $(t_i; Q_i)$ transzformált pontokra a (15) lineáris függvény illeszkedik, ahol Q_i a

$$Q_i = \ln \frac{R_T - R_i}{R_i - R_I} \tag{16}$$

transzformáció eredménye minden olyan $(t_i; R_i)$ pontra, melyre $R_i \neq R_I$ és $R_i \neq R_T$.

E módszer előnye abban áll, hogy a (15) lineáris függvény β_0 és β_1 paramétereinek becslései a lineáris regresszió jól ismert módszerével könnyen megadhatók. Ugyanakkor, mivel R_I -t, illetve R_T -t a szóban forgó mutató mért vagy megfigyelt minimum, illetve maximum értékeinek választottuk, —azaz $R_I = \min\{R_i\}$ és $R_T = \max\{R_i\}$ — ezért a (16) transzformáció

nem alkalmazható azokra a $(t_i; R_i)$ pontokra, amelyekre $R_i = \min\{R_i\}$ vagy $R_i = \max\{R_i\}$. Éppen ezért a lineáris regressziót az $m < n$ elemű

$$S^* = \{(t_i; R_i) \mid R_i \neq R_I, R_i \neq R_T\} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

leszűkített halmazból transzformált

$$S^{(T)} = \{(t_i; Q_i) \mid Q_i = \ln \frac{R_T - R_i}{R_i - R_I}, R_i \neq R_I, R_i \neq R_T\} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

halmazára fogjuk alkalmazni. Ezt a módszert *lineárisra visszavezetett, leszűkített logisztikus regresszió*nak nevezzük, és az $Y(t)$ függvény β_0 , illetve β_1 együtthatóinak $\hat{\beta}_0$, illetve $\hat{\beta}_1$ becsléseit az $S^{(T)}$ halmaz, mint minta alapján határozzuk meg. A továbbiakban jelölje I_S az S halmaz, I_{S^*} az S^* , míg $I_{S^{(T)}}$ a transzformált $S^{(T)}$ halmaz elemeinek indexhalmazát (S^* és $S^{(T)}$ konstrukciója miatt $I_{S^*} = I_{S^{(T)}}$). Ekkor

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i \in I_{S^{(T)}}} d_{t_i} d_{Q_i}}{\sum_{i \in I_{S^{(T)}}} d_{t_i}^2} \quad (17)$$

és

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Q} - \hat{\beta}_1 \bar{t} \quad (18)$$

ahol d_{t_i} , d_{Q_i} , \bar{Q} és \bar{t} a

$$d_{t_i} = t_i - \bar{t}, \quad d_{Q_i} = Q_i - \bar{Q}, \quad \bar{t} = \frac{1}{m} \sum_{i \in I_{S^{(T)}}} t_i, \quad \bar{Q} = \frac{1}{m} \sum_{i \in I_{S^{(T)}}} Q_i$$

összefüggésekkel számíthatók (Hunyadi és Vita, 2004). $\hat{\beta}_0$ és $\hat{\beta}_1$ ismeretében pedig a λ és a paraméterek becslései

$$\hat{\lambda} = -\hat{\beta}_1 \quad (19)$$

$$\hat{a} = \frac{\hat{\beta}_0}{\hat{\lambda}} = -\frac{\hat{\beta}_0}{\hat{\beta}_1} \quad (20)$$

Vizsgáljuk meg részletesebben, hogy mit is jelent az, hogy a logisztikus regressziós modell paramétereit az S halmaz elemei helyett az $S^{(T)}$ halmaz elemei alapján kellett becsülnünk.

Ha az S halmazban lévő pontokra egy logisztikus függvény jól illeszkedik, akkor mivel a függvény a vizsgált időtartomány elején, illetve végén az R_I , illetve R_T értékekhez simul, így a leszűkített S^* halmazból csak kevés, jellemzően az eredeti $(t_1; R_1)$, $(t_2; R_2)$, \dots , $(t_n; R_n)$ adatsorozat első egy-két, és utolsó egy-két nem transzformálható eleme marad ki, ezért S^* számoossága lényegesen nem kisebb, mint S számoossága. Másrésről, a kimaradó első egy-két, illetve utolsó egy-két elem az, amelynek ordinátája R_I -vel, illetve R_T -vel egyenlő. Mivel a függvény pontosan ezekhez az értékekhez simul a vizsgált időtartomány elején, illetve végén, ezért az S^* halmazból transzformált $S^{(T)}$

halmaz alapján —a lineáris regresszió segítségével— meghatározott logisztikus regressziós függvény helyettesítési értékei a kimaradó t_i helyeken jó közelítéssel az R_I , illetve R_T értéket veszik fel aszerint, hogy i az adatsor elején, illetve végén helyezkedik el.

Annak ellenőrzésére, hogy a kapott regressziós függvény mind az S^* , mind az S halmaz elemeihez jól illeszkedik, azt ajánljuk, hogy az illeszkedés jóságát jellemző korrelációs indexet mind az S^* , mind pedig az S halmaz elemei alapján számítsuk ki. Ha \hat{R}_i jelöli a regressziós függvény helyettesítési értékét a t_i helyen, azaz

$$\hat{R}_i = R_I + (R_T - R_I) \frac{1}{1 + e^{-\lambda(t_i - \hat{a})}},$$

akkor az S és az S^* ponthalmazok alapján számított r_S és r_{S^*} korrelációs indexek Balogh et al. (1980) alapján rendre a következők:

$$r_S = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i \in I_S} (R_i - \hat{R}_i)^2}{\sum_{i \in I_S} (R_i - \bar{R}_S)^2}} \quad (21)$$

$$r_{S^*} = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i \in I_{S^*}} (R_i - \hat{R}_i)^2}{\sum_{i \in I_{S^*}} (R_i - \bar{R}_{S^*})^2}}, \quad (22)$$

ahol \bar{R}_S , illetve \bar{R}_{S^*} az S , illetve S^* halmazokban lévő R_i mutatóértékek számtani közepe.

A $\hat{\beta}_0$ és $\hat{\beta}_1$ valamint a $\hat{\lambda}$ és \hat{a} értékeket egy $S^{(T)}$ minta alapján számítottuk, ezért ezek a becslések mintáról mintára változnak, vagyis valószínűségi változóként viselkednek. A gyakorlatban szükségünk lehet arra, hogy két különböző folyamat azonos aggregált mutatójának növekedését összehasonlítsuk. Gondoljunk például arra, hogy ugyanazon termék gyártását egy vállalat több üzemében is bevezetik. Ez esetben hasznos lehet annak vizsgálata, hogy a különböző üzemekhez tartozó felfutási görbék mennyire hasonlítanak egymásra, mennyire tekinthetők azonosnak. Erre a célra érdemes a lineáris regresszió együtthatóira vonatkozó konfidencia intervallumok ismert összefüggései alapján a transzformált függvény β_0 és β_1 együtthatóinak konfidencia intervallumait meghatározni, majd ezek segítségével összehasonlítani a felfutási görbéket. A β_0 -ra és β_1 -re vonatkozó $1 - \alpha$ megbízhatósági szintű konfidencia intervallumok a következő összefüggésekkel számíthatók (Kerékyártóné és Mundruczó, 1996):

$$P\left[\hat{\beta}_0 - t_{m-2}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\sigma_{\hat{\beta}_0} < \beta_0 < \hat{\beta}_0 + t_{m-2}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\sigma_{\hat{\beta}_0}\right] = 1 - \alpha \quad (23)$$

$$P\left[\hat{\beta}_1 - t_{m-2}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\sigma_{\hat{\beta}_1} < \beta_1 < \hat{\beta}_1 + t_{m-2}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\sigma_{\hat{\beta}_1}\right] = 1 - \alpha \quad (24)$$

ahol

$$\sigma_{\hat{\beta}_0} = \sigma_e \sqrt{\frac{\sum_{i \in I_{S(T)}} t_i^2}{m \sum_{i \in I_{S(T)}} d_{t_i}^2}}, \quad \sigma_{\hat{\beta}_1} = \sigma_e \frac{1}{\sqrt{\sum_{i \in I_{S(T)}} d_{t_i}^2}},$$

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{\sum_{i \in I_{S(T)}} (Q_i - \hat{Q}_i)^2}{m - 2}}$$

$\sigma_{\hat{\beta}_0}$ és $\sigma_{\hat{\beta}_1}$ a becslt paraméterek standard hibái, σ_e a vizsgált mutató lineáris transzformáltja szórásának becslése,

$$\hat{Q}_i = \beta_1 t_i + \beta_0$$

a linearizált regressziós függvény helyettesítési értéke a t_i helyen,

$$t_{m-2}^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)$$

pedig az $m - 2$ szabadságfokú t -eloszlás inverzének helyettesítési értéke az $1 - \alpha/2$ helyen.

$$\beta_1 = -\lambda \quad \text{és} \quad \beta_0 = \lambda a,$$

így a (24), illetve (23) konfidencia intervallumok $-\lambda$ -ra, illetve a λa szorzatra, mint valószínűségi változókra vonatkoznak. Megjegyezzük, hogy a λ -ra és az a -ra vonatkozó konfidencia intervallumok becslése szintén lehetséges, de nehezebb, mint a β -kra vonatkozó intervallumoké. A konfidencia intervallumokat alapvetően összehasonlítási célra szeretnénk használni, ehhez pedig elegendő a —könnyebben meghatározható— β -kra vonatkozó intervallumokat összevetni.

3.3 A lineárisra visszavezetett, leszűkített logisztikus regresszió módszere

Röviden összefoglaljuk a lineárisra visszavezetett, leszűkített logisztikus regresszió módszerét.

Alapfeltételezés

Az $R(t)$ aggregált minőségi vagy megbízhatósági mutató értéke a termék vagy szolgáltatás bevezetése során a bevezetésre fordított t idő függvényében az

$$R(t) = S_{a, R_I, R_T}^{(\lambda)}(t) = R_I + (R_T - R_I) \frac{1}{1 + e^{-\lambda(t-a)}}$$

alakú logisztikus függvénnyel írható le. Megjegyezzük, hogy egyik célunk éppen e feltételezés empirikus igazolása.

Bemenet

Az R aggregált minőségi vagy megbízhatósági mutatóra végzett független megfigyelések vagy mérések eredményeként adódó $S = \{ (t_1; R_1), (t_2; R_2), \dots, (t_n; R_n) \}$ rendezett párokból álló minta, melyben minden $(t_i; R_i)$ párban R_i a mutató megfigyelt vagy mért értéke a t_i időpontban.

Kimenet

Az

$$S_{a,R_I,R_T}^{(\lambda)}(t) = R_I + (R_T - R_I) \frac{1}{1 + e^{-\lambda(t-a)}}$$

függvény λ , a , R_I és R_T paramétereinek olyan becslése, amelyek mellett a függvény leginkább illeszkedik az $S = \{(t_1; R_1), (t_2; R_2), \dots, (t_n; R_n)\}$ pont-halmazra.

Módszer

1. Legyen $R_I = \min\{R_i\}$ és $R_T = \max\{R_i\}$, illetve $R_I = \max\{R_i\}$ és $R_T = \min\{R_i\}$ aszerint, hogy növekedő, illetve csökkenő trendet mutatnak az R_1, R_2, \dots, R_n értékek. Ezzel az $S_{a,R_I,R_T}^{(\lambda)}(t)$ függvény R_I és R_T paramétereit adtuk.
2. Képezzük az $R_i = R_I$ és $R_i = R_T$ mutató értékekkel rendelkező pontokat nem tartalmazó $S^* = \{(t_i; R_i) \mid R_i \neq R_I, R_i \neq R_T\}$ halmazt ($i = 1, 2, \dots, n$).
3. S^* minden $(t_i; R_i)$ elemére hajtsuk végre a $Q_i = \ln \frac{R_T - R_i}{R_i - R_I}$ transzformációt, és képezzük az $S^{(T)} = \{(t_i; Q_i)\}$ párokból álló halmazt.
4. Az $S^{(T)}$ minta alapján, lineáris regresszió segítségével határozzuk meg az $Y(t) = \beta_1 t + \beta_0$ függvény β_0 , illetve β_1 együtthatóinak $\hat{\beta}_0$, illetve $\hat{\beta}_1$ becsléseit, majd a

$$\hat{\lambda} = -\hat{\beta}_1 \quad \text{és} \quad \hat{a} = \frac{\hat{\beta}_0}{\hat{\lambda}} = -\frac{\hat{\beta}_0}{\hat{\beta}_1}$$

összefüggésekkel számítsuk ki a λ , illetve a paraméterek $\hat{\lambda}$, illetve \hat{a} becsléseit.

5. A kapott

$$S_{\hat{a},R_I,R_T}^{(\hat{\lambda})}(t) = R_I + (R_T - R_I) \frac{1}{1 + e^{-\hat{\lambda}(t-\hat{a})}}$$

függvény S , illetve S^* halmazra történő illeszkedése jóságának meghatározásához számítsuk ki a (21), illetve (22) képletek szerinti r_S , illetve r_{S^*} korrelációs indexeket.

6. Logisztikus felfutási görbék összehasonlítása céljából a (23), illetve (24) összefüggések felhasználásával határozhatjuk meg a β_0 , illetve β_1 együtthatókra vonatkozó konfidencia intervallumokat.

4 Esettanulmányok

Ebben a fejezetben vállalati gyakorlatból gyűjtött adatsorokon mutatjuk be a lineárisra visszavezetett, leszűkített logisztikus regressziós modell alkalmazását.

4.1 Minőségi kihozatal változása egy elektronikai termék gyártásának bevezetése során

Egy felületszerelési technológiával összeszerelt nyomtatott áramkör (*Printed Circuit Board Assembly* (PCBA)) tesztelése egy úgynevezett belső áramköri teszt (*In-Circuit Test* (ICT)) segítségével történt. A szóban forgó nyomtatott áramkör egy Set Top Box² termék alapját képezi, a belső áramköri teszt feladata pedig annak eldöntése, hogy a PCBA gyártási folyamata során a nyomtatott áramköri lapra szerelt elektronikai alkatrészek megfelelnek-e az előírt specifikációknak. E teszt sikeressége esetén kerül sor a PCBA késztermékbe történő beépítésére. Kutatásunk során azt vizsgáltuk, hogy a belső áramköri teszt minőségi kihozatala hogyan változott a termék gyártásának bevezetése során. Ehhez a gyártás indításától számított első 15 hét során a heti minőségi kihozatalt, azaz az

$$R = \frac{\text{ICT teszten megfelelt termékek száma}}{\text{ICT teszten átesett termékek száma}} * 100$$

mutatót tekintettük aggregált minőségi mutatónak. A termelés egy műszakban indult el, ezen első műszak minőségi kihozatalát mutatja az 1. táblázat.

Hét (t_i)	Minőségi kihozatal (%) (R_i)
1	53,12
2	54,28
3	55,13
4	58,92
5	62,27
6	66,98
7	73,89
8	84,97
9	88,23
10	89,76
11	92,05
12	94,13
13	95,19
14	95,08
15	95,21

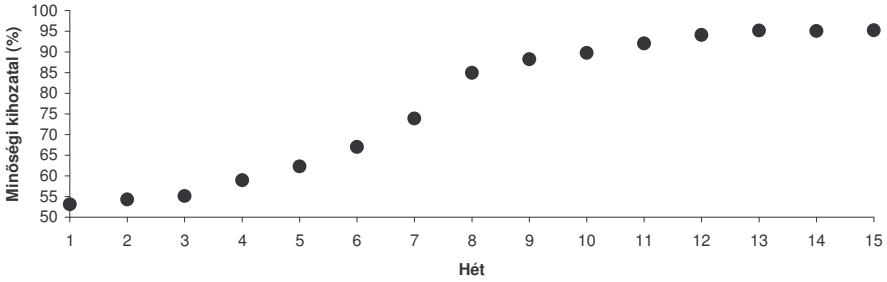
1. táblázat. A minőségi kihozatal időbeli változása

Az eddig alkalmazott jelöléseknek megfelelően az S minta az

(1; 53,12), (2; 54,28), (3; 55,13), (4; 58,92), (5; 62,27), (6; 66,98), (7; 73,89), (8; 84,97), (9; 88,23), (10; 89,76), (11; 92,05), (12; 94,13), (13; 95,19), (14; 95,08), (15; 95,21)

($t_i; R_i$) ($i = 1, 2, \dots, 15$) párokat tartalmazza (ahol azt külön nem jelezzük, ott az i index 1-től 15-ig fut). A minőségi kihozatal százalékos értékeit % jel nélkül, mint 0 és 100 közötti értékeket tekintjük. A 2. ábra a ($t_i; R_i$) pontokat mutatja egy derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolva.

²Digitális, kábeles és műholdas TV szolgáltatások dekódolására és analóg jellé alakítására szolgáló eszköz, mely lehetővé teszi e szolgáltatások hagyományos, analóg TV készüléken történő elérését.



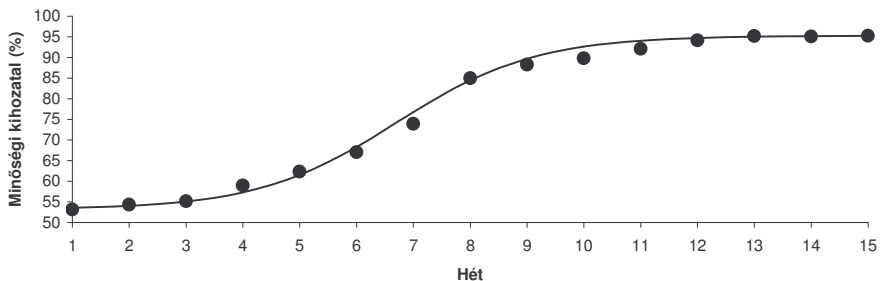
2. ábra. A minőségi kihozatal változása az idő (hetek) függvényében

A 2. ábrán látható pontfelhő S-alakú formája alapján feltételeztük, hogy a minőségi kihozatal és a termék bevezetésére fordított idő között logisztikus függvény szerinti sztochasztikus kapcsolat van. A lineárisra visszavezetett, leszűkített logisztikus regresszió alkalmazásának eredményeként előálló logisztikus regressziós függvény becsült paramétereit, a korrelációs indexek értékeit, valamint a β paraméterekre vonatkozó 95%-os megbízhatósági szintű konfidencia intervallum végpontjait a 2. táblázatban foglaltuk össze. A konfidencia intervallum bal, illetve jobb végpontjaira az L (Low), illetve H (High) indexekkel utaltunk. Alkalmazva tehát a 3.3-as fejezetben összefoglalt módszereket, az alábbi értékeket kapjuk.

Paraméter	Paraméter értéke
$\hat{\beta}_1$	-0,821
$\hat{\beta}_0$	5,505
$\hat{\lambda}$	0,821
\hat{a}	6,705
r_S	0,997
r_{S^*}	0,996
$\beta_{0,L}$	4,214
$\beta_{0,H}$	6,793
$\beta_{1,L}$	-0,966
$\beta_{1,H}$	-0,676

2. táblázat. A regressziós modell számított paramétereit

A 3. ábra a minőségi kihozatal értékek időbeli változását és az azt közelítő logisztikus regressziós függvény grafikonját mutatja.



3. ábra. Logisztikus regresszió

4.2 További két műszak indítása, műszakok összehasonlítása

A lineárisra visszavezetett, leszűkített logisztikus regresszió biztató eredményei után azt vizsgáltuk, hogy az első műszak indítása után három, illetve újabb két héttel később indított műszakokban hogyan alakult a belső áramkörü teszt minőségi kihozatala. Célunk az volt, hogy a logisztikus regresszió segítségével nyert közelítő függvények paramétereit összevevük. Mindhárom műszakban az első 15 hét eredményeit tekintettük, ezeket foglaltuk össze a 3. táblázatban.

Ha a lineárisra visszavezetett, leszűkített logisztikus regresszió ismertetett módszerét alkalmaznánk külön-külön az egyes műszakok mintáira, akkor az R_I , illetve R_T értékeket a megfelelő minta minimális, illetve maximális R_i értékének választanánk. Mivel ezek a minimumok, illetve maximumok mintáról-mintára különbözőek lehetnek, így ez azt eredményezhetné, hogy a minőségi kihozatalok időbeli változását más-más tartományban vizsgálnánk és a regressziós függvények becslt paramétereinek összehasonlítása nem lenne konzisztens. Példánkban az első műszakhoz az $R_I = 53,12$ és $R_T = 95,21$ értékeket választanánk (ahogy tettük ezt korábban is), míg a második műszak esetén az $R_I = 59,46$ és $R_T = 95,31$ értékeket alkalmaznánk, a harmadik műszak esetén pedig az $R_I = 58,32$ és $R_T = 95,38$ értékeket használnánk.

Hét	Minőségi kihozatal (%)		
	1. műszak	2. műszak	3. műszak
1	53,12	59,46	58,32
2	54,28	62,13	62,65
3	55,13	63,26	63,81
4	58,92	65,97	64,87
5	62,27	70,08	71,29
6	66,98	77,88	76,83
7	73,89	86,31	87,44
8	84,97	91,71	92,11
9	88,23	93,32	93,84
10	89,76	93,78	93,75
11	92,05	95,31	94,88
12	94,13	95,27	95,29
13	95,19	95,19	94,78
14	95,08	94,89	95,13
15	95,21	95,07	95,38

3. táblázat. A minőségi kihozatal alakulása két további műszakban

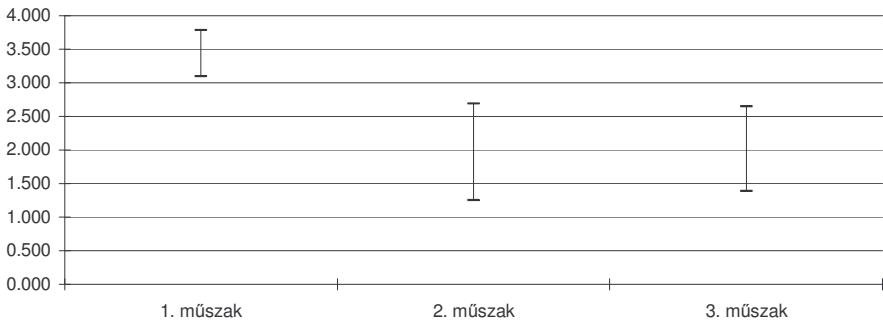
Ezért rögzítenünk kell a regressziós függvények közös R_I és R_T paramétereit és az egyes mintákra e közös értékek mellett kell alkalmaznunk az ismertetett módszereket. Az egyszerűség kedvéért, konkrét esetünkben, legyen $R_I = 50$ és $R_T = 96$. A választás lényege az, hogy az összes minta minden mutatóértéke a kiválasztott két érték közé essen. Érdemes megjegyezni, hogy ha R_I az összes minta minden mutatóértékénél kisebb és R_T az összes minta minden mutatóértékénél nagyobb, akkor az egyes műszakok adataihoz tartozó S és S^* halmazok azonosak lesznek, és így az r_S és r_{S^*} korrelációs indexek is mintánként egyenlők.

Paraméter	1. műszak	2. műszak	3. műszak
$\hat{\beta}_1$	-0,532	-0,459	-0,465
$\hat{\beta}_0$	3,441	1,970	2,012
$\hat{\lambda}$	0,532	0,459	0,465
\hat{a}	6,469	4,291	4,325
Korrelációs index	0,996	0,980	0,980
$\hat{\beta}_{0,L}$	3,097	1,250	1,381
$\hat{\beta}_{0,H}$	3,785	2,690	2,644
$\hat{\beta}_{1,L}$	-0,570	-0,538	-0,535
$\hat{\beta}_{1,H}$	-0,494	-0,380	-0,396

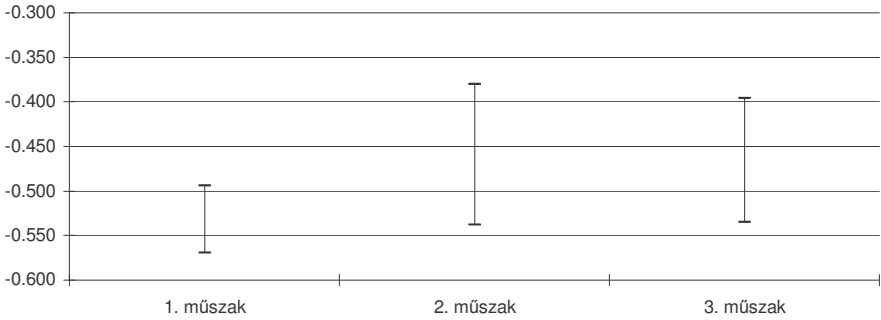
4. táblázat. A logisztikus regressziós modell paramétereit a vizsgált három műszakra

A 4. táblázatban összefoglaltuk az egyes műszakhoz tartozó minták alapján konstruált logisztikus regressziós függvények becsült paramétereit, valamint a β_0 -ra és β_1 -re kiszámított 95%-os megbízhatósági szintű konfidencia intervallumokat, melyek bal, illetve jobb végpontjaira a korábban bevezetett jelölésnek megfelelően az L (*Low*), illetve H (*High*) indexekkel utaltunk.

A korrelációs indexek magas értékei alátámasztják a logisztikus regressziós modell alkalmazásának jogosultságát. A regressziós függvények becsült paramétereit, valamint a β_0 -ra és β_1 -re kiszámított konfidencia intervallumok alapján azt mondhatjuk, hogy az első műszak felfutása különbözik a második, illetve harmadik műszakétól, ugyanakkor ez utóbbi kettő felfutása nagyon hasonlónak mondható. Az a paraméterek becsült értékei alapján azt láthatjuk, hogy az első műszak felfutási görbéjének meredekebb szakasza később kezdődik, mint a második és harmadik műszaké. Ennek hátterében az a természetes jelenség áll, hogy a második műszak indításakor már lényegesen több technológiai ismeret állt rendelkezésre, mint az első műszak indításakor. A második és harmadik műszakhoz tartozó felfutási görbék hasonlósága arra enged következtetni, hogy közel azonos technológiai szint, azaz közel azonos műszaki infrastruktúra és hozzá kapcsolódó ismeretszint esetén a minőségi kihozatal növekedése a termelés bevezetése során nagyjából azonos görbét ír le. Ezt a következtetésünket támasztja alá az, hogy a második és harmadik műszak esetében a β_0 , illetve β_1 paraméterekre kapott konfidencia intervallumok jelentősen átlapolódnak, ahogy ez a 4. és 5. ábrán is látható.



4. ábra. A β_0 paraméterekre vonatkozó konfidencia intervallumok



5. ábra. A β_1 paraméterekre vonatkozó konfidencia intervallumok

4.3 MPU mutató változása egy elektronikai termék javítási folyamatának bevezetése során

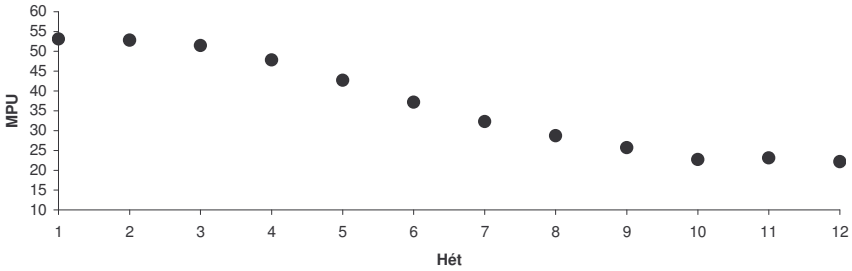
Általánosan elmondható, hogy elektronikai termékek javítási folyamatai jóval kevésbé automatizálhatók, mint azok gyártási folyamatai, így a javítási műveletek költségei — ezeken keresztül a szolgáltatások árai — nagyfokú érzékenységet mutatnak a felhasznált élők munkára. Széles körben alkalmazott a javítási műveletek elvégzéséhez szükséges élők munkája mennyiségének az úgynevezett *Minutes Per Unit* (MPU) mutató segítségével történő mérése. Ez a mutató a szolgáltatásba épülő emberi munkaidő egy termékre vetített értékét méri percben kifejezve. Jelen példánkban azokat a tapasztalatainkat összegezzük, amelyeket egy fogyasztói elektronikai termék javításával foglalkozó termelési tevékenység aggregált MPU értékének változásával kapcsolatban a javítási folyamat bevezetése során az első három hónapban (12 hét) szereztünk. Az MPU értéket heti szinten aggregáltuk az

$$\text{MPU} = \frac{\text{heti összes humán munka}}{\text{heti összes javított egység száma}}$$

összefüggés szerint. A javítási folyamat első 12 hetében mért aggregált MPU értékeket az 5. táblázat tartalmazza.

Hét (t_i)	MPU (R_i)
1	53,1
2	52,8
3	51,5
4	47,8
5	42,7
6	37,2
7	32,3
8	28,7
9	25,7
10	22,7
11	23,1
12	22,2

5. táblázat. Az MPU mutató alakulása az idő (hetek) függvényében



6. ábra. Heti MPU értékek az első 12 hétben

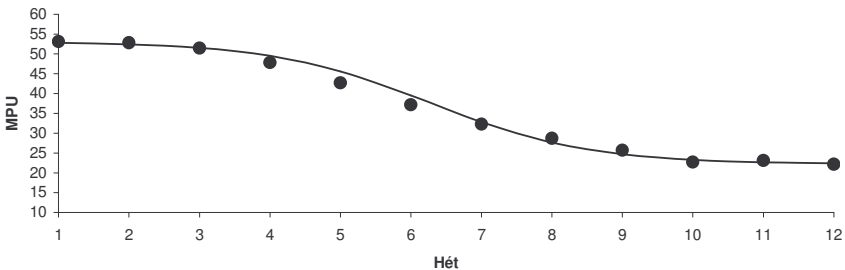
A 6. ábra grafikonja az aggregált MPU értékeket mutatja az idő függvényében.

Az ábrán látható pontfelhő azt sugallja, hogy érdemes az MPU mutató értékének időbeli változását a logisztikus regressziós modellel jellemezni. Az eddigiekhez képest a fő különbség az, hogy itt a mért mutató értékei csökkenő tendenciát mutatnak, $R_I = 53,1$ és $R_T = 22,2$. A számítások részletezése nélkül, a logisztikus regressziós függvény becsült paramétereit, a korrelációs indexek értékeit, valamint a β paraméterekre vonatkozó 95%-os megbízhatósági szintű konfidencia intervallumokat a 6. táblázatban foglaltuk össze. (A táblázatban a korábban bevezetett jelöléseket alkalmaztuk.)

Paraméter	Paraméter értéke
$\hat{\beta}_1$	-0,892
$\hat{\beta}_0$	5,597
$\hat{\lambda}$	0,892
\hat{a}	6,277
r_S	0,994
r_{S^*}	0,992
$\beta_{0,L}$	4,593
$\beta_{0,H}$	6,601
$\beta_{1,L}$	-1,033
$\beta_{1,H}$	-0,750

6. táblázat. A regressziós modell számított paramétereit

A korrelációs együttthatók magas értékei, valamint a 7. ábrán látható grafikon azt igazolják, hogy regressziós modellünk nagy pontossággal illeszkedő görbét eredményez.



7. ábra. Logisztikus regresszió az aggregált MPU időbeli alakulására

4.4 OEE mutató változása egy gyártási folyamat bevezetése során

Egy elektronikai termék gyártási folyamatának bevezetése során, 15 héten keresztül végeztünk méréseket a teljes gyártósor *Overall Equipment Efficiency* (OEE) mutatójára vonatkozóan. Az OEE mutató a rendelkezésre állási (A)-, a teljesítmény (P)- és a minőségi mutató (Q) szorzataként áll ellő (Hansen, 2001; Nakajima, 1988), ahol

$$A = \frac{\text{terhelési idő} - \text{állásidő}}{\text{terhelési idő}} \quad P = \frac{\text{kimenet} \times \text{ideális ciklusidő}}{\text{működési idő}}$$

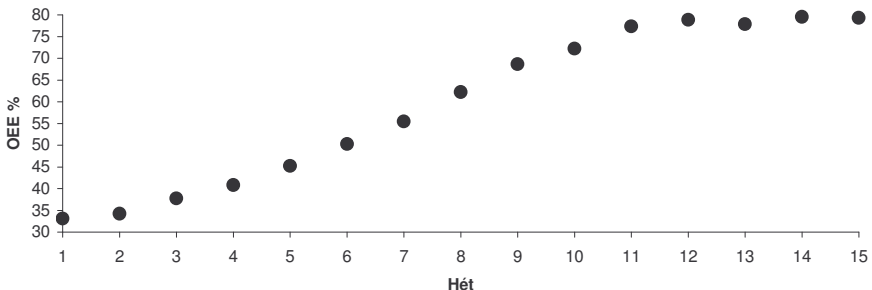
$$Q = \frac{\text{gyártott jó termékek száma}}{\text{gyártott termékek száma}}$$

Hét (t_i)	OEE (%) (R_i)
1	33,1
2	34,2
3	37,7
4	40,8
5	45,2
6	50,2
7	55,4
8	62,2
9	68,6
10	72,2
11	77,3
12	78,8
13	77,8
14	79,5
15	79,3

7. táblázat. Az OEE %-os értékei a gyártás első 15 hetében

A vizsgált időszakban számos olyan erőfeszítés történt, amelyek a rendelkezésre állási és a minőségi mutató jelentős javítása révén eredményezték az OEE mutató 10. táblázatban látható javulását. Mivel írásunk célja pusztán az aggregált mutatók változási jellegének modellezése, ezért nem részletezzük, hogy egy-egy mutató javulásához az elvégzett javító tevékenységek hogyan és milyen mértékben járultak hozzá.

A 7. táblázatban szereplő OEE % adatokat az idő függvényében grafikusán ábrázolva a 8. ábrán látható ponthalmazhoz jutunk.



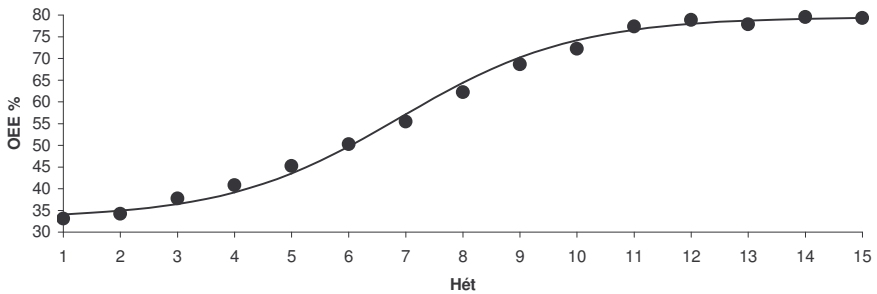
8. ábra. OEE % mutató időbeli alakulására

A ponthalmazra az $R_I = 33,1$ és $R_T = 79,5$ értékek mellett illesztettünk logisztikus függvényt. A regressziós függvény becsült paramétereit, a kiszámított korrelációs indexeket és a β paraméterekre vonatkozó 95%-os megbízhatósági szintű konfidencia intervallumokat —a számítások részletezése nélkül, az eddigi jelöléseket alkalmazva— a 8. táblázat tartalmazza.

Paraméter	Paraméter értéke
$\hat{\beta}_1$	-0,657
$\hat{\beta}_0$	4,529
$\hat{\lambda}$	0,657
\hat{a}	6,897
r_S	0,997
r_{S^*}	0,997
$\beta_{0,L}$	3,916
$\beta_{0,H}$	5,142
$\beta_{1,L}$	-0,725
$\beta_{1,H}$	-0,588

8. táblázat. A regressziós modell számított paramétereit

A korrelációs indexek értékei alapján elmondhatjuk, hogy a lineárisra visszavezetett, leszűkített logisztikus regressziós modell olyan függvényt eredményez, amely jól modellezi az OEE változását a termelési folyamat bevezetése során. A 9. ábra a kapott görbe mért OEE % értékekre való illeszkedését mutatja.



9. ábra. Logisztikus regresszió az OEE % mutató időbeli alakulására

5 Összegzés

Empirikus megfigyeléseink, a bemutatott példák és vállalati tapasztalataink alátámasztják azt a hipotézisünket, hogy az általunk tárgyalt, *lineárisra visszavezetett, leszűkített logisztikus (szigmoid) modell alkalmas aggregált minőségi és megbízhatósági mutatók változásának modellezésére termékek, illetve szolgáltatások előállításának bevezetése során*. Egy gyártási vagy szolgáltatási folyamat kiszemelt jellemzőjének javulása általában sok-sok, egymás után végrehajtott javító-fejlesztő tevékenység eredménye, az aggregált megközelítés azonban lehetővé teszi, hogy a folyamat javulását az aggregált mutató segítségével úgy tekintsük, mintha azt az adott technológiai és termelési kultúra határozná meg. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a mutató változása (javulása)

a vállalkozás szervezetének az adott folyamatra vonatkozó tanulási görbéjét reprezentálja, melyet a rendelkezésre álló technológia és a vállalkozás tágabb értelemben vett termelési kultúrája determinál. Az aggregált minőségi kihozatalra vonatkozó esettanulmányunkban láthattuk, hogy adott technológia és azonos vállalati kondíciók mellett a vizsgált két műszak aggregált kihozatala nagyon hasonló felfutást mutatott. A logisztikus modell β_0 , illetve β_1 paraméterein keresztül, az ezekre kiszámított konfidencia intervallumok segítségével pedig lehetőségünk volt a felfutási görbék kvantitatív összehasonlítására. Megközelítésünk előnye éppen az, hogy *lehetővé teszi a technológia és a vállalati kultúra jól ismert determináló szerepének számszerűsítését és felfutási (tanulási) görbék kvantitatív összehasonlítását. Egy felfutási görbe jellemző paramétereinek ismeretében a görbét, mint elvárást tekinthetjük akkor, amikor azonos technológiai és kulturális feltételek mellett egy folyamatot időben később, vagy térben másutt kívánunk elindítani.*

További kutatási célunk annak vizsgálata, hogy a technológia és a vállalati kultúra, hogyan befolyásolja a bemutatott modell paramétereit, a felfutási görbék alakját. Kérdés például, hogy adott műszaki háttér mellett a különböző földrajzi régiókhoz, országokhoz, és társadalmi kultúrákhoz milyen jellemző paramétertartományok társíthatók, illetve a függvény paraméterein keresztül hogyan hasonlíthatók össze különböző üzemek felfutási folyamatai. Egy másik vizsgálandó terület a folyamatok jóságának összehasonlítása felfutási görbék segítségével. Szintén vizsgálni kívánjuk azokat a gyakorlati eseteket, amikor a mutatók időbeli változása olyan görbékkel írható le, amelyek inflexiós pontjukra nem szimmetrikusak.

Irodalom

1. Andress, F. J. (1954): The Learning Curve as a Production Tool. *Harvard Business Review*, Vol. 32., No. 1. 16–19.
2. Alchian, A. (1959): Costs and Output. In M. Abramowitz (Ed.): *The Allocation of Economic Resources: Essays in Honor of B. F. Haley*. Stanford University Press, Stanford, CA
3. Arrow, K. (1962): The Economic Implications of Learning by Doing. *Review of Economic Studies*, 29 (April), 166–170.
4. Baloff, N. (1966a): Start-ups in Machine-Intensive Production Systems. *Journal of Industrial Engineering*, 17 (January), 25–32.
5. Baloff, N. (1966b): Learning Curves-Some Controversial Issues. *Journal of Industrial Economics*, 14 (July), 275–282.
6. Baloff, N. (1970): Extensions of the Learning Curve – Some Empirical Results. *Operational Research Quarterly*, 22 (December), 329–340.
7. Balogh, A., Dukáti, F., Sallay, L. (1980): *Minőségellenőrzés és megbízhatóság*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1980
8. Bohn, R. E., Terwiesch, C. (1999): The economics of yield-driven processes. *Journal of Operations Management*, Vol. 18., No. 1., 41–59.
9. Carlson, J. G. (1973): Cubic Learning Curves: Precision Tool for Labor Estimating. *Manufacturing Engineering and Management*, Vol. 71, No. 5., 22–25.

10. Carr, G. W. (1946): Peacetime Cost Estimating New Learning Curves. *Aviation* (April), 76–77.
11. Conway, R., Schultz, A. (1959): The Manufacturing Progress Function. *Journal of Industrial Engineering*, Vol. 10., No. 1., 39–53.
12. Cooper, W. W., Charnes, A. (1954): Silhouette Functions of Short-Run Cost Behavior. *Quarterly Journal of Economics*, 68 (1954), 131–156.
13. Csaba, Gy. (Szerk.) (1978): *A biológiai szabályozás*. Medicina Könyvkiadó, Budapest, 360–362.
14. Dombi, J. (1990): Membership function as an evaluation. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 35. No. 1., 1–22.
15. Fellner, W. (1969): Specific Interpretations of Learning by Doing. *Journal of Economic Theory* (August), 119–140.
16. Garg, A., Milliman, P. (1961): The Aircraft Progress Curve Modified for Design Changes. *Journal of Industrial Engineering*, Vol. 12., No. 1., 23–27.
17. Hansen, R. C. (2001): *Overall Equipment Effectiveness*, A Powerful Production/Maintenance Tool for Increased Profits. Industrial Press, Inc., New York, 25–27.
18. Hayes, R. H., Wheelwright, S. C. (1984): *Regaining our competitive edge: competing through manufacturing*. Wiley, New York
19. Hirschleifer, J. (1962): The Firm's Cost Functions-A Successful Reconstruction. *Journal of Business*, 35 (July), 235–255.
20. Hirschmann, W. B. (1964): Profit from the Learning Curve. *Harvard Business Review*, Vol. 42, No. 1., 125–139.
21. Hollander, S. (1965): *The Sources of Increased Efficiency: A Study of the Du-Pont Rayon Plants*. MIT Press, Cambridge, MA
22. Hunyadi, L., Vita, L. (2004): *Statisztika közgazdászoknak*. Központi Statisztikai Hivatal, Budapest, 582–586.
23. Jónás, T., Kövesi, J. (2009): Értékelő függvények a megbízhatóság alapú menedzsmentben. *Minőség és Megbízhatóság*, Vol. XLIII. No.6., 311–320.
24. Jónás, T., Kövesi, J., Tóth, Zs. E. (2009): Az intellektuális tőke mérésének és értékelésének egyes kérdései. *Vezetéstudomány*, Vol. XL.(júniusi különszám) 24–29.
25. Kerékgyártó, Gy.-né, Mundruczó, Gy. (1996): *Statisztikai módszerek a gazdasági elemzésben*. Aula kiadó, Budapest, pp. 355–358.
26. Koltai, T. (2006): *Termelésmenedzsment*. Typotex Kiadó, Budapest, 76–115.
27. Laird, A. K. (1964): Dynamics of tumor growth. *British Journal of Cancer* 18. 490–502.
28. Lee, W. Y. (1975): Oligopoly and Entry. *Journal of Economic Theory*, 11., 35–45.
29. Lei, Y. C., Zhang, S. Y. (2004): Features and Partial Derivatives of Bertalanffy-Richards Growth Model in Forestry. *Nonlinear Analysis. Modelling and Control*, Vol. 9., No. 1. 65–73.
30. Leslie M., Holloway, C. A. (2006): Sales Learning Curve. *Harvard Business Review*, Vol. 84. No. 7/8, 115–123.
31. Lewandowski, R. (1974): *Prognose- und Informationssysteme und ihre Anwendungen* Band 1. Walter de Gruyter, Berlin, New York

32. McCullagh P., Nelder J. A. (1989): *Generalized Linear Models*, (Monographs on Statistics and Applied Probability). Chapman and Hall, London, 114–124 (2nd Edition)
33. Modis, T. (2002): Forecasting the Growth of Complexity and Change. *Technological Forecasting & Social Change*, Vol. 69., No. 4., 377–404.
34. Nakajima, S. (1988): *Introduction to TPM*. Productivity Press, Cambridge, MA
35. Pataki, B. (2005): *A technológia menedzselése*. Typotex Kiadó, Budapest, 61–81.
36. Rapping, L. (1965): Learning and the World War II Production Functions. *Review of Economics and Statistics*, 48 (February), 98–112.
37. Sheshinski, E. (1967): Tests of the Learning by Doing Hypothesis. *Review of Economics and Statistics*. 49 (November), 568–578.
38. Spence, M. A. (1981): The learning curve and competition. *Bell Journal of Economics*, 12., 49–70.
39. Stobaugh, R. B., Townsend, P. L. (1975): Price Forecasting and Strategic Planning: The Case of Petrochemicals. *Journal of Marketing Research*, 12 (February), 19–29.
40. Terwiesch, C., Bohn, R. E. (2001): Learning and process improvement during production ramp-up. *International Journal of Production Economics*, 70., 1–19.
41. Verhulst, P. F. (1838): Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement. *Correspondance mathématique et physique*, Vol. 10., 113–121.
42. Wright, T. P. (1936): Factors Affecting the Cost of Airplanes. *Journal of Aeronautical Science*, 3. (February), 122–128.
43. Zangwill, W. I., Kantor, P. B. (1998): Toward a theory of continuous improvement and the learning curve. *Management Decision*, Vol. 44., No. 7., 910–920.
44. Zoltners, A. A., Sinha, P., Lorimer, S. E. (2006): Match your sales force structure to your business life cycle. *Harvard Business Review*, Vol. 84. No. 7/8, 80–89.

MODELLING RAMP UP OF PRODUCTION AND SERVICE PROCESSES

By studying real company processes, we attempt to model changes of aggregate reliability and quality metrics of production and service processes during their introduction phase. Application of the so-called restricted linear logistics regression model provides with the possibility to quantify the determinant role of technology and production culture in the ramp up of production and service processes. Our approach lays the foundations of comparing ramp up curves that are different either in time or in space.