BIZTOSÍTÁSI ÉS PÉNZÜGYI KOCKÁZAT EGYÜTTES HATÁSA A BIZTOSÍTÓK SZOLVENCIA-SZÁMÍTÁSÁNÁL[1]

SZÜLE BORBÁLA
Budapesti Corvinus Egyetem

A Szolvencia II néven említett új irányelv elfogadása az Európai Unióban új helyzetet teremt a biztosítók tőkeszükséglet-számításánál. A tanulmány a biztosítók működését modellezve azt elemzi, hogyan hatnak a biztosítók állományának egyes jellemzői a tőkeszükséglet értékére egy olyan elméleti modellben, amelyben a tőkeszükséglet-értékek a Szolvencia II szabályok alapján számolhatók. A modellben biztosítási illetve pénzügyi kockázati „modul" figyelembevételére kerül sor külön-külön számolással, illetve a két kockázatfajta közös modellben való együttes figyelembevételével (a Szolvencia II eredményekkel való összehasonlításhoz). Az elméleti eredmények alapján megállapítható, hogy a tőkeszükségletre vonatkozóan számolható értékek eltérhetnek e két esetben. Az eredmények alapján lehetőség van az eltérések hátterében álló tényezők tanulmányozására is.

1 Bevezetés

Európában a biztosítók tevékenységére vonatkozóan 2009-ben fogadták el a röviden Szolvencia II (Solvency II) elnevezésű irányelvet[2], amely több más témán kívül a biztosítók szolvenciájával kapcsolatos számításokkal is foglalkozik. A Szolvencia II szabályok szerint a biztosítóknak legalább annyi saját tőkét kell tartaniuk, hogy az (a vállalkozás folytatásának elvét figyelembevéve) egy éves időtartamot tekintve fedezze a nem várt veszteségeket (ez az érték a biztosító alap saját tőkéje esetében 99,5%-os megbízhatósági szinten számított kockáztatott értéknek (Value-at-Risk, VaR) felel meg[3]:

> „It shall correspond to the Value-at-Risk of the basic own funds of an insurance or reinsurance undertaking subject to a confidence level of 99,5% over a one-year period."

A szolvencia tőkekövetelmény (Solvency Capital Requirement) számítása során a nem-életbiztosítási (non-life underwriting risk), életbiztosítási (life underwriting risk), egészségbiztosítási (health underwriting risk), piaci (market risk), működési (operational risk) és a hitelkockázatot (credit risk)[4] kell

[1]Beérkezett: 2010. augusztus 9. E-mail: `borbala.szule@uni-corvinus.hu`.

[2]Directive 2009/138/EC of the European Parliament and of the Council of 25 November 2009 on the taking-up and pursuit of the business of Insurance and Reinsurance (Solvency II)

[3]Directive 2009/138/EC, Article 101

[4]Directive 2009/138/EC, Article 101

figyelembe venni úgy, hogy a működési kockázaton kívül a többi kockázat esetében számolt tőkeszükségleteket egy megfelelő képlet alapján összegzik (Basic Solvency Capital Requirement) majd ehhez hozzáadják a működési kockázatra vonatkozóan számított tőkeszükséglet-értéket illetve még további korrekciók elvégzésére kerül sor. A működési kockázaton kívüli kockázatok alapján számított tőkeszükséglet (Basic Solvency Capital Requirement) képlete az irányelv alapján[5]:

$$\sqrt{\sum_{i,j} \mathrm{Corr}_{i,j} \times \mathrm{SCR}_i \times \mathrm{SCR}_j}\,, \tag{1}$$

ahol az SCR értékek a különböző kockázati modulok esetében számított tőkeszükségleteket jelölik[6], a Corr értékek pedig egy meghatározott korrelációs mátrix elemeit jelentik, ha például a kockázati modulok közül az életbiztosítási kockázatos és a piaci kockázatos kockázati modult tekintjük, a megfelelő korrelációs érték a Szolvencia II alapján 0,25 (e korrelációs mátrixot a *Függelék* mutatja). Az irányelv szövegében szereplő korrelációs értékek kalibrálása a biztosítók tőkeszükségletének meghatározása szempontjából fontos kérdés és e témával kapcsolatban is számos elemzés készült.[7] A biztosítók egyébként az irányelv alapján a tőkeszükséglet kiszámítására részben vagy teljesen belső modellt is használhatnak majd.[8]

A képletből is látható tehát, hogy a Szolvencia II szabályok alkalmazásakor a különböző kockázatoknál külön-külön számított tőkekövetelményeknek a kockázatok közötti korrelációkon alapuló összesítéséről van szó. E számolási megközelítés eredménye eltérhet attól, mint ha az összesített tőkeszükségletet a kockázat-fajták közös modelljében lehetne számolni. A gyakorlatban természetesen a különböző kockázat-fajták összetettsége következtében nagyon bonyolult feladatot jelentene egy ilyesfajta közös modell felépítése (és az alkalmazandó paraméterek számítása), de elméleti modell keretében összevethetők a tőkeszükségletre vonatkozó kétféle számolási módszer eredményei. Jelen tanulmány fő célja ezen eredmények összehasonlítása. A következőkben egy olyan elméleti modell keretein belül tanulmányozzuk a külön számított tőkeszükségleteket korrelációk alapján aggregáló Szolvencia II megközelítés és a kockázatokat közös modellben elemző megközelítés eredményeinek különbségeit, ami a biztosítók leginkább lényegesnek tekinthető jellemzőivel rendelkezik. A bemutatott elméleti modellben alkalmazott feltevések lehetővé teszik a kétféle megközelítésnél a tőkeszükségletek és a paraméterek között függvénykapcsolat felírását is, így jelen modellben értékelhető a biztosítók állományát jellemző néhány fontos tulajdonság (például az állománynagyság) tőkeszükséglet-értékre gyakorolt hatása is.

---

[5] Directive 2009/138/EC, Annex IV

[6] A kockázati modulok: nem-életbiztosítási (non-life underwriting), életbiztosítási (life underwriting), egészségbiztosítási (health underwriting), piaci (market), csőd (counterparty default), a Directive 2009/138/EC, Annex IV szerint.

[7] CRO Forum[2009]

[8] Directive 2009/138/EC, Article 112

2 A biztosító kockázati modellje

A Szolvencia II szabályok szerint a tőkeszükséglet-számításban fontos szerepe van a különböző kockázatok közötti korrelációknak. A matematika egyik ismert eredménye, hogy a lineáris korrelációs együttható értéke (többdimenziós) normális eloszlás esetében alkalmas a függetlenség megállapítására is: amenynyiben például két (együttesen kétdimenziós normális eloszlással rendelkező) valószínűségi változó esetében a korrelációs együttható értéke nulla, akkor a két valószínűségi változó függetlenségére lehet következtetni. A gyakorlatban a biztosítók tőkeszükséglet-számításainál nem tekinthetők általánosnak az olyan helyzetek, amelyeknél a tőkeszükségletet befolyásoló valószínűségi változók együttes eloszlása többdimenziós normális eloszlás lenne, ehelyett a tőkeszükséglet-számításokban inkább egyes, a normális eloszlástól különböző (például nem szimmetrikus) eloszlások figyelembevétele indokolt. Ezzel együtt érdemes lehet jól áttekinthető (többdimenziós) normális eloszlás feltételezésével felépített keretben is elemezni a Szolvencia II szabályok alapján meghatározható tőkeszükséglet mértékét, mivel ez kiindulópontként (illetve összehasonlítási alapként) szolgálhat további, másfajta eloszlásokat alkalmazó elemzésekhez. A többdimenziós normalitás feltevését alkalmazó megközelítés előnye lehet továbbá, hogy ilyen esetben több eredményt képletek alkalmazásával is le lehet vezetni és az elemzés nem szorul összetettebb, szimulációs számítások elvégzésére.

A biztosítók (különösen az életbiztosítók) működését nagymértékben befolyásoló két kockázati fajta a biztosítási kockázat és a pénzügyi (piaci, illetve befektetési) kockázat. A modellben a Szolvencia II szabályozásban említett VaR számítás gondolatmenetéhez igazodóan meghatározható az e két kockázat-fajtához rendelhető tőkeszükséglet külön-külön és abban az esetben is, amikor a két kockázat-fajtát közös modellben egyidejűleg vesszük figyelembe a számítások során (a többdimenziós normális eloszlás feltevésének alkalmazásával). Ez utóbbi tőkeszükséglet-érték összevethető azzal az értékkel, amely a Szolvencia II képlet alapján a külön-külön számított tőkeszükséglet értékek alapján számolható az alap tőkeszükséglet-értékként (Basic Solvency Capital Requirement).

A tőkeszükséglet számításánál a Szolvencia II szabályoknál a VaR fogalma jelenik meg. CEA[2006] a szolvencia-szabályozással kapcsolatban a VaR fogalmát úgy definiálja, hogy ha a VaR-nak megfelelő tőke tartására kerül sor, akkor a VaR számításánál alkalmazott megbízhatósági szintnek megfelelő a szolvencia valószínűsége olyan értelemben, hogy az eszközök értéke legalább annyi, mint a kötelezettségek (regulatory liabilities) értéke, illetve az inszolvencia valószínűsége egy mínusz az adott megbízhatósági szint. A VaR definíciója *McNeil et al.* [2005] (37-38. o.) alapján pontosabban is megfogalmazható. Tekintsük kockázatos eszközök valamely portfólióját adott Δ rögzített időtartam alatt, valamilyen $\alpha \in (0,1)$ megbízhatósági szintet és jelölje a megfelelő veszteségeloszlás eloszlásfüggvényét:

$$F_L(l) = P(L \leq l) \,, \tag{2}$$

A portfólió VaR értéke α megbízhatósági szinten az a legkisebb l érték, amelynél az a valószínűség, hogy az L veszteség meghaladja l-t nem nagyobb, mint $(1-\alpha)$:

$$\mathrm{VaR}_\alpha = \inf\{\, l \in R : P(L > l) \leq 1-\alpha \,\} = \inf\{\, l \in R : F_L(l) \geq \alpha \,\} \,. \tag{3}$$

A VaR értékeket már több évvel ezelőtt is gyakran alkalmazták például bankoknál bizonyos kockázatok mérésénél. A Szolvencia II szabályozáshoz hasonló szabályok esetében a Bázeli Bizottság bankok esetében a piaci kockázattal kapcsolatban a VaR alkalmazásánál 99%-os szintet, az időhorizont (Δ) értékére pedig 10 napot javasolt (*McNeil et al.* [2005], 43. o.), ez különbség a biztosítókra vonatkozóan a Szolvencia II szabályozásban említett 99,5%-os megbízhatósági szinttel, illetve 1 éves tartammal szemben.

A következőkben a tanulmányban egy olyan elméleti modell bemutatására kerül sor, amelynél a kockázat (illetve tőkeszükséglet) mérése a VaR gondolatmenetére épül: *CEA* [2006] definíciója alapján a tőkeszükséglet értéke a modellben a különböző kockázatok figyelembevétele esetén annyi, hogy e tőkeszükséglet esetén a szolvencia valószínűsége az egy éves időtartam végén egy adott megbízhatósági szintnek felel meg olyan értelemben, hogy az eszközök értéke legalább annyi, mint a kötelezettségek értéke (illetve az inszolvencia valószínűsége egy mínusz az adott megbízhatósági szint). A modellszámítások és a VaR számítás hasonlóságát a *Függelék* szemlélteti.

Tekintsük a következőkben a biztosító működésének következő modelljét: a biztosító biztosítási szerződések alapján biztosítási kockázatot vállal, a megállapított díjak alapján számított díjtartalékot, illetve a rendelkezésre álló saját forrásait (tőkét) pénzügyi eszközökbe fekteti (a befektetéshez pénzügyi kockázat kapcsolódhat), az egy éves időtáv végén pedig az eszközök értéke alapján lehetséges a biztosítási kötelezettségek kifizetése. A biztosító mérlegének egyszerűsített sémájában tehát egy időszak múlva:

$$E = ST + K \,, \tag{4}$$

ahol:

E: eszközök összesen

ST: saját tőke értéke

K: kötelezettségek értéke

A modell nem foglalkozik egyéb mérlegtételekkel, például ingatlanokkal, időbeli elhatárolásokkal[9].

A feltevések szerint 1 év múlva a biztosító eszközeinek értéke:

$$n\frac{B \cdot p}{1+i}(1+s)(1+r) \,, \tag{5}$$

ahol:

n: a biztosítási szerződések száma, vagyis a biztosító állományának nagysága

[9] A magyarországi biztosítók mérlegén belül az eszközök, a kötelezettségek és a tőkehelyzet egyes aktuális jellemzőivel például PSZÁF[2010] foglalkozik.

B: a biztosítási összeg, amely a biztosítási szerződés alapján a szerződésben meghatározott személynek a biztosítási esemény bekövetkezése esetén fizetendő

p: a biztosítási esemény bekövetkezésének valószínűsége

i: technikai kamat

s: a „szolvencia-szorzó”, amely megmutatja, hogy a kezdeti díjtartalék mekkora része a saját tőke értéke

r: befektetési hozam (illetve a befektetési hozam várható értéke).

A feltevések szerint a biztosító állománya homogén, vagyis a biztosítási szerződések fontosabb tulajdonságai megegyeznek: ugyanolyan valószínűséggel következik be a biztosítási esemény, és a biztosítási esemény bekövetkezésekor a biztosító által fizetendő összeg (a biztosítási összeg) is megegyezik (valamint azonos a számítások során alkalmazott technikai kamat is). A feltevések alapján a biztosító ügyfelei egyszeri díjat fizetnek, a költségek azonnal esedékesek (ezeket a befolyó díjból kifizetik) és a biztosító díjtartaléka az egyszeri nettó díjak összegével egyezik meg. Az egyszeri nettó díjak számítása egy biztosítási szerződés esetén a következő képlet alapján történik:

$$\frac{Bp}{1+i}, \tag{6}$$

vagyis az egyszeri nettó díj a kötelezettségek várható jelenértéke (a diszkontálásnál a technikai kamatot alkalmazva). A biztosítási díj ezen definíciója inkább az életbiztosításoknál jellemző, azzal együtt, hogy a nem-életbiztosításoknál is hasonlóak a biztosítási díjszámítás kezdő lépései, illetve, hogy természetesen a gyakorlatban az életbiztosításoknál is jóval bonyolultabban történik a díjak számítása.

A biztosítási szerződések esetében a feltevések szerint p valószínűség rendelhető a biztosítási esemény bekövetkezéséhez, így az i-edik biztosítási szerződés esetében definiálható ξ_i (karakterisztikus) valószínűségi változó ($i = 1, \ldots, n$) a következőképpen:

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & \text{a biztosítási esemény bekövetkezésekor} \\ 0, & \text{ha a biztosítási esemény nem következik be .} \end{cases}$$

A biztosító állományában bekövetkező összes biztosítási események számát jelentő ξ valószínűségi változó a ξ_i (karakterisztikus, független) valószínűségi változók összegeként írható fel, tehát binomiális eloszlású:

$$\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_n \,. \tag{7}$$

A binomiális eloszlású ξ valószínűségi változó eloszlása esetében a várható érték $E(\xi) = np$, a variancia pedig $\mathrm{Var}(\xi) = np(1-p)$. Megfelelően nagy n esetén (ez már $n = 1000$ esetében is teljesülhet) a binomiális eloszlás a normális eloszlással közelíthető. A modellben a biztosítási szerződések száma jóval több mint 1000 (mivel a gyakorlatban is általában ennél nagyobb egy biztosító állománya), így a biztosítási események számát mutató ξ valószínűségi változót a továbbiakban normális eloszlással közelíthetőnek tekintjük. Ebből adódik, hogy a modellben a biztosító tényleges kötelezettségének egy év múlva az értéke ($B\xi$) szintén normális eloszlású valószínűségi változónak tekinthető.

Definiáljuk a modellben az inszolvencia esetét úgy, hogy az eszközök értéke nem éri el a kötelezettségek értékét egy év múlva. Az ,,inszolvencia" esetét a jelenlegi modellfeltevések alapján nevezhetnénk ,,fizetésképtelenségnek" is, mivel azonban a szakirodalomban a ,,fizetésképtelenség" és a ,,likviditás" fogalmat is szokás hasonlónak tekintetni, ezért a továbbiakban a modellben a ,,szolvencia" kifejezést alkalmazzuk, mivel a modell következtetései a ,,szolvencia" fogalmához kapcsolódnak elsősorban (és nem a ,,likviditás" fogalmához). Tekintsük a következőkben azt az esetet, amikor a szolvencia valószínűsége valamilyen adott α érték:

$$P(E \geq K) = \alpha\ . \tag{8}$$

A modellben a következőkben ezt a valószínűséget tanulmányozzuk abban az esetben, amikor külön-külön csak biztosítási, illetve pénzügyi kockázat van (a Szolvencia II szabályban szereplő képlet alkalmazásához), illetve olyan esetben is, amikor közös modellben egyidejűleg mindkét kockázat-fajtával foglalkozunk (a Szolvencia II szabályban szereplő képlet alkalmazásával számolt eredménnyel való összehasonlításhoz). A szolvencia valószínűségére adott képlet alapján a modellben a különböző esetekben meghatározhatók a (kezdő időpontra vonatkozó) tőkeszükséglet-értékek, illetve a tőkeszükséglet értékének a kezdő időpontban számítható díjtartalékhoz viszonyított értéke (az s szolvencia-szorzó). A tőkeszükséglet-értékek különböző jellemzőkkel rendelkező biztosítási állományoknál különbözhetnek, azonban az s szorzó értékek különböző esetekben is összehasonlíthatók. A tanulmányban is az s szorzó értékei alapján kerül sor a különböző megközelítés alkalmazásával számítható összes tőkeszükséglet-értékek összehasonlítására.

3 A szolvencia modellezése

A szolvencia elemezhető a biztosítási és a pénzügyi kockázatra külön-külön (ami a Szolvencia II képletnél alkalmazható eredményekhez vezet), valamint a modellben szereplő két kockázat-fajta közös modellben szerepeltetésével is. A következőkben ezeket a szolvenciával kapcsolatos eredményeket tekintjük át.

3.1 Szolvencia biztosítási kockázatnál

Az előzőekben bemutatott jelölések alkalmazásával felírható a szolvencia valószínűségét jelentő (8) képlet abban az esetben, amikor a biztosító működésében mindössze biztosítási kockázat van jelen, pénzügyi kockázat nincs (ez azt jelenti, hogy a befektetési hozamot adottnak tekintjük). A szolvencia valószínűsége ebben az esetben tehát:

$$P\Big(B\xi \leq n\frac{Bp}{1+i}(1+s)(1+r)\Big) = \alpha\ . \tag{9}$$

Felhasználva hogy ξ valószínűségi változó normális eloszlásúnak tekinthető és alkalmazva a ξ valószínűségi változó esetében felírt várható érték és variancia értékeket, a (9) képlet felírható más formában is:

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{np}\left(\frac{(1+s)(1+r)}{1+i}-1\right)}{\sqrt{1-p}}\right)=\alpha\ , \tag{10}$$

ahol $\Phi(x)$ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét jelöli.

A következőkben azt elemezzük, hogy különböző paraméterek hogyan befolyásolják az adott α valószínűséghez szükséges szolvencia-tőke értékét. Ezzel a kérdéssel a modellbeli szolvencia-szorzó (s) alapján foglalkozunk. A modellben a szolvencia-szorzó (s) értéke azt mutatja meg, hogy az egyszeri nettó díjak összegeként számított díjtartalékhoz képest mekkora összeget szükséges szolvencia-tőkeként tartani a biztosítónak adott fajta kockázatok ellensúlyozásául.

A modellben egyelőre a biztosítási kockázattal foglalkozunk, ami azzal függ össze, hogy nem lehet egy évre előre biztosan megállapítani, hogy menynyi lesz a bekövetkező biztosítási események száma (ez az érték valószínűségi változó, értékét ξ jelöli). Az előző képletet átalakítva felírható a biztosítási kockázat figyelembevétele esetén egy „szolvencia-függvény" ($f_B(s)$), amelynek nulla értéke esetén meghatározható az α valószínűséghez szükséges szolvencia-szorzó:

$$f_B(s)=s+1-\left(\frac{\Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{1-p}}{\sqrt{np}}+1\right)\frac{1+i}{1+r}=0\ . \tag{11}$$

Adott paraméterek esetén az α valószínűséghez tartozó szolvencia-szorzó tehát a fenti egyenlet megoldásaként számolható ki:

$$s^*=\left(\frac{\Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{1-p}}{\sqrt{np}}+1\right)\frac{1+i}{1+r}-1\ . \tag{12}$$

Megállapítható, hogy a szolvencia-szorzó értéke a következőképpen függ a képletben szereplő paraméterektől (minden egyéb tényező hatását változatlannak feltételezve):

- A szolvencia-szorzó értéke nagyobb magasabb technikai kamat esetében (ez természetesnek is tekinthető, hiszen az életbiztosításoknál például a technikai kamatot garantált hozamként is szokás értelmezni).
- A szolvencia-szorzó értéke a befektetési hozam emelkedésével csökken (figyelembe véve, hogy kizárólag a biztosítási kockázatot elemezve fixnek tekintjük a befektetési hozamot).
- Nagyobb α valószínűséghez magasabb szolvencia-szorzó tartozik (a szolvencia magasabb valószínűségéhez nyilvánvalóan több szolvencia-tőke szükséges minden egyéb tényező változatlanságát feltételezve).

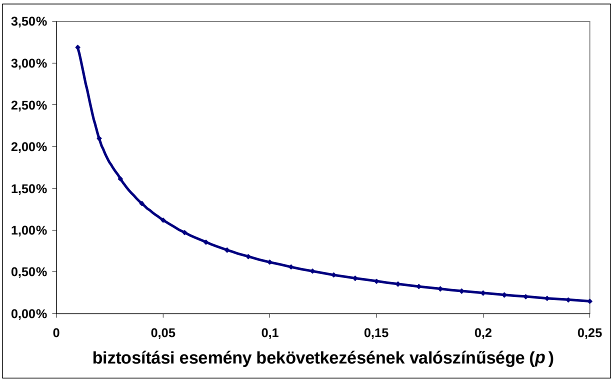
- A szolvencia-szorzó értéke alacsonyabb, ha magasabb a biztosítási esemény bekövetkezésének valószínűsége (ezt a megállapítást a következőkben bizonyítjuk).

- Nagyobb biztosítási állomány esetében kisebb a szolvencia-szorzó értéke (ez a biztosítások valószínűségszámítási alapjaival van összefüggésben: nagyobb állománynál például jobb becslést adhat a ténylegesen bekövetkező biztosítási események számára vonatkozóan a várható érték a nagy számok törvénye alapján).

Tekintsük a következőkben azt a megállapítást, amely alapján a szolvencia-szorzó magasabb értéke tartozik a biztosítási esemény bekövetkezésének kisebb valószínűségéhez. Tekintsük $\frac{\partial s^*(p)}{\partial p}$ értéket:

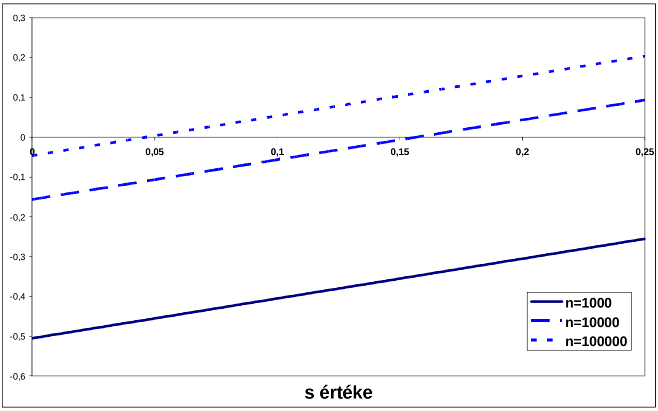
$$\frac{\partial s^*(p)}{\partial p} = \frac{1+i}{1+r}\Phi^{-1}(\alpha)\frac{1}{2}\sqrt{\frac{np}{1-p}}\left(\frac{-1}{np^2}\right) < 0\ , \tag{13}$$

mivel a gyakorlati alkalmazásokban reálisan $\Phi^{-1}(\alpha) > 0$. Ez az eredmény tehát azt jelenti, hogy minden egyéb tényező változatlansága esetén a díjtartalékhoz viszonyítva magasabb lesz az α megbízhatósági szint eléréséhez szükséges tőke értéke, ha a biztosító állományában a biztosítási esemény bekövetkezésének valószínűsége kisebb. Ezt az összefüggést szemlélteti az *1. ábra.*



1. ábra. Szolvencia-szorzó és p összefüggése. *Forrás:* saját számítások.

Az eredmények alapján az is megállapítható, hogy nagyobb biztosítási állomány esetén a kezdő díjtartalékhoz viszonyítva kisebb tőke szükséges adott megbízhatósági szint eléréséhez. A különböző nagyságú biztosítási állományok esetében felírható, (11) képletnek megfelelő „szolvencia-függvények" alapján az állomány nagyságának szolvencia-szorzóra gyakorolt hatását a *2. ábra* szemlélteti (a 2. ábra különböző állománynagyságnál szolvencia-függvényeket mutat):



2. ábra. Állománynagyság és szolvencia-szorzó. *Forrás:* saját számítások.

A 2. ábrán a tengelymetszet jelöli azt a helyzetet, amikor a szolvencia valószínűsége éppen α értékkel egyezik meg, a tengelymetszettől jobbra elhelyezkedő s értékek ennél magasabb szolvencia-valószínűséghez, a tengelymetszetnél kisebb s értékek pedig α értéknél kisebb szolvencia-valószínűséghez tartoznak (adott, a (11) képletnek megfelelő szolvencia-függvénynél). Adott optimális szolvencia szorzót jelentő s^* érték alapján a különállóan csak a biztosítási kockázat esetén számított tőkeszükséglet értéke tehát:

$$\frac{nBp}{1+i} \cdot s^* \, . \tag{14}$$

3.2 Szolvencia pénzügyi kockázatnál

A következőkben a pénzügyi kockázat szolvencia-igényre gyakorolt hatásával foglalkozunk (a szolvencia-valószínűség adott szintjét feltételezve). Az elemzés kizárólag a pénzügyi kockázatra koncentrál, így a biztosítási kockázattal ebben a részben nem foglalkozunk (a bekövetkező biztosítási események száma megegyezik a várható értékkel). Ebben a részben a szolvencia-valószínűséget befolyásoló valószínűségi változó a pénzügyi kockázatot reprezentáló befektetési hozam. A feltevések szerint a befektetési hozam normális eloszlású valószínűségi változó, melyet η jelöl (a várható értéket μ, a szórást pedig σ jelöli). A gyakorlatban a befektetési hozamok esetében gyakran érdemes a normális eloszlás helyett más eloszlás (például t-eloszlás) feltevését alkalmazni, a normális eloszlás feltevésének oka itt elsősorban az, hogy a tanulmányban az előzőekben leírtaknak megfelelően a kockázat-fajták esetében a többdimenziós normalitást feltételezzük. A befektetési hozam esetében a magasabb befektetési kockázatot a szórás nagyobb értéke jelzi.

A befektetési hozamoknál tehát normális eloszlást feltételezve felírható a szolvencia valószínűsége a (8) képlet szerint:

$$P\Big(Bnp \le \frac{nBp}{1+i}(1+s)(1+\eta)\Big) = \alpha \, . \tag{15}$$

Alkalmazva az η eloszlására vonatkozó feltevéseket, a (15) képlet átalakítható:

$$1-\Phi\left(\frac{\frac{1+i}{1+s}-1-\mu}{\sigma}\right)=\alpha\,. \tag{16}$$

A pénzügyi kockázat elemzésénél is felírható a (16) egyenlet átrendezésével az a „szolvencia-függvény” ($f_P(s)$), amelynek értékét nullára állítva kiszámolható az a szolvencia-szorzó (s), amely esetén a szolvencia valószínűsége éppen α értékkel egyezik meg:

$$f_P(s)=s+1-\frac{1+i}{(1+\mu)+\sigma\Phi^{-1}(1-\alpha)}=0\,. \tag{17}$$

A (17) egyenletet megoldva az a szolvencia-szorzó tehát, amelynek értéke esetében a szolvencia valószínűsége α:

$$s^{**}=\frac{1+i}{1+\mu+\sigma\Phi^{-1}(1-\alpha)}-1\,. \tag{18}$$

A szolvencia-szorzó értékét (kizárólag a pénzügyi kockázatot elemezve) tehát az egyes paraméterek a következőképpen befolyásolják (minden egyéb tényező hatását változatlannak feltételezve):

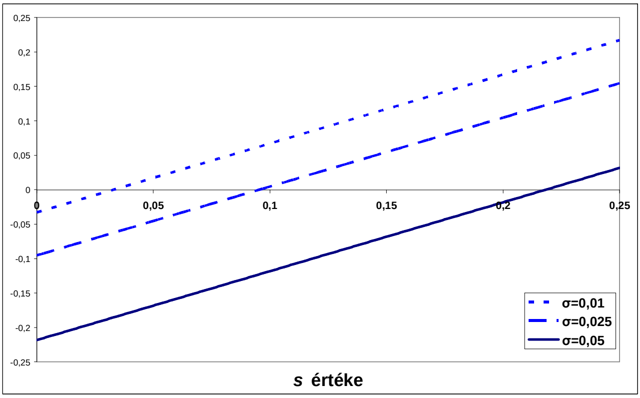
- A magasabb technikai kamatnál nagyobb a szolvencia-szorzó értéke (a biztosítási kockázatnál kapott eredményhez hasonlóan).

- Nagyobb α valószínűségnél magasabb a szolvencia-szorzó értéke (mivel nagyobb szolvencia-tőke szükséges magasabb szolvencia-valószínűség eléréséhez).

- Ha a befektetési hozam várható értéke magasabb, kisebb szolvencia-szorzó is elegendő ugyanakkora szolvencia-valószínűség eléréséhez.

- Minden egyéb tényezőt változatlannak feltételezve nagyobb befektetési kockázat (nagyobb szórás a befektetési hozamnál) nagyobb szolvencia-szorzót tesz szükségessé adott nagyságú szolvencia-valószínűség eléréséhez.

Különböző befektetési kockázatoknál (azonos várható hozam esetén különböző szórású befektetési hozamot tekintve) a (17) alapján definiált „szolvencia-függvényeket” a *3. ábra* szemlélteti (a nagyobb befektetési kockázatnál magasabb az adott megbízhatósági szinthez tartozó szolvencia-szorzó értéke is, a 3. ábra különböző befektetési kockázatokhoz tartozó szolvencia-függvényeket mutat):



3. ábra. Befektetési kockázat és a szolvencia-szorzó. *Forrás:* saját számítások.

Adott optimális szolvencia szorzót jelentő s^{**} érték alapján a különállóan csak a pénzügyi kockázat esetén számított tőkeszükséglet értéke tehát:

$$\frac{nBp}{1+i} \cdot s^{**} . \tag{19}$$

3.3 Szolvencia a biztosítási és a pénzügyi kockázat közös modelljében

Amennyiben a biztosítási és a pénzügyi kockázat együttes hatásának szolvencia-tőkére gyakorolt hatása kerül szóba, szükséges a biztosítási és pénzügyi kockázatot reprezentáló valószínűségi változók kapcsolatával is foglalkozni. Két valószínűségi változó kapcsolatát igen sokféleképpen lehet meghatározni, ezek közül a következőkben egy viszonylag egyszerű esettel foglalkozunk, mivel a fontosabb eredmények már egyszerűbb modellfeltevéseknél is megmutatkoznak. A két (az előzőekben normális eloszlásúnak feltételezett) valószínűségi változó kapcsolatáról azt feltételezzük a továbbiakban, hogy együttes eloszlásuk kétdimenziós normális eloszlás és a kovariancia a két valószínűségi változó esetében nulla. Ez utóbbi feltevés egyébként ezen egyszerű feltevéseket alkalmazó modellben realisztikusnak is tekinthető: ha például a biztosítást életbiztosításnak tekintjük, akkor a biztosítási események számát befolyásoló halandóság és a befektetési hozam között nem feltétlenül szükséges kapcsolatot feltételezni. A nulla kovariancia, azaz nulla korrelációs együttható[10] feltevése esetén a lehetőségekhez képest viszonylag egyszerűek maradnak a képletek, amelyek azonban —ahogyan azt a további eredmények mutatják— még így is érdekes következtetésekhez vezetnek.

Tekintsük tehát a szolvencia valószínűségét abban az esetben, amikor a biztosítási események számát és a befektetési hozamot is az előzőekben

[10]A Szolvencia II szabályok szerint (az elméleti keretnél jóval összetettebb gyakorlati helyzetekben, amikor például az életbiztosítási kockázati modulnál is több almodul van) a piaci kockázati modul és az életbiztosítási vagy a nem-életbiztosítási kockázati modul között 0,25 a számítások során alkalmazandó korreláció értéke.

definiált feltevéseknek megfelelő valószínűségi változónak tekintjük:

$$P\Big(B\xi \le \frac{nBp}{1+i}(1+s)(1+\eta)\Big) = \alpha \,. \tag{20}$$

A (20) képletet átalakítva:

$$P\Big(B\xi - \frac{nBp}{1+i}(1+s)\eta \le \frac{nBp}{1+i}(1+s)\Big) = \alpha \,. \tag{21}$$

Alkalmazva a biztosítási és pénzügyi kockázatot reprezentáló valószínűségi változók közötti kapcsolatra vonatkozó feltevést, meghatározható

$$B\xi - \frac{nBp}{1+i}(1+s)\eta$$

(normális eloszlású) valószínűségi változó várható értéke és varianciája. A várható érték az előzőek alapján:

$$E\Big(B\xi - \frac{nBp}{1+i}(1+s)\eta\Big) = Bnp - \frac{nBp}{1+i}(1+s)\mu \,. \tag{22}$$

A variancia értéke ebben az esetben:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Var}\Big(B\xi - \frac{nBp}{1+i}(1+s)\eta\Big) = \\ &B^2np(1-p) + \Big(\frac{nBp}{1+i}\Big)^2(1+s)^2\sigma^2 \,. \end{aligned} \tag{23}$$

A (22) és (23) képletek alkalmazásával tehát a szolvencia valószínűsége a biztosítási és a pénzügyi kockázat közös modelljében:

$$\Phi\left(\frac{\frac{nBp}{1+i}(1+s) - Bnp + \frac{nBp}{1+i}(1+s)\mu}{\sqrt{B^2np(1-p) + \Big(\frac{nBp}{1+i}\Big)^2(1+s)^2\sigma^2}}\right) = \alpha \,. \tag{24}$$

A különállóan csak a biztosítási illetve pénzügyi kockázattal foglalkozó elemzésekhez hasonlóan ebben az esetben is meghatározható egy olyan „szolvencia-függvény” ($f_{BP}(s)$), amelynek értékét nullára állítva kiszámolható az a szolvencia-szorzó (s), amely esetén a szolvencia valószínűsége éppen α értékkel egyezik meg. Ez a „szolvencia-függvény” azonban a szolvencia-szorzó függvényében nem lineáris:

$$(1+s)^2\Big[\Big(\frac{1+\mu}{1+i}\Big)^2 - \frac{\big(\Phi^{-1}(\alpha)\big)^2\sigma^2}{(1+i)^2}\Big] - 2(1+s)\frac{1+\mu}{1+i} + 1 - \big(\Phi^{-1}(\alpha)\big)^2\frac{1-p}{np} = 0 \,. \tag{25}$$

Ennek az egyenletnek „realisztikusnak” tekinthető paraméterek, vagyis például a gyakorlatban tapasztalhatóan magas n (állománynagyság) esetén van megoldása. A megoldással kapcsolatban a másodfokú egyenlet megoldóképletét tanulmányozva érdekes eredményre lehet jutni. A szolvencia-szorzó értékének meghatározásához megoldandó (25) egyenletnek van megoldása, ha (26) összefüggés teljesül:

$$\left(\frac{1+\mu}{\sigma}\right)^2 + n\frac{p}{1-p} \geq \left(\Phi^{-1}(\alpha)\right)^2 . \tag{26}$$

Az eredmények érdekessége azzal függ össze, hogy a modellben a biztosítási, illetve pénzügyi kockázatot reprezentáló valószínűségi változók várható értéke és varianciája szerepel a (26) feltétel képletében a megbízhatósági szintet jelentő α értékkel összekapcsolva:

$$n\frac{p}{1-p} = \frac{\left(E(\xi)\right)^2}{\mathrm{Var}(\eta)} , \tag{27}$$

$$\left(\frac{1+\mu}{\sigma}\right)^2 = \frac{\left(1+E(\eta)\right)^2}{\mathrm{Var}(\eta)} , \tag{28}$$

A (26) képletben alkalmazva a (27) és a (28) összefüggést a megoldhatóság feltétele a biztosítási és a pénzügyi kockázat közös modelljében (a szolvencia-szorzó számításával kapcsolatban):

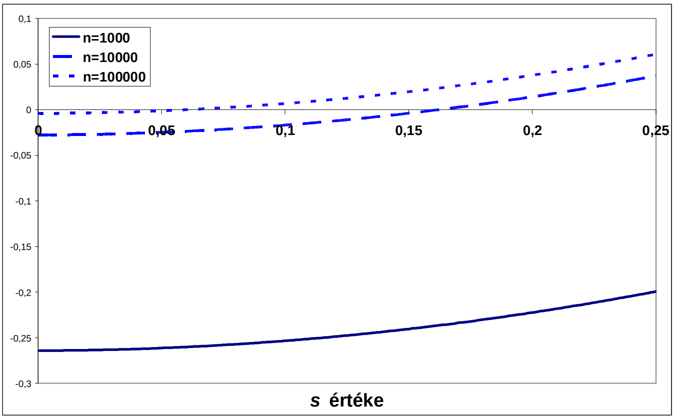
$$\frac{\left(1+E(\eta)\right)^2}{\mathrm{Var}(\eta)} + \frac{\left(E(\xi)\right)^2}{\mathrm{Var}(\xi)} \geq \left(\Phi^{-1}(\alpha)\right)^2 . \tag{29}$$

A kétféle kockázat közös modelljében a tőkeszükséglet-számításnál alkalmazható szolvencia-szorzó (s^{***}) értéke (25) összefüggés megoldásaként:[11]

$$\frac{\frac{1+\mu}{1+i} \pm \Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{\left(\frac{1+\mu}{1+i}\right)^2\frac{1-p}{np} + \left(\frac{\sigma}{1+i}\right)^2 - \left(\frac{\sigma}{1+i}\right)^2\frac{1-p}{np}\left(\Phi^{-1}(\alpha)\right)^2}}{\left(\frac{1+\mu}{1+i}\right)^2 - \left(\Phi^{-1}(\alpha)\right)^2\left(\frac{\sigma}{1+i}\right)^2} - 1 . \tag{30}$$

A szolvencia-szorzó értékét ebben az esetben is befolyásolják az előző két esetben bemutatott paraméterek. Az állomány nagyságának az adott megbízhatósági szinthez tartozó szolvencia-szorzó értékére gyakorolt hatását például a *4. ábra* szemlélteti (a 4. ábrán különböző állomány-nagyságok esetén a (25) képlettel leírható $f_{BP}(s)$ szolvencia-függvények értékei találhatók):

[11] A gyakorlat szempontjából „realisztikusnak” tekinthető paraméter-beállításoknál a két megoldás közül általában csak az egyik nemnegatív (a negatív szolvencia-szorzónak nem lenne közgazdasági értelme). A továbbiakban az elemzésben a két elméletileg lehetséges megoldás közül a nem negatív értékkel foglalkozunk (a Szolvencia II szabályok szerinti eredménnyel való összehasonlításkor).



4. ábra. Az állomány nagysága és a szolvencia-szorzó. *Forrás:* saját számítások.

Nagyobb állományméret tehát ebben az esetben is alacsonyabb szolvencia-szorzó értéket eredményez minden egyéb tényező változatlansága esetében. Az s szolvencia-szorzó változásának hatása a szolvencia-függvényre ebben az esetben nem lineáris (ez a (25) összefüggésnél is megfigyelhető nemlinearitással függ össze). A 4. ábrán az is látható, hogy bizonyos esetekben alacsony állománynagyságnál a díjtartalékhoz viszonyítva jelentős mértékű (a gyakorlatban tapasztaltnál jóval magasabb) lehet az adott megbízhatósági szint eléréséhez szükséges tőke értéke.

Adott optimális szolvencia szorzót jelentő (nem negatív) s^{***} érték alapján az adott megbízhatósági szint eléréséhez szükséges tőke értéke abban az esetben tehát, amikor a számításokban a biztosítási és a pénzügyi kockázatot egyidejűleg figyelembe vesszük:

$$\frac{nBp}{1+i}s^{***} . \tag{31}$$

4 Szolvencia-számítási megközelítések összehasonlítása

A biztosítási és pénzügyi kockázat közös modelljében a (31) alapján számított tőkeszükséglet összevethető azzal az értékkel, amelyet a Szolvencia II szabályok alapján lehet számolni a nulla értékű kovariancia feltételezésével:

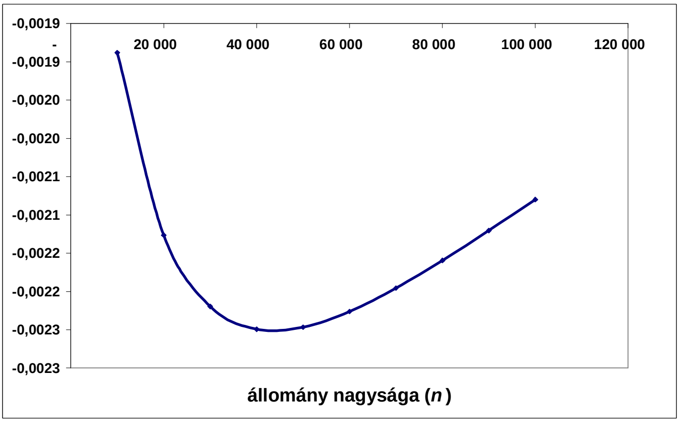
$$\sqrt{\left(\frac{nBp}{1+i}s^{*}\right)^2+\left(\frac{nBp}{1+i}s^{**}\right)^2} . \tag{32}$$

E két tőkeszükséglet érték azonban különböző jellemzőkkel rendelkező biztosítási állományoknál nem feltétlenül lenne közvetlenül összevethető. Az összehasonlításhoz érdemesebb a szolvencia-szorzókat alkalmazni, a Szolvencia II szabályok alapján számítható tőkeszükséglet alapján az ezt a helyzetet jellemző szolvencia-szorzó:

$$s' = \frac{\sqrt{\left(\frac{nBp}{1+i}s^*\right)^2 + \left(\frac{nBp}{1+i}s^{**}\right)^2}}{\frac{nBp}{1+i}} = \sqrt{(s^*)^2 + (s^{**})^2}\,. \tag{33}$$

A következőkben tehát az összes (biztosítási és pénzügyi kockázatot is figyelembe vevő) tőkeszükséglet összehasonlításánál $(s' - s^{***})$ értéket alkalmazzuk. Amennyiben ez a különbség negatív, akkor az adott paramétereknél a Szolvencia II szabályok alapján számított tőkeszükséglet kisebb a biztosító számára, mint a kétféle kockázat közös modelljével számítható tőkeszükséglet (pozitív különbségnél a fordított összefüggés teljesül).

Az $(s' - s^{***})$ különbségre vonatkozó számításos eredmények alapján levonható egyik legfontosabb következtetés, hogy ez általában nem nulla, tehát a kétféle számolás eredménye általában nem egyezik meg. Az összesített tőkeszükséglet kétféle módon kiszámított értéke közötti különbséget számos tényező befolyásolhatja, és a különbséget befolyásoló tényezők hatása meglehetősen változatos lehet. Egy adott paraméterbeállításhoz tartozóan ezt például az állománynagyság (n) változásának hatása alapján az *5. ábra* szemlélteti ($\alpha = 0{,}995$, $p = 0{,}15$, $i = 0{,}01$, $\mu = 0{,}015$, $\sigma = 0{,}01$)[12]:



5. ábra. Az állomány nagysága és a szolvencia-szorzók különbsége. *Forrás:* saját számítások.

Az 5. ábrán szereplő adatok esetében egyébként a tőkeszükségletet jelző szolvencia-szorzó mindkét számolási megközelítésnél csökken, ha az állomány nagysága (n) emelkedik. Az 5. ábra a kétféle módon számolt (az állománynagyság növekedésekor csökkenő) szolvencia-szorzók különbségét mutatja. A szolvencia-szorzók különbsége ebben az esetben mindegyik elemzésben szereplő esetben negatív, ami azt jelenti, hogy az adott paraméterek alapján a Szolvencia II szabályok alapján a nulla korrelációs együttható alkalmazásával összesített tőkeszükséglet értéke alacsonyabb, mint az a tőkeszükséglet-érték,

[12] A Szolvencia II szabályokhoz hasonlóan a megbízhatósági szint a számítások során 0,995.

amely a modellben a biztosítási és a pénzügyi kockázat egyidejű figyelembe vétele esetén számolható. Az 5. ábrán szereplő értékek olyan szempontból is érdekesek, hogy a különbség a kétféle szolvencia-szorzó között egy bizonyos állománynagyságig emelkedik, majd csökkenni kezd. Ez azt jelenti, hogy e példa esetében ha a biztosítási állomány nagyobb, ez egy bizonyos határig azzal jár, hogy a Szolvencia II szabályok alapján egyre alacsonyabb a tőkeszükséglet ahhoz képest, mint amit a kétféle kockázat közös modellje alapján lehet meghatározni, majd egy bizonyos állománynagyság felett, ha az állomány tovább emelkedik, a Szolvencia II szabályok alapján meghatározott tőkeszükséglet kezd közelíteni a kétféle kockázat közös modellje alapján megállapított tőkeszükséglet-szinthez. Az 5. ábra arra utal tehát, hogy még viszonylag egyszerű modellfeltevéseknél sem lehet minden esetben egyértelműen meghatározni, hogy valamely paraméter változásakor emelkedik vagy csökken a tőkeszükségletek közötti különbség.

Az azonos paraméter-beállításokkal, de eltérő módszerrel (a biztosítási és pénzügyi kockázat közös modellje alapján vagy a Szolvencia II szabályok alapján) számolt tőkeszükségletek értékénél az esetleges különbözőség oka a számolási módszerek különbsége: a kétféle kockázat közös modelljénél a számítások nem a külön-külön számolt tőkeszükségletek értékeiből indulnak ki.

A számítások során a paraméterbeállítások módosításával egyébként a szolvencia-szorzók különbsége esetében pozitív érték is elérhető (például ha $\alpha = 0{,}995$, $p = 0{,}01$, $i = 0{,}018$, $\mu = 0{,}015$, $\sigma = 0{,}01$, $n = 100\,000$)[13].

A viszonylag egyszerű feltevések alapján létrehozott modell következtetései közül a leginkább érdekes, hogy a kétféle megközelítés közül melyik eredményez magasabb tőkeszükségletet. További érdekes kérdés, hogy adott relációk (melyik tőkeszükséglet a nagyobb) milyen paraméter-beállítások között fordulhatnak elő. Ahogyan azt a (12), (18), (30) és (33) összefüggések mutatják, még a viszonylag egyszerű modellfeltevések esetében is meglehetősen bonyolult feladat a szolvencia-szorzók összehasonlítása. A továbbiakban az összehasonlítást egyszerűbb esetekben végezzük el.

Tegyük fel először, hogy nincs sem pénzügyi kockázat ($\sigma = 0$), sem pedig biztosítási kockázat ($p = 1$). Ez utóbbi feltevés azzal egyenértékű, hogy a biztosító a befizetett díjra a technikai kamatnak megfelelő kamatot fizet.[14] A kockázatok teljes hiánya esetében a modellben reális elvárás lenne, hogy mindkét megközelítés alkalmazásakor nulla legyen a szolvencia-szorzó (illetve a tőkeszükséglet), de az eredmények nem feltétlenül ezt mutatják (és ezzel egyébként az egyes számítási megközelítések korlátaira is utalnak). E feltevések esetén csak akkor van közgazdaságilag jól értelmezhető megoldás, ha $i \geq \mu$ (különben a biztosítási kockázatra és a pénzügyi kockázatra külön-külön számolt tőkeszükségletek értéke negatív). Az $i > \mu$ feltétel esetén a Szolvencia II szabályok alapján számított szolvencia-szorzó a magasabb,

[13]Ez a paraméterbeállítás egyébként —aktuáriusi szempontból is— problematikus helyzetre utal, mivel a technikai kamat értéke a várható befektetési hozam felett van.

[14]Ez azt jelenti, hogy ekkor az elemzésben egy éves tartamú, egyszeri díjas term fix biztosítás szerepel.

ennek értéke

$$\sqrt{2\Big(\frac{i-\mu}{1+\mu}\Big)^2} > 0\,,$$

szemben a biztosítási és pénzügyi kockázat közös modelljében számolt szolvencia-szorzó

$$\Big(\frac{i-\mu}{1+\mu}\Big)$$

értékével. Érdemes még azt megemlíteni, hogy a kockázatok teljes hiányában akkor nulla a tőkeszükséglet mindkét számítási megközelítés alapján, ha a technikai kamat és a (biztos) befektetési hozam megegyezik ($i = \mu$).

Ha csak az egyik kockázat hiányzik a modellből, akkor a szolvencia-szorzókra kapott megoldások akkor értelmezhetők jól közgazdaságilag, ha $i \geq \mu$, különben a hiányzó kockázat-fajtára számolt tőkeszükséglet negatív. Ha tehát az egyik kockázat hiányzik a modellből és a technikai kamat megegyezik a befektetési hozam várható értékével ($\mu = i$), akkor a kétféle megközelítés azonos szolvencia-szorzót (illetve tőkeszükségletet) eredményez: e feltétel esetén, ha a modellben a biztosítási kockázat hiányzik ($p = 1$), akkor a (közgazdaságilag releváns, nemnegatív) szolvencia-szorzó értéke mindkét esetben

$$\frac{\Phi^{-1}(\alpha)\frac{\sigma}{1+i}}{1-\Phi^{-1}(\alpha)\frac{\sigma}{1+i}}\,,$$

míg ha a pénzügyi kockázat hiányzik ($\sigma = 0$), valamint $\mu = i$ feltétel szintén teljesül, akkor a szolvencia-szorzó értéke mindkét megközelítés alkalmazásakor

$$\Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{\frac{1-p}{np}}\,.$$

Egy további érdekes eredmény abban az esetben adódik a modellben, amikor a kockázatok ugyan nem hiányoznak a modellből, de az egyes kockázatokra külön-külön számítható szolvencia-szorzó (illetve tőkeszükséglet) nulla. Ez a biztosítási kockázatnál akkor fordulhat elő, ha $\Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{(1-p)/(np)} = (\mu - i)/(1+i)$, a pénzügyi kockázatnál pedig akkor jöhet létre ilyen helyzet, ha $\Phi^{-1}(\alpha)\sigma = \mu - i$. Ha e két feltétel egyszerre teljesül, akkor a Szolvencia II szabályok szerint számolt tőkeszükséglet értéke nyilvánvalóan nulla (egyébként bármilyen korrelációs együttható alkalmazása esetén is nulla), míg a két kockázat közös modellje esetében nem nulla a számolható tőkeszükséglet értéke, ebben az esetben a szolvencia-szorzók értékére a megoldás:

$$\frac{\frac{1+\mu}{1+i} \pm \sqrt{2\frac{1+\mu}{1+i}\left(\frac{\mu-i}{1+i}\right)^2}}{2\frac{1+\mu}{1+i}-1} - 1\,. \tag{34}$$

A két elméletileg lehetséges megoldás közül csak az egyik értelmezhető jól közgazdaságilag, mivel ha a technikai kamat és a befektetési hozam várható értéke különbözik[15], akkor a gyakorlati szempontból realisztikusnak tekinthető helyzetekben az egyik megoldás pozitív, míg a másik negatív (ennek bizonyítása a *Függelék*ben található). Ez az eredmény azt mutatja, hogy a biztosítási és pénzügyi kockázat közös modelljében a tőkeszükséglet (illetve szolvencia-szorzó) pozitív lehet olyan esetben is, amikor a Szolvencia II szabályok alapján számolt tőkeszükséglet nulla (amiatt mert a külön számított tőkeszükségletek értéke nulla).

A kétféle megközelítés alkalmazásával számolt tőkeszükségletek értéke tehát nem feltétlenül egyezik meg még abban az esetben sem, amikor a kétféle kockázat közötti korreláció értékét nullának tekintettük (a lehető legegyszerűbb elemzési keret kialakítása érdekében). A kétféle megközelítés esetében a tőkeszükségletek között természetesen akkor is lehetnek különbségek, ha a korreláció értéke nullától különböző a számításokban.

Összességében az eredmények arra utalnak, hogy az összesített tőkeszükséglet számítása során a tanulmányban alkalmazott két módszer közötti különbségeket (illetve a szolvencia-szorzók konkrét értékét) az állománynagyság, az állományon belül a biztosítási esemény bekövetkezési valószínűsége, valamint számos további egyéb, a biztosítók állományát jellemző tényező befolyásolhatja.

5 Az eredmények értékelése

Jelen tanulmány a biztosítók szolvenciájával kapcsolatos tőkeszükséglet számításával foglalkozott. E témával kapcsolatban újdonságnak tekinthetők a Szolvencia II Európai Uniós irányelv szabályai. A tanulmány azt a kérdést elemezte, hogy miként befolyásolják a biztosítók állományának egyes jellemzői a Szolvencia II szabályokhoz hasonló modell-keretben számítható tőkeszükséglet-értékeket. Az elemzés során biztosítási és pénzügyi kockázati modul figyelembe vételére került sor, és a biztosító egészére összesítetten vonatkozó tőkeszükséglet számszerűsítésére kétféle módszert is bemutatott a tanulmány: egyfelől a kétféle kockázat esetében külön-külön számított tőkeszükségleteknek adott korrelációs érték alkalmazásával történő összesítésével, másfelől pedig a kétféle kockázat egyszerre történő modellezésével. Az egyik legérdekesebb eredménynek az tekinthető, hogy a két módszerrel kapott eredmények általában nem egyenlők, vagyis a két módszerrel általában különböző eredmények adódnak a tőkeszükséglet értékekre (az eredmények összehasonlítására a modellben levezetett szolvencia-szorzókat alkalmazva). Az eredmények alapján megállapítható, hogy a kétféle tőkeszükséglet-számítási módszerrel adódó eredmények különbségét számos, a biztosító tevékenységét, illetve az általa vállalt biztosítási illetve pénzügyi kockázatokat jellemző tényező befolyásolja. A tanulmányban bemutatott eredmények arra is utalnak, hogy a biztosítók tőkeszükséglet-számításai, illetve a tőkeszükséglet-számítási mód-

[15] Ha a technikai kamat értéke és a befektetési hozam várható értéke megegyezik és mindkét kockázatfajta esetében külön számolt tőkeszükséglet értéke nulla, ez azt is jelenti, hogy a modellben nincs sem biztosítási, sem pedig pénzügyi kockázat.

szer kiválasztása során érdemes figyelmet fordítani a biztosítási állományra jellemző egyes paraméterek (például az állomány nagysága) szerepének elemzésére.

Függelék

Korrelációs mátrix a Szolvencia II. szabályozásban

	Piaci	Csőd (default)	Életbizt.	Egészségbizt.	Nem-életbizt.
Piaci	1	0,25	0,25	0,25	0,25
Csőd (default)	0,25	1	0,25	0,25	0,5
Életbizt.	0,25	0,25	1	0,25	0
Egészségbizt.	0,25	0,25	0,25	1	0
Nem-életbizt.	0,25	0,5	0	0	1

Forrás: Directive 2009/138/EC [1]

A VaR számítás alkalmazása a modellben

Az eredmények levezetése során figyelembe vesszük a binomiális eloszlás normális eloszlással közelíthetőségét, így a következőkben a normális eloszlás esetével foglalkozunk. A VaR értékek normális eloszlású valószínűségi változó esetén a következő képlet alapján is számíthatók (*McNeil et al.* [2005], 39. o.):

$$\mathrm{VaR}(\alpha) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha) ,$$

ahol μ a normális eloszlás várható értékét, σ a normális eloszlás szórását, $\Phi^{-1}(z)$ pedig a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének inverz függvényét jelentik.

Tekintsük a továbbiakban az elméleti modellben szereplő jelöléseket, illetve $B\xi$ valószínűségi változót, amely biztosítási kockázat figyelembevétele esetén a biztosító egy időszak múlva esedékes kötelezettségeinek értékét mutatja. A $B\xi$ valószínűségi változó esetében a várható érték a modellfeltevések alapján $E(B\xi) = np$, a variancia pedig $\mathrm{Var}(B\xi) = np(1-p)$. Amennyiben a biztosítónál nem számolunk pénzügyi kockázattal (az egy időszak alatt elért befektetési hozam értéke r), akkor α megbízhatósági szint eléréséhez szükséges, a (12) képlet szerint számolható s^* alkalmazása esetén egy év múlva a biztosító kötelezettségeinek és tőkéjének együttes értéke:

$$(1+s^*)\frac{nBp}{1+i}(1+r) = Bnp + B\sqrt{np(1-p)}\Phi^{-1}(\alpha) .$$

A biztosító kötelezettségeinek és saját tőkéjének értéke összesen tehát $B \cdot \xi$ valószínűségi változó esetében az α megbízhatósági szinthez tartozó VaR értékének felel meg:

$$Bnp + B\sqrt{np(1-p)}\Phi^{-1}(\alpha) = E(B\xi) + \sqrt{\mathrm{Var}(B\xi)}\Phi^{-1}(\alpha) .$$

A szolvencia-szorzók számítása

A következőkben a számítások áttekinthetősége érdekében a következő jelöléseket alkalmazzuk:

$$A = \Phi^{-1}(\alpha)\,, \qquad M = \frac{1+\mu}{1+i}\,, \qquad K = \frac{\sigma}{1+i}\,, \qquad Y = \sqrt{\frac{1-p}{np}}\,.$$

A külön-külön a biztosítási illetve pénzügyi kockázat esetén, valamint a biztosítási és pénzügyi kockázat közös modelljében számolható szolvencia-szorzók e jelölések alkalmazásával:

$$s^{*} = \frac{AY+1-M}{M}$$
$$s^{**} = \frac{1-M+AK}{M-AK}$$
$$s^{***} = \frac{M \pm A\sqrt{M^2Y^2+K^2-K^2Y^2A^2}}{M^2-A^2K^2} - 1\,.$$

A biztosítási kockázat esetében a szolvencia-szorzó értéke akkor nem negatív, ha $AY \geq M-1$, míg a pénzügyi kockázat esetében a szolvencia-szorzó akkor nem negatív, ha $AK \geq M-1$. A kétfajta kockázatnál külön-külön számított tőkeszükséglet (illetve szolvencia-szorzó) akkor nulla, ha $AY = M-1$ illetve $AK = M-1$. Feltéve tehát, hogy a kockázatoknál külön-külön számított tőkeszükséglet értéke nulla (tehát a Szolvencia II szabályok alapján számolt tőkeszükséglet is nulla), a biztosítási és pénzügyi kockázat közös modelljében számolt szolvencia-szorzók értéke:

$$\frac{M \pm A\sqrt{M^2\left(\frac{M-1}{A}\right)^2 + \left(\frac{M-1}{A}\right)^2 - A^2\left(\frac{M-1}{A}\right)^4}}{M^2-(M-1)^2} - 1\,.$$

Átalakítással a szolvencia-szorzók értéke:

$$\frac{M \pm A\frac{1}{A}\sqrt{(M^2+1)(M-1)^2-(M-1)^4}}{M^2-(M^2-2M+1)} - 1 =$$
$$= \frac{M \pm \sqrt{2M^3-4M^2+2M}}{2M-1} - 1 =$$
$$= \frac{M \pm \sqrt{2M(M-1)^2}}{2M-1} - 1\,.$$

A kapott eredménybe M értékét visszahelyettesítve a szolvencia-szorzók lehetséges értéke a biztosítási és pénzügyi kockázat közös modelljében:

$$\frac{\frac{1+\mu}{1+i} \pm \sqrt{2\frac{1+\mu}{1+i}\left(\frac{\mu-i}{1+i}\right)^2}}{2\frac{1+\mu}{1+i}-1} - 1\,.$$

Tekintsük egyenként a két lehetséges megoldást. A gyakorlati szempontból realisztikus helyzetekben $(1+\mu)/(1+i) > 1/2$, ugyanakkor μ és i értéke különbözhet. A magasabb érték a két elméletileg lehetséges megoldás közül pozitív, ha $\mu > i$ és negatív, ha $\mu < i$ (a képletekben az átláthatóság megkönnyítése érdekében az M jelölést alkalmazva):

$$\frac{M + \sqrt{2M(M-1)^2}}{2M-1} - 1 = \frac{(M-1)(\sqrt{2M}-1)}{2M-1}\,.$$

A két elméletileg lehetséges megoldás közül az alacsonyabb értékű negatív, ha $\mu > i$, és pozitív, ha $\mu < i$, mivel:

$$\frac{M - \sqrt{2M(M-1)^2}}{2M-1} - 1 = \frac{-(M-1)(\sqrt{2M}+1)}{2M-1}$$

Irodalom

1. *Directive 2009/138/EC of the European Parliament and of the Council* of 25 November 2009 on the taking-up and pursuit of the business of Insurance and Reinsurance (Solvency II)
2. CRO Forum [2009]: *Calibration recommendation for the correlations in the Solvency II standard formula*, 2009. december 10.
3. CEA [2006]: *CEA Working Paper on the risk measures VaR and TailVaR.*
4. McNeil, A. J. – Frey, R. – Embrechts, P. [2005]: *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools.* Princeton University Press.
5. PSZÁF[2010]: *A Felügyelet 2010. évi első kockázati jelentése*, 2010. április, www.pszaf.hu

COMMON EFFECT OF INSURANCE AND FINANCIAL RISK
IN THE SOLVENCY CALCULATION OF INSURERS

The new Solvency II directive results in a new environment for calculating the solvency capital requirement of insurance companies in the European Union. By modelling insurance companies the study analyses the impact of certain characteristics of insurance population on the solvency capital based on Solvency II rules. The model includes insurance and financial risk module by calculating solvency capital for the given risk types separately and together, respectively. Based on the theoretical results the difference between these two approaches can be observed. Based on the results the analysis of factors influencing the differences is also possible.