

## TÁBLÁZATOK ADATVÉDELME ÉS GRÁF OPTIMALIZÁCIÓ<sup>1</sup>

FARAGÓ MIKLÓS

*Központi Statisztikai Hivatal*

Ebben a cikkben az adatvédelem egy régi problémáját helyezzük új megvilágításba. Két dimenziós táblázatok publikálásakor az adatszolgáltató bizonyos érzékeny cellákat „letakar”, azonban e cellák némelyikének tartalma a közölt többi cellaértékből és a sor- és oszlopösszesenekből esetenként kiszámítható. Cellahelyek egy halmazát védettnek nevezzük, ha azt letakarva egyik cella értéke sem számítható ki egyértelműen. A cellahelyeket rácspontokként kezelve először elemi eszközökkel karakterizáljuk a védett halmazokat, mint ortogonális sokszögek csúcshalmazainak unióit. A védettségre több szükséges és elégséges feltételt is adunk, feltárjuk a védett halmazok hierarchiáját és érdekes tulajdonságaikat. Ha egy halmaz nem védett, akkor ki kell egészíteni újabb, minimális számú, másodlagosan letakart elemmel. Az irodalomban ezt „secondary suppression”-nak nevezik. Gusfield (1988) és mások megoldották az optimalizációs problémát úgy, hogy a táblázat cellahely halmazait bijektíve megfeleltették páros gráfoknak és az így előállt feladatra —bővítsünk egy páros gráfot minimális számú él hozzáadásával hídélmentes páros gráffá— lineáris idejű algoritmust adtak. Mi egy új, egyszerű, lineáris idejű algoritmust adunk erre a gráf bővítési feladatra.

### Bevezetés

Az adatvédelem egyik tipikus problémája, hogy egy számokat tartalmazó táblázat kibocsátója a táblázat néhány elemét nem kívánja közölni és ezért azokat „letakarja” (egy egyezményes karaktert, pl. „x”-et ír a helyébe). Azonban mivel a sorok, illetve oszlopok összegét, a „peremeket” hiánytalanul mellékeli, a letakart számok a peremekből esetleg mégis egyértelműen kiszámíthatók, hiszen minden letakart elemet tartalmazó sorra és oszlopra fel lehet írni egy-egy egyenletet. A felfedhetőséget, azaz az egyértelmű kiszámíthatóságot viszont meg lehet akadályozni pótlólagosan kiválasztott elemek letakarásával, ezzel „megvédve” az eredeti számokat. A cél, mint általában az adatvédelemben, az egyértelműség megakadályozása. Ha a letakart cella csupán egyetlen értéket vehet fel, a letakarás értelmetlen. A probléma első látásra is egészerértékű lineáris algebrai megközelítést sugall, és valóban ez is a legelterjedtebb kezelési módja, azonban semmiképp sem a leggyorsabb.

Az első feladat megállapítani a letakart cellákról, hogy van-e közöttük felfedhető. Ha igen, akkor újabb elemeket kell letakarni („secondary suppres-

<sup>1</sup>Beérkezett: 2010. március 16. E-mail: faragomik@t-online.hu.

sion”), lehetőleg minél kevesebbet, úgy, hogy a kibővített cellahalmaz egyik értéke se legyen egyértelműen kiszámítható. A táblázat celláihoz bizonyos esetekben súlyokat lehet rendelni, melyek a cella letakarásával elvesző információt mérik. Ilyenkor érdemes a másodlagosan letakart cellák számának összege helyett a súlyok összegét minimalizálni. Esweran és Tarjan (1976) belátták, hogy — már két különböző súly esetén is — a probléma (gráfelméleti megfelelője) NP-teljes. Szokásos még a minimum feladathoz csatolni azt a gyakorlatban általában teljesülő feltételt, hogy a letakart számok nem-negatívak. Ekkor egyes felfedhetetlen cellák nyilván felfedhetővé minősülnek. A dolgot ezt a feltételt nem tárgyalja.

Kiderül, hogy a cellák felfedhetősége nem függ a cellák értékeitől, csak a cellahelyek halmazának „alakjától”. Az 1. fejezet a védett halmazok geometriai karakterizálásával és tulajdonságaik feltérképezésével foglalkozik, a 2. fejezet pedig —gráfelméleti eszközökkel— egy lineáris idejű algoritmust ad az optimális bővítésre.

Gyakorlati szempontból szerencsésnek bizonyult az a körülmény, hogy a szerző „későn” vette észre a cellahely halmazok és a páros gráfok közötti megfelelést, így a védett halmazok karakterizációját közvetlenül adta meg, ellentétben más szerzőkkel (Gusfield, 1988). Ez pedig annyira egyszerűnek és szemléletesnek bizonyult, hogy alkalmazásával egy szokásos méretű táblázat közreadója, pl. egy statisztikai hivatal dolgozója gráfelméleti ismeretek és speciális szoftverek nélkül is könnyen, „szemre”, megtalálja a védendő halmaz valóban védett elemeinek jó részét. A többit pedig egy az optimumhoz közeli méretű védett halmazzal lefedi.

## 1 A védett halmazok

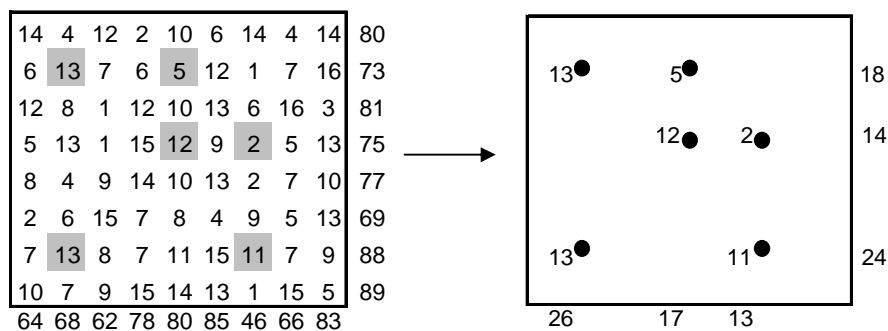
Könnyű belátni, hogy ha egy legalább  $2 \times 2$ -es táblázat összes „belső” elemét letakarjuk, akkor egyikük értéke sem számítható ki egyértelműen a sor- és oszlopösszesenekből.

Vizsgáljunk meg például egy  $2 \times 2$ -es táblázatot:

$$\begin{array}{cc|c} \bullet & \bullet & \circ \\ \bullet & \bullet & \circ \\ \hline \circ & \circ & \end{array} \quad \begin{array}{cc|c} 100 & 100 & 200 \\ \hline 100 & 100 & 200 \\ 200 & 200 & \end{array} \quad \begin{array}{cc|c} 101 & 99 & 200 \\ \hline 99 & 101 & 200 \\ 200 & 200 & \end{array}$$

Világos egyrészt, hogy ha a négy belső elem valamelyikét nem takarjuk le, akkor a letakartak mind egyértelműen kiszámíthatók egy-egy kivonással. Másrészt ha mindet letakarjuk, akkor egyiket sem lehet egyértelműen kiszámítani, ugyanis ha egy számnégyes „kiadja” az összeseneket, akkor az a számnégyes is, amelyet úgy kapunk, hogy az eredeti egyik „átlóját” alkotó két elemet megnöveljük egy tetszőleges  $c$  konstanssal, a másik kettőt pedig  $-c$ -vel.

Ez az észrevétel a dolgozat kiindulópontja. Az 1. ábra általánosan mutatja a problémát. Jó lenne, ha a letakart, szürkével jelzett számok egyike sem lehetne egyértelműen rekonstruálható a többiből, beleértve az összeseneket is.



1. ábra.

A szürke cellák tartalmának egyértelműségéhez elegendő vizsgálni a jobb oldali ábrát, a többi szám nyilván redundáns. Amint azt látni fogjuk, a letakart hat cella mindegyike felvehet több értéket, azonban, ha a 11-est tartalmazó cellát nem takarnánk le (ekkor a 24 és 13 összesen értékek helyett rendre 13 és 2 állna), akkor a többi cella egyetlen értéket vehetne fel, azt, amelyet tartalmaz. Valójában bármelyik cellát felfedve, a másik öt egyértelműen adódik.

A jobb oldali ábra ráadásul már tükrözi azt a pontthalmaz szemléletet, amelyet alkalmazni fogunk, ugyanis hamarosan kiderül, hogy a jobb oldali ábrán megmaradt számok is érdektelenek: csak a —cellákhoz rendelt— pontok egymáshoz viszonyított helyzetétől függ, hogy a cellák tartalma egyértelmű-e vagy sem — bármilyen összesenek esetén.

**1. Definíció.** Egy adott méretű  $m \times n$ -es táblázat ( $m, n > 1$ ) elemhelyeit *pontoknak* nevezzük. Ezeket sor-oszlop indexpárjuk tehát egyértelműen meghatározza. Pontthalmazokat fogunk vizsgálni, azaz az  $X = \{(u, v) : u = 1, 2, \dots, m; v = 1, 2, \dots, n\}$  halmaz részhalmazait. Egy  $A \subseteq X$  *ponthalmaz kitöltése* az egész táblázat számokkal való feltöltése úgy, hogy az  $A$ -n kívüli elemeket 0-val töltjük ki, azaz a következő függvény:  $f^A : X \rightarrow R$ , melyre  $f^A(a) = 0$  ( $a \notin A$ ). Az  $f^A(a)$  ( $a \in A$ ) valós szám az  $a$  *elem értéke*. Gyakran elhagyjuk a felső indexet, ha  $A$  egyértelműen adott. Az  $A$  halmaz egy  $f^A$  kitöltésének *peremoszlopa* (a „sorösszesenek”) az az  $m$  hosszúságú vektor, amelynek  $i$ -edik eleme ( $i = 1, \dots, m$ ) a táblázat  $i$ -edik sorába eső  $A$ -beli elemek értékeinek összege (tehát azokban a sorokban, amelyek nem tartalmazznak  $A$ -beli elemeket, a peremoszlopban nullák állnak). Hasonlóan definiáljuk  $f^A$  *peremsorát*, amely tehát  $A$  azonos oszlopba eső elemei értékének szummáiból áll. Az  $f^A$  kitöltés *pereme* a peremoszlopból és peremsorból álló  $P = (P_1, P_2)$  rendezett pár. Azt mondjuk, hogy az  $f^A$  kitöltés  $P$ -*peremű kitöltése*  $A$ -nak. Ha a perem csak 0-kat tartalmaz, akkor  $f^A$  *0-peremű kitöltése*  $A$ -nak.

Természetesen bizonyos ponthalmazokra bizonyos  $(P_1, P_2)$  párok semmilyen kitöltésnek nem peremei, mások meg többnek is. Mi a másokat kedveljük. Hiszen ha egy peremhez egy elemnek több különböző értéke is tartozik, akkor a táblázat ezen helye „védett a perem mellett”.

**2. Definíció.** Az  $a \in A$  pontot védi  $A$  a  $P$  perem mellett, ha van  $A$ -nak legalább két  $P$ -peremű kitöltése úgy, hogy  $a$  különbözőképpen van kitöltve.

Az alábbiakban a nagyon egyszerű tételek esetében „Tétel” helyett „Állítás”-t írunk. A következő állításból kiderül, hogy a védelem mindig „univerzális”.

**1. Állítás.** Ha az  $a$  pontot védi  $A$  valamely  $P$  perem mellett, akkor bármely másik  $P'$  perem mellett is.

Valóban, legyen  $f_1$  és  $f_2$  két  $P$ -peremű kitöltése  $A$ -nak, melyekre  $f_1(a) \neq f_2(a)$ , továbbá legyen valamely  $g_1$  kitöltés pereme  $P' \neq P$ . Akkor  $g_2 = g_1 + f_2 - f_1$  is  $P'$  peremű kitöltés, mivel  $f_2 - f_1$  0-peremű, és nyilván  $g_2(a) \neq g_1(a)$ . Értelmes tehát a következő definíció:

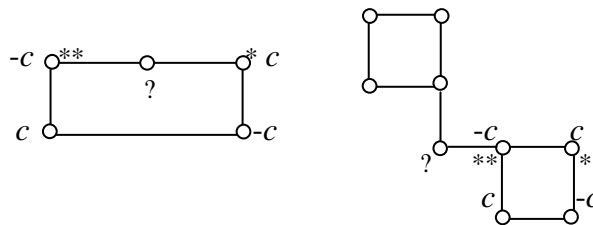
**2'. Definíció.** Az  $a \in A$  pontot védi  $A$ , ha van  $A$ -nak legalább két azonos peremű kitöltése úgy, hogy  $a$  különbözőképpen van kitöltve. Az  $A$  halmaz védi egy  $B$  részhalmazát, ha  $B$  minden pontját védi. Ha tehát  $a$ -t védi  $A$  és az  $X$  táblázatban  $A$ -t „letakarjuk”, akkor  $a$ -t nem lehet egyértelműen kiszámítani semmilyen peremből.

**2. Állítás.** Az  $a \in A$  pontot akkor és csak akkor védi  $A$ , ha létezik  $A$ -nak 0-peremű kitöltése úgy, hogy a helyére tetszőleges, előre adott, 0-tól különböző számot (például 1-et) írunk.

Valóban, ha  $f_1$  és  $f_2$  a 2' Definícióban szereplő két kitöltése  $A$ -nak, azaz megegyező pereműek és  $f_1(a) \neq f_2(a)$ , akkor  $f = c(f_1 - f_2) / [f_1(a) - f_2(a)]$  ( $c \in R$ ) egy 0-peremű kitöltés, melyre  $f(a) = c$ . Fordítva pedig, ha  $f$  egy 0-peremű kitöltése  $A$ -nak, melyre  $f(a) \neq 0$ , akkor bármely  $c \neq 1$ -re  $cf$  is 0-peremű kitöltése  $A$ -nak és  $cf(a) \neq f(a)$ .

**3. Definíció.** Az  $A$  halmaz védett, ha védi önmagát. Ez azt jelenti, hogy letakarásával egyik eleme sem számítható ki a peremből.

Az alábbi két halmaz összes eleme védett egy kivétellel, a ?-lel jelölt pontok ugyanis egyetlen értéket vehetnek csupán fel, akárhogyan töltjük a többi. Például bármely 0-peremű kitöltése esetén, ha a \*-gal jelölt elem értéke  $c$ , akkor a \*\*-gal jelölt elem csak  $-c$  lehet, tehát a ? helyére mindig csak 0 kerülhet.



2. ábra.

Nyilvánvalóak továbbá az alábbi állítások:

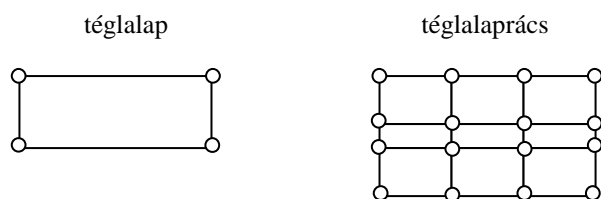
**3. Állítás.** Ha  $a$  egyedüli  $A$ -beliként áll egy sorban, akkor  $A$  nem védi  $a$ -t. Tehát kell, hogy legyen még vele egy sorban és egy oszlopban is egy-egy elem. Sőt, ezeket is védeni kell, ezért:

**4. Állítás.** Legalább 4 pontból kell állnia  $A$ -nak ahhoz, hogy legyen védett eleme.

**5. Állítás.** Ha  $a$ -t védi  $A$ , akkor bármely  $A$ -nál bővebb halmaz is védi. Ha  $a$ -t védi  $A$ , de  $b$ -t ( $b \in A$ ) nem védi, akkor  $A \setminus \{b\}$  is védi  $a$ -t. Az állítás első feléből következik:

**6. Állítás.** Védett halmazok uniója is védett, mert ha  $A$  és  $B$  egyaránt védi minden saját elemét, akkor az 5. Állítás miatt  $A \cup B$  is védi őket.

**4. Definíció.** Téglalapnak nevezzük azt a pontnégyest, amelynek elemei pontosan két sorba és két oszlopba esnek. Téglalaprácsnak nevezzük azt a  $k \cdot l$  pontból álló ( $k, l > 1$ ) halmazt, amelynek elemei  $k$  számú sorban és  $l$  számú oszlopban helyezkednek el.



3. ábra.

**7. Állítás.** Ha  $A$  téglalap, akkor védett.

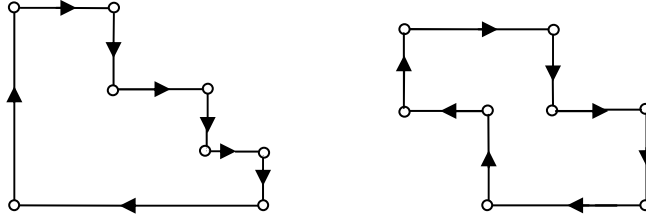
Ugyanis tekintsük  $A$  egy kitöltését. Ekkor ha a főátló két végpontjának értékét  $c$ -vel megnöveljük, a másik két pontét pedig  $c$ -vel csökkentjük, akkor a perem nem változik.

**8. Állítás.** Egy téglalaprács is védett, mivel téglalapok uniója.

A téglalap általánosításaként bevezetünk egy alapvető halmaztípust.

**5. Definíció.** Egy  $A$  halmaz *ciklus*, ha pontjai egy  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ismétlődés nélküli sorozatba rendezhetők úgy, hogy bármely  $(a_i, a_{i+1}, a_{i+2})$  egymást követő elemhármására ( $i = 1, \dots, n-1$  és  $a_{n+1} = a_1$ ) fennáll, hogy  $a_i$  és  $a_{i+1}$  egy sorban (oszlopban) van,  $a_{i+1}$  és  $a_{i+2}$  pedig egy oszlopban (sorban).

Azaz  $A$  egy gráfnak tekinthető, mégpedig egy olyan körnek, amelynek egymást követő élei —melyek az egymást követő pontokat kötik össze— a táblázatban merőlegesek egymásra. Ha a fenti definícióban nem kötjük ki  $a_{n+1} = a_1$ -et, akkor az  $A$  halmaz egy út  $a_1$  és  $a_{n+1}$  között.



4. ábra.

**1. Tétel.** Ha az  $A$  halmaz ciklus, akkor védett.

*Bizonyítás.* Legyen adott  $A$  egy  $f_1$  kitöltése, azaz adottak az  $f_1(a_i)$  értékek ( $a_i \in A$ ,  $i = 1, \dots, n$ ). Most konstruálunk egy másik ugyanolyan peremű kitöltését  $A$ -nak, amely minden  $a_i$ -hoz egy másik értéket rendel. Adjunk hozzá  $A$  értékeihez —a kör mentén haladva— váltakozva  $c$ -t és  $-c$ -t ( $c > 0$ ), azaz legyen  $f_2(a_i) = f_1(a_i) + c(-1)^{i+1}$ , ( $i = 1, \dots, n$ ). Könnyen látható, hogy  $f_2(a_1)$  és  $f_2(a_n)$  kitöltése mindig különbözik. És mivel  $A$  peremoszlopának minden eleme  $f_2(a_{2k+1}) + f_2(a_{2k+2})$  alakú kifejezések —azaz  $f_2(a_{2k+1}) + f_2(a_{2k+2}) + c - c$  értékűek— összegeként áll elő (ha például vízszintesen indultunk el  $a_1$ -ből), tehát a peremoszlop (és hasonlóan a perem-sor) értéke megegyezik a két kitöltés esetén.  $\square$

**6. Definíció.** Az  $A$  halmaz egy  $f$  kitöltése *tökéletes kitöltése*  $A$ -nak, ha 0-peremű kitöltés és  $f(a) \neq 0$ ,  $\forall a \in A$ .

**2. Tétel.** Egy  $A$  halmaz akkor és csak akkor védett, ha van tökéletes kitöltése.

*Bizonyítás.* A 2. Állítás szerint elég csak az egyik irányt igazolni. Legyen  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  védett halmaz. Ekkor léteznek  $A$ -nak olyan 0-peremű  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , kitöltései, melyekre  $f_i(a_i) \neq 0$ ,  $a_i \in A$ . A  $g = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n$  ( $c_i \in R$ ) kitöltés tökéletes, feltéve, hogy a  $c_i$  együtthatók úgy vannak választva, hogy  $c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_k f_k$  és  $c_{k+1} f_{k+1}$  az  $\{a_1, a_2, \dots, a_{k+1}\}$  halmazhoz két diszjunkt halmazt rendel ( $k = 1, \dots, n-1$ ). Ez elérhető például akkor, ha  $c_{k+1}/c_k$  elég nagy ( $k = 1, \dots, n-1$ ). Ha ugyanis  $c_{k+1} f_{k+1}$  az  $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$  helyeken felvett legkisebb abszolút értékű zérustól különböző értéke nagyobb, mint  $c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_k f_k$  legnagyobb abszolút értékű felvett értéke, akkor  $c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_k f_{k+1}$  zérustól különbözik ezeken a helyeken. Egy ennél jóval „gazdaságosabb” konstrukciót tartalmaz a 6. Tétel 2. következménye.  $\square$

**7. Definíció.** Egy védett halmaz *minimális védett halmaz*, ha nincs védett valódi részhalmaza.

**3. Tétel.** Egy védett halmaz akkor és csak akkor minimális védett halmaz, ha minden tökéletes kitöltése egyetlen tökéletes kitöltés skalárszorosa.

*Bizonyítás.* Egyrészt legyenek  $A$  és  $B$ ,  $B \subset A$  védett halmazok és  $f^A$ ,  $f^B$  egy-egy tökéletes kitöltésük. Ekkor bármely olyan  $c \in R$ -re, amelyre teljesül,

hogy minden  $a \in A$ -ra  $cf^B(a) \neq -f^A(a)$ ,  $cf^B + f^A$   $A$ -nak egy  $f^A$ -tól „lényegesen különböző” (nem skalárszorzóban eltérő) tökéletes kitöltése. E feltételt kielégíti minden elég nagy  $c$ , mégpedig:  $c > \max_{a \in A} f^A(a) / \min_{a \in A} f^B(a)$ .

Másrészt legyen  $f$  és  $g$  két lényegesen különböző tökéletes kitöltése  $A$ -nak. Ekkor tetszőleges rögzített  $a \in A$ -ra alkalmas  $c$  esetén  $f(a) = cg(a)$  és létezik  $a' \in A$ , melyre  $f(a') \neq cg(a')$ . Így a 0-peremű  $h = f - cg$  kitöltésre teljesül  $h(a) = 0$  és  $h(a') \neq 0$ . Tehát  $A$ -nak azon  $A_{a,a'}$  részhalmaza, amelyhez  $h$  0-tól különböző értéket rendel, nemüres és  $A$ -nak valódi része. És mivel  $h$  tökéletes kitöltése  $A_{a,a'}$ -nek, a 2. Tétel szerint  $A_{a,a'}$  védett halmaz. Tehát  $A$  nem minimális.  $\square$

**8. Definíció.** Az  $A$  és  $B$  halmazokat *független halmazoknak* nevezzük, ha  $A$  elemei „nem látják”  $B$  elemeit, azaz nincs olyan  $a \in A$  és  $b \in B$ , amelyek egy sorba, vagy egy oszlopba esnek. Egy halmaz *összefüggő*, ha nem bontható fel független halmazok uniójára.

Független halmazok tehát diszjunktak is. Nyilvánvaló, hogy az  $A$  halmaz akkor és csak összefüggő, ha bármely két pontja között van  $A$  pontjaiból álló út. (Lásd az 5. definíció végét.)

**9. Definíció.** Egy halmazt *páros halmaznak* nevezünk, ha az  $X$  táblázat minden sorából és oszlopából páros számú elemet tartalmaz.

**9. Állítás.** Minden ciklus konstrukciójából adódóan összefüggő és páros.

**10. Állítás.** Ha  $C$  páros és  $C = A \cup B$ ,  $A$  és  $B$  függetlenek, akkor  $A$  és  $B$  is páros halmaz.

Ha ugyanis vagy  $A$  vagy  $B$  nem páros és függetlenek, akkor  $C$  sem lehet páros.

**11. Állítás.** Ha  $C$  védett és  $C = A \cup B$ ,  $A$  és  $B$  függetlenek, akkor  $A$  és  $B$  is védett halmaz.

A 2. Tételből, hiszen ha például  $A$ -nak nincs tökéletes kitöltése, akkor  $A \cup B$ -nek sincs.

Az alábbi tétel azt mutatja, hogy a „ciklus” és a „páros” tulajdonság lényegében ekvivalensek.

**4. Tétel.** Az  $X$  táblázat egy  $A$  halmaza akkor és csak akkor páros, ha előáll diszjunkt ciklusok uniójaként. Ekkor tehát  $A$  védett.

*Bizonyítás.* A 9. Állítás miatt és mert diszjunkt páros halmazok uniója páros halmaz, csak az egyik irányt kell igazolni, továbbá a 11. Állítás miatt elegendő a tételt összefüggő  $A$  halmazra belátni.

Legyen tehát  $A$  összefüggő páros halmaz és kezdjünk el lépdelni az elemein egy utat bejárva, azaz egy tetszőleges  $a_1$ -ből —mondjuk vízszintesen— kiindulva ismétlés nélkül és váltakozó irányban, azaz  $a_i$  és  $a_{i+1}$  minden  $i \in N$ -re vagy egy sorban vagy egy oszlopban van, azonban  $a_i$ ,  $a_{i+1}$  és  $a_{i+2}$  már nem esik sem egy sorba sem egy oszlopba. Ez a sorozat  $A$  páros volta miatt addig nem akad el, amíg  $a_{n+1} = a_1$ -hez nem értünk —függőlegesen. Mivel

a „felsorolt”  $B_1$  halmaz páros, sőt ciklus, a maradék  $A \setminus B_1$  is páros. Így ennek bármelyik eleméből kiindulva az eljárás megismételhető és folytatható egészen addig, amíg  $A$  elemei el nem fogynak. A keletkezett  $B_j$  halmazok ciklusok, páronként diszjunktak, továbbá teljesül  $A = B_1 \cup B_2 \cup \dots$   $\square$

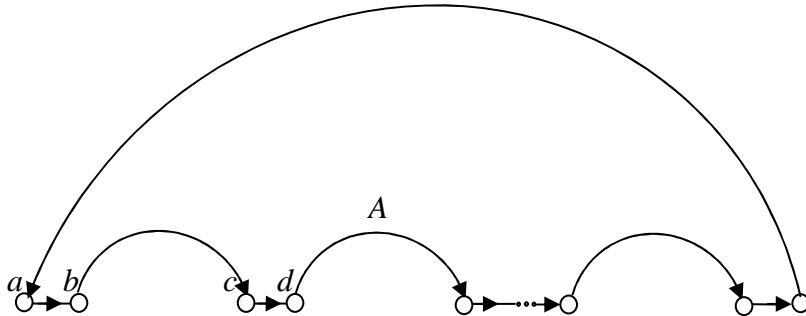
**10. Definíció.** Ha egy ciklus minden sora és oszlopa pontosan két elemet tartalmaz, akkor azt mondjuk, hogy a ciklus  $C^2$ -típusú. Ha egy ciklus nem  $C^2$ -típusú, azaz van legalább négy elemet tartalmazó sora vagy oszlopa, akkor  $C^{2+}$ -típusú.

*Megjegyzés.* Minden  $C^2$ -típusú ciklus alkalmas sor- és oszlop-cserékkel lépcső alakú ortogonális sokszögekbe vihető (lásd a 4. ábra bal oldali halmazát).

**5. Tétel.** Egy ciklus akkor és csak akkor bontható fel két diszjunkt ciklus rész uniójára, ha  $C^{2+}$ -típusú.

*Bizonyítás.* a) Ahhoz, hogy a diszjunkt  $A$  és  $B$  ciklusok uniója ciklus legyen, szükséges, hogy lássák egymást. Ekkor viszont lesz olyan sor vagy oszlop, amelyben  $A \cup B$ -nek legalább négy eleme van.

b) Essenek a  $C^{2+}$ -típusú  $C$  halmaz  $a, b, c, d, \dots$  elemei egy sorba. Könnyű megmondani, hogy  $C$  és az őt definiáló kör az általánosság megszorítása nélkül ábrázolható az alábbi alakba, ahol az ívek ciklusokat jelölnek.



5. ábra.

Ha az 5. ábrán látható kis ívek vagy a nagy ív bármelyikét — azaz az azt alkotó pontok együttesét, beleértve a két végpontot is —  $A$ -val jelöljük, akkor  $A$  és  $B = C \setminus A$  egyaránt ciklus.  $\square$

*Megjegyzés.* Ráadásul az  $a, b, c, d, \dots$  elemek közül is került mindkét halmazba (páros számú) elem.

**Következmény 1.** Tetszőleges ciklus és így tetszőleges páros halmaz előáll  $C^2$ -típusú páronként diszjunkt ciklusok uniójaként. (Kivéve persze, ha maga is  $C^2$ -típusú.) Ezek már nem bonthatók tovább ciklusokra.

Az utóbbi két tételből és az iménti megjegyzésből ez közvetlenül adódik.



*Megjegyzés.* Ha egy ciklusból elhagyunk egy ciklust, nem biztos, hogy a megmaradt rész is ciklus (könnyen adható egy 12 elemű példa a kiinduló halmazra), azonban a maradék nyilván diszjunkt ciklusok uniója, hiszen páros halmazból párosat vettünk el.

**Következmény 2.** *A minimálisan védett halmazok pontosan a  $C^2$ -típusú ciklusok.*

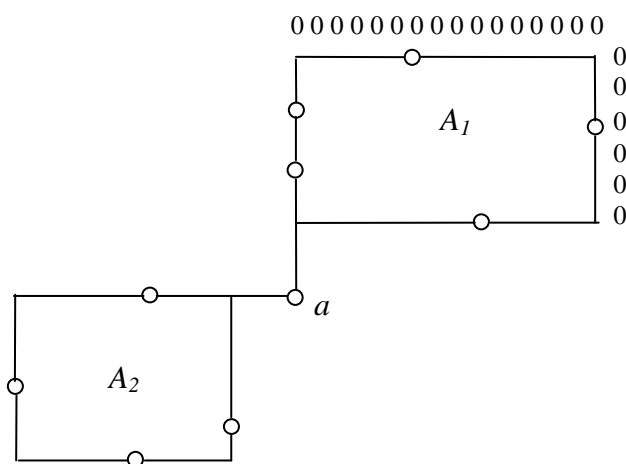
**6. Tétel** (felbontási/karakterizációs tétel). *Egy táblázat valamely  $A$  halmaza akkor és csak akkor védett, ha előáll ciklusok uniójaként.*

*Bizonyítás.* Mivel védett halmazok uniója védett halmaz, elég belátni, hogy egy védett  $A$  halmaz minden pontját tartalmazza  $A$ -nak valamely rész-ciklusa (vagy képszerűen: átmejj rajta egy ciklus). Sőt elegendő belátni a következő lemmát:

LEMMA: *Ha  $a$ -t védi  $A$ , akkor  $a$ -t tartalmazza  $A$ -nak egy részciklusa.*

Tegyük fel, hogy  $a$  nem eleme  $A$  egyetlen ciklusának sem. Ekkor legyen  $A_1$ , illetve  $A_2$  az  $a$ -tól különböző összes olyan  $A$ -beli pontok halmaza, melyek az  $a$ -val egy oszlopba, illetve egy sorba eső pontokból (ilyenekből a 3. Állítás szerint legalább egy-egy van) elérhetőek olyan úttal, amely nem tartalmazza  $a$ -t. Ekkor az összefüggő  $A' = A_1 \cup A_2 \cup \{a\} \subseteq A$  a feltétel szerint három diszjunkt halmaz uniója, ahol  $A_1$  és  $A_2$  függetlenek is, mivel ellenkező esetben  $a$ -t tartalmazná egy ciklus.

Könnyű elképzelni —bár a bizonyításhoz nem szükséges—, hogy  $A'$  sor- és oszlop-cserékkel az 6. ábrán látható helyzetbe hozható (a két téglalap  $A_1$  és  $A_2$  „téglalap burkát” jelöli, a „határpontokat” feltüntettük, a „belső” pontokat nem;  $A \setminus A'$  nem látszik az ábrán, hiszen nincs szerepe). Ha most belátjuk, hogy  $A'$  minden 0-peremű  $f$  kitöltésére  $f(a) = 0$ , akkor a 2. Állítás szerint  $A'$  nem védi  $a$ -t, tehát  $A$  sem védi (mivel  $A \setminus A'$  és  $A'$  függetlenek, ha az előbbi nemüres) és így igaz a lemma. Legyen tehát  $f$  egy 0-peremű kitöltése  $A'$ -nek.



6. ábra.

Ekkor az  $A_1$  halmaz  $a$ -val egy oszlopba eső elemeinek értékösszege  $s = 0$ , hiszen ez az érték előáll úgy, hogy  $A_1$  elemei sorösszegeinek (mind 0) összegéből kivonjuk az  $a$ -t nem tartalmazó oszlopok oszlopösszegeit (mind 0). Mivel  $f$  0-peremű kitöltés, így  $s + f(a) = 0$  is fennáll, azaz  $f(a) = 0$ . Tehát a lemma és így a tétel is igaz.  $\square$

**Következmény 1.** *Egy  $A$  halmaz akkor és csak akkor védett, ha előáll  $C^2$ -típusú ciklusok uniójaként. (Az 5. Tétel alapján.)*

Tehát a védett halmazok „tulajdonképpeni lépcsők” uniói (lásd a 10. Definíció alatti megjegyzést).

A felbontási tételből a 2. Tétel egy újabb bizonyítása adódik, a tökéletes kitöltés egy gazdaságosabb konstrukciójával:

**Következmény 2.** *Egy  $A$  halmaz akkor és csak akkor védett, ha van egész értékű tökéletes kitöltése.*

*Bizonyítás.* A 2. Állítás szerint, ha  $f$  egy tökéletes egész értékű kitöltése  $A$ -nak, akkor  $A$  védett. Fordítva, legyen a védett  $A$  halmaz az  $A_1, \dots, A_k$  ciklusok uniója. Jelölje  $f_i$  ( $i = 1, \dots, k$ )  $A_i$  olyan kitöltését, amely  $A_i$  elemeihez  $c_i$ -t vagy  $-c_i$ -t rendel (a két lehetséges kitöltésből bármelyiket), ahol  $c_i = 2^{i-1}$ . Ekkor  $f_1 + \dots + f_k$  egész értékű és tökéletes kitöltése  $A$ -nak, mivel ha  $a \in A_i$ , akkor  $|f_1(a)| + \dots + |f_{i-1}(a)| \leq 2^{i-1} - 1 < 2^{i-1} = |f_i(a)|$  ( $i = 2, \dots, k$ ). Ha  $A$  összefüggő, akkor a még mindig nem túl gazdaságos konstrukció szerint a kitöltött értékek abszolút értékei az  $[1, 2^{k-1}]$  intervallumba eső egész számok.

A különböző tulajdonságú védett halmazok hierarchiáját összefoglalja az alábbi implikáció-séma:

téglalap  $\Rightarrow$  téglalaprács  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow C^2$  halmaz ( $\Leftrightarrow$  minimális védett halmaz  $\Leftrightarrow$  lényegében egy tökéletes kitöltése van)  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  ciklus ( $\Leftrightarrow$  diszjunkt  $C^2$  halmazok uniója, összefüggő)  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  páros halmaz ( $\Leftrightarrow$  diszjunkt  $C^2$  halmazok uniója)  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  védett halmaz ( $\Leftrightarrow C^2$  halmazok uniója  $\Leftrightarrow$  van tökéletes kitöltése)

Egy példa olyan védett halmazra, mely nem páros és nem is áll elő diszjunkt ciklusok uniójaként: a  $2 \times 3$ -as téglalaprács.

## 2 A bővítési algoritmus

Az eddigiek alapján könnyen lehet gyors és „elég jó” algoritmusokat előállítani a bővítési feladat megoldására, azaz egy tetszőleges  $A$  halmaz védett halmazokkal való lefedésére. Például téglalapok uniójával vagy egy páros halmazzal vagy ezek kombinációjával. Ezek ráadásul gyorsan kódolható eljárások. Sőt, amint arra a bevezetőben is utaltunk, nem túl nagy méretű  $A$  esetén „szemre” könnyen meg lehet találni  $A$  ciklusait, azaz a védett elemeket. A többin pedig könnyen „átfektethetők” ciklusok néhány —a minimális-hoz közeli számú— másodlagosan kijelölt pont letakarásával, számítógép használata nélkül. Ezt szemlélteti az alábbi példa:

52	25	48	60	48	9	65	24	33	43	36	89
34	38	90	49	17	68	66	66	57	1	85	66
32	49	28	65	47	18	76	27	72	39	77	31
21	43	72	80	42	85	89	26	39	19	32	19
15	8	87	86	46	89	12	31	74	34	52	65
28	29	49	51	69	35	95	88	61	80	34	7
64	12	15	1	58	35	77	73	85	42	15	19
22	35	20	20	73	43	59	78	95	20	40	61
35	19	3	84	8	30	4	8	89	61	52	65
32	27	57	15	18	68	57	17	25	34	10	34
21	89	96	57	87	54	0	60	59	18	32	73
3	48	61	85	7	50	17	73	2	24	61	47

52	25	48	60	48	9	65	24	33	43	36	89
34	38	90	49	17	68	66	66	57	1	85	66
32	49	28	65	47	18	76	27	72	39	77	31
21	43	72	80	42	85	89	26	39	19	32	19
15	8	87	86	46	89	12	31	74	34	52	65
28	29	49	51	69	35	95	88	61	80	34	7
64	12	15	1	58	35	77	73	85	42	15	19
22	35	20	20	73	43	59	78	95	20	40	61
35	19	3	84	8	30	4	8	89	61	52	65
32	27	57	15	18	68	57	17	25	34	10	34
21	89	96	57	87	54	0	60	59	18	32	73
3	48	61	85	7	50	17	73	2	24	61	47

7. ábra.

A 7. ábrán a szürkével jelzett cellákat (pontokat) akarjuk letakarni. A cél olyan ciklusokat találni, amelyeknek minél több szürke pont az eleme (sarokpontja). Látható, hogy két cella, a 90-es és a 32-es tartalmú kivételével mindegyik cella eleme valamely ciklusnak. Egyetlen pont (a körrel jelzett) felvételével, azaz egy új cella letakarásával azonban ezek is bevonhatók egy harmadik ciklusba, amelynek negyedik pontja a 85-ös tartalmú cella. Ezzel tehát minden szürke pont védetté válik. (Megjegyezzük, hogy a „72-es” cella helyett megfelelt volna az alatta lévő 49-es, 3-as vagy 96-os tartalmú is.)

Van-e azonban gyors algoritmus a bővítési probléma optimális megoldására, azaz minimális számú újabb cella letakarására? A fenti példa megoldása nyilván optimális.

Most megmutatjuk, hogy az eddig bevezetett fogalmak és kimondott állítások átfogalmazhatók gráfelméleti fogalmakká és állításokká. A bővítési feladat optimális megoldására így már ismert gráfelméleti tételek és algoritmusok állnak rendelkezésünkre.

Egy táblázat  $A$  ponthalmazaihoz kölcsönösen egyértelműen páros gráfok rendelhetőek a következőképpen:

**12. Definíció.** Feleltessük meg egy táblázat  $A$  ponthalmazának a  $G_A = G_A(U, V, E)$  páros gráfot, ahol  $U$  és  $V$  diszjunkt nemüres halmazok a következő tulajdonságokkal: Álljon  $U$  azon  $u_i$  elemekből (pontokból), amelyek a táblázat  $i$ -edik sorának felelnek meg, feltéve ha az tartalmaz  $A$ -beli pontot. Hasonlóan,  $V$  álljon az  $A$ -beli elemeket tartalmazó oszlopoknak megfelelően  $v_j$  pontokból. Az élek  $E$  halmazát pedig definiálja a következő:  $u_i$  és  $v_j$  között pontosan akkor van él, ha a táblázat  $i$ -edik sorának  $j$ -edik eleme  $A$ -beli pont. Azt mondjuk, hogy  $G_A$  az  $A$  ponthalmaz gráfja.

Világos, hogy  $G_A$  nem tartalmaz izolált pontot, továbbá, hogy  $A$  akkor és csak akkor áll elő egy táblázatbeli  $B$  halmazból a táblázaton végrehajtott elemi sor-, illetve oszlopcserék valamely sorozatával, ha  $G_A$  és  $G_B$  izomorf gráfok.

**12. Állítás.** Közvetlenül  $G_A$  definíciójából adódik, hogy az alábbiak ekvivalensek:

(i) az  $A$  halmaz összefüggő (ii)  $G_A$  összefüggő gráf

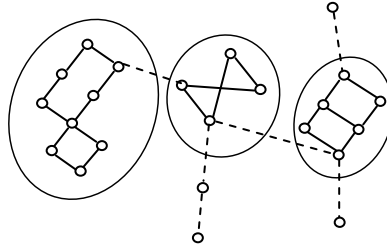
Minden gráf egyértelműen felbontható maximális (tovább nem bővíthető) összefüggő, páronként független *komponensek* uniójára. Ismert gráfelméleti tétel (pl. Hajnal, 2003) a következő: egy  $G$  gráf valamely  $e$  éle akkor és csak akkor nem éle egyetlen  $G$ -beli körnek sem, ha  $e$ -t elhagyva a gráfból, a kapott gráfnak több komponense lesz, mint  $G$ -nek. Ekkor  $e$ -t *hídélnek* nevezik. Ha az összefüggő, legalább három szögpontú  $G$ -gráfnak minden éle valamely körnek éle („körél”), akkor  $G$ -t *kétszeresen élösszefüggőnek* nevezik.

Belátható, hogy az alábbi három állítás ekvivalens: (i)  $G$  kétszeresen élösszefüggő (ii)  $G$ -nek nincs hídéle (iii)  $G$  bármely két pontját összeköti két út, amelyeknek nincs közös éle.

Mivel az  $A$ -beli  $C^2$  halmazoknak a  $G_A$  gráf körei felelnek meg és fordítva, ezért a felbontási tétel szerint:

**13. Állítás.** Egy  $A$  halmaz akkor és csak akkor védett, ha  $G_A$  minden éle körél. Ekkor  $G_A$  páronként független, kétszeresen élösszefüggő komponensekre bontható.

A 8. ábra páros grájának (ez ellenőrizhető) szaggatottal jelzett hídélei védetlen pontoknak felelnek meg az eredeti táblázatban, a többi él körél, tehát valamely védett pont képe.



8. ábra.

Érdeemes felsorolni  $A$  és  $G_A$  néhány egymásnak megfelelő „objektumát”. Emlékeztetünk arra, hogy egy gráf *vonala* nem tartalmazhat élismétlődést, egy *útja* vagy egy *köre* pedig még pontismétlődést sem.

Táblázatok halmazai	Páros gráfok
ponthalmaz (a táblázatban)	– páros gráf
pont	– él
pontok száma az $i$ -edik sorban	– $u_i$ fokszáma
páros halmaz	– minden fokszám páros a gráfban
ciklus (mindig páros)	– zárt vonal (mindig páros fokszámú pontokból áll)
$C^2$ -típusú halmaz	– kör (fokszám $\equiv 2$ )
téglalaprács	– teljes gráf
független halmazok	– független gráfok
összefüggő halmaz	– összefüggő gráf (bármely két pont között van út)
összefüggő páros halmaz	– összefüggő Euler gráf $\Leftrightarrow$ van zárt Euler vonala (minden fokszám páros)
védett pont /nem védett pont	– körél / hídél
védett halmaz	– hídélmentes gráf $\Leftrightarrow$ minden éle körél

Érdekes analógia, hogy a 4. Tétel annak a klasszikus gráfelméleti tételnek a „táblázat-nyelvi” megfelelője, hogy „egy gráfban akkor és csak akkor van zárt Euler-vonal, ha minden csúcsnak fokszáma páros.” A bizonyítások is analógok.

Az alábbi algoritmus egy tetszőleges  $A$  halmazhoz konstruál minimális számú pont hozzáadásával egy  $A$ -t lefedő  $A'$  védett halmazt. Az algoritmus az elsődlegesen letakart pontok száma szerint lineáris idejű lesz, azaz a lépésszám kisebb lesz, mint  $a|A|+b$ , ahol  $a$  és  $b$  alkalmas konstansok. Az algoritmus „magja” egy olyan eljárás lesz, amely megoldja páros fák kétszeresen összefüggő páros gráffá bővítését minimális számú új él beiktatásával, a fa éleinek száma szerint lineáris számú lépésben.

### ELŐKÉSZÍTÉS

Ismeretes (pl. Hajnal, 2003), hogy egy gráf minden összefüggő komponense egyértelműen felbontható diszjunkt alkomponensekre, melyek vagy maximális kétszeresen élösszefüggő részgráfok vagy önálló pontok, és melyeket hídélek kötnek össze (ha legalább két alkomponens van). Bármely két alkomponenst legfeljebb egy hídél köt össze. Az alkomponensek és a hídélek együttesen alkotják a komponenst (8. ábra). Például egy fa alkomponensei a szögpontjai, hídélei pedig az élei. Tekintsük az  $A$  halmazt és gráfját,  $G_A$ -t. A 13. Állítás szerint  $A$  pontosan akkor védett halmaz, ha  $G_A$  minden komponense egyetlen kétszeresen élösszefüggő alkomponensből áll.

Régóta ismertek olyan algoritmusok (Tarjan, 1972), amelyek elvégzik a  $G(V, E)$  gráf komponensekre bontását (a gráf minden pontját besorszámozva az azt tartalmazó komponens sorszámával) valamint az alkomponensekre bontást lineáris  $O(|V| + |E|)$  időben, és a hídéleket is hozzárendelik a megfelelő alkomponens-párokhoz.

### ALGORITMUS-KEZDET

Ezentúl  $G_A$ -t röviden  $G$ -vel jelöljük. Először elvégezzük a  $G$  páros gráf komponensekre és alkomponensekre bontását. Ha  $G$  minden komponense kétszeresen élösszefüggő, akkor  $A$  védett, az algoritmus leáll.

Ellenkező esetben:

A) Foglalkozzunk először azzal az esettel, amikor  $G$  összefüggő. Mivel  $G$  páros gráf, minden pontja beszínezhető két szín, mondjuk a zöld és kék egyikével úgy, hogy él csak különböző színű pontokat köthet össze. Olyan algoritmust adunk, amely  $G$ -be úgy húz be a „színszabály” betartásával minimális számú élt, hogy a kapott páros gráfban minden él körél lesz.

Tekintsük azt a  $T(G)$  gráfot, amelyet úgy kapunk  $G$ -ből, hogy annak — már előállított — alkomponenseit „összehúzzuk” egy-egy ponttá. Azaz az új gráfban minden pont egy-egyértelműen megfelel  $G$  egy (esetleg egy pontból álló) alkomponensének, és a pontok közt pontosan akkor húzunk élt él, ha a megfelelő alkomponensek között volt (híd-) él.  $T(G)$  egy fa. A valóban összehúzott, azaz egynél több pontból álló alkomponensekből (ezek legalább két kék és két zöld pontot tartalmaznak) keletkezett  $T(G)$ -beli pontok színe legyen kékeszöld, a többi pont pedig örökölje  $G$ -beli színét.  $T(G)$ -re tehát egy általánosított színszabály teljesül: kék pont késsel, zöld pont zölddel

nincs összekötve.

Nyilván elegendő most már a  $T(G)$  fát minimális számú él behúzásával kétszeresen élösszefüggővé bővíteni – a színszabály betartásával. Hiszen ha  $e$  egy az  $a$  és  $b$  pontok közé újonnan behúzott él  $T(G)$ -ben, akkor  $G$ -ben behúzva egy élt a  $T^{-1}(a)$  és  $T^{-1}(b)$  alkomponensek egy-egy ellenkező színű pontja közé, a kapott  $G'$  is kétszeresen élösszefüggő gráf lesz.

A  $T(G)$ -t minimális számú él behúzásával kétszeresen élösszefüggő kibővítő algoritmus legfontosabb további lépéseit az alábbi tétel bizonyítása tartalmazza. Bár a tételben mellőzzük a kékeszöld pontokat is tartalmazó fákat, ezeket azonban a végén egyszerűen elintézzük.

Először a  $T(G)$  fát a szokásos módon „gyökereztetjük”, azaz egy tetszőleges legalább másodfokú pontjából, a *gyökér*ből kiindulva, tőle elfelé mutató irányítással látjuk el. Rögzített gyökér esetén az irányítás nyilván egyértelmű. Az ezt végző lineáris idejű algoritmus megjelöli a leveleket, továbbá minden pontot megcímkéz a gyökértől való távolságával, a „szintjével”, azaz a pontból a gyökérhez vezető egyetlen út éleinek számával. Ekkor  $T(G)$ -t a páros gráfoknál megszokott módon így is jelölhetjük:  $T(A, B, F)$ , ahol  $A$  és  $B$  az irányítás által generált páros, ill. páratlan szinteken elhelyezkedő (kék, ill. zöld) pontok,  $E$  pedig az élek halmaza. Fák esetén a lineáris időre szokásosan alkalmazott  $O(|E|)$ ,  $O(|V|)$ ,  $O(|E| + |V|)$  kifejezések ( $|E|$  és  $|V| = |A| + |B|$  az élek, ill. csúcsok száma) egyszerre teljesülnek, hiszen  $|V| - |E| = 1$ , ezért egyszerűen ezt írjuk:  $O(T)$ .

**6. Tétel.** *Egy  $T = T(A, B, F)$  gyökereztetett fa  $\max(|K|, |Z|)$  új él behúzásával kétszeresen élösszefüggő páros gráffá bővíthető, ahol  $K \subseteq A$  és  $Z \subseteq B$  rendre a fa kék, illetve zöld leveleinek halmaza. Ennél kevesebb él nem elegendő. A bővítő élek  $O(T)$  időben való megadását a bizonyítás tartalmazza.*

*Bizonyítás.* Az alábbi állítás alsó becslést ad a behúzendó élek számára.

**14. Állítás.**  *$T(G)$  minden leveléből, azaz elsőfokú pontjából ki kell indulnia egy újonnan behúzott élnek ahhoz, hogy  $T(G)$  minden éléből körél legyen. A levelekbe futó élek nyilvánvalóan csak így lesznek körélek.*

1) Legyen először  $|K| = |Z|$ .

• 0. lépés ( $k = 0$ )

Párosítsuk össze tetszőlegesen a kék leveleket a zöldekkel. Ha  $|K| = |Z| = 1$ , akkor egy élt behúzva a két levél közé, a kapott gráf nyilvánvalóan egyetlen kört alkot. Ha  $|K| = |Z| > 1$ , akkor az egyes párok tagjai közötti egyetlen utat a fában könnyű megadni: az adott levélpár tagjaiból indított, egy-egy az irányítással ellentétesen, „felfelé” vezető út biztosan találkozik egy pontban, „legkésőbb” a gyökérben. Az összes ilyen út eme —páronként független— kiinduló  $\{T_{0,1}, T_{0,2}, \dots, T_{0,|K|}\}$  rendszerét jelölje  $F_0$ . Ha ez tartalmazná a  $T$  fa összes élét, akkor a párok tagjait egy-egy új éllel összekötve előállna egy  $T$ -t részgráfként tartalmazó kétszeresen élösszefüggő gráf. Az egyes utakon még egyszer végighaladva címkézzük meg az éleket és a pontokat az út zöld végpontjával.

0. lépés vége

Ezután szélességi kereséssel bejárjuk  $T$ -t, azaz végigmegyünk a pontjain, szintenként, a gyökértől távolodva.

• 1. lépés ( $k = 1$ )

Rálépünk a  $p_0$ -ra,  $T$  gyökerére. Az első lépés előtt a rendelkezésre álló  $F_0$  rendszerre teljesülnek az alábbi tulajdonságok, ha  $k$  helyébe mindenhol 1-et írunk:

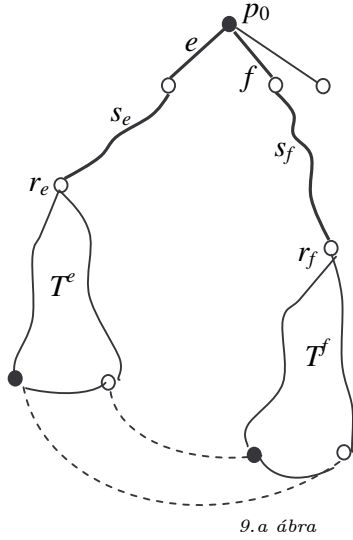
- a.  $T$  minden levele pontosan egy  $T_{k-1,j}$  fának levele. Ebből következően  $T_{k-1,j}$ -k páronként független gráfok. Fordítva: mindegyik  $T_{k-1,j}$  fa minden levele  $T$ -nek is levele.
- b.  $T_{k-1,j}$ -nek ugyanannyi zöld és kék levele van, és ezek össze vannak párosítva.
- c.  $T_{k-1,j}$ -t kiegészítve az összepárosított leveleket összekötő egy-egy új éllel: kétszeresen élösszefüggő gráf áll elő.
- d.  $T_{k-1,j}$  minden éle és pontja címkézve van  $T_{k-1,j}$  valamelyik zöld levelével.

Mivel  $p_0$  fokszáma legalább 2, jelöljön  $e$  és  $f$  egy-egy belőle kiinduló élt (9.a ábra). Ekkor  $p_0$ -ból  $e$ -n keresztül elindulunk egy címkézetlen élekből álló tetszőleges  $s_e$  útvonalon az első címkézett pontig, amelyet jelöljön  $r_e$ . Ez nyilván valamelyik  $F_0$ -beli  $T^e$  fa gyökere, hiszen  $T$  fa. Hasonlóan,  $p_0$ -ból az  $f$ -fel kezdődő tetszőleges  $s_f$  útvonalon eljutunk az  $F_0$ -beli  $T^f$  fáig az  $r_f$  pontban.  $T^e$  és  $T^f$  valójában egy-egy út. Jelölje  $T_{1,1}$  a két fa és az őket összekötő útvonal, azaz  $T^e$ ,  $T^f$ ,  $s_e$  és  $s_f$  egyesítésével előállt fát. (Az első index:  $k$ .) Ezután tekintsük az  $r_e$  és  $r_f$  pontok címkéjét, azaz a két összetevő fa egy-egy zöld levelét, valamint kék párjukat. Végezzünk el közöttük párcserét a színszabályt betartó egyetlen lehetséges módon (b.). Ekkor, ha az új  $T_{1,1}$  fában minden pár közé behúzzunk egy élt, kétszeresen élösszefüggő gráfot kapunk (c.), hiszen a két összetevő fa között  $e$ -n (és  $f$ -en) át is vezet út, valamint a párcserében részt vevő leveleket összekötő éleken át is (mindjárt kettő). Végül az összekötő útvonal összes  $r_e$  és  $r_f$  közötti élet és pontját, tehát  $p_0$ -t is, címkézzük meg  $r_e$  címkéjével. Így  $T_{1,1}$  minden pontja és éle címkézve lesz egy zöld levelével (d.).

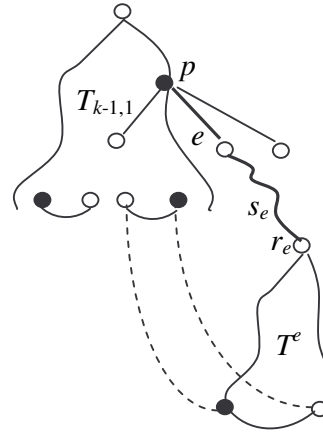
1. lépés vége

Az első lépés eredményeként előállt egy új, eggyel csökkent elemszámú rendszer:  $F_1 = \{T_{1,1}, T_{1,2}, \dots\}$ , ahol  $T_{1,1}$  két „eredeti”, azaz  $F_0$ -beli fa összevonásával és az őket összekötő út „bekebelezésével” keletkezett, a további elemek pedig a megmaradt —átjelölt— eredeti fák (a.). Az  $F_1$  rendszer tehát rendelkezik az a-d. tulajdonságokkal. Mivel  $T_{1,1}$  tartalmazza a gyökeret,  $F_1$  az alábbi tulajdonsággal is rendelkezik:

- e. A  $k > 0$  lépés megtétele után: minden olyan  $T$ -beli pont, amelyre már ráléptünk, a  $p_0$  gyökerű  $T_{k,1}$  fa pontja.



9.a ábra



9.b ábra

•  $k$ . lépés ( $k > 1$ )

A lépés megtétele előtt rendelkezésünkre áll az  $F_{k-1} = \{T_{k-1,1}, T_{k-1,2}, \dots\}$  fa-rendszer, amelyben az elsőt kivéve mindegyik fa az eredeti  $F_0$ -beli, még érintetlen fák valamelyike.

Ez a lépés az 1. lépés egyszerűsített változata (9.b ábra). Az 1. lépésben két eredeti fából előállítottuk a  $T_{1,1}$  fát. Ezután már minden lépésben egy-egy újabb eredeti fát olvasztunk bele az előző lépésben előállított  $T_{k-1,1}$  fába a sorban mögötte állók közül, a kettejüköt összekötő úttal együtt, egyúttal elvégzünk egy alkalmas párcserét a levelek között, míg végül egyetlen fa marad:  $T_{n,1} = T$ .

Ha az aktuális  $p$  pontból kiinduló összes él címkézett, azaz a  $p$ -ból lefelé induló összes nem  $F_{k-1}$ -hez tartozó élre egyszer már ráléptünk (akár  $p$ -ból kiindulva, akár már korábban,  $p$  valamelyik elődjéből), azaz  $p$  „ki lett fejtve” akkor a szélességi bejárás szerinti következő pontra lépünk, ezt jelölve  $p$ -nek. Ellenkező esetben legyen  $e$  egy  $p$ -ból lefelé irányuló címkézetlen, azaz nem  $F_{k-1}$ -hez tartozó él. Most is, mint az 1. lépésben, induljunk el  $p$ -ból egy az  $e$ -vel kezdődő, címkézetlen élekből álló tetszőleges  $s_e$  útvonalon, amíg eljutunk a még érintetlen  $T^e \in F_{k-1} \setminus T_{k-1,1}$  fa  $r_e$  gyökerébe. Az  $e$ . tulajdonság miatt  $T_{k-1,1}$  tartalmazza  $p$ -t. Jelöljük  $T_{k,1}$ -gyel a  $T_{k-1,1}$  és  $T^e$  fák, valamint az őket összekötő  $s_e$  út egyesítésével előállt fát. A párcserét és a címkézést az 1. lépésben leírtakkal megegyezően végezzük, azaz tekintsük  $r_e$  és  $p$  címkéjét, azaz a két összetevő fa egy-egy zöld levelét, valamint két párjukat. Ezután végezzük el köztük az egyetlen lehetséges párcserét. Végül az összekötő útvonal összes  $p$  és  $r_e$  közötti élét és pontját címkézzük meg  $r_e$  címkéjével. Így  $T_{k,1}$  minden pontja és éle címkézve lesz egy zöld levelével.

A  $k$ . lépés eredményeként előállt egy új, eggyel csökkent elemszámú rendszer:  $F_k = \{T_{k,1}, T_{k,2}, \dots\}$ , ahol az első tagot követő elemek (az utolsó lépés után már nincs ilyen) a még megmaradt  $F_0$ -beli fák.

$k$ . lépés vége



A  $k$ . lépés nyomán előállt  $F_k$  rendszer tehát ugyanúgy rendelkezik az **a-d**. tulajdonságokkal, mint az 1. lépés után. Az **e**. tulajdonság meglétét pedig a szélességi bejárás biztosítja, hiszen minden  $p \neq p_0$  pont a rálépés előtt már rendelkezik címkével, amelyet valamelyik  $T$ -beli őse kifejtésekor kapott, hiszen az összes  $p$ -nél magasabb szinten lévő pont már ki van fejtve.

Az algoritmus az eredeti fák elfogyásával, azaz  $n = |Z| - 1$  lépés után leáll. Az előállt  $T_{n,1} = T$  fa és leveleinek előállt párosítása rendelkezik az **a-e**. tulajdonságokkal, tehát azzal is, ha minden levelet összekötünk a párjával egy éllel, akkor kétszeresen élösszefüggő páros gráfot kapunk. A 14. Állítás következménye, hogy ennél — azaz  $|Z|$ -nél — kevesebb él behúzásával ezt nem lehet elérni.

Az eljárás, amely tulajdonképpen  $K$  és  $Z$  megfelelő párosításának megkeresése, az élek  $|F|$  száma szerint lineáris idejű a következők miatt:  $T$  bejárásakor minden  $p$  pontban a belőle kiinduló ( $s_e$ -vel vagy  $s_f$ -fel jelölt) utak hosszával arányos időt töltünk: először végighaladva rajtuk, másodsor „visszafelé” megcímkézve pontjaikat és éleiket. (A 0. lépésben is ez történik, csak a bejárt és megcímkézett utakat ott a  $T_{0,j}$  jelöli, amelyeket nem felülről generálunk, hanem alulról.) Ezek az utak páronként éldiszjunktak és együttesen előállítják  $T$ -t. Egy adott út minden egyes pontjához két „rálépés” és a címkézés konstans ideje tartozik, valamint az úthoz tartozó párcsere bejegyzési idejének ráeső része. Tehát a idő  $a|F| + b$  alakú.

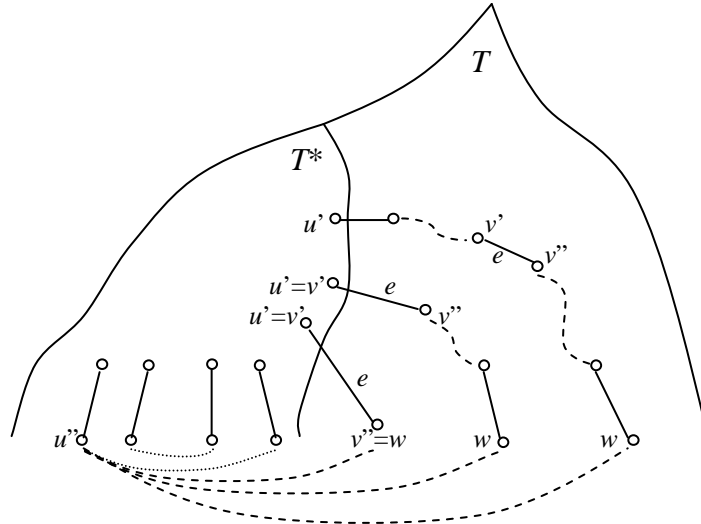
2) Legyen most  $|Z| < |K|$ .

Legyen  $K_z$  a kék levelek egy tetszőleges  $|Z|$  elemszámú részhalma. Először előállítjuk  $T$  azon legszűkebb  $T^*$  részfáját (10. ábra), melynek pontosan  $Z \cup K_z$  a levélzete. Ilyen fa nem lehet egynél több, mert akkor metszetük is egy ugyanolyan levélzetű fa lenne. Jelölje  $d$  a gyökér és a hozzá legközelebb eső  $Z \cup K_z$ -beli levelek távolságát,  $d$ -t a gyökereztető algoritmus megadja. A  $d$  szinten lévő levelek halmazát jelölje  $L_d$ . A gyökértől  $d$ -nél nagyobb távolságra eső („mélyebb szinten” lévő) levelek mindegyikéből induljunk el a gyökér felé egy-egy úton egészen a  $d$  szintig. Az utak  $d$  szintű pontjaiból és  $L_d$  pontjaiból folytassuk egy-egy úton a felfelé haladást addig, míg valamelyik szinten a megmaradt élek egyetlen pontban találkoznak (legkésőbb  $T$  gyökerében). Ekkor a bejárt utak együtt nyilván a keresett  $T^*$  fát adják, amelyben az utolsó elért pontot tekinthetjük gyökérnek, hiszen fokszáma egynél nagyobb. Eme bejárás  $T$  éleinek egy részén egyszer halad át, tehát ideje  $O(T)$ .

Párosítsuk össze az 1)-ben leírt eljárással  $Z$  és  $K_z$  leveleit a  $T^*$  fában és a párokat kössük össze egy-egy új éllel. Ezzel  $T^*$  összes éle körél lesz. Azt állítjuk, hogy ha  $T$  megmaradt — kék — leveleit, azaz a  $K \setminus K_z$ -be esőket összekötjük  $T^*$  „szinte” bármelyik zöld pontjával, például bármelyik zöld levelével, akkor az összes  $T^*$ -n kívüli él is belekerül valamilyen körbe. Legyen ugyanis  $e$  egy tetszőleges  $T^*$ -on kívüli él  $T$ -nek,  $v'$  és  $v''$  végpontokkal. Ekkor közülük pontosan az egyikből, mondjuk  $v'$ -ből, vezet olyan út  $T^*$ -ba, amely nem tartalmazza  $e$ -t, ellenkező esetben  $e$  körél lenne. Az út első  $T^*$ -ba eső pontját jelölje  $u'$ . Másrészt  $v''$ -ből egy tetszőleges, nem  $e$ -vel kezdődő úton haladva  $T$  valamelyik levelébe érkezünk, hiszen  $T^*$ -ban nincs kör. Ez a  $w$ -vel jelölt levél csak  $K \setminus K_z$ -beli lehet, ellenkező esetben  $e$  egy  $T^*$ -n

áthaladó  $(u' \dots v', e, v'' \dots w \dots u')$  kör éle lenne, ahol  $(w \dots u')$  a  $w$  és  $u'$  közötti  $T^*$ -beli út. Tehát ha  $w$ -t egy új éllel összekötjük  $T^*$  bármely  $u'$ -től különböző zöld  $u''$  pontjával, például egy zöld levéllel, akkor  $e$  benne lesz az  $(u' \dots v', e, v'' \dots w, u'' \dots u')$  körben, ahol  $(u'' \dots u')$  a  $w$  és  $u'$  közötti  $T^*$ -beli —egyetlen— út. (Az  $u' \neq u''$  kikötés biztosítja, hogy valódi, azaz kettőnél több szögpontról álló kör jöjjön létre). Ha tehát minden  $K \setminus K_z$ -beli levelet egyszerűen összekötünk egy alkalmas  $T^*$ -beli zöld ponttal, például egy levéllel, akkor minden  $T^*$ -on kívüli él körél lesz. Ennek ideje nyilván  $c(|K| - |Z|) + d$ .

Ezzel valóban összesen  $|K|$  számú új élt húztunk be a  $T$  fába: először  $|Z|$  számút  $T^*$  levelei közé, majd  $|K| - |Z|$  számút  $K \setminus K_z$  és  $T^*$  zöld levelei közé. A 14. Állítás alapján pedig ismét következik, hogy ennél kevesebb él behúzásával nem lehet  $T$ -t kétszeresen élösszefüggő páros gráffá bővíteni. A két idő összege pedig felülről becsülhető  $e|F| + g$ -vel, ahol  $e$  és  $g$  alkalmas konstansok.  $\square$



10. ábra

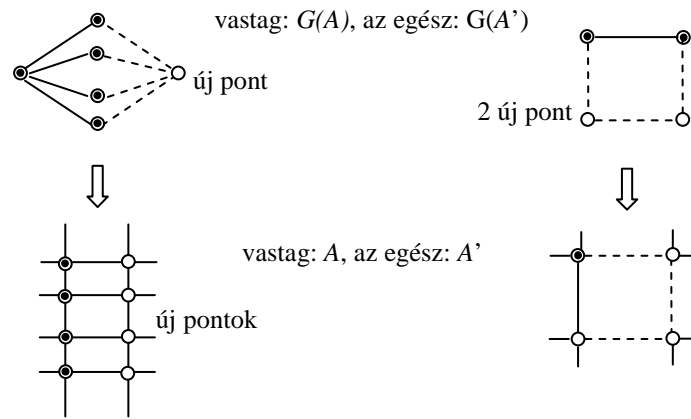
Eddig feltettük, hogy a  $T(G)$  fának nincsenek kékeszöld levelei. Ha vannak kékeszöld levelei,  $m$  darab, és  $|Z| \leq |K|$ , akkor  $m \leq |K| - |Z|$  esetén pakoljuk mindegyiket  $Z$ -be, ellenkező esetben osszuk el őket  $Z$  és  $K$  között úgy, hogy a két így kibővített  $K'$  és  $Z'$  halmaz elemszáma vagy legyen egyenlő, vagy  $K'$ -é legyen eggyel nagyobb. Ezzel biztosítottuk  $K'$  és  $Z'$  között a maximális párosítást, és 1)-et vagy 2)-t végrehajtva előállítható a leveleket összekötő minimális számú él.

3) Néhány esetben az eddig leírt módszer nem alkalmazható. Mégpedig akkor, ha  $T(G)$  levelei nem köthetők össze sem egymással (mert vagy mind zöldek vagy mind kékek), sem a többi belső ponttal (mert csak a szomszédaik más színűek). Ezek a fák pontosan az ún. csillag-gráfok. Ezeknek egy pont

kivételével —jelöljük ezt  $a$ -val— csak elsőfokú pontjaik vannak, mondjuk mind kékek. Ekkor,

3a) ha  $a$  kékeszöld, akkor minden levelet egy a szomszédjától különböző zöld  $T^{-1}(a)$ -beli ponttal kötjük össze ( $T^{-1}(a)$  legalább két zöld és két kék pontot tartalmaz).

3b) Ha pedig  $a$  zöld (ezek azoknak a táblázatbeli halmazoknak felelnek meg, amelyek pontjai egy sorban vagy oszlopban helyezkednek el), akkor egynél több levél esetén —most először— fel kell venni egy új (zöld) pontot és a leveleket össze kell vele kötni (lásd a 11. ábra bal oldalát). Végül ha a  $T(G)$  egy két-szögpontú csillag, akkor két új pont felvétele és „körbekötése” a megoldás. Ez az eset a táblázatban az egyetlen pontból álló halmaz téglalappal való lefedését jelenti (a 11. ábra jobb oldala).



11. ábra

B) Ha  $G$  egynél több komponensből áll:  $G_1, G_2, \dots$ , akkor a  $T(G_i)$  fák közül az 1), 2) vagy 3a) tulajdonságúakra végezzük el az ott írottakat, így téve kétszeresen összefüggővé őket. A 3b) alá tartozó  $T(G_i)$  fák esetén ellenben —elkerülendő az új pontok felvételét— a fa leveleit összekötjük bármely másik  $G_j$  ( $i \neq j$ ) komponens valamely más színű pontjával.

ALGORITMUS-VÉG

Az imént ismertetett algoritmus —az egy komponensű 3b) esettől eltekintve, azaz amikor az  $A$  halmaz minden pontja egy sorba vagy oszlopba esik— a  $G_A$  gráfhoz nem vesz hozzá új szögpontokat, hanem csupán új éleket húz bele, azaz  $A$ -t az őt tartalmazó legrészletesebb téglalaprács bizonyos pontjaival egészíti ki.

Röviden összefoglaljuk az algoritmus lépéseit egy pszeudo kódú program formájában. A programban a  $T_i$  fa csillag-gráf mivoltára vonatkozó  $\text{if } \{T_i \dots\}$  alakú feltételek kiértékelése konstans időt vesz igénybe, mivel ezt már korábban elvégzi a  $T_i$ -t irányítással ellátó alprogram.  $l_i$  jelöli  $T_i$  leveleinek számát.

---

```

BÖVÍT( $G$ )
•  $G$ -t felbontjuk a  $G_i$  komponensekre ( $i = 1, \dots, n$ )  $O(|V| + |E|)$ 
for  $i = 1$  to  $n$ 
  •  $G_i$ -t alkotó komponensekre és hídélekre bontjuk  $O(|V_i| + |E_i|)$ 
  if {a hídélek száma = 0} then
    next  $i$ 
  else
    •  $G_i$ -ből alkotó komponensei összehúzásával  $T_i$  fát készítünk  $O(T_i)$ 
    •  $T_i$ -t gyökereztetjük, innen irányítjuk, majd meghatározzuk a leveleit.  $O(T_i)$ 
    if { $n = 1$  &  $T_1$  egy 3b)-típusú csillag} then
      • új pontokat veszünk fel (egyet vagy hármat): next  $i$ 
    end if
    if { $T_i$  nem csillag} then
      • a lehető legtöbb kék, zöld és kékeszöld levelet két halmazba:
         $Z$ -be és  $K_z$ -be osztjuk  $O(l_i)$ 
      • generáljuk a  $Z$ -hez és  $K_z$ -hez tartozó minimális  $T^*$  fát  $O(T_i)$ 
      • előállítjuk  $Z$  és  $K_z$  kezdő párosítását  $O(l_i)$ 
      • generáljuk a kezdő párosításhoz tartozó kiinduló  $S_0$  útrendszert  $O(T_i)$ 
      • előállítjuk a  $T^*$  kétszeresen élösszefüggővé tevő párosítást  $O(T_i)$ 
      • a  $Z$ -n és  $K_z$ -n kívül eső leveleket „bekötjük”  $Z$ -be  $O(l_i)$ .
    else
      • if { $T_i$  3a)-típusú csillag} then a leveleit bekötjük magába  $O(l_i)$ 
      • if { $T_i$  3b)-típusú csillag} then a leveleit bekötjük egy másik
        komponensbe  $O(l_i)$ 
    end if
  end if
next  $i$ 
return

```

---

A fenti program az összetevők ideje alapján  $O(|V| + |E|)$  idejű. Az alkotó komponensekre bontás utáni idő  $O(\sum_{i=1}^n |T_i|)$ , azaz  $G$  hídéleinek száma szerint lineáris.

*Megjegyzés.* A most ismertetett algoritmus nyilvánvalóan alkalmas egy tetszőleges (nem páros)  $G$  gráf hídmentes gráffá bővítésére minimális számú él behúzásával, ha a  $T$  fa  $L$  számú (színtelen) levelét két — $K$  és  $Z$ — halmazba soroljuk úgy, hogy páros  $L$  esetén  $|K| = |Z|$ , páratlan esetén  $|K| = |Z| - 1$ , és elvégezzük az 1) vagy 2) pontban leírtakat. A 3) pontban felmerült speciális esetek is egyszerűsödnek.

## Addendum

A szerző a cikk megírása után lelt rá Gusfield (1988) gráfbővítő algoritmusára. Érdekes következtetések adódnak, ha összevetjük Gusfield algoritmusát (röviden GA) a 6. Tételben leírttal (röviden FA). Mindkettő fákra „fut”, lineáris időben. Az alapötlet azonos: a levelek egy kezdeti párosítását párcserékkel addig javítani, amíg egy hídmentes páros gráf áll elő. Azonban a két algoritmus minden egyéb jellemzőjében egyfajta „dualitás” figyelhető meg.

– GA először mélységileg bejárja a fát, csak azért, hogy beszámozza a leveleket az elérés sorrendjében 1-től  $n$ -ig. Ezután összepárosítja a leveleket: az  $i$ -ediket a  $k+i$ -edikkel, ahol  $k = \lfloor n/2 \rfloor$ , tehát nem törődve a színszabállyal.

Felhasználja Eswaran és Tarjan (1976) azon eredményét, hogy ezzel a párosítással, a párokat összekötve egy-egy éllel, a bővített gráf hídmentes<sup>2</sup>. Ezután, a színhibákat kijavítandó, a zöld-zöld és kék-kék párok között egymás után párcserét hajt végre, észrevéve, hogy a hídmentesség ilyenkor megmarad.

– FA először találomra, „maximálisan” összepárosítja a különböző színű leveleket (a hoppon maradottakat a végén „beköti” a fába). Ezután szélességi keresés közben minden lépésben —amikor hídelt talál— egy alkalmas párcserét hajt végre, észrevéve, hogy ezzel csökkenti a hídélek számát.

Összefoglalva: GA gráfjai a kezdettől fogva hídmentesek, de végig színhibásak (kivéve a leálláskor). FA gráfjai a kezdettől fogva színhelyesek, de végig hídelt tartalmaznak (kivéve a leálláskor). GA színhibás párokat cserél, FA színhelyeseket. GA a mélységi keresés után egyhuzamban cseréli a párokat, FA szélességi keresés közben, lépésenként teszi azt.

## Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani az egyik anonim lektornak a különösen gondos javításért és azért, hogy felhívta figyelmemet egy fontos, a probléma általánosításával foglalkozó cikkre. A másik lektornak köszönhetően bővült a dolgozat számpéldákkal, melyek bizonyára könnyebbé teszik a megértést.

## Irodalom

1. Hajnal P., Gráfelmélet, Polygon Kiadó - SZTE Bolyai Intézet, 2003
2. Cormen, Thomas H. – Leiserson, Charles E. – Rivest, Ronald L. (1999): *Algoritmusok*, Műszaki, Budapest
3. K. P. Eswaran and R. E. Tarjan, Augmentation problems, *SIAM Journal on Computing*, 5 (1976), 653–665,.
4. A. Frank: Edge-connection of graphs, digraphs, and hypergraphs, in: *More sets, graphs and numbers*, (E. Győri, G. Katona, L. Lovász, eds), Bolyai Mathematical Society Math. Studies
5. Gabow, H. N. (2000). Path-based depth-first search for strong and biconnected component, *Information Processing Letters* 74: 107–114.
6. Gusfield, Optimal mixed graph augmentation, *SIAM Journal on Computing*, 16 (1987), pp. 599–612.
7. D. Gusfield, A Graph Theoretic Approach to Statistical data Security, *SIAM Journal on Computing*, Vol. 17 (1988), No.3, 552–571.
8. S. Raghavan A Note on Eswaran and Tarjan’s Algorithm for the Strong Connectivity Augmentation Problem. pp 19–26, in *The Next Wave in Computing, Optimization, and Decision Technologies*, edited by Golden, Raghavan, and Wasil (Springer) 2005.
9. Robert Tarjan: Depth-first search and linear graph algorithms. In: *SIAM Journal on Computing*. Vol. 1 (1972), No. 2, 146–160.

<sup>2</sup>Meglepő fejlemény, hogy az Eswaran és Tarjan híres cikkében közölt bővítési algoritmusban 30 év múltán hibát találtak (Raghavan, 2005), ellenpéldával, azaz egy olyan gráffal, melyet az algoritmus egy nem erősen összefüggő gráffá bővít. A cikkben a hibát szerencsésen korrigálták.

10. Tsan-sheng Hsu and Ming-Yang Kao, Optimal Augmentation for Bipartite Componentwise Biconnectivity in Linear Time, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, Vol. 19 (2005), No. 2, 345–362.

#### TABULAR DATA PROTECTION AND GRAPH OPTIMIZATION

In this article we put an old problem of data protection into a new context. Though certain sensitive cells of published two-dimensional tables are often „hidden” by the data providers, the content of some of these suppressed cells might be computed using the available cell values and sums of rows and columns. We call a set of cell locations protected, if none of the exact cell values can be uniquely computed. Considering the cell locations as points on a grid we characterize the protected sets as unions of vertex sets of orthogonal polygons. We give several necessary and sufficient conditions for being protected, describe the hierarchy of protected sets, and investigate their properties. When a set is not protected we consider the problem of suppressing the fewest additional cells to protect the sensitive cells. This process is called „secondary suppression” in the literature. Gusfield (1988) and others solved the optimization problem by establishing a bijection between the sets of cell locations and bipartite graphs. They gave a linear time algorithm for the corresponding graph theory problem: making a bipartite graph edge-biconnected by adding a minimum number of new edges. We give a new, simple linear time algorithm for this augmentation problem.

## TUDÁSHÁLÓZATOK STRUKTÚRÁJÁNAK SZEREPE EGY EGYSZERŰ ÁLTALÁNOS EGYENSÚLYI MODELLBEN<sup>1</sup>

SEBESTYÉN TAMÁS  
*PTE Közgazdaságtudományi Kar*

A hálózatok szerepe egyre kiemeltebb figyelmet kap az innovációval foglalkozó irodalomban, a hálózatok strukturális felépítésének kérdései pedig számos területen keltették fel a kutatók érdeklődését. A dolgozatban azt vizsgáljuk, hogy a vállalatok közötti tudáshálózatok struktúrája milyen hatással van a gazdaság teljesítményére. Egy egyszerű általános egyensúlyi modellbe építjük be a hálózati kapcsolatokon keresztül végbemenő tudás-transzfer hatását és szimulációs technikákkal vizsgáljuk a modell működését. A kapott eredmények azt mutatják, hogy a hálózati struktúra lényeges hatással van a gazdaság teljesítményére: magasabb szintű skálafüggetlenség magasabb kibocsátáshoz vezet. A dolgozat eredményei rávilágítanak a sokféleség speciális dimenzióinak szerepére a gazdasági teljesítményben: ebben az esetben is a skálafüggetlenség pozitív hatása mutatható ki.

*Kulcsszavak:* Hálózati struktúra, tudáshálózatok, általános egyensúly, skálafüggetlenség

*JEL:* C68, C63, C15, E13, O33

### 1 Bevezetés

Az utóbbi időben az innovációval foglalkozó szakirodalom kiemelt figyelemmel fordult a hálózati struktúrák tanulmányozása felé. Ez az érdeklődés részben onnan származik, hogy a személyes kapcsolatok szerepe a tudás-transzferben nyilvánvalóvá vált, másrészt viszont a hálózat-elemzési módszertan az elméleti fizika és a szociológia irányából ösztönözte az innovációval foglalkozó szakembereket az ilyen irányú kutatások kiterjesztésére.

Először a szociológiai vizsgálatok mutattak rá, hogy a társadalmi hálózatok nem írhatóak le teljes mértékben a véletlen hálózatok modellje segítségével.<sup>2</sup> Travers és Milgram (1969) a Harvard egyetem ismeretségi hálózatát vizsgálva jutott arra a felismerésre, hogy az átlagos elérési út még egy ilyen kiterjedt kapcsolati hálózatban is meglepően rövid, mindössze 5,5 lépés. Ez az érték lényegesen kisebb, mint a hasonló méretű véletlen hálózatban mérhető értékek. Barabási (2002) megemlíti, hogy a relatíve rövid átlagos távolságok

<sup>1</sup>Beérkezett: 2010. április 23. E-mail: [sebestyent@tkk.pte.hu](mailto:sebestyent@tkk.pte.hu).

<sup>2</sup>Véletlen hálózaton olyan hálózatot értünk, amelyben a csomópontok közötti kapcsolatok létezésének valószínűsége egyenletes a teljes hálózaton. A véletlen hálózatok részletesebb leírását a dolgozat második része adja meg.

gondolatát korábban Karinthy Frigyes vettette fel egy írásában, ahol meglepően pontosan „előrejelezve” a későbbi tudományos eredményeket, 5 lépéses távolságról ír (Karinthy, 1929). Granovetter (1973, 1983) tanulmányai a szorosan integrált társadalmi csoportokat összekötő „gyenge” kapcsolatok jelentőségét emelik ki, amelyek kiemelten fontosak a rövid elérési utak kialakulásában. A rövid elérési utakkal, szorosan kapcsolt lokális csoportokkal és ezeket összekötő gyenge kapcsolatokkal jellemezhető hálózatokat kisvilágoknak nevezi a szakirodalom (Csermely, 2005).<sup>3</sup>

A véletlen hálózatok jellemezhetőek egy reprezentatív csomóponttal, vagyis egy átlagos kapcsolati számmal. Ez azt jelenti, hogy az átlagostól lényegesen kisebb vagy lényegesen nagyobb kapcsolati számok előfordulásának valószínűsége elhanyagolható. Barabási (2002) azonban azt emeli ki, hogy a valós hálózatok nem jellemezhetőek reprezentatív szereplővel: néhány csomópont rendkívül nagy számú kapcsolattal rendelkezik, míg a csomópontok többsége kevés kapcsolattal bír. Az átlagos fokszám ugyan megadható, azonban a hálózat struktúráját nagy részben a nagyszámú kapcsolattal rendelkező, extrémis elemek határozzák meg: egy-egy ilyen csomópont kiesése adott esetben a hálózat széteséséhez vezethet. Ezt a speciális struktúrát skálafüggetlen hálózatnak nevezik, ami a hálózat fokszámeloszlásának speciális tulajdonságára utal.<sup>4</sup> Barabási és munkatársai azt a fontos felismerést mutatták be, hogy a valóságban előforduló hálózatok nagy része ilyen skálafüggetlen tulajdonságot mutat (közlekedési hálózatok, társadalmi kapcsolathálóok, publikációs hálózatok, kristályszerkezetek, fehérjehálózatok, stb.) (Barabási és Albert, 1999; Barabási és szerzőtársai, 2000; Barabási, 2002). Barabási és Albert (1999) egy egyszerű modellt is felvázolnak, amely a skálafüggetlenség kialakulását magyarázza. A későbbiekben ezt a modellt is részletesebben ismertetjük majd.

A hálózatok megjelenése az innováció irodalmában tulajdonképpen egy logikus gondolatmenet eredménye. A gazdasági növekedéssel foglalkozó szakirodalom hamar felismerte, hogy a hosszú távú növekedés kulcsa a technológiai fejlődés, vagy más szemszögből nézve a tudás felhalmozása (csak példaként: Solow, 1956; Romer, 1990; Grosman és Helpman, 1991; Aghion és Howitt, 1992). Ez a felismerés az innováció, vagyis az új tudás keletkezésének és a diffúzió, azaz a tudás gazdaságban történő elterjedésének kérdéseit veti fel. A tudás terjedésével foglalkozó empirikus szakirodalom kimutatta, hogy számottevő lokális hatások érvényesülnek a tudás terjedésében: a más vállalatoktól, vagy a gazdaság más szereplőitől származó tudás nagyobb mértékben hat a térben közelebb található vállalatokra vagy más szereplőkre, mint a térben távolabb elhelyezkedőkre (Jaffe, 1989; Feldman, 1994; Anselin és szerzőtársai, 1997). Jaffe és Trajtenberg (1996) azonban azt is megmutatják, hogy a térbeli hatások idővel gyengülnek, Audretsch és Feldman (1996) pedig arra hívják fel a figyelmet, hogy a tudás terjedésének lokalizáltsága markánsabb azokban az ágazatokban, ahol a tudás fontos kompetitív faktor.

<sup>3</sup>A kisvilágok egy formális modelljét adja Watts és Strogatz (1998) tanulmánya.

<sup>4</sup>A skálafüggetlenség és a fokszámeloszlás kapcsolata bemutatásra kerül a dolgozat második részében. A témáról részletesen lásd: Chung és Lu (2006).



Ezek az empirikus vizsgálatok részben hozzájárultak ahhoz is, hogy a közgazdasági mainstream irodalomba visszatérjen a térbeliség kérdése. Ez az irodalom Marshall (1890) nyomán lokális agglomerációs externáliákról beszél, amelyeknek egyik lényeges vetülete a tudás térben korlátos terjedése (Johansson és Forslund, 2008). Az egyes interpretációk ugyanakkor sokszor csak odáig mennek el, hogy a helyi agglomerációt egy olyan közegnek fogják fel, ahol a tudás szabadon áramlik, és a kérdéses határvonal e tudáshoz való hozzáférés tekintetében valamilyen térbeli korlátot jelent.<sup>5</sup> Breschi és Lissoni (2003) azonban rámutatnak arra, hogy a személyes kapcsolatok jelentősége a tudás-áramlásban és ezáltal a helyi agglomerációs hatásokban árnyaltabb megközelítést kíván. Felhívják a figyelmet arra, hogy a térbeli közelséget inkább a társadalmi közelség (social proximity) közelítő változójaként lehet felfogni. A térbeli közelség annyiban fontos, amennyiben hozzájárul a társadalmi kapcsolatok és az azokban foglalt bizalom kialakulásához. Mivel a térbeli közelség a kapcsolatok és a bizalom kialakulását nagy mértékben elősegíti, e kapcsolatok lokálisan sűrűek lesznek és az innovációs (vagy tágabb értelemben gazdasági) aktivitás térbeli koncentrációja olyan színben tűnik fel, mint a tudás-spilloverekhez való hozzáférés fontos médiuma. Ez pedig elfedi azt a valós helyzetet, hogy a spilloverek személyes kapcsolatokon és társadalmi hálózatokon keresztül fejtik ki hatásukat, így a tudástranszfer csak annyiban lokális, amennyiben az alapjául szolgáló hálózatok is azok. Ezen a gondolati vonalon egyes tanulmányok megmutatják, hogy a tudás-spilloverek lokális hatásai csupán a munkaerő régiók közötti viszonylagos immobilitásán alapulnak (Zucker és szerzőtársai, 1994; Almeida és Kogut 1999; Balconi és szerzőtársai, 2004).

A hálózati módszertannal foglalkozó gondolati irányzat és az innováció hálózati megközelítésével kapcsolatos szakirodalom ezen a ponton összefonódik. A technológiai diffúziót, azaz a tudás terjedését leíró modellekben először Abrahamson és Rosenkopf (1997) fogalmazza meg explicit módon a hálózatok szerepét: modelljükben arra keresik a választ, hogy milyen strukturális jellemzők állítanak akadályokat az innovációk teljes elterjedése elé. Cowan és Jonard (2004) valamint Cowan (2005) olyan statikus hálózati modelleket mutatnak be, amelyekben a tudás terjedése tudás-csere vagy tudás-emisszió formájában valósul meg. Eredményeik azt mutatják, hogy a korábban bemutatott kis világ struktúrák a leghatékonyabbak a tudás terjedése szempontjából.

A hálózati modellek egy másik köre a hálózati kapcsolatok dinamikáját is vizsgálja: melyek azok a struktúrák, amelyek stabilan fennmaradnak, ha a hálózat tagjai önállóan alakíthatják kapcsolataikat. Jackson és Wolinsky (1996) gráfelméleti, Bala és Goyal (2000) játékelméleti alapokon vizsgálja a kapcsolatok kialakulásának dinamikáját. Eredményeik szerint a stabil (Nash-egyensúlyi) struktúrák a kapcsolatok fenntartásának relatív hasznától és költségétől függően más-más formát öltenek. Cowan és szerzőtársai (2006) a struktúra mellett a tudás-bázisok viszonyának kérdéseit tárgyalja: modelljük

---

<sup>5</sup>Talán Kaldor (1966) használta elsőként a „mennyből hulló manna” hasonlatot a tudás terjedésének ilyenfajta felfogása kapcsán.

két vezérlő ereje egyrészt a kapcsolatok bizalom-építő szerepe, amely a közös innovációs tevékenység (várható) hatékonyságát növeli az együttműködés eredményessége kockázatának csökkentésével, másrészt pedig a kapcsolatok azon hatása, hogy az együttműködés a tudásbázisok közelítése révén a közös innováció (várható) hatékonyságát csökkenti. Sebestyén (2010) hasonló, stratégiai kapcsolat-kialakításon alapuló modellt mutat be, amellyel a sokféleség szerepét vizsgálja az innovációs folyamatban. Carayol és Roux (2006) egy olyan modellt mutatnak be, amely a hálózat dinamikus formálódása mellett térbeli vonásokat is tartalmaz. Megmutatják, hogy a tudás transzferálhatóságának nagy közbülső tartományaiban kisvilágok alakulnak ki, rövid elérési utakkal és magas klaszterezettséggel. Így sikerül gazdasági, költség-haszon megfontolásokon alapuló magyarázatot adniuk arra a jelenségre, hogy a hálózati kapcsolatok jellemzően lokálisan alakulnak és így a tudásáramlás is lokális.

Ez a dolgozat az eddig leírt gondolati ív lezárása irányába kísérel meg egy lépést tenni. A gazdasági növekedés kérdései elvezetnek az innováció szerepéhez, az innováció kapcsán a lokalitás és a hálózatok szerepe merül fel, a hálózatok szempontjából pedig a hálózati struktúra válik érdekes tereppé. A hálózatok struktúrája jelentős hatással lehet a tudás-transzfer hatékonyságára, mértékére. A korábban bevezetett kisvilág fogalom segítségével ez könnyen érzékeltethető: minél több átkötő kapcsolatot találunk a lokális csoportok között, annál gyorsabb lesz az innováció terjedése. A skálafüggetlen struktúrák esetén is hasonló hipotézissel élhetünk. A skálafüggetlen kapcsolati struktúra a néhány centrális szereplő révén a hálózat relatíve elszigeteltebb pontjain keletkező tudást is gyorsan képes szétteríteni a rendszer egészében.

A hálózati modellek a struktúra és a hálózati teljesítmény közötti kapcsolatot elemzik, ezek azonban parciális modellek: jellemzően a hálózat elemei (csomópontjai) rendelkeznek valamilyen információval (tudással), amelyet aztán a hálózati struktúra „szétoszt” a hálózat tagjai között. Ugyanakkor nem merül fel annak a kérdése, hogy a csomópontok gazdasági szereplők, amelyek más kontextusban gazdasági kapcsolatban állnak egymással. A dolgozat célja és egyben újdonsága egy olyan modell bemutatása és elemzése, amely a tudáshálózatok strukturális kérdéseit egy általános egyensúlyi modellbe foglalja. Ezzel tulajdonképpen a hálózatok parciális modellezése felől egy, eddig hiányzó lépést tesz a gazdasági növekedést leíró egyensúlyi közgazdasági modellek irányába, egyúttal az itt leírt gondolati ív lezárása felé. Ugyanakkor a dolgozat további újdonsága az is, hogy a hálózati struktúra hatását mutatja be az adott általános egyensúlyi keretben.

A dolgozat felépítése a következő. A 2. szakaszban egy rövid kitérőben a hálózatok reprezentációja és a hálózatelmélettel kapcsolatos (a dolgozatban is előforduló) legfontosabb fogalmak ismertetésére kerül sor. Ezt követően a 3. szakasz adja meg a vizsgált általános egyensúlyi modell leírását, majd a 4. szakasz mutatja be a dolgozatban alkalmazott hálózati modellt. Az 5. szakasz kitér a numerikus szimulációk során alkalmazott paraméter-értékek meghatározására, majd a 6. szakasz elemzi a modell szimulációjának eredményeit. Végül a dolgozat legfontosabb megállapításait összegezzük.

## 2 Hálózatok reprezentációja

A modell központi eleme a vállalatok közötti hálózati kapcsolatok struktúrája. A hálózati kapcsolatokat a modellben az ún. kapcsolati mátrix írja le. Egy  $N$  csomóponttal rendelkező ( $N$  elemű) gráfot egy  $N \times N$ -es kapcsolati mátrix definiál, amely mátrix elemei a sor és az oszlop indexének megfelelő csomópontok közötti kapcsolatot mutatják. A mátrix általános formája:

$$(1) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}.$$

A mátrix eleme nulla, ha a két csomópont között nincsen él és nullától különböző, ha van él. A kapcsolati mátrix lehet bináris, ebben az esetben csak a kapcsolat létezését vizsgáljuk, ha pedig az élek súlyozottak, akkor a kapcsolatok intenzitását is figyelembe vesszük. A kapcsolati mátrix szimmetrikus, ha a gráf irányítatlan, irányított gráf esetén azonban nem feltétlenül szimmetrikus. A dolgozatban használt modellben a tudáshálózatot irányítatlan, bináris kapcsolati mátrix írja le, azaz a kapcsolatok intenzitásának és a tudásáramlás irányának vizsgálatától eltekintünk. A kapcsolati mátrix általános eleme tehát:  $a_{ij} \in \{0; 1\}$ , továbbá igaz, hogy  $a_{ij} = a_{ji}$ .

A fenti egyszerűsítések természetesen megszorító jellegűek, ugyanakkor a tárgyalás kezelhető keretek között tartása érdekében szükségesek. A kapcsolaterősség explicit figyelembe vételétől eltekintünk, mivel ez addicionális paraméter-halmazok figyelembevételét kívánná, ezáltal a modell elemzését megnehezítené. Az itt vizsgált strukturális formák ugyanakkor nem feltétlenül igénylik a súlyozott kapcsolatok figyelembe vételét. Ennek ellenére a modell tartalmazza a kapcsolaterősség explicit figyelembevételének lehetőségét, a később bevezetendő spillover paraméteren keresztül. A kapcsolatok irányítottóságának beépítését tekintve egy ilyen változtatás érdemben nem módosítja a modell működését.

A továbbiakban alkalmazott fontos hálózatelméleti fogalom a fokszám-eloszlás és a skálafüggetlenség. Egy hálózatban egy csomópont fokszáma alatt az adott csomópont kapcsolatainak számát értjük. Jelen esetben a fokszám egyszerűen:

$$(2) \quad s_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Ismert fokszámok esetén felírható e fokszámok eloszlása, amely az egyes fokszám-értékek gyakoriságát mutatja meg. A fokszámeloszlás és a hálózat egészének egy fontos mutatója az átlagos fokszám, ami az egyedi fokszám-értékek egyszerű átlaga.

A hálózatelmélet (gráfelmélet) eleinte úgy tekintett a valós hálózatokra, mint véletlen hálózatokra (Barabási, 2002). Ez azt jelenti, hogy a hálózat csomópontjai közötti kapcsolatok minden rendszer nélkül, véletlenszerűen jönnek létre. Első ránézésre ez a megállapítás meg is állja a helyét, hiszen a valós

hálózatok kapcsolatainak kialakulásában minden bizonnyal nagymértékű véletlenszerűség van. Ezen a vonalon Erdős és Rényi (1959) munkáját követően a véletlen hálózatoknak széles irodalma alakult ki (Bollobás, 2001).

Véletlen hálózatok felépítésére egy rendkívül egyszerű algoritmus adható. Haladjunk végig valamennyi lehetséges kapcsolaton (azaz minden  $(i, j)$  csomópontpáron, vagy másképpen a kapcsolati mátrix minden  $a_{ij}$  elemén) és egy előre definiált  $q$  valószínűséggel hozzunk létre kapcsolatot a két csomópont között (állítsuk a mátrixelem értékét 0-ról 1-re). Az így létrejött hálózatoknak számos érdekes tulajdonsága van, jelen esetben azonban az a leglényegesebb, hogy a kialakuló hálózatban a fokszámok Poisson-eloszlást követnek, amely jól jellemezhető egy átlagos fokszámmal,<sup>6</sup> ebből fakadóan pedig nem alkalmas a skálafüggetlen struktúrák leírására.

Ahogy a bevezetőben már kiemeltük, Barabási (2002) éppen arra hívja fel a figyelmet, hogy a valós hálózatok a legtöbb esetben tipikusan skálafüggetlenek, ahol néhány súlyponti szereplőnek nagyon sok kapcsolata van, míg a többségnek kevesebb. Ebben az esetben a fokszám-eloszlás nem Poisson-eloszlás. Miként Barabási és Albert (1999) kimutatják, a skálafüggetlen hálózatok esetén a foksámeloszlás tipikusan az alábbi hatványfüggvénnyel írható le:

$$(3) \quad P(s) = \phi s^{-\delta} ,$$

ahol  $P(s)$  az  $s$  fokszámérték előfordulásának valószínűsége,  $\phi$  és  $\delta$  pedig pozitív konstansok. Csermely (2005) összefoglalása alapján a  $\delta$  kitevő értékei a legkülönbözőbb hálózatokban tipikusan 1,5 és 3 közötti értéket vesznek fel, ezen belül a különféle társadalmi hálózatokra számolt értékek jellemzően az 1,5–2,5 közötti tartományban találhatók. A  $\delta$  kitevő értéke alkalmas mércéje lehet a skálafüggetlenségnek: a foksámeloszlást leíró függvény görbületeként ugyanis azt tükrözi, hogy milyen súlya van a köztes, átlagos fokszám értékeknek. Minél nagyobb a görbület, annál kisebb a köztes értékek előfordulásának valószínűsége: a hálózat néhány centrális, nagyon sok kapcsolattal rendelkező szereplőre és nagyon sok periférikus, alacsony fokszámú szereplőre tagozódik. Minél kisebb a görbület, annál többen lesznek a köztes fokszámértékkel rendelkező csomópontok. A  $\delta$  paraméter értéke ismert hálózatra meghatározható a foksámok gyakorisági eloszlására illesztett függvény segítségével.<sup>7</sup>

Amennyiben a hálózat véletlenszerű, úgy a fenti hatványfüggvény a foksámeloszlást nem írja le megfelelően: az alacsonyabb fokszámértékek előfordulási valószínűsége kisebb, a nagyon nagy értékek előfordulásának valószínűsége pedig elhanyagolható. A (3) függvény természetesen ekkor is illeszthető a foksámeloszlásra, csak az illesztés hibája növekszik meg. Ugyanakkor várható, hogy véletlenszerű hálózat esetén  $\delta$  értéke nullához tart, ahogy a foksámeloszlás elveszti a hatványfüggvényre jellemző aszimmetriáját és a Poisson eloszlásra jellemző szimmetrikusabb formát ölti.

<sup>6</sup>Irányítatlan hálózat esetén a hálózat méretének növekedésével az átlagos fokszám  $q(N-1)$ -hez tart.

<sup>7</sup>A (3) egyenlet logaritmált formában standard regressziós módszerekkel becsülhető.

Barabási és Albert (1999) egy algoritmust javasolnak arra vonatkozóan, hogy miként jönnek létre (állíthatók elő) skálafüggetlen hálózatok. Ez az algoritmus a dolgozat 4. szakaszában kerül bemutatásra.

### 3 A modell leírása

Ebben a szakaszban a hálózati kapcsolatokat integráló általános egyensúlyi modell bemutatására kerül sor. A hálózati kapcsolatok egyelőre csak az (1) összefüggésben definiált  $\mathbf{A}$  kapcsolati mátrix formájában jelennek meg, a kapcsolatok kialakulását leíró hálózati modellt a 4. szakaszban tárgyaljuk. Először a modell kínálati, majd keresleti oldala kerül bemutatásra, végül az egyensúlyi helyzet meghatározásával zárul a szakasz.

#### 3.1 A modell kínálati oldala

A hálózatok explicit figyelembe vétele szükségessé teszi, hogy a modellt az egyes vállalatok szintjén értelmezzük. Ennek megfelelően a termelési függvényre az alábbi specifikáció adható:

$$(4) \quad y_i = K_i L_i^\alpha, \quad i = 1, \dots, N,$$

ahol  $y_i$  az  $i$ -edik vállalat által előállított output,  $L_i$  az  $i$ -edik vállalat által felhasznált munkamennyiség. Az összefüggésben szereplő  $K_i$  tényező kiemelten fontos szerepet játszik: ez jelöli a vállalat számára hozzáférhető, a termelésben produktívan felhasználható tudást. Ebből a szempontból  $K_i$  hasonlítható a „hagyományos” termelési függvények technológiai együtthatójához, vagy más szavakkal a teljes tényező-termelékenységhez. Mivel a dolgozat a tudásáramlásra és ennek hálózati struktúrájára fókuszál, a jól tárgyalhatóság érdekében a tőketényező explicit modellezésétől eltekintünk.<sup>8</sup> A (4) termelési függvény rugalmassági paraméterének ( $\alpha$ ) értelmezése a szokásos.

A hálózat beépítése a modellbe a termelési függvény  $K_i$  változóján keresztül valósul meg, ehhez azonban szükség van a hálózatok valamilyen matematikai interpretációjára. Ezeket a kapcsolatokat az előző szakaszban bemutatott módszerrel modellezzük.

A tudáshálózatok explicit figyelembe vételéhez értelemszerűen szükséges a tudás matematikai reprezentációja is: a gazdaságmodellezési irodalomban elterjedt módon a tudást egy valós szám reprezentálja. Természetesen ez a módszer a tudás számos fontos dimenzióját figyelmen kívül hagyja, azonban egyszerűségénél fogva alkalmas arra, hogy néhány lényeges aspektust megragadjunk és vizsgálhassunk. Lényeges szempont azonban az is, hogy jelen esetben a tudás többdimenziós jellege nem explicit módon, a vállalatok által közvetlenül birtokolt tudásterületek sokféleségében jelenik meg, hanem a hálózaton keresztül hozzáférhető, adott esetben eltérő jellegű tudás-források tekintetében.

<sup>8</sup>A hasonló specifikáció nem ritka a makromodellezési irodalomban, lásd például Fujita et al. (1999) vagy Duarte és Wolman (2002) modelljeit.

A vállalatok a saját (autonóm) tudás egy adott szintjével jellemezhetőek, amelyet az ún. tudás-vektor határoz meg. Ha a gazdaságban  $N$  számú vállalat működését tételezzük fel, akkor ez a tudás-vektor az alábbi formában írható fel:

$$(5) \quad \mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_N).$$

A  $\mathbf{k}$  vektor elemei az egyedi vállalatok tudásszintjeit reprezentálják, amely tudásszintek a modell exogén változói. A valamennyi vállalat számára adott (4) termelési technológia mellett tehát a gazdaság termelési oldalát a  $k_i$  értékek eloszlása jellemzi.

A tudáshálózatok szerepe ebben a kontextusban az, hogy az egyes vállalatok tudásbázisait összekapcsolja, így a vállalatok által felhasználható, rendelkezésre álló tudás eltér a saját tudásbázistól. Ezen összefüggés modellbe építéséhez az egyedi tudásszintek hálózaton keresztül történő aggregálására van szükség. Feltevésünk szerint az egyes vállalatok tudása nem tökéletesen helyettesíthető. Ez azt jelenti, hogy a vállalatok mindegyike egy kicsit más technológiai területen működik, így bármely más vállalat tudása értékes többletet jelenthet egy adott vállalat számára. Ez a nem tökéletes helyettesíthetőség azonban értelmezhető úgy is, hogy a vállalatok az azonos technológiai terület (iparág) ellenére más tudás-bázist alakítottak ki: más technikákkal más eljárásokkal, szervezeti rutinokkal operálnak, így egy másik vállalattól származó tudás e különbségek révén hordozza azt a szinergiát, ami a nem tökéletes helyettesíthetőségben nyilvánul meg. Mindezek alapján a különböző vállalatoktól származó tudás aggregálását az alábbi CES technológia mentén végezzük el:

$$(6) \quad K_i = k_i + \left( \sum_{j=1}^N a_{ij} (\theta k_j)^\rho \right)^{1/\rho}, \quad i = 1, \dots, N.$$

A (6) egyenletben  $K_i$  a (4) termelési függvényből már ismert, a vállalat által felhasználható, hozzáférhető tudást jelöli,  $k_i$  az  $i$ -edik vállalat saját tudásszintje, amely egy az egyben hozzájárul a felhasználható tudáshoz. A többi vállalattól származó tudás aggregált „értékét” adja meg a jobb oldali zárójelben található kifejezés, amely a jól ismert Dixit-Stiglitz aggregátor egy speciális formája.  $\rho$  az egyes vállalatok tudása közötti helyettesítés paramétere, a helyettesítés rugalmassága  $1/(1 - \rho)$ .

A helyettesítési paraméter értékére a  $0 < \rho < 1$  kikötést tesszük, amire azért van szükség, hogy a CES aggregátorban adódó „isoquantok” az origóra konvexek legyenek. Ez a kitétel tulajdonképpen annak a könnyen belátható összefüggésnek felel meg, hogy a partner-vállalatoktól származó tudás ( $k_j$ ) határhozama csökkenő. A két szélsőséges lehetőség azért zárható ki, mivel  $\rho = 0$  esetén a (6) kifejezésben az  $1/\rho$  hatványkitevő csak határértéken értelmezhető, illetve  $\rho = 1$  esetén a helyettesítés tökéletes lenne. A továbbiakban, funkciójából adódóan, a (6) összefüggésre *tudás-aggregátorként* hivatkozunk.

A (6) aggregátorban szereplő  $a_{ij}$  a korábban definiált  $\mathbf{A}$  kapcsolati mátrix megfelelő elemeit reprezentálja. Mivel  $a_{ij}$  értéke csak nulla és egy lehet, ezért jelentősége abban áll, hogy az aggregátorban csak azon vállalatok tudása adódik össze, amelyek az adott  $i$ -edik vállalat közvetlen szomszédjai a hálózatban. További paraméter  $\theta$ , amely a tudástranszfer erősségét méri. Értéke definíció szerint 0 és 1 közé esik: ha értéke 0, akkor a partnerek tudásából semmi nem érzékelhető, ha értéke 1, akkor maximálisan képes a vállalat a partnerek tudását felhasználni. A 0 és 1 közötti érték azért releváns, mivel egyrészt az egyes vállalatok közötti különbségek okán, másrészt pedig a kommunikáció eleve adott információs torzításából fakadóan nagy valószínűséggel a partnerek tudásának csupán egy része válik használhatóvá a tudástranszfer követően. Cohen és Levinthal (1990) nyomán a  $\theta$  paraméter értelmezhető a vállalatok abszorpciós képességeként, vagyis azon képességként, hogy a környezetükből származó információkat, tudást milyen mértékben képesek saját tudásbázisukba integrálni. E szempontból természetesen a paraméter értelmezése meglehetősen restriktív, mivel az abszorpciós képességek nem függetlenek a vállalat jellemzőitől (saját tudás nagysága, kutatás-fejlesztési ráfordítások, stb.) de környezeti tényezőktől sem (amilyen például a technológiai lehetőségek szerepe az iparágban, vagy a tudás jellege).<sup>9</sup> Carayol és Roux (2009) nyomán a  $\theta$  paraméter értelmezhető a tudás tacit vagy kodifikált jellege szempontjából is. E szerint a megközelítés szerint a tudás tacit vagy kodifikált jellegétől függően kevésbé vagy jobban transzferálható, így a tudásáramlás során keletkező veszteségek attól függenek, hogy milyen típusú tudás átadására kerül sor. Így  $\theta$  alacsony értéke inkább tacit, míg  $\theta$  magasabb értéke inkább kodifikált tudásra utal.

A modell kínálati oldalát tehát három tényező adja. A vállalatok exogén  $\mathbf{k}$  tudásvektora, a vállalatok közötti kapcsolatokat leíró  $\mathbf{A}$  kapcsolati mátrix, az ezekre épülő (6) tudás-aggregátor, valamint a vállalatok kibocsátását meghatározó (4) termelési függvény.

A modell a közgazdasági irodalomban elterjedt monopolisztikus verseny-modell elemeire épít. Egyfelől a partner-vállalatoktól származó tudás-elemek korlátozott helyettesíthetősége miatt szükséges a tökéletes verseny és így a vállalatok homogenitásának feladása. Ha ugyanis a vállalatok tudás-bázisai egymást korlátozottan helyettesítik, az a vállalatok tudása és az alkalmazott technológiák (folyamatok, rutinok, stb.) között létező különbségeket implikál. Így a vállalat által előállított termékek is, legalábbis néhány dimenzió mentén és minimálisan, különbözőek lesznek, így a termékek tökéletes helyettesíthetősége már nem alkalmazható feltevés. Másfelől viszont a hálózati kapcsolatok dinamikájának endogén modellezése kívánná meg a tökéletes versenytől és a homogén vállalatoktól eltérő piaci struktúra feltevését. Ilyen esetekben ugyanis egy adott kapcsolat értéke a vállalat számára attól függ, hogy a másik vállalat milyen addicionális tudást képes nyújtani számára. Így ahhoz, hogy a hálózati kapcsolatokról szóló döntés ne pusztán a kapcsolatok számáról történő döntésre redukálódjon, hanem a konkrét partnerek

<sup>9</sup>Egy korábban már említett kiterjesztés esetén a  $\theta$  paraméter kapcsolat-specifikus heterogenitását feltételezhetjük, ami a hálózati kapcsolatok súlyozásával ekvivalens.

kiválasztása is jelen legyen a döntésben, ahhoz a potenciális partnereknek különbözőeknek kell lenniük, legalább minimálisan eltérő tudásbázissal, amely az előzőek alapján már implikálja a végtermékek piacán tapasztalható heterogenitást. Jelen dolgozat ugyan a hálózati kapcsolatok dinamikájának explicit modellezésével nem foglalkozik, egy későbbi kiterjesztés során a monopolisztikus alap fontos eleme lehet a dinamikus vizsgálatoknak.

### 3.2 A modell keresleti oldala

Míthogy a vállalatok monopolisztikusan versenyzőek, így az általuk előállított termékek a fogyasztók számára nem tökéletes helyettesítők. Jelölje az  $i$ -edik vállalat által előállított termékből fogyasztott mennyiséget  $x_i$ . A fogyasztók a különböző termékek fogyasztásából jutnak hasznossághoz, a hasznossági függvényt pedig Dixit és Stiglitz (1977) modellje alapján az alábbi formában írjuk fel:

$$(7) \quad U = \left( \sum_{i=1}^N x_i^\sigma \right)^{1/\sigma} .$$

A hasznossági függvény fenti specifikációja konstans helyettesítési rugalmasságot feltételez az egyes termékek között, amelynek értéke:  $\varepsilon = 1/(1 - \sigma)$ . Akárcsak a korábban definiált tudásaggregátorban a  $\rho$  paraméter,  $\sigma$  helyettesítési paraméterként értelmezhető és kikötjük rá a  $0 < \sigma < 1$  feltételt. Így a hasznossági függvény közömbösségi görbéi (hiperfelületei) az origóra konvexek lesznek, ami az egyes termékek csökkenő határhasznát mutatja.

A háztartások által elkölthető összes nominális jövedelmet jelölje  $I$ . Így a háztartások költségvetési korlátja egyszerűen a következő alakot ölti:

$$(8) \quad I = \sum_{i=1}^N p_i x_i .$$

Adottnak véve a rendelkezésre álló  $I$  jövedelmet, a háztartások döntési problémája a (7) hasznossági függvény maximalizálását jelenti a (8) költségvetési korlát figyelembevételével. A függelékben megtalálható levezetés alapján a fenti probléma megoldásaként az  $i$ -edik termék keresletére az alábbi összefüggés adódik:

$$(9) \quad x_i = p_i^{-\varepsilon} \frac{I}{\sum_{j=1}^N p_j^{1-\varepsilon}} , \quad i = 1, \dots, N ,$$

ahol  $\varepsilon = 1/(1 - \sigma)$ .

E levezetések során tehát rendelkezésünkre áll a modell-gazdaság egy első leírása: a kínálati oldalt a  $\mathbf{k}$  tudás-vektor, az  $\mathbf{A}$  kapcsolati mátrix, a (6) tudás-aggregátor valamint az ( $N$  darab) (4) termelési függvény alkotják, a keresleti oldalt pedig a (szintén  $N$  darab) (9) keresleti függvény határozza meg.



### 3.3 Általános egyensúly

A fenti modell-gazdaságban a vállalatok profitfüggvénye a következő:<sup>10</sup>

$$(10) \quad \pi_i = p_i y_i - w L_i - z s_i ,$$

ahol  $w$  az egységnyi munka költsége (munkabér),  $s_i$  a vállalat által fenntartott hálózati kapcsolatok száma, míg  $z$  egy kapcsolat fenntartásának a költsége. A vállalat kapcsolatainak száma egyszerűen felírható a kapcsolati mátrix segítségével, ahogy azt a (2) egyenletben láthattuk.

Mint hogy a feladat gazdaság általános egyensúlyi helyzetének a meghatározása, valamennyi piacon egyensúlyt kell feltételeznünk. Jelen esetben ez egyrészt  $N$  számú egyedi termékpiac egyensúlyát jelenti, amelyet egyenként az  $x_i = y_i$  egyenlőségek írnak le, másrészt pedig a munkapiacra vonatkozó egyensúlyi feltételt. Felhasználva a termékpiaci egyensúly feltételeit, a termelési függvény inverzét, valamint a keresleti függvényt, a (10) profitfüggvényt az alábbi formára hozhatjuk:

$$(11) \quad \pi_i = p_i^{1-\varepsilon} \frac{I}{\sum_{j=1}^N p_j^{1-\varepsilon}} - w K_i^{-1/\alpha} p_i^{-\varepsilon/\alpha} \left( \frac{I}{\sum_{j=1}^N p_j^{1-\varepsilon}} \right)^{1/\alpha} - r s_i , \quad i = 1, \dots, N .$$

Mint hogy a hálózati kapcsolatok (az  $\mathbf{A}$  mátrix elemei) exogén adottságként jelennek meg a modellben, az eleve adott  $\mathbf{k}$  tudásvektor és a kapcsolati mátrix együttesen meghatározzák a vállalatok  $K_i$  rendelkezésre álló tudását. Ennélfogva ez a tudásszint a vállalatok számára adottságot jelent, akárcsak a kapcsolatok rögzítettségéből fakadóan a kapcsolati költségek ( $r s_i$ ), továbbá a munkabér ( $w$ ). A vállalat számára adottságként jelenik meg ezen kívül az összes nominális jövedelem ( $I$ ) és a versenytársak árai is ( $p_j$ ). Így viszont a (11) profitfüggvény a vállalatok szemszögéből csupán egyetlen döntési változót, a termék árát ( $p_i$ ) tartalmazza.

A profitmaximalizációs feladat megoldása során szokásos feltevés az, hogy a vállalatok egyenként relatíve kicsinyek a piac egészéhez viszonyítva, így a saját áraiknak a (11) profitfüggvényben található  $\sum_j p_j^{1-\varepsilon}$  összegre gyakorolt hatását elhanyagolhatónak tekintik. Ez a technikai megoldás a levezetéseket és a kapott eredményeket egyszerűsíti, ugyanakkor lényegi torzításokat nem okoz a következtetések szempontjából. Figyelembe véve ezt az egyszerűsítést, valamint azt a korábbi megállapítást, hogy a vállalatok által felhasznált munka ugyan változhat, a kapcsolatok és ezen keresztül a kapcsolatok fenntartásához kötődő költségek rögzítettek (és ezzel együtt a kapcsolatok változása miatt a kibocsátás és az ár sem változik) a vállalatok optimális árdöntésére

<sup>10</sup>A profitfüggvény e specifikációja nem tartalmazza explicit módon a tudás előállításának költségeit. Mivel a vállalat-specifikus  $k_i$  autonóm tudásszintek a modell exogén adottságai, ezek előállítási költsége múltbeli fix költségként jelenik meg és a profitmaximum számítása során nem játszik szerepet. A más vállalatoktól származó tudás költségét pedig a kapcsolatok fenntartásának  $z$  költsége reprezentálja.

az alábbi összefüggés adódik:<sup>11</sup>

$$(12) \quad p_i = w^\varphi K_i^{-\frac{\varphi}{\alpha}} \left( \frac{\varepsilon}{(\varepsilon - 1)\alpha} \right)^\varphi \left( \frac{I}{\sum_{j=1}^N p_j^{1-\varepsilon}} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}\varphi}, \quad i = 1, \dots, N,$$

ahol  $\varphi$  az  $\alpha$  és  $\sigma$  paraméterek függvénye:  $\varphi = (\alpha - \alpha\sigma)/(1 - \alpha\sigma)$ . A fenti összefüggés tehát azt mutatja, hogy a vállalat profitmaximalizáló ára a munkabértől, a vállalat által hozzáférhető tudástól ( $K_i$ ), a versenytársak áraitól ( $p_j$ ), a nominális jövedelemtől ( $I$ ) és a modell paramétereitől ( $\alpha$  és  $\sigma$ ) függ. Minthogy  $\varphi$  értéke pozitív, ezért a bérek növekedése az árakat növeli, a versenytársak árainak növekedése szintén pozitívan hat a saját termék árára, akárcsak az összes nominális jövedelem növekedése. Ezzel szemben a vállalatok által felhasználható tudás ( $K_i$ ) növekedése az optimális árat csökkenti.

A monopolisztikus verseny modelljében tipikus feltevés, hogy a profit zérus. Ez azonban együtt jár a vállalatok számának endogenitásával, ami a piacon lévő vállalatok számának növekedésével (csökkenésével) az elérhető profitot csökkenti (növeli), így a hosszú távú ágazati egyensúlyban a profit zérus. A modellben a vállalatok száma azonban szükségképpen rögzített, mivel a vállalatok hálózata is a modell részét képezi és e hálózat dinamikáját nem vizsgáljuk (vagyis a csomópontok száma adott). Ezen oknál fogva a profit zérus voltát sem tesszük fel.

A modell lezárásaként a munkapiac egyensúlyi helyzetét biztosító egyenlet meghatározására van szükség. Ehhez figyelembe kell venni, hogy a vállalatok optimális árdöntése az adott peremfeltételek közepette meghatározza a kibocsátás ( $y_i$ ) és a felhasznált munkaerő mennyiségét ( $L_i$ ) is. A modellben a munkakínálati döntést nem vesszük explicite figyelembe, a munkakínálat rögzített. Ezt az exogén munkakínálatot  $\bar{L}$ -sal jelölve a munkapiac egyensúlyi helyzetét az alábbi egyszerű összefüggés írja le:

$$(13) \quad \sum_{i=1}^N L_i = \bar{L}.$$

A gazdaság általános egyensúlyi helyzetét így  $N+1$  egyenlet írja le, amiből  $N$  a vállalatok profitmaximalizáló árára felírt (12) összefüggéseket jelent, illetve a plusz egy a munkapiaci egyensúlyt leíró (13) egyenletet. Ez az  $N+1$  egyenlet tartalmazza az általános egyensúly valamennyi feltételét, mivel a (12) egyenletek már tartalmazzák a háztartások optimális (hasznosságot maximalizáló) döntését csakúgy, mint a termékpiaci egyensúlyi helyzetek feltételét, valamint a vállalatok profitmaximalizációs döntését is. Ezt egészíti ki a (13) egyenlet a munkapiaci egyensúly feltételével, így tehát adott valamennyi piac egyensúlyi feltétele, továbbá valamennyi szereplő optimális döntése. Az egyensúlyt leíró

<sup>11</sup>A levezetést lásd a függelékben.

egyenletrendszer tehát az alábbi:

$$(12') \quad p_i = w^\varphi K_i^{-\frac{\varphi}{\alpha}} \left( \frac{\varepsilon}{(\varepsilon - 1)\alpha} \right)^\varphi \left( \frac{I}{\sum_{j=1}^N p_j^{1-\varepsilon}} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}\varphi}, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$(14) \quad \sum_{i=1}^N \left( p_i^{-\varepsilon} \frac{I}{\sum_{j=1}^N p_j^{1-\varepsilon}} \right)^{1/\alpha} K_i^{-1/\alpha} = \bar{L}.$$

Az  $N+1$  egyenlethez  $N+1$  változó tartozik: az árvektor ( $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)$ ) és a munkabér ( $w$ ). A modell számára adottságot jelentenek értelemszerűen az  $\alpha$  és  $\sigma$  paraméterek, ezen túl pedig az exogén hálózati kapcsolatok miatt a rendelkezésre álló tudásbázisok vektora (a  $K_i$  értékek), a rendelkezésre álló munkamennyiség ( $\bar{L}$ ), valamint az összes nominális jövedelem ( $I$ ).

A fenti felsorolásból talán a nominális jövedelem ( $I$ ) exogenitása igényel némi magyarázatot. Bár az árakat explicite kezeljük, a modell valójában reálmodell: az árak konkrét nagyságára éppen azért tudunk önálló értéket meghatározni, mert adott az összes nominális jövedelem. Ebből következően az  $I$  változót nem csak nominális jövedelemként, hanem pénzmennyiségként is felfoghatjuk.

## 4 Egy hálózati modell

Az előbbieken bemutatott modell lehetőséget ad arra, hogy a tudáshálózatok és struktúrájuk szerepét értelmezzük és értékeljük a modell keretein belül. Ehhez azonban a hálózatok és a hálózati struktúra explicit figyelembevételére van szükség. A hálózat struktúráját az (1) kapcsolati mátrix egy adott realizációja, azaz a mátrix elemeinek egy adott kombinációja határozza meg. Könnyen igazolható, hogy  $N$  alacsony értéke esetén is rendkívül sok ilyen kombináció létezhet, így a hálózati struktúra ilyen szempontból történő kezelése meglehetősen nehézkes volna. Mivel célunk a különböző hálózati struktúrák szerepének vizsgálata, ehhez a hálózati struktúrák számára bizonyos referencia-pontokat (kategóriákat) szükséges meghatározni. Ebben a szakaszban két ilyen referencia-pont és ezekhez kapcsolódóan egy hálózati modell bemutatására kerül sor, amelyet később az általános egyensúlyi modellbe integrálunk.

Barabási és Albert (1999) egy egyszerű algoritmust javasolnak arra vonatkozóan, hogy miként jönnek létre (állíthatók elő) skálafüggetlen hálózatok. Az algoritmus két fontos eleme a hálózatok növekedése és az ún. preferenciális kapcsolódás. Előbbi azt jelenti, hogy a hálózathoz egyre újabb és újabb csomópontokat adunk hozzá, míg az utóbbi azt tükrözi, hogy az újonnan csatlakozó csomópontok úgy alakítják ki új kapcsolataikat, hogy nagyobb valószínűséggel csatlakoznak olyan, már a hálózatban lévő csomópontokhoz, amelyeknek fokszáma magasabb. Ez a két jelenség együttesen vezet ahhoz, hogy a kialakuló hálózatok skálafüggetlenek lesznek. A preferenciális kapcsolódás

értelemszerűen egyre nagyobb szerepet biztosít azoknak a csomópontoknak, amelyek több kapcsolattal rendelkeznek, ugyanakkor a növekedés pusztán ténye is a skálafüggetlenséget erősíti, hiszen a legtöbb kapcsolattal éppen a legrégebbi, legidősebb csomópontok fognak rendelkezni (Barabási, 2002; Sebestyén és Parag, 2010). A tanulmányban a Barabási-Albert modell egy speciális módosítását vezetjük be, amely lehetőséget ad arra, hogy egy normált paraméter segítségével a skálafüggetlenség különböző fokait érjük el egy hálózatban. A modell az alábbi algoritmust követi:

- Alakítsunk ki egy  $M$  elemű véletlen hálózatot, melynek átlagos fokszáma  $d$ .<sup>12</sup>
- Adjunk hozzá a hálózathoz egy új csomópontot és az új, valamint a már létező csomópontok között hozzunk létre  $d$  számú kapcsolatot.<sup>13</sup> Az egyes kapcsolatok kialakítása során az alábbi forgatókönyvek szerint járunk el:
  - $r$  valószínűséggel az új kapcsolat a legtöbb kapcsolattal rendelkező olyan partnerhez kapcsolódik, amelyikkel az adott csomópont még nincsen kapcsolatban.
  - $1-r$  valószínűséggel a kapcsolat véletlenszerűen jön létre egy olyan csomóponttal, amelyikkel az adott csomópont még nincsen kapcsolatban.
- A fenti lépést iteráljuk, amíg a hálózat mérete el nem éri  $N$ -et.

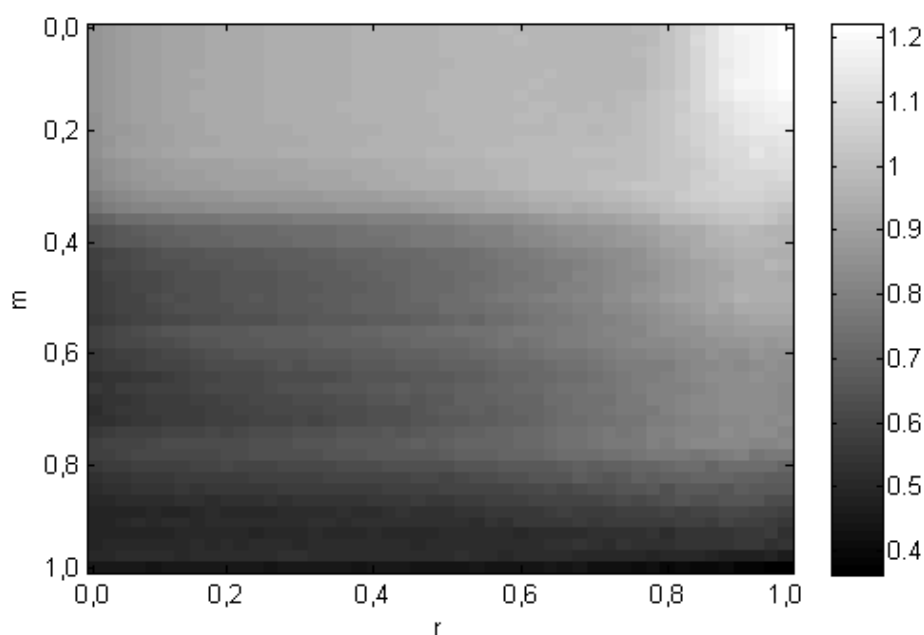
A fenti algoritmus segítségével olyan hálózatok hozhatóak létre, amelyek  $N$  csomóponttal és  $d$  átlagos fokszámmal rendelkeznek, míg  $r$  értékétől függően a skálafüggetlenség (centralizáltság) mértéke a hálózatban különböző. A véletlenszerűség az  $r$  paraméteren keresztül lép be a modellbe. Ha  $r = 1$ , akkor egy szélsőségesen centralizált hálózatot kapunk eredményül, ahol a kezdeti hálózat tagjainak rendkívül sok kapcsolata van, míg a többieknek csupán  $d$ . Amennyiben  $r = 0$ , úgy a kapcsolatok véletlenszerűen alakulnak ki, míg  $r$  növekedésével a fokszám egyre nagyobb súlyt kap.

A hálózat struktúrája szempontjából két fontos jelenség adódik. Egyfelől a hálózat csak speciális esetben lehet szélsőségesen centralizált, mivel a kezdeti hálózat véletlenszerűsége csak abban az esetben teszi lehetővé a szigorúan csillag-topológiájú hálózat kialakulását, ha  $r = 1$  mellett  $M = 2$  vagy  $M = 1$  és  $d = 1$ . Minden más esetben  $r = 1$ -re egy szorosan kapcsolt központi mag körül jön létre a csomópontok egy kevés kapcsolattal rendelkező periferikus halmaza. Másfelől pedig azt is hozzá kell tennünk, hogy  $r = 0$  esetén sem kapunk teljes mértékben véletlen hálózatot, mivel a véletlenszerűség ellenére a hálózat növekedésének időbeli dimenziója azt eredményezi, hogy a korábban csatlakozó csomópontok automatikusan több kapcsolattal rendelkeznek.

<sup>12</sup>A véletlen hálózatot kialakító algoritmus valószínűségi paramétere ennek megfelelően  $d/(M-1)$ .

<sup>13</sup>Speciális esetben, ha  $d$  nagyobb, mint a potenciális partnerek száma, akkor a kapcsolati számot ez utóbbira módosítjuk.

Ezek alapján megállapítható, hogy az  $r$  paraméter önmagában csak korlátozottan képes a véletlen és a skálafüggetlen (centrális) hálózatok közötti átmenet leképezésére. A hálózati modellnek azonban van két további paramétere is: a hálózat (végső) méretét adó  $N$  és a kiindulási hálózat méretét adó  $M$  paraméterek. Mivel a kiindulási hálózatot véletlenszerűnek feltételezzük, ezért a végső hálózat véletlenszerűségét az is befolyásolja, hogy az induló hálózat mekkora a végső hálózathoz képest. Ezt az  $m = M/N$  arány határozza meg. Minél közelebb van ez az arány egyhez, annál véletlenszerűbb a hálózat (mivel a skálafüggetlenséget kialakító algoritmus rövidebb ideig működik), nullához közelítő arány mellett viszont a skálafüggetlenség növekszik.



1. ábra. Véletlenszerűség és skálafüggetlenség a módosított Barabási-Albert modellben

A fenti hálózati modell segítségével egyszerű szimuláció végezhető az  $r$  és az  $m$  paraméterek releváns értékeire (mindkét paraméter a 0 és 1 közötti tartományban mozoghat). A szimulációk során a hálózat méretét  $N = 50$ -nek, az átlagos fokszámot 6-nak választva valamennyi paraméter-kombinációra 1000 futtatást végeztünk. A futtatások során a kapott fokszámeloszlásra a (3) egyenletnek megfelelő hatványfüggvényt illesztve és a kapott kitevők értékét az 1000 futtatásra átlagolva kaphatunk képet a hálózati modell működéséről. Az eredményeket összegzi az 1. ábra az  $r$  és az  $m$  paraméterek terében. A világos árnyalatok magasabb, a sötétek alacsonyabb szintű skálafüggetlenséget jelentenek. A skálafüggetlenség mértékét a (3) egyenletben bevezetett  $\delta$  kitevő segítségével mérjük.

Az ábráról látható, hogy a vizsgált két paraméter terében a véletlenszerű hálózatoktól (bal alsó tartomány) az egészen centralizált hálózatokig (jobb

felső tartomány) juthatunk el. A köztes területeken a skálafüggetlenség különböző fokait mutatja a kialakuló hálózat.

## 5 Szimulációk és paraméter-értékek

Az előző pontban bemutatott általános egyensúlyi modell hálózati struktúrákkal kibővített változata a hálózat csomópontjainak (a gazdasági egységeknek) egyedi modellezése miatt analitikusan nem oldható meg. Ennek okán a modellt numerikus módszerekkel oldjuk meg, ami ahhoz vezet, hogy a paraméterekre specifikus értéktartományokat és értékeket kell definiálnunk. A modell numerikus megoldásának algoritmusát a függelék tartalmazza, a továbbiakban a paraméterek rögzítésének elveit adjuk meg. Az elemzések során az egyes paraméterek nem minden esetben kerülnek rögzítésre, amennyiben viszont igen, úgy az alábbi elveket alkalmazzuk.

### 5.1 Rögzített paraméter-értékek

Korábban már kiemeltük, hogy a modellben a vállalatok rögzített számával dolgozunk, ami egyben a hálózat csomópontjainak számát is jelenti. A paraméter rögzítése arra ad lehetőséget, hogy a hálózati struktúra változásainak hatását elválasszuk a hálózat méretének változása által okozott hatásoktól. A hálózat méretét  $N = 50$ -nek választjuk, aminek praktikus oka, hogy így kezelhető hálózat-méretet kapunk, ami a numerikus szimulációk során hasznos a hatékony erőforrás-kihasználás szempontjából. A hálózat méretét a bemutatott elemzések teljes tartományán rögzítjük.

A tudás-hálózatot meghatározó paraméterek közül rögzítésre kerül  $R$ , a kapcsolatok átlagos száma is, melyet 6-nak választunk. Minthogy  $N$  is rögzített, így a hálózatok sűrűsége is adott (12%). Ennek a későbbiekben lényeges következménye lesz az eredmények értékelése szempontjából. A hálózatot leíró paraméterek közül egyetlen futtatás során sem rögzítjük az  $r$  és az  $m$  paramétereket, mivel ezek (a hálózat méretével együtt) határozzák meg a struktúrát, ami az elemzés fókusza.

Az elemzések egy részében rögzítésre kerül a nominális jövedelem (pénzmenyiség). Mivel a modell korábban már említett dichotómiája okán  $I$  értékének csak az árváltozók abszolút nagyságának meghatározása során van jelentősége, így értékét  $I = 100$ -nak állítjuk be. Hasonló módon egyes futtatásokban rögzítjük a munkakínálat nagyságát is:  $\bar{L} = 100$ . A szimulációk egy részénél szintén rögzítjük  $\rho$  és  $\theta$  értékét:  $\rho = 0,5$ ,  $\theta = 0,8$ . Ezek a választások természetesen önkényesek, azonban a további vizsgálatok során ezt a rögzítettséget feloldjuk.

Egyes futtatások során rögzítésre kerülnek az  $\alpha$  és  $\sigma$  paraméterek. Mivel e két paraméter a széles körben elterjedt és alkalmazott DSGE modellek szerkesztésében képezi, értékük a makroökonómiai szakirodalom alapján könnyen meghatározható. Különböző DSGE modellekben használt, becsült vagy kalibrált értékeket tartalmaz az 1. táblázat a vizsgált két paraméterre vonatkozóan. Jól látható, hogy a paraméterek értékei jól definiálható tartományban

szóródnak. A szimulációk során az egyedi értékek átlagát alkalmazzuk, így  $\alpha$  és  $\sigma$  értékét rendre 0,7-es és 0,85-os szinten rögzítjük.

Szerző	Ország	$\alpha$	$\sigma$
Smets-Wouters (2007)	USA	0,81	0,90
Ratto et al. (2009)	Eurozóna	0,52	0,90
Dib (2001)	Kanada	0,67	0,83
Mendoza (1991)	Kanada	0,68	
Harrison et al. (2005)	Anglia	0,69	0,91
Adolfson et al. (2007)	Svédország	0,71	0,82
Jakab-Világi (2008)	Magyarország	0,83	0,83
Baksa et al. (2009)	Magyarország	0,72	
Erceg et al. (2006)	USA		0,83
Christoffel et al. (2008)	Eurozóna		0,70
<i>Átlag</i>		0,70	0,85

1. táblázat. DSGE modellek strukturális paraméterei

## 6 Szimulációs eredmények

A továbbiakban a fent bemutatott modell szimulációi során kapott eredmények bemutatására kerül sor. Először a hálózati struktúrát közvetlenül meghatározó két paraméter ( $r$  és  $m$ ) kivételével a modell valamennyi más paraméterét rögzítjük az előző pontban megadott értékek mellett, így kizárólag a struktúra 1. ábrán bemutatott különböző realizációi és a gazdasági teljesítmény közötti kölcsönhatás vizsgálható. Ezt követően Monte Carlo szimuláció segítségével valamennyi további paraméter változása mellett mérjük fel a struktúra hatását. Végül olyan elemzéseket mutatunk be, amelyek a vállalati tudásszintek nem egyenletes eloszlását feltételezik.

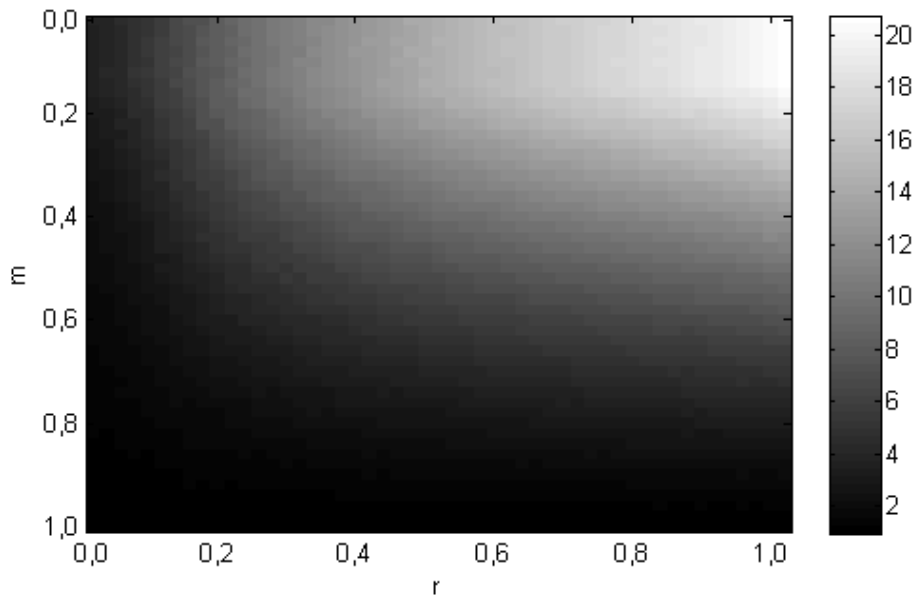
### 6.1 Általános egyensúly homogén tudásszintek esetén

A fentieknek megfelelően a következő numerikus szimulációt vizsgáljuk. A módosított Barabási-Albert modell  $r$  és  $m$  paramétereinek különböző kombinációi mellett kialakuló hálózati struktúrát alapul véve megoldható az általános egyensúlyi modell (a szimuláció során használt algoritmus a függelékben kerül bemutatásra). A modell további paramétereit az előző szakaszban megadott értékeken rögzítjük. A most rögzítésre kerülő paraméterek változásának hatását később részletesebben is megvizsgáljuk, egyelőre csupán a hálózati struktúrát reprezentáló  $r$  és  $m$  paraméterek hatásának elemzése a cél.

A modell további fontos exogén változója a vállalatok autonóm tudásszintjeit leíró  $\mathbf{k}$  vektor. Ennek értékeit a most bemutatandó szimulációk során azonosan egységnyinek választjuk. Ez azt jelenti, hogy a vállalatok homogének tudásszintjük tekintetében. Ezt az egyszerűsítést a későbbiekben feloldjuk, azonban jelen esetben lehetőséget teremt arra, hogy a struktúra hatását a vállalatok tudásszintbeli heterogenitásától elkülönítve tárgyaljuk.

A modellt megoldva az általános egyensúlyra jellemző output változók adódnak, melyek közül a kibocsátást emeljük ki a dolgozatban. A vizsgálat során valamennyi  $(r, m)$  kombinációra 1000 független futtatást végeztünk majd a kapott eredményeket átlagolva kiszűröltük ki a hálózati modell sztochasztikus jellegéből fakadó variabilitást. Az egyes paraméter-kombinációk mellett adódó kibocsátás-értékeket mutatja a 2. ábra.<sup>14</sup> A világos árnyalatok magasabb, a sötétebb árnyalatok alacsonyabb kibocsátási szinteket jelölnek, illetve az 1. ábrához hasonlóan az ábra bal alsó tartományában a véletlenszerűbb, a jobb felső tartomány felé haladva pedig egyre centralizáltabb hálózatokat találunk.

Az ábra alapján jól látható, hogy az általános egyensúlyi modell alapján szolgáló tudáshálózat struktúrája jelentős hatással lehet a kibocsátásra. Alacsonyabb szintű kibocsátás adódik a véletlenszerűbb és magasabb a skálafüggetlen struktúrát mutató hálózatok esetén. Az is fontos eredmény, hogy a skálafüggetlenségnek nem található egy köztes optimális szintje: a legnagyobb kibocsátási szintet a leginkább centralizált hálózati struktúrák mellett tapasztaljuk.



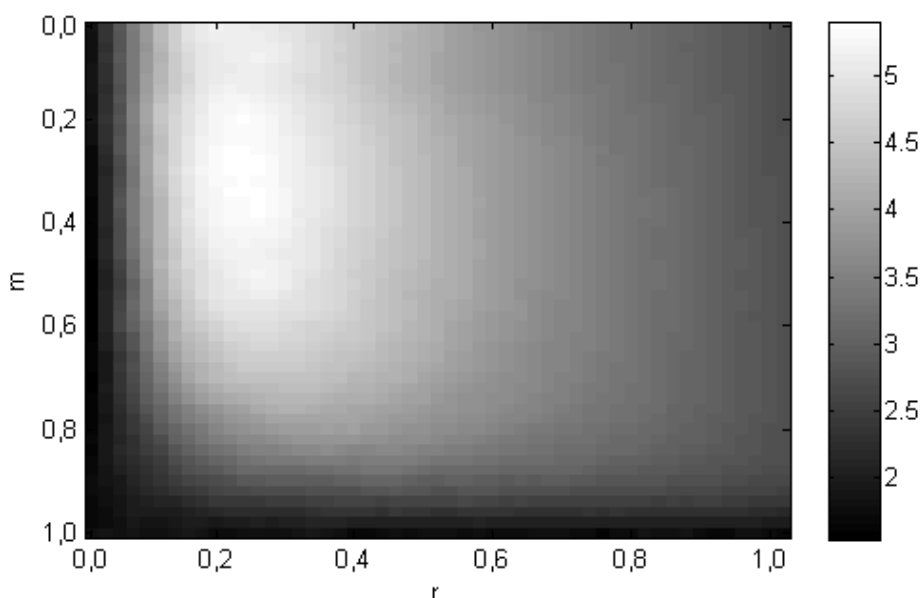
2. ábra. A kibocsátás alakulása a hálózati struktúra függvényében

Nagyon fontos kiemelni, hogy az ábrán látható tendenciák kizárólagosan a hálózat struktúrájának változásából fakadnak. Ha ugyanis visszatekintünk a második szakasz elején bevezetett (4) termelési függvényre és (6) tudás-aggregátorra, akkor könnyen beláthatjuk, hogy a vállalatok által kialakított kapcsolatok száma önmagában pozitív hatással van a kibocsátásra.

<sup>14</sup>Az ábrán a kibocsátásszintek nem abszolút nagyságukban, hanem a véletlen hálózat ( $r = 0$  és  $m = 1$ ) kibocsátási szintjéhez viszonyítva kerülnek feltüntetésre.



Az alkalmazott hálózati modell jelentősége éppen abban áll, hogy minden esetben azonos átlagos kapcsolati számot adnak eredményül. Az induló hálózat átlagos fokszámát paraméterként állítjuk be, majd a hálózatot kialakító algoritmus minden egyes új csomópontja pontosan egyforma számú kapcsolatot alakít ki, így a kapcsolatok átlagos száma a hálózatokban mindvégig azonos.<sup>15</sup> Így tehát a fenti ábrán látható hatás nem fakadhat abból a triviális megállapításból, hogy több kapcsolat több hozzáférhető tudást és ezáltal magasabb termelékenységet és kibocsátást jelent. Az eredmények tehát azt bizonyítják, hogy magának a hálózati struktúrának, vagyis a kapcsolatok egymáshoz képest vett elhelyezkedésének is külön szerepe van a gazdasági teljesítmény alakulásában.



3. ábra. A vállalatok egyedi kibocsátási szintjeinek relatív szóródása különböző hálózati struktúrák esetén

A modell segítségével vizsgálható az árszínvonal alakulása is, ezek az eredmények azonban triviálisnak tekinthetők, hiszen adott nominális kibocsátás (pénzmenyiség) mellett a magasabb aggregált kibocsátáshoz alacsonyabb árszínvonalnak kell társulnia. A szimulációs eredmények ezt megerősítik: a skálafüggetlenség növekedésével az árszínvonal csökken. Ennél érdekesebb kérdés annak vizsgálata, hogy az egyedi vállalatok kibocsátása milyen mértékben szóródik különböző hálózati struktúrák esetén. Ehhez az

<sup>15</sup>A teljes pontosság érdekében fontos megjegyezni, hogy a kiindulási pontul szolgáló véletlen hálózatban az átlagos fokszám nem lehet pontosan a paraméter szerinti érték. Ezt a variabilitást azonban kis kezdeti hálózat esetén a később a hálózatba integrált számos csomópont pontosan meghatározott és azonos kapcsolati száma ellensúlyozza, nagy hálózat esetén pedig a véletlen hálózat átlagos fokszáma is egyre pontosabban közelíti a paraméterértéket.

egy-egy futtatások során kiszámoljuk a vállalatok egyedi kibocsátási szintjeinek relatív szórását, mint az egyenlőtlenség mértékét. Az eredményeket a már ismert struktúrában mutatja a 3. ábra. A világos árnyalatok nagyobb szóródást, a sötétebb árnyalatok kisebb szóródást mutatnak.

Az ábra alapján hasonló tendenciát találunk, mint a kibocsátás esetén: a skálafüggetlenség magasabb szintjei mellett a vállalatok kibocsátási szintjei egyenlőtlenebbül oszlanak el. Ez azonban csak tendenciájában igaz, mivel a vállalati kibocsátási szintek szóródásának egy jól látható maximuma van a vizsgált paraméterter bal felső tartományában. Ez közepesen skálafüggetlen hálózati struktúrát takar, ahol a kiinduló hálózat relatíve kicsi, ugyanakkor a hálózat fejlődése során a preferenciális kapcsolódás alacsony súllyal van jelen, vagyis a kapcsolatok véletlenszerűen alakulnak ki. Más szavakkal, olyan hálózati struktúra esetén találjuk a legnagyobb mértékű diverzitást a vállalatok között, amelynél a skálafüggetlenséget elsősorban a hálózat növekedése (az „idősebb” csomópontok központi helyzete) és kevésbé a preferenciális kapcsolódás alakítja ki.

Ha összevetjük a 2. és a 3. ábra eredményeit, akkor az is látható, hogy a vizsgált rendszer legmagasabb teljesítményéhez (erősen skálafüggetlen hálózat) közepes mértékű diverzitás társul. Ez arra enged következtetni, hogy a rendszer teljesítménye szempontjából sem a túlzott, sem pedig a korlátozott sokféleség nem kedvező.

A fenti elemzés segítségével sikerült rávilágítani arra, hogy a gazdasági tevékenység alapjául szolgáló tudáshálózatok struktúrája hatással van az aggregált kibocsátásra. A skálafüggetlenség és a kibocsátás között pozitív kapcsolat fedezhető fel, a nagyobb kibocsátás azonban a vállalatok közötti növekvő mértékű egyenlőtlenséggel társul. Fontos azonban azt is megvizsgálni, hogy a kapott képet mennyiben árnyalja, ha a modell eddig rögzített paramétereit megváltoztatjuk. Ennek érdekében egy olyan szimulációs stratégiát alkalmazunk, amely bizonyos értelemben analóg a modell megoldásának analitikus levezetésével, amennyiben lehetőséget nyújt arra, hogy a modell-paraméterek output (endogén) változókra gyakorolt hatását nyomon kövessük.

Ehhez a statisztikában jól ismert Monte Carlo szimulációk elvét vesszük alapul, amelynek a lényege, hogy a modell paramétereit véletlenszerű kombinációban választjuk meg. A módszer során különböző (véletlen) paraméterkombinációkra oldjuk meg a modellt és feljegyezzük a paraméterek valamint az eredményváltozók értékét. A lépést elegendő alkalommal elvégezve egy egyszerű keresztmetszeti adatbázishoz jutunk, amelyben egy rekord egy futtatás paraméterértékeit és az eredményváltozók értékeit tartalmazza. Az eredményváltozók és a paraméterek értékei közötti kapcsolat az adatbázis alapján statisztikai eszközökkel vizsgálható, így az eddig fixnek vett paraméterek hatása is bevonható az elemzésbe. Az alábbi elemzés elvégzéséhez összesen 10 000 futtatást végeztünk el véletlenszerűen választott paraméterértékekkel, majd egyszerű regresszió-analízis segítségével vizsgáljuk a hálózati struktúra és a modell eredményváltozói közötti kapcsolatot, amelyben a magyarázó változók szerepét a modell paramétereit, a magyarázott változó szerepét pedig a modell eredményváltozói töltik be.

	Homogén vállalatok	Normális eloszlás	Skálafüggetlen eloszlás
Konstans	43290,9*** (0,0000)	43646,4*** (0,0000)	59846,3*** (0,0000)
$\alpha$	17008,2*** (0,0000)	16732,3*** (0,0000)	21509,2*** (0,0000)
$\sigma$	9301,38*** (0,0000)	9609,26*** (0,0000)	11690,2*** (0,0000)
$\theta$	18193,7*** (0,0000)	18255,7*** (0,0000)	27364,4*** (0,0000)
$\rho$	-110716*** (0,0000)	-109700*** (0,0000)	-150761*** (0,0000)
$I$	2,42332 (0,5295)	2,3559 (0,5353)	-5,2669 (0,2503)
$L$	49,1607*** (0,0000)	49,4303*** (0,0000)	60,3038*** (0,0000)
$r$	11048*** (0,0000)	9361,66*** (0,0000)	11807,6*** (0,0000)
$M$	-381,97*** (0,0000)	-374,84*** (0,0000)	-516,54*** (0,0000)
$\mu$		-1492,8** (0,0499)	5517,42*** (0,0000)
Korrigált $R^2$	0,517941	0,511605	0,56544

2. táblázat. Regressziós eredmények a paraméter-variációs szimulációk alapján

Az 2. táblázat tartalmazza a kibocsátásra felírt regressziós modell eredményeit, amelyben valamennyi paramétert magyarázó változóként szerepeltettük. A táblázat tartalmazza a szokásos statisztikai outputokat.<sup>16</sup>

Az eredményekből (első oszlop, homogén vállalatok) az látható, hogy a hálózati struktúra 2. ábrán kimutatott hatása szignifikáns marad abban az esetben is, ha a modell többi paraméterét nem rögzítjük, vagyis tendenciájában a skálafüggetlenség aggregált kibocsátásra gyakorolt pozitív hatása fennmarad. Ezt az  $r$  paraméterre kapott pozitív, valamint az  $M$  paraméterre kapott negatív regressziós koefficiens mutatja.<sup>17</sup>

Az aggregált termelési függvény két paramétere,  $\alpha$  és  $\bar{L}$  pozitív hatással van a kibocsátásra, amely triviális eredmény, tekintve a termelési függvény specifikációját. A termékvariánsok közötti helyettesíthetőséget kifejező  $\sigma$  paraméter esetében szintén pozitív hatást kapunk, ami azt mutatja, hogy nagyobb fokú helyettesíthetőség magasabb aggregált kibocsátással párosul. Ez az eredmény tulajdonképpen a piacon érvényesülő monopol-hatások és a kibocsátás közötti jól ismert összefüggést tükrözi.<sup>18</sup> A spilloverek erősségét mutató  $\theta$  paraméter hatása szintén pozitív, ami logikus következtetésnek tűnik, hiszen a magasabb spillover azt jelenti, hogy minden egyéb tényező változatlanlansága mellett a vállalatokhoz több tudás áramlik más szereplőktől,

<sup>16</sup>Zárójelben az adott koefficiens  $p$ -értéke található, a csillagok száma pedig rendre 10, 5 és 1 százalékos szignifikancia szinteket jelöl.

<sup>17</sup>Az  $M$  paraméter változása  $N$  rögzítettsége okán megegyezik az  $m$  paraméter változásával.

<sup>18</sup>Minél erősebb a vállalatok monopolereje, azaz a termékdifferenciálás foka, annál nagyobb a holtteher-veszteség. A helyettesíthetőség növekedése a homogén termékek és így a tökéletes verseny irányába mozdítja a gazdaságot, ami a holtteher-veszteséget csökkenti.

így saját felhasználható tudásbázisuk magasabb lesz, ami az egyedi és az aggregált kibocsátási szintek növekedését eredményezi. A vállalatok tudásbázisai közti helyettesíthetőséget mérő  $\rho$  paraméter esetében negatív együttthatót kapunk: minél tökéletesebb a helyettesítés, annál kisebb a kibocsátás. Ez az eredmény azt mutatja, hogy a magasabb kibocsátási szintek a vállalatok magasabb fokú heterogenitása esetén figyelhetőek meg. Végül megemlítjük, hogy a nominális jövedelem nincsen kimutatható hatással a kibocsátásra, ami a modell korábban már hangsúlyozott dichotomikus jellegéből nyilvánvalóan következik és az elemzés ezt a dichotómiát megerősíti.

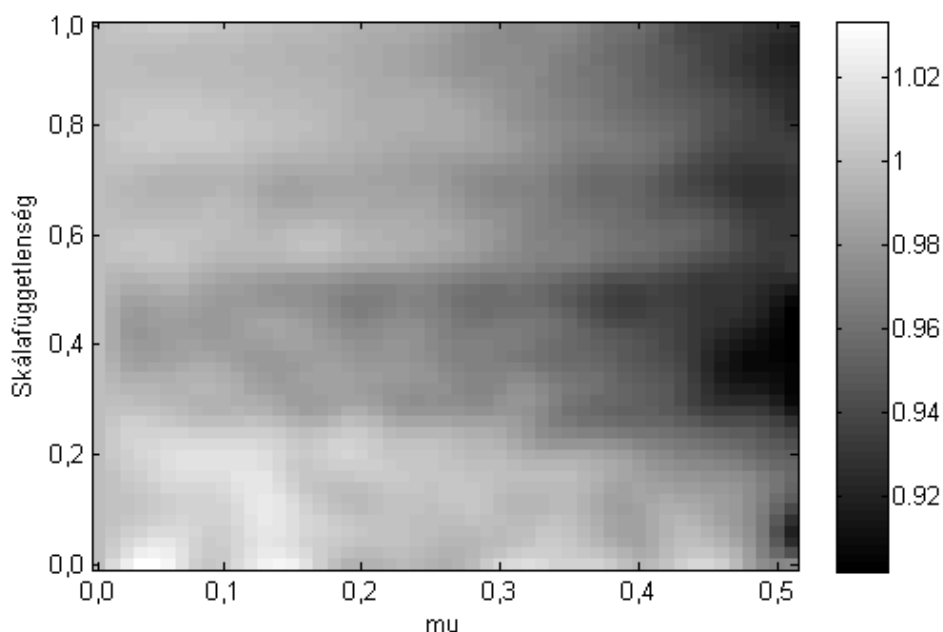
## 6.2 Általános egyensúly heterogén vállalati tudásszintek esetén

Az előző pontban azzal a feltevessel éltünk, hogy a vállalatok (autonóm) tudásszintjei azonosak. Ez a feltevés természetesen feloldható, ekkor azonban a tudásszintek eloszlására vonatkozóan kell addicionális feltevéseket tennünk. A továbbiakban két esetet vizsgálunk. Egyrészt egy olyan szituációt, amikor a tudásszintek normális eloszlást követnek, másrészt pedig egy olyan esetet, amikor a tudásszintek skálafüggetlen eloszlással jellemezhetőek.

### 6.2.1 Normális eloszlás a tudásszintekben

Ez az eset tulajdonképpen az előző pontban vizsgált szituáció egy logikus kiterjesztéseként fogható fel. Tegyük fel, hogy a vállalatok autonóm tudásszintje  $k_i \sim N(1, \mu)$  normális eloszlást követ. Az eloszlás várható értékének megválasztása mindössze skálázási hatással bír, mivel a nagyobb vállalati tudásszintek ceteris paribus nagyobb hatékonyságot és nagyobb kibocsátási szintet eredményeznek. A szórás megválasztása lényegesebb, itt a  $\mu = 0$  választással az előző pont elemzését kapjuk vissza, jelen esetben azonban a szórást a  $(0; 0,5)$  intervallumon vizsgáljuk. A 4. ábra mutatja a kibocsátás alakulását a hálózat skálafüggetlensége és a tudásszintek eloszlásának szórása függvényében.<sup>19</sup> A könnyebb értelmezés érdekében a kibocsátási szinteket a skálafüggetlenség valamennyi szintjén (függőleges tengely) a  $\mu = 0$  esethez viszonyítjuk (a sötét árnyalatok alacsonyabb, a világos árnyalatok pedig magasabb kibocsátást mutatnak).

<sup>19</sup>A hálózat skálafüggetlenségét jelen esetben egy dimenzióra szűkítjük a korábbi kettő helyett. A modell paramétereit csupán a 2. és 3. ábra átlója mentén változtatjuk, vagyis az  $r$  és  $m$  paraméterek értékeit egymással összekapcsolva változtatjuk. Az ábrán a függőleges tengelyen az  $r$  paraméter értékei szerepelnek, de az előbbieket miatt ez jelen esetben az  $m$  paraméter értékét is meghatározza:  $r = 0$  esetén  $m = 1$  és fordítva.



4. ábra. Kibocsátás a tudásszintek szórásának függvényében

Az ábráról az látható, hogy a kibocsátás tipikusan alacsonyabb azokban az esetekben, amelyekben a vállalatok tudásszintjeinek szóródása nagyobb, ez a tendencia azonban a skálafüggetlenség magasabb fokain válik igazán érzékelhetővé. Alacsony skálafüggetlenség esetén (a tudáshálózat nagyobb véletlenszerűsége mellett, amennyiben  $r < 0,2$ ) a tudásszintek szórása nem hat érdemben a kibocsátásra. A 4. ábrán ugyan kiszűrtük a skálafüggetlenség közvetlen hatását, de az eredmények azt mutatják, hogy a korábban tapasztalt pozitív összefüggés a skálafüggetlenség és a kibocsátás között a tudásszintek szórásától függetlenül markánsan kimutatható.

A vállalatok egyedi kibocsátási szintjeinek szórását vizsgálva nem található érdemi összefüggés a tudásszintek szórása és a vállalatok közötti heterogenitás között. Ez azt mutatja, hogy lényegi különbség fedezhető fel a tudásszintekben jelentkező sokféleség valamint a vállalatok kibocsátási szintjeiben jelentkező sokféleség között. Míg az első a modell exogén eleme, a második endogén, ezért a tudásszintekben megfigyelt sokféleség magyarázó tényezője lehet a kibocsátási szintekben megfigyelhető sokféleségnek. Jelen esetben azt látjuk, hogy a tudásszintek nagyobb szóródása nem magyarázza meg kibocsátási szintekben tapasztalt nagyobb szóródást.

A 2. táblázat második oszlopában látható a normális eloszlású tudásszintekre elvégzett szimulációk regressziós elemzése. Az eredmények itt is azt mutatják, hogy a skálafüggetlenség kibocsátásra gyakorolt pozitív hatása fennmarad, ugyanakkor a tudásszintek szóródásának szignifikáns negatív hatása van a kibocsátásra.

### 6.2.2 Skálafüggetlen eloszlás a tudásszintekben

Mindamellett, hogy az autonóm tudásszintek vállalatok közötti szóródása reális feltevés, az eloszlásra tett feltevés meglehetősen önkényes. Az előző pontban a normalitás feltevésével éltünk, azonban a tudásszintek skálafüggetlen eloszlása szintén reális alternatíva. A továbbiakban ezt az esetet vizsgáljuk. A vizsgálatok során feltesszük, hogy a vállalatok tudásszintje  $k_i \sim P(1, \mu)$  Pareto-eloszlást követ.<sup>20</sup> Ilyen eloszlás esetén azonban felmerül az a kérdés is, hogy a tudásszintek eloszlása milyen összefüggésben van a hálózat fokszámeloszlásával. Mivel a modellben mindkét eloszlás exogén faktor, ezért a vállalatok tudásszintjeinek és fokszámainak eloszlását szinkronizálhatjuk. Ehhez egyszerűen összerendezzük az adott eloszlás alapján generált tudásszinteket és a hálózati modellből adódó fokszámokat úgy, hogy a legnagyobb fokszámmal rendelkező vállalat egyben a legnagyobb tudásszinttel rendelkezzen, stb.<sup>21</sup> A skálafüggetlen eloszlás  $\mu$  paraméterét a  $(0, 2)$  intervallumon változtatjuk.<sup>22</sup> Az 5. ábrán látható az elvégzett szisztematikus futtatások eredménye, hasonlóan a 4. ábrához (az ábrán a kibocsátási szinteket most is a  $\mu = 0$  esethez viszonyítjuk, valamennyi skálafüggetlenségi szint esetén).

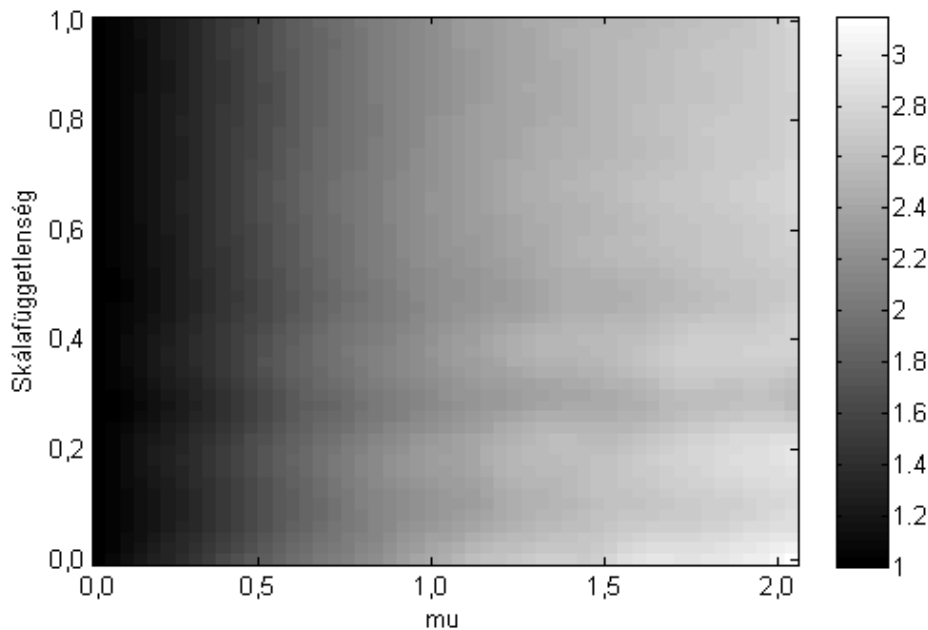
Jól látható, hogy a  $\mu$  paraméter növekedése bármely skálafüggetlenségi szint esetén pozitívan hat a kibocsátási szintre. Vagyis minél inkább érvényesül a skálafüggetlenség a tudásszintek eloszlásában (minél kevesebb a köztes tudásszint), annál magasabb kibocsátást érhet el a gazdaság, függetlenül a tudáshálózat skálafüggetlenségének mértékétől. Bár az ábrán a hálózat skálafüggetlenségének hatását kiszűrtük, ez a hatás a 2. ábrán bemutatott tendenciának továbbra is megfelel, vagyis a hálózati skálafüggetlenség is pozitívan hat a kibocsátásra.

Ezek alapján a skálafüggetlenséget két dimenzió mentén értelmezve (a tudáshálózatok fokszámeloszlásának skálafüggetlensége egyrészt és a tudásszintek eloszlásának skálafüggetlensége másrészt) azt a következtetést vonhatjuk le, hogy mindkét dimenzió mentén a magasabb szintű skálafüggetlenség a rendszer magasabb szintű teljesítményével jár együtt.

<sup>20</sup>Az eloszlás sűrűségfüggvénye:  $f(k_i) = \mu/k_i^{\mu+1}$ . Jegyezzük meg, hogy az eloszlás  $\mu$  paramétere most más tartalommal rendelkezik, mint a normális eloszlás esetén. Ott a tudásszintek szóródását mutatta, jelen esetben a skálafüggetlenség mértékét tükrözi.

<sup>21</sup>A vállalatok tudásszintje és fokszáma közötti teljes szinkron természetesen erős feltevés, azonban a szinkronizáció hiányában elvégzett kontrollfuttatások az itt bemutatott szinkronizált esettel mind minőségi, mind pedig mennyiségi szempontból azonos eredményekre vezetnek.

<sup>22</sup>Figyelembe véve a használt eloszlás definícióját, a vizsgált tartomány az empirikus eloszlások esetén jellemző skálafüggetlenségi tartományt járja be. Ezeknél az eloszlásoknál a (3) függvény  $\delta$  kitevője tipikusan az  $(1, 3)$  tartományban található (lásd például: Csermely, 2005), amihez vegyük figyelembe, hogy  $\delta = 1 + \mu$ .



5. ábra. Kibocsátás a tudásszint-eloszlás skálafüggetlenségének függvényében

Az 2. táblázat harmadik oszlopában található eredmények a jelen esetre elvégzett Monte Carlo szimulációk eredményeit mutatják. Ezek alapján megerősíthetjük, hogy a hálózati struktúra hatása nem változik a tudásszintek skálafüggetlen eloszlásának feltevése esetén sem: a fokozottabban skálafüggetlen hálózati struktúrák magasabb szintű aggregált kibocsátással társulnak. A táblázat adatai megerősítik az előbb vázolt összefüggést is: a skálafüggetlenség növekedése a tudásszintek tekintetében is nagyobb aggregált kibocsátással jár együtt.

Érdekes egy fontos összehasonlítást tennünk a tudásszintek normális eloszlása esetén kapott eredményekkel. Bár az alkalmazott eloszlások  $\mu$  paramétere eltérő interpretációval bír a két esetben, bizonyos analógia észrevehető. A normális eloszlás esetén a paraméter közvetlenül a tudásszintek átlag körüli szóródását tükrözi. A Pareto (skálafüggetlen) eloszlásnál a paraméter az eloszlásfüggvény görbületét tükrözi, ezáltal pedig a nagyon magas és a nagyon alacsony közötti „átmeneti” tudásszintek relatív gyakoriságát:  $\mu$  magasabb értéke ezen köztes értékek kisebb előfordulási valószínűségét jelenti. Az analógia abban áll, hogy a skálafüggetlenség esetén is egyfajta szóródást mér a paraméter, mégpedig azt, hogy a vállalatok tudásszintjei milyen mértékben oszlanak magas és alacsony kategóriákra.<sup>23</sup> A normális eloszlás esetén a szóródás növekedése strukturálatlan (fehér zaj), a skálafüggetlenség esetében viszont strukturálatlan nevezhető: a vállalatok közötti tudásszintbeli különbségek növekedése jól meghatározható formát követ.

<sup>23</sup>Szimulációk segítségével megmutatható az is, hogy  $\mu$  növekedésével a szimulált Pareto-eloszlású minták szórása növekszik a vizsgált paramétertartományon.

Ezen interpretáció alapján viszont azt is mondhatjuk, hogy a tudásszintek szóródásának két formája alapvetően eltérő hatással bír a gazdaság kibocsátására. A fehér zaj jellegű, strukturálatlan szóródás tipikusan csökkenti a kibocsátást, ha azonban a szóródás skálafüggetlen struktúrát követ, akkor a skálafüggetlenség növekedése a kibocsátás növekedéséhez vezet.

## 7 Összefoglalás

A tanulmány arra tett kísérletet, hogy egy egyszerű általános egyensúlyi modellbe integrálva a hálózati struktúra szerepét vizsgálja a tudásáramlásban, a termelékenységre gyakorolt hatásban és ezáltal a gazdasági teljesítményben. A modell analitikus megoldását numerikus szimulációk alkalmazásával helyettesítettük, mivel a hálózati struktúrák figyelembevétele a gazdasági szereplők egyedi modellezését igényli, így a reprezentatív szereplők feltevése nem alkalmazható és a modell analitikus eszközökkel nem kezelhető. A hálózati struktúrák értelmezése során a preferenciális kapcsolódás modelljének egy speciális kiterjesztését alkalmaztuk, amely lehetővé teszi a véletlenszerű és a skálafüggetlen hálózatok közötti átmenetek reprezentációját.

A szimulációk során kapott eredmények egyértelműen megmutatják, hogy a tudás-hálózatok strukturális jellemzői lényegesen befolyásolják a gazdaság aggregált teljesítményét: a véletlenszerűség alacsonyabb, az erős skálafüggetlenség magasabb kibocsátási szinttel társul. Ez az eredmény egyrészt rávilágít a hálózati kapcsolatok struktúrájának rejtett hatásaira, másrészt pedig lényeges adalékkal szolgál a hálózati struktúrák evolúcióját tekintve. A valós hálózatok nagy száma által mutatott skálafüggetlen struktúra felveti azt a hipotézist, hogy a skálafüggetlenség kialakulása egy olyan folyamat eredménye, amely során a rendszer elemeinek kapcsolódási struktúrája hatékonysági elven, a környezeti feltételekhez történő legkedvezőbb alkalmazkodás mentén választódik ki, így ez a folyamat bizonyos analógiát mutat az evolúciós elképzelésekkel (Barabási, 2002; Csermely, 2005). Másként fogalmazva, a skálafüggetlen struktúra a rendszer egészének magasabb teljesítményét generálja (természetesen mind a struktúrát, mind a rendszert és annak teljesítményét széles értelemben véve). A tanulmány eredményei igazolni látszanak ezt az elképzelést, hiszen a skálafüggetlen struktúra valóban magasabb szintű aggregált teljesítménnyel társul.

A skálafüggetlenség és az aggregált teljesítmény közötti kapcsolat nem csak a tudáshálózatok struktúrájának dimenziójában mutatható ki, hanem a vállalatok egyedi tudásszintjeinek eloszlása esetén is: a gazdaság kibocsátása nagyobb abban az esetben, ha a vállalatok tudásszintje a fokszámmal szinkronban lévő skálafüggetlen eloszlást mutat.

A dolgozat eredményei érdekes következtetésekhez vezetnek a sokféleség és az aggregált teljesítmény összefüggése kapcsán. Először is fontos elkülönítenünk a gazdasági teljesítményre ható, azt befolyásoló (exogén) sokféleséget, valamint a gazdasági tevékenység eredményeképpen előálló (endogén) sokféleséget. Az előbbi tekintetében azt az eredményt kapjuk, hogy a skálafüggetlen



struktúrájának jelentős szerepe van ebből a szempontból. A vállalatok közötti tudásintébe szóródás csökkenti az aggregált kibocsátást, ha ez a szóródás fehér zaj jellegű, azonban növeli a kibocsátást, ha a tudásszintek skálafüggetlen eloszlást követnek és ez a skálafüggetlenség erősebbé válik a szóródás növekedésével. Az endogén sokféleség tekintetében azt találjuk, hogy a magasabb kibocsátási szint magasabb diverzitással, egyenlőtlenséggel jár együtt a paraméterek jelentős tartományán, azonban a legmagasabb kibocsátási szint mellett a vállalatok sokfélesége mérsékeltebb.

Az itt bemutatott és elemzett modell természetesen számos ponton kiegészíthető, tovább bővíthető. Egyfelől vizsgálható segítségével a technológiai diffúzió dinamikája és a hálózati struktúrák szerepe ebben a dinamikában. Egy további fontos kiterjesztése lehet a modellnek a hálózati kapcsolatok dinamikájának beépítése, amely a hálózati struktúra endogenizálását teszi lehetővé. Érdekes kiterjesztésként adódik a hálózati csomópontok más dimenzióba helyezése: amennyiben a csomópontokat vállalatok helyett régiókként értelmezzük, úgy a modell regionális szempontok elemzésére is alkalmas lehet. Ezen felül az alapul szolgáló egyensúlyi modell alkalmas kiterjesztése (például az SCGE modellezés eszközeivel) ezt a regionális perspektívát egy komplexebb modellkeretbe helyezheti.

## Függelék

### A keresleti függvény levezetése

Adott a hasznossági függvény és a költségvetési korlát. A megoldandó feladat:

$$(F.1) \quad U = \left( \sum_{i=1}^N x_i^\sigma \right)^{1/\sigma} \rightarrow \max, \quad \text{s.t.} \quad I = \sum_{i=1}^N p_i x_i .$$

A feladat Lagrange függvénye:

$$(F.2) \quad \Gamma = \left( \sum_{i=1}^N x_i^\sigma \right)^{1/\sigma} + \lambda \left( I - \sum_{i=1}^N p_i x_i \right) .$$

A Lagrange függvény  $x_i$  szerint vett első deriváltja:

$$(F.3) \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} = \left( \sum_{j=1}^N x_j^\sigma \right)^{1/\sigma-1} x_i^{\sigma-1} - \lambda p_i .$$

A deriváltat egyenlővé téve nullával kapjuk, hogy

$$(F.4) \quad \left( \sum_{j=1}^N x_j^\sigma \right)^{1/\sigma-1} x_i^{\sigma-1} = \lambda p_i .$$

Az így kapott  $N$  egyenletből  $\lambda$ -kat kiküszöbölve azt kapjuk, hogy

$$(F.5) \quad \frac{x_i}{x_j} = \left( \frac{p_i}{p_j} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}}$$

bármely  $i, j$  párra (értelemszerűen  $i = j$  esetén egyszerű azonosságot kapunk). Ha élünk a  $j = 1$  helyettesítéssel, akkor a fenti összefüggést felírhatjuk, mint

$$(F.6) \quad x_i = \left( \frac{p_i}{p_1} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}} x_1,$$

azaz bármely  $x_i$  termék keresletét kifejezhetjük egy másik termék kereslete és az árarányok függvényében. A fenti összefüggéseket a költségvetési korlátba helyettesítve:

$$(F.7) \quad I = \sum_{i=1}^N p_i \left( \frac{p_i}{p_1} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}} x_1$$

adódik, amelyet kifejezve  $x_1$ -re kapjuk, hogy

$$(F.8) \quad x_1 = \frac{I}{\sum_{i=1}^N p_i \left( \frac{p_i}{p_1} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}}}.$$

Vezessük be az  $\varepsilon = 1/(1-\sigma)$  jelölést. Így a fenti összefüggést egyszerűsíthetjük:

$$(F.9) \quad x_1 = p_1^{-\varepsilon} \frac{I}{\sum_{i=1}^N p_i^{1-\varepsilon}}.$$

Amennyiben a fenti műveletsort tetszőleges  $j$ -re elvégezzük, könnyen belátható, hogy a  $j$  termék iránti kereslet:

$$(F.10) \quad x_j = p_j^{-\varepsilon} \frac{I}{\sum_{i=1}^N p_i^{1-\varepsilon}}.$$

Többek között Carter (2001) megmutatja, hogy az itt használt egyszerű CES hasznossági függvény  $\sigma \leq 1$  esetén konkáv, így a releváns értelmezési tartományon az (F.10) által meghatározott szélsőérték hely globális maximumhely, vagyis hasznosságmaximum.  $\square$

## A profitmaximum meghatározása

Adott az alábbi profitfüggvény:

$$(F.11) \quad \pi_i = p_i^{1-\varepsilon} \frac{I}{\sum_{j=1}^N p_j^{1-\varepsilon}} - w K_i^{-1/\alpha} p_i^{-\varepsilon/\alpha} \left( \frac{I}{\sum_{j=1}^N p_j^{1-\varepsilon}} \right)^{1/\alpha}.$$

A fenti profitfüggvény  $p_i$  szerinti deriváltja, figyelembe véve, hogy a  $\sum_j p_j^{1-\varepsilon}$  összeg megfelelő deriváltja feltevésünk szerint zérus:

$$(F.12) \quad \frac{\partial \pi_i}{\partial p_i} = (1-\varepsilon)p_i^{-\varepsilon} \frac{I}{\sum_{j=1}^N p_j^{1-\varepsilon}} + \frac{\varepsilon}{\alpha} w K_i^{-1/\alpha} p_i^{-\varepsilon/\alpha-1} \left( \frac{I}{\sum_{j=1}^N p_j^{1-\varepsilon}} \right)^{1/\alpha}.$$

A fenti kifejezést 0-ra rendezve és  $p_i$ -t kifejezve adódik, hogy

$$(F.13) \quad p_i = w^\varphi K_i^{-\varphi/\alpha} \left( \frac{\varepsilon}{(\varepsilon-1)\alpha} \right)^\varphi \left( \frac{I}{\sum_{j=1}^N p_j^{1-\varepsilon}} \right)^{\frac{(1-\alpha)\varphi}{\alpha}},$$

ahol  $\varphi = (\alpha - \alpha\sigma)/(1 - \alpha\sigma)$ . Mivel az (F.11) profitfüggvény konvex és konkáv szakaszokkal is rendelkezhet, így e függvény konvexitásának/konkavitásának vizsgálatával a szélsőérték-hely jellege nem állapítható meg. Mivel azonban a profitfüggvény számunkra releváns értelmezési tartományán ( $p_i > 0$ ) az (F.13) stacionárius pont egyértelműen létezik, elegendő csupán e stacionárius pont környezetében vizsgálni a profitfüggvény másodrendű tulajdonságait. Ehhez alkalmazzuk a profitfüggvény alábbi, egyszerűbb formáját:

$$(F.14) \quad \pi(p) = ap^{1-\varepsilon} - bp^{-\varepsilon/\alpha}.$$

A profitfüggvény első deriváltja az (F.12) összefüggésnek megfelelően adható meg, ezek alapján pedig a szélsőérték hely az alábbi formát ölti:

$$(F.15) \quad p = \left( \frac{b}{a} \right)^\varphi \left( \frac{\varepsilon}{\alpha(\varepsilon-1)} \right)^\varphi.$$

A profitfüggvény második deriváltja:

$$(F.16) \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial p^2} = (\varepsilon-1)\varepsilon ap^{-(\varepsilon+1)} - b \frac{\varepsilon}{\alpha} \left( \frac{\varepsilon}{\alpha} + 1 \right)^{-\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}+2\right)}.$$

Az (F.15) szélsőérték hely akkor maximum, ha a  $\pi(p)$  függvény második deriváltja negatív az adott pontban. Az (F.16) összefüggést egyszerűsítve és a maximumhely feltételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$(F.17) \quad \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+\alpha} \alpha^2 \frac{a}{b} < p^{-1/\varphi},$$

amibe az (F.15) képletből behelyettesítve  $p$  értékét a stacionárius pontban egyszerűsítés után adódik a következő egyszerű összefüggés:

$$(F.18) \quad \frac{1}{\varepsilon+\alpha} \alpha < \frac{1}{\varepsilon}.$$

Figyelembe véve az  $\alpha$  paraméterre tett  $0 < \alpha < 1$  kikötést, könnyen belátható, hogy a fenti feltétel mindig teljesül. Ez pedig azt jelenti, hogy a korábban meghatározott optimális árszint valóban maximális profitot eredményez.  $\square$

## A szimulációs modell algoritmus

- Első lépésként rögzítjük a modell paramétereit.
- Ezt követően a 3. szakaszban bemutatott hálózati modell segítségével előállítjuk az  $\mathbf{A}$  kapcsolati mátrixot.
- Az  $\mathbf{A}$  kapcsolati mátrix és az exogén változóként adott  $\mathbf{k}$  tudás-vektor a (6) tudás-aggregátoron keresztül meghatározza a vállalatok számára hozzáférhető tudás mennyiségét,  $K_i$ -t, valamennyi  $i$  vállalat esetén.
- Ezt követően a gazdaság általános egyensúlyi állapotát határozzuk meg, vagyis azt a  $w$  bérszintet és  $\mathbf{p}$  árvektort, amelyre mind a termékpiacokon, mind pedig a munkapiacra egyensúly áll fenn. Az egyensúly meghatározásának menete a következő:
  - Kiválasztunk egy induló bérszintet. Közelítő választásként adódik a szimmetrikus esetben ( $K_i = K_j = \bar{K}$ , minden  $i$  és  $j$  esetén) analitikusan is levezethető egyensúlyi bér.
  - A kiválasztott bérszint és a többi paraméter alapján megoldjuk az egyensúlyi árakat meghatározó (12') egyenletrendszer, így megkapjuk az adott bérszint esetén a termékpiacok egyensúlyát biztosító árvektort.
  - A kapott árvektor és a (9) keresleti függvények segítségével meghatározható az egyes termékekből keresett és a piaci egyensúly miatt egyben termelt mennyiség, azaz a vállalati kibocsátások  $\mathbf{y}$  vektora.
  - A vállalatok kibocsátása a (4) termelési függvények alapján meghatározza a vállalatok által felhasznált munkamennyiséget, amit a munkafelhasználás  $\mathbf{L}$  vektora ad meg.
  - A munkafelhasználás vektora lehetővé teszi, hogy ellenőrizzük a munkapiaci egyensúly feltételének teljesülését. Amennyiben a munkapiaci egyensúly nem teljesül, új bérszintet választunk és ennek segítségével ismét elvégezzük a fenti iterációt, meghatározzuk az árvektort, majd ebből a munka-felhasználási vektort. Munkapiaci túlkereslet esetén a bérszintet értelemszerűen növelni, míg túlkínálat esetén csökkentenünk kell, hogy az egyensúlyi helyzet irányába haladjunk.

A fenti folyamat iterációjával végül eljutunk ahhoz a bérszinthez, amelyre a munkapiac és valamennyi termékpiac is egyensúlyba kerül.

## Irodalom

1. Abrahamson, E., Rosenkopf, L. (1997): Social Network Effects on the Extent of Innovation Diffusion: A Computer Simulation. *Organization Science*, 8(3), 289-309.

2. Adolfson, M., Laseen, S., Linde, J. Villani, M. (2007): Bayesian estimation of an open economy DSGE model with incomplete pass through. *Journal of International Economics*, 72(2), 481–511.
3. Aghion, P., Howitt, P. (1992): A Model of Growth Through Creative Destruction. *Econometrica*, 60, 323–351.
4. Almeida P., Kogut, B. (1999): Localization of knowledge and the mobility of engineers. *Management Science*, 45, 905–917.
5. Anselin, L., Varga, A., Acs, Z. (1997): Local Geographic Spillovers between University Research and High Technology Innovations. *Journal of Urban Economics*, 42(3), 422–448.
6. Audretsch, D. B., Feldman, M. P. (1996): R&D Spillovers and the Geography of Innovation and Production. *American Economic Review*, 86(4), 253–273.
7. Baksa, D., Benk, Sz., Jakab, M. Z. (2009): A Költségvetési Tanács DSGE modelljének rövid leírása. Magyar Köztársaság Költségvetési Tanácsa.
8. Bala, V., Goyal, S. (2000): A Noncooperative Model of Network Formation. *Econometrica*, 68(5), 1181–1230.
9. Balconi, M., Breschi, S., Lissoni, F. (2004): Networks of inventors and the role of academia: An exploration of Italian Patent data. *Research Policy*, 33, 127–145.
10. Barabási Albert-László (2002): *Behálózva. A hálózatok új tudománya*. Magyar könyvklub.
11. Barabási, A-L., Albert, R. (1999): Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286, 509–512.
12. Barabási, A-L., Albert, R., Jeong, H. (2000): Scale-free characteristics of random networks: The topology of the world wide web. *Physica A*, 281, 69–77.
13. Bollobás, Béla (2001): *Random Graphs*, 2nd Edition, Cambridge University Press.
14. Breschi, S., Lissoni, F.(2003): *Mobility and social networks: localised knowledge spillovers revisited*. CESPRI, working paper no. 142.
15. Buchanan, M. (2003): *Nexus, avagy "kicsi-a-világ"*. A hálózatok úttörő tudománya. Typotex, Budapest.
16. Carayol, N., Roux, P. (2009): Knowledge flows and the geography of networks: A strategic model of small world formation. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 71(2), 414–427.
17. Carter, M. (2001): *Foundations of Mathematical Economics*. MIT Press, Cambridge, MA.
18. Christoffel, K. Coenen, G. Warne, A. (2008): The new area-wide model of the euro area – a micro-founded open-economy model for forecasting and policy analysis. Working Paper Series 944, European Central Bank.
19. Chung, F., Lu, L. (2006): *Complex Graphs and Networks*. AMS, US.
20. Cohen, W. M., Levinthal, D. A. (1990): Absorptive capacity: A new perspective on learning and innovation. *Administrative Science Quarterly*, 35(1), 128–152.
21. Cowan, R. (2005): Network models of innovation and knowledge diffusion. In: Breschi, S., Malerba, F. (eds.): *Clusters, Networks and Innovation*, Oxford University Press, Oxford, 29–53.

22. Cowan, R. Jonard, N. (2004): Network structure and the diffusion of knowledge. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 28(8), 1557–75.
23. Cowan, R., Jonard, N., Zimmermann, J.-B. (2006): Evolving networks of inventors. *Journal of Evolutionary Economics*, 16(1), 155–174.
24. Csermely, P. (2005): *A rejtett hálózatok ereje*. Vince Kiadó, Budapest.
25. Dib, A. (2001): *An Estimated Canadian DSGE Model with Nominal and Real Rigidities*. Working Papers 01-26, Bank of Canada.
26. Dixit, A. K., Stiglitz, J. E. (1977): Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity. *American Economic Review*, 67(3), 297–308.
27. Duarte, M., Wolman, A. L. (2002): *Regional inflation in a currency union: fiscal policy vs. fundamentals*. International Finance Discussion Papers 746, Board of Governors of the Federal Reserve System (U.S.).
28. Erceg C.J., Guerrieri, L., Gust C. (2006): *SIGMA: a new open economy model for policy analysis*. International Finance Discussion Papers 835, Board of Governors of the Federal Reserve System (U.S.).
29. Erdős, P. Rényi, A. (1959): On Random Graphs I. In *Publ. Math.* Debrecen, 6, 290–297.
30. Feldman, M. P. (1994): *The Geography of Innovation*. Boston, Kluwer Academic Publisher.
31. Fujita, M., Krugman, P. R., Venables, A. J. (1999): *The Spatial Economy: Cities, Regions and International Trade*. MIT Press, Cambridge, MA.
32. Granovetter, M. (1983): The Strength of Weak Ties: A Network Theory Revisited. *Sociological Theory*, 1, 201–233.
33. Granovetter, M. S. (1973): The Strength of Weak Ties. *American Journal of Sociology*, 78(6), 1360–80.
34. Grossman, G. M., Helpman, E. (1994): Endogenous Innovation in the Theory of Growth. *Journal of Economic Perspectives*, 8, 23–44.
35. Harrison, R., Nikolov, K., Quinn, M., Ramsay, G., Scott, A., Thomas, R. (2005): *The Bank of England Quarterly Model*. London: Bank of England.
36. Jackson, M. O., Wolinsky, A. (1996): A Strategic Model of Social and Economic Networks. *Journal of Economic Theory*, 71(1), 44–74.
37. Jaffe, A. B. (1989): Real Effects of Academic Research. *American Economic Review*, 79(5), 957–970.
38. Jaffe, A. B., Trajtenberg, M. (2002): *Patents, Citations and Innovations: A Window on the Knowledge Economy*. MIT Press, Cambridge, MA.
39. Jakab, Z. M., Világi, B. (2008): *An estimated DSGE model of the Hungarian economy*. MNB Working Papers 2008/9, Magyar Nemzeti Bank (The Central Bank of Hungary).
40. Johansson, B., Forslund, U. (2008): The analysis of location, co-location and urbanization economies. In: Karlsson (ed.): *Handbook of Research on Cluster Theory*, Edward Elgar, UK.
41. Kaldor, N. (1966): Marginal Productivity and the Macro-Economic Theories of Distribution: Comment on Samuelson and Modigliani. *The Review of Economic Studies*, 33(4), 309–319.
42. Karinty Frigyes (1929): *Minden másképpen van (Ötvenkét vasárnap)*. Athenaeum, Irodalmi és Nyomdai Rt., Budapest.
43. Marshall, Alfred (1890): *Principles of Economics*. London, Macmillan.

44. Mendoza, G. E. (1991): Real Business Cycles in a Small Open Economy. *The American Economic Review*, 81, 797–818.
45. Ratto, M., Roeger, W., Veld, Jan in 't (2009): QUEST III: An estimated open economy DSGE model of the euro area with fiscal and monetary policy. *Economic Modelling*, 26(1), 222–233.
46. Romer, P. (1990): Endogenous Technological Change. *Journal of Political Economy*, 98, S71–S102.
47. Sebestyén, T. (2010): *Innovation and diversity in a dynamic knowledge network*. KRTI Műhelytanulmányok, 2010/1.
48. Sebestyén, T., Parag, A. (2010): The Dynamics of Link Formation in Patent Innovation Networks. *Perspectives of Innovation, Economics and Business*, 4(1) 21–25.
49. Smets, F. Wouters, R. (2007): Shocks and Frictions in US Business Cycles: A Bayesian DSGE Approach. *American Economic Review*, 97(3), 586–606.
50. Solow, R. M. (1957): Technical Change and the Aggregate Production Function. *Review of Economics and Statistics*, 39, 312–320.
51. Sorenson, O. (2005): Social Networks, Informal Complexity and Industrial Geography. In: Fornahl, D., Zellner, C., Audretsch, D. B. (eds.): *The Role of Labour Mobility and Informal Networks for Knowledge Flows*. Springer.
52. Travers, J., Milgram, S. (1969): An Experimental Study of the Small World Problem. *Sociometry*, 32, 425–443.
53. Watts, D. J., Strogatz, S. H. (1998): Collective dynamics of „small-world” networks. *Nature*, 393, 409–410.
54. Zucker, L., Darby, M., Armstrong, J. (1994): *Intellectual capital and the firm: The technology of geographically localized knowledge spillovers*. NBER Working Paper Series, Working Paper no. 4946.

#### THE ROLE FOR THE STRUCTURE OF KNOWLEDGE NETWORKS IN A SIMPLE MODEL OF GENERAL EQUILIBRIUM

The role of networks gains increasing interest in the literature on innovation and the special effects of network structure is in the focus of attention in a growing number of fields. In this paper we analyze the effects of the structure of inter-firm knowledge networks on the aggregate performance of the economy relying on this network. The effect of knowledge transfer through explicit network connections is built into a simple general equilibrium model and simulation techniques are used to analyze the resulting model. The results show that network structure has a pronounced effect on the aggregate performance of the economy: a higher level of scale-freeness in the structure leads to a higher level of aggregate output. Further results shed light on the role of special dimensions of diversity in the aggregate performance of the economy: scale-free structures have a positive effect also in this respect.

*Keywords:* Network structure, knowledge networks, general equilibrium, scale-free structures.





## ÁRFOLYAM-BEGYŰRÜZÉS MÉRTÉKE A KSH BOLT-SZINTŰ ÁRADATBÁZISA ALAPJÁN<sup>1</sup>

HERCZEG BÁLINT  
*HÉTFÁ Kutatóintézet*

A cikk a Központi Statisztikai Hivatal bolt szintű adatait használja az árfolyam-begyűrés becslésére. A becsléshez az árváltozásokat előbb árváltozások gyakoriságára és árváltozás átlagos méretére bontja, majd ezekre az értékekre becsüli az árfolyam hatását. Ezzel a módszertannal arra az eredményre jut, hogy 1%-os leértékelődés 2. negyedév végére 0,18%-kal emeli az inflációt.

*Kulcsszavak:* árfolyam-begyűrés, infláció, mikro áradat. *JEL kód:* E30, E31.

### 1 Bevezetés

Kis nyitott országokban az árfolyam mozgásai jelentősen befolyásolhatják a belföldi árak dinamikáját. Ez történhet egyrészt az importált végső fogyasztásra szánt termékek árán keresztül, másrészt pedig a hazai termékek előállításához felhasznált importált nyersanyagok és félkész termékek költség-növelő hatásán keresztül. Az árfolyam-begyűrés annak mértékét jelenti, hogy hány százalékkal változtatja meg a hazai árakat (fogyasztói vagy import) az árfolyam 1 százalékos megváltozása.

Az árfolyam-begyűrés mértékét az importáló vállalatok árazási magatartása határozza meg. Két alapvető árazási stratégiát lehet megkülönböztetni. Az első szerint az importáló a termelő vállalat valutájában határozza meg az árakat (producer currency pricing, PCP), ebben az esetben az árfolyam változásainak automatikusan meg kellene jelennie a termék hazai árában, azaz az árfolyam begyűrés 100 százalékos lenne. A másik stratégia az importáló ország valutájában határozza meg a termék árát (local currency pricing, LCP). Ez utóbbi esetben az árfolyam változásának nem kellene hatnia a hazai árakra, így a begyűrésnek is nullának kellene lennie (*Coricelli et al.* [2006a]).

Egy Magyarországhoz hasonló kis nyitott ország esetében, szokás külföldi valutában történő árazást feltételezni, ami az árfolyam változások import árakba történő teljes beépülését jelenti. Ennek ellenére a fogyasztói árak esetében még ebben az esetben sem természetes a teljes begyűrés, hiszen egyrészt a fogyasztói árindexben a kereskedelembe nem kerülő jóságok

---

<sup>1</sup>Beérkezett: 2010. november 4. A cikk alapjául szolgáló tanulmány részben Magyar Nemzeti Bank által nyújtott vendégkutatói ösztöndíj segítségével készült 2007 nyarán, külön köszönettel tartozom Reiff Ádámnak az ez idő alatt és azóta kapott rengeteg tanácsért és segítségért, minden fennmaradó hibáért természetesen a szerző a felelős. Email: herczegbalint@hetfa.hu.

árának is jelentős súlya van, amikre az árfolyamnak nem kellene közvetlenül hatnia. Másrészt ha a piacok szegmentáltak és a verseny nem tökéletes (Dornbusch [1987]), vagy az adott termékek árában a hazai hozzáadott érték magas (Burstein *et al.* [2003]), akkor ez szintén eredményezheti az 1-nél kisebb begyűrűzést.

Az árakra gyakorolt hatása miatt a monetáris politika is komoly érdeklődést mutat az árfolyam-begyűrűzés iránt. Egy inflációs célkövetéses rendszerben a monetáris politika számára két szempont miatt is fontos lehet az árfolyam inflációra gyakorolt hatásának ismerete. Egyrészt a begyűrűzés ismerete segíthet az árfolyam mozgásán keresztül az infláció jobb előrejelzésében. Másrészt az árfolyam-begyűrűzés a monetáris transzmisszióknak is hangsúlyos elemévé válhat. Rezessy [2006] 2001-2004-es mintán, Vonnák [2006] pedig 1995-2004-es negyedéves mintán bizonyítja, hogy a magyar monetáris politika képes befolyásolni az árfolyamot, Jakab *et al.* [2006] pedig azt, hogy az árfolyam csatorna a legfontosabb transzmissziós csatornája a magyar monetáris politikának.

Az árfolyam-begyűrűzést mérő korábbi cikkek, tanulmányok Magyarországra vonatkozó eredményeit foglalja össze az 1. táblázat. Az összegyűjtött eredmények több szempont miatt is figyelmet érdemelnek. Egyrésztől megmutatják az árfolyam-begyűrűzés módszertanában megtalálható sokszínűséget. Ebből a szempontból a papírokat két alapvető csoportra lehet felosztani. Az elsőbe azok a cikkek tartoznak<sup>2</sup>, amelyekben a következőhöz hasonló egyenletes modelleket becsülnék:

$$\Delta p_t = \alpha + \sum_{i=0}^p \beta_i x_{t-i} + \sum_{i=0}^p \gamma_i \Delta e_{t-i} + \varepsilon_t . \quad (1)$$

Ebben az egyenletben a  $\gamma_i$ -k jelenítik meg az árfolyam-begyűrűzést, azaz az 1%-os árfolyamváltozás hatását a kiválasztott árindex változására,  $\Delta p_t$ -re. Ez az árindex állhat import árakból vagy fogyasztói árakból. A kontrollváltozóként ( $x_t$ ) gyakran használják az exportáló országok termelőinek határköltség változását (ezt általában külföldi termelői árindexszel vagy alapanyag árakkal helyettesítik), fogyasztói árindex esetében a hazai termelők határköltségeinek (gyakran hazai termelői árindex jeleníti meg) és a hazai keresletnek a változásait (proxyként a kibocsátási rést szokás használni). A második csoportba azok cikkek tartoznak, amelyek lehetővé teszik a kontrollváltozók és az árfolyamok közötti endogenitást is, és ezért valamilyen vektor autoregresszív vagy hibakorrekciós modellt becsülnék. Emellett a módszertan mellett szóló érv, hogy legkisebb négyzetek módszerének torzításmentességéhez szükséges exogenitási feltételezés, miszerint csak az árfolyam hat az árakra, rendkívül erős, ezért az egy-egyenletes modellek gyakran nem vezetnek konzisztens eredményre. Erre mutat példát Osbat és Wagner [2005], akik egy egy-egyenletes és egy VAR alapú modellt becsülnék ugyanarra az adatsorra, hogy bemutassák az egy-egyenletes módszer inkonzisztenciáját. Az endogenitást feltételező papírokon belül külön csoportot alkotnak azok

<sup>2</sup>Lásd például Goldberg és Knetter [1997], Campa és Goldber [2005]

a papírok, amelyek hosszú távú, kointegrációs kapcsolatot feltételeznek a változók között, ami alapulhat a vásárlóerő paritáson vagy más elméleti megfontoláson. Ez a módszertan alkalmazása azért jelenthet előnyt, mivel ennek segítségével meg lehet különböztetni az árfolyam átmeneti és tartós változásainak hatását, amik a Balassa-Samuleson hatás miatt jelentősek lehetnek egy Magyarországhoz hasonló átalakuló ország esetében.

Cikk	Ár aggregátum	Módszertan	Minta <sup>a</sup>	1% árfolyam-emelkedés (negyedév végén, %)		
				1.	2.	4.
Darvas [2001]	fogyasztói árak	hibakorrektációs modell	1993–2000 n.é.	0,10	0,30	0,40
Campa és Goldberg [2005]	import árak	egy egyenletes	1975–2003 n.é.	0,51	n/a	0,77
	élelmiszer			0,75	n/a	0,63
	energia			0,25	n/a	0,89
	nyersanyagok			0,42	n/a	-0,002
	feldolgozó ipar			0,53	n/a	0,79
	nem-feldolgozó ipar		0,45	n/a	0,67	
Coricelli et al. [2006b]	fogyasztói árak	kointegrált VAR	1993–2002 h.	n/a	n/a	0,97 <sup>b</sup>
Jakab et al. [2006]	szolgáltatások (kereskedelemben nem kerülő termékek)	SVAR	1995–2004 n.é.	0,04	0,05	0,06
	feldolgozó ipari termékek (kereskedelemben kerülő termékek)			0,25	0,27	0,29
Ca'Zorzi et al. [2007]	fogyasztói árak	VAR	1988–2003 n.é.	n/a	n/a	0,48 <sup>c</sup>
Mihaljek és Klau [2008]	fogyasztói árak	egy egyenletes	1994–2001 n.é.	n/a	0,54	n/a
			1994–2006 n.é.	n/a	0,09	n/a
				0,34 <sup>d</sup>	n/a	n/a
Maria-Dolores [2010]	import árak	egy egyenletes	2000–2006 h.	n/a	0,32	0,48
Vonnák [2010]	fogyasztói árak	SVAR	1995–2006 n.é.	n/a	0,13-	0,20 <sup>e</sup>
					0,14	0,27 <sup>f</sup>
Beirne és Bijsterbosch [2011]	fogyasztói árak	kointegrált VAR	1998–2008 h.	n/a	n/a	0,37 0,63 <sup>b</sup>

<sup>a</sup> negyedéves (n.é.), havi (h.)

<sup>b</sup> a kointegrációból következő hosszú távú hatás

<sup>c</sup> Ca'Zorzi et al. [2007] Magyarországra vonatkozó eredményei azonban nem tekinthetők robusztusnak, mivel nagyon érzékenyek a VAR modellben szereplő változók sorrendjére

<sup>d</sup> ebben az esetben Mihaljek és Klau [2008], Darvas [2001]-hoz hasonlóan a reálárfolyam trendtől való eltéréseit külön kontrollálja.

<sup>e</sup> az árfolyam mozgását kockázati prémium sokk okozta

<sup>f</sup> az árfolyam mozgását monetáris sokk okozza

A másik dolog, amit érdemes megfigyelni az 1. táblázatban, az az eredmények sokszínűsége. A szerzők 32-50%-os rövid távú begyűrűzést találtak az import árakba és 10-30%-ost a kiskereskedelmi árakba. Hosszú távon a begyűrűzés mértéke bizonyos termékcsoportok import árai esetében eléri a 90%-ot, a fogyasztói árak esetében viszont 6-90%-os sávban szóródnak. Felmerülhet a kérdés, hogy mi okozza az eredmények különbségeit. Az első kézenfekvő magyarázat, a fent már bemutatott módszertani különbségek. Jól látható például, hogy a kointegrációs módszertant alkalmazó cikkek (*Darvas* [2001], *Coricelli et al.* [2006b], *Beirne és Bijsterbosch* [2011]) általánosságban magasabb átgyűrűzést találnak.

A módszertanon túl, az eltérő minták is jelenthetik a különbségek okát. A különböző mintákban eltérhet például az infláció mértéke és *Taylor* [2000] elmélete és *Ca'Zorzi et al* [2007] empirikus bizonyítékai alapján az alacsonyabb infláció kisebb mértékű árfolyam-begyűrűzéssel jár együtt. *Coricelli et al.* [2006b] eredményei pedig azt bizonyítják, hogy az árfolyam-begyűrűzés nagyobb, ha a monetáris politika az árfolyamot inflációs horgonyként használja, hiszen ebben az esetben a monetáris politika is igyekszik összekapcsolni várakozásokban az árfolyamok és az árak mozgását. Mindkét elmélet alapján azt várhatjuk, hogy azok az empirikus tanulmányok, amelyek mintájában az 1995-2001 közötti időszak (magas infláció és csúszó leértékelés  $\pm 2,25\%$ -os intervenciós sáv mellett) nagy súllyal szerepel, azok magasabb átgyűrűzést mérnek. Erre jó példa, hogy miközben *Coricelli et al.* [2006b] a 1993 és 2002 közötti időszakra 97%-os árfolyam átgyűrűzést becsült, addig a hasonló módszertanra támaszkodó *Beirne és Bijsterbosch* [2011] a 1998 és 2008 közötti időszakra csak 63%-os hosszú távú átgyűrűzést talált. Hasonló a helyzet *Campa és Goldberg* [2005] és *Maria-Dolores* [2010] eredményeivel, ahol az import árakban történő átgyűrűzés a megegyező módszertan ellenére is 2/3 esett amiatt, hogy *Maria-Dolores* [2010] által használt minta 2000-ben kezdődik.

Jelen cikk egy új adatbázison, a Központi Statisztikai Hivatal (KSH) 2001 és 2007 közötti boltalapú panel adatain mérte a magyar árfolyam-begyűrűzést. A cikkben bemutatott, *Gábrriel és Reiff* [2010] módszertanán alapuló becslések az árfolyam-begyűrűzés dinamikájára, a különböző áru csoportok eltérő árreakciójára és az árfolyam inflációra gyakorolt hatására koncentrálnak. A cikk hozzáadott értéke, hogy termékszintű magyarázó változók segítségével mikro adatokon becsüli az árfolyam-begyűrűzést.

A becslések eredményei szerint a különböző árucsoportok nagyon különböző módon reagálnak az árfolyam változására és gyakran a változás előjele sem várakozásoknak megfelelő, azaz a leértékelődés csökkenti a termékek árát, ahelyett hogy emelné azokat. A termékszintű eredmények heterogenitása ellenére az aggregált szintű hatások robusztusnak tűnnek. 1% árfolyam leértékelődés teljes hatása az inflációt 0,06%-kal emeli az első negyedévet követően, és 0,18%-kal a második negyedév után. Ez az eredmény fele egyes régebbi eredményeknek, és megközelítőleg egybeesnek *Vonnák* [2010] 1. táblázatban idézett eredményeivel. Ez az alacsonyabb begyűrűzés következhet az alkalmazott becslési eljárásból, ami az egy-egyenletes módszertanon alapul, vagy

abból, hogy a minta 2001-2007 közötti, azaz egy alacsonyabb inflációjú és kevésbé kiszámítható árfolyamú időszakot ölel fel.

A cikk hátralévő része a következőképpen épül fel: először bemutatom a cikkben alkalmazott módszertant. Ezt az adatok bemutatása követi, majd a becslés eredményei és a robusztussági vizsgálatok ismertetése következik. Az utolsó rész összefoglal.

## 2 Módszertan

A fent bemutatott két módszertani lehetőség közül a jelen cikkben az egy-egyenletes módszertan egy változatát használom, de a hazai termelői árindex árfolyamtól való függését is beépítem a modellbe.<sup>3</sup> A becslések azon a számítási azonosságon alapulnak, miszerint az inflációt fel lehet írni az áraiakat megváltoztató boltok százalékaiként és az árváltozás átlagos méretének szorzataként (lásd *Hoffmann és Kurz-Kim* [2006] függelékét a részletekért). Azaz

$$\pi_t = f_t s_t, \quad (2)$$

ahol  $\pi_t$  az infláció,  $f_t$  azon boltok százaléka, amelyek árat változtattak  $t$ -edik időpontban (gyakoriság), az  $s_t$  pedig a  $t$ -edik időpontban bekövetkezett árváltozások átlagos mérete. Termékszinten tovább lehet bontani a boltokat aszerint, hogy árat emeltek vagy csökkentettek, így a következő kifejezésre lehet jutni:

$$\Delta p_t = f^+ s^+ - f^- s^-, \quad (3)$$

ahol  $f^+$  és  $f^-$  azon boltok százaléka, amelyek árat emeltek vagy csökkentettek,  $s^+$  és  $s^-$  pedig átlagos árnövelés és árscökkenés abszolút értéke. A (3) egyenlet bal oldalán az infláció ( $\pi_t$ ) átlagos árváltozásra ( $\Delta p_t$ ) változott, hiszen termékszintű adatok esetében már nem lehet inflációról beszélni, csak átlagos árváltozásokról.

Hasonlóan ahhoz, ahogy *Gábor és Reiff* [2010] az áfa esetében bemutatották, az árfolyam esetében is fel lehet tételezni, hogy árfolyam változása megváltoztatja az árnövekedések és csökkentések gyakoriságát és méretét. Az intuíción alapján egy leértékelődést követően az áremelkedések gyakoriságának és átlagos méretének is emelkednie kellene, az árscökkenések gyakoriságának és átlagos méretének pedig csökkennie. Tehát az árváltozások az árfolyam emelkedése után már a megváltozott gyakoriságoktól és átlagos árváltozásoktól függenek, azaz:

$$\Delta p_E = f_E^+ s_E^+ - f_E^- s_E^-, \quad (4)$$

ahol az  $E$  index az árfolyamváltozás által megváltoztatott értékeket jelenti. Az árfolyam hatása ekkor az árfolyam által befolyásolt és nem érintett átlagos

---

<sup>3</sup>Bár a kointegráció alapuló modellek bizonyos szempontból jobban illeszkednek az árfolyam-begyűrés konzisztens becsléséhez, de a módszertan egyelőre nehezen összeegyeztethető a mikro panel áradatokkal és a cikk másik fontos célja az adatbázis által nyújtott adatbőség kihasználása.

árváltozás különbsége, azaz:

$$\begin{aligned}\Delta p_{ERPT} &= \Delta p_E - \Delta p = (f_E^+ s_E^+ - f_E^- s_E^-) - (f^+ s^+ - f^- s^-) = \\ &= (f_E^+ s_E^+ - f^+ s^+) - (f_E^- s_E^- - f^- s^-),\end{aligned}\quad (5)$$

ahol a kifejezés végének első fele az árfolyam hatása az árnövekedésekre, a második fele pedig az árfolyam hatása az árcsökkenésekre. Ezt a két hatást kell megbecsülni, mégpedig olyan eljárással, amelyet panel adatokon alkalmazva, ki tudja használni a rendelkezésre álló adatok bőségét.

Módszertan további részét az árfolyam árnövelésekre gyakorolt hatásán keresztül mutatom be részletesen, de egyszerűen lehet alkalmazni az árcsökkenések esetében is. Ha az árfolyam árváltozások méretére gyakorolt marginális hatásait szeretnénk becsülni, akkor a lehetséges egyenlet a következő lenne:

$$P_{1,it} = \beta' X_{it} + U_{1,it}, \quad (6)$$

ahol  $P_{1,it}$  a *kívánt* árváltoztatás méretét jelöli,  $X_{it}$  pedig a magyarázó változókat (amelyek között szerepelne az árfolyam változása is). Ezzel az egyenlettel az a probléma, hogy  $P_{1,it}$  nem mindig megfigyelhető, hiszen az árváltoztatás költségei megakadályozhatják a vállalatokat abban, hogy folyamatosan kiigazítsák az áraikat. Tehát csak azokról az áremelésekről áll rendelkezésre megfigyelés, amikor a kívánt változások elég nagyok ahhoz, hogy a menü költségek ellenére is megérje a vállalatok számára az áremelés meglépése. Ahhoz, hogy ezt bevezethessük a modellbe, definiáljuk  $P_{2,it}$ -t egy látens változóként, amire igaz, hogy:

$$P_{2,it} = \gamma' Z_{it} + U_{2,it}, \quad (7)$$

ahol a  $Z_{it}$  vektorban vannak azok a faktorok, amelyek eldöntik, hogy megtörtént-e árváltozás vagy nem. Ha  $P_{2,it} > 0$  a (7) egyenlet alapján, akkor  $P_{1,it}$  megfigyelhető a (6) egyenletből. Tehát a megfigyelhető árváltozásokat leíró regressziós egyenlet a következőképpen nézne ki:

$$E(P_{1,it} | P_{2,it} > 0, X_{it}) = \beta' X_{it} + E(U_{1,it} | P_{2,it} > 0, X_{it}). \quad (8)$$

Emiatt az "önkiválasztás" miatt azonban a rendelkezésre álló minta nem tekinthető véletlen mintának. Ha ezt figyelmen kívül hagynánk, azaz (6) egyenlet kerülne becslésre, amikor a tényleges regresszió (8) formát veszi fel, az kihagyott magyarázó változó miatti torzítást okozna. Az önkiválasztás okozta a torzítás korrigálására fejlesztette ki Heckmann [1979] a később róla elnevezett kétlépcsős Heckmann eljárást. Eszerint ilyen esetben a torzítást az inverz Mill-arány egyenletbe építésével lehet kiküszöbölni, ami alapján az árnövekedés feltételes várható értéke a következő alakot veszi fel<sup>4</sup>:

$$E(P_{1,it} | P_{2,it} > 0, X_{it}) = \beta' X_{it} + \sigma \rho E\left(\frac{f(\gamma' Z_{it})}{F(\gamma' Z_{it})} | X_{it}\right), \quad (9)$$

<sup>4</sup>A Heckmann eljárás alkalmazhatóságának feltétele, hogy  $U_{1,it}$  és  $U_{2,it}$  együttes eloszlása normális.

ahol az utolsó hányados az inverz Mill-arány, az  $f(\cdot)$  a standard normál eloszlású véletlen változó sűrűség függvénye, a  $F(\cdot)$  pedig a kumulatív eloszlási függvénye.

Ezt a modellt alkalmazva az árfolyam begyűrésre, a (7) egyenletnek megfelelően becsülök egy probit modellt, hogy megkapjam az (5)-ös egyenletben szereplő  $f_E^+$ -t és  $f^+$ -t. Ez az egyenlet a következő formát veszi fel:

$$\begin{aligned} INCREASE_{it} = & \alpha_i + \sum_{j=0}^n \beta_{ij} NEER_{i,t-j} + \sum_{j=0}^n \gamma_{ij} PPI_{i,t-j} + \\ & + \sum_{j=0}^n \delta_{ij} FPPI_{i,t-j} + \phi_i D_{it} + \varepsilon_{it} , \end{aligned} \quad (10)$$

ahol  $INCREASE_{it}$  egy dummy változó, ami 1 értéket vesz fel, ha  $i$ -edik termékcsoporthoz tartozó  $t$ -edik időpontban áremelkedés következett be, ami a (7)-es egyenletben szereplő  $P_{2,it}$ -nek felel meg. A (7)-es egyenlet  $Z_{it}$  vektora tartalmazza a magyarázó változókat, aminek a (10)-es egyenletben a következő változók felelnek meg.  $NEER_{it}$  az  $i$ -edik termékcsoporthoz tartozó nominál effektív árfolyam logaritmusának változása a  $t$ -edik időpontban.  $PPI_{it}$  az  $i$ -edik termékcsoporthoz tartozó hazai termelői árindex logaritmusának változása, míg  $FPPI_{it}$  külföldi termelői árindexek logaritmusának változása.  $D_{it}$ -ban elsősorban hónap és év dummy-k szerepelnek, de helyet kaptak a 2004. januári és 2006. szeptemberi áfa emelés és 2006. januári áfa csökkentés dummy-jai is.<sup>5</sup> Az egyenletben  $n$  késleltetés kapott helyet.

A vizsgálat célja a  $NEER_{it}$  átlagos változásán felül az árfolyam szintjében történt egyszeri 1%-os emelkedés hatásának a mérése. Ez a sokk két különböző csatornán keresztül hat az árakra. Egyrészt az árfolyam emelkedésnek lehetnek direkt hatásai az áremelkedések gyakoriságára (tehát lehetnek olyan boltok, amik közvetlenül külföldön szerzik be a termékeiket és ezért áraikat devizában képezik). Másrészt, mivel a hazai termelői árindex nem független az árfolyam hatásától, ezért az árfolyam hathat indirekt úton a hazai termelői árindexen keresztül is (ebben az esetben vagy a hazai termelési költségeket vagy a nagykereskedelmi árakat befolyásolja az árfolyam változása). Egy példán keresztül próbálom érzékeltetni ennek a két csatornának a működését, az egyszerűség kedvéért elhagyva az  $i$  indexet. Ha a hazai termelői árindex alakulását a következő regresszióval próbáljuk leírni:

$$PPI_t = a + \sum_{j=0}^n b_j NEER_{t-j} + \sum_{j=0}^n c_j PPI_{t-j} + \sum_{j=0}^n d_j FPPI_{t-j} + e_t , \quad (11)$$

akkor az előző hónapban bekövetkezett 1%-os árfolyam emelkedés a direkt csatornán keresztül  $+\beta_1$ -gyel emelné az áremelések gyakoriságát, a hazai termelői árindexek közül  $PPI_t$ -t  $+b_1 + b_0 c_1$ -gyel emelné, ami  $+\gamma_0(b_1 + b_0 c_1)$ -gyel emelné az áremelések gyakoriságát, a  $PPI_{t-1}$ -t pedig  $+b_0$ -val emelné, ami

<sup>5</sup>Az áfa változások árváltozás gyakoriságaira és méretére gyakorolt hatásról lásd Gábrriel és Reiff [2010].

$+\gamma_1 b_0$ -lal emelné az áremelések gyakoriságát. Az előző mondatban szereplő  $\beta_1$ ,  $\gamma_0$  és  $\gamma_1$  együtthatók a (10) egyenletből származnak, míg a  $b_0$ ,  $b_1$  és a  $c_1$  koefficiensek pedig a (11) regresszióból. Ezzel a módszerrel  $f_E^+$ -t minden késleltetésre kiszámítottam (azaz az árfolyam emelkedés hónapjában, egy hónappal az árfolyam emelkedés után stb.). (11) egyenlet azt is bemutatja, hogy feltételezem, hogy a hazai termelői árindex nem befolyásolja a perióduson belüli árfolyamot, azaz ebben az egyenletben az árfolyam exogén. A szokásos áremelési gyakoriság megkapásához ( $f^+$ ) pedig a magyarázó változók átlagát helyettesítettem vissza a (10) egyenletbe.

Szintén a (10) egyenletet felhasználva számítottam ki az inverz Mill-arányt, ami (9) egyenletben bemutatott feltételes árnövekedés várható méretének konzisztens becsléséhez szükséges. Ezen a módon lehet becsülni az (5) egyenletben használt  $s^+$ -t és  $s_E^+$ -t értékeket. A becsült panel regresszió a következő volt:

$$\begin{aligned} \Delta PRICE_{it} = & \alpha_i + \sum_{j=0}^n \beta_{ij} NEER_{i,t-j} + \sum_{j=0}^n \gamma_{ij} PPI_{i,t-j} + \\ & + \sum_{j=0}^n \delta_{ij} FPPI_{i,t-j} + \phi_i D_{it} + \zeta_i INVMILLS_i + \varepsilon_{it} , \end{aligned} \quad (12)$$

amely összefüggést csak azokra az esetekre becsültem, amikor áremelkedés történt, azaz  $INCREASE_{it} = 1$ . Az egyenletben a magyarázó változók ugyanazok, mint a (10) egyenletben, kivéve, hogy a  $D_{it}$ -ből elhagytam az év dummy-kat és bekerült a torzítatlan becsléshez szükséges inverz Mill-arány.

Az  $s^+$  kiszámítása a (12) egyenlet együtthatóival és a változók átlagaival történt, csakúgy mint  $f^+$  esetében. Az árfolyamok hatása az átlagos áremelések méretére ( $s_E^+$ -k) ugyanúgy a fent leírt direkt és indirekt csatornák feltételezésével történt, mint az  $f_E^+$ -k esetében.

Ugyanilyen módszerrel lehet az (5) egyenlet második felében található értékeket is kiszámolni ( $f^-$ ,  $f_E^-$ ,  $s^-$  és  $s_E^-$ ). Miután a 8 szükséges elem a rendelkezésre áll, az (5) egyenlet felhasználásával egyszerű kiszámítani a 1% árfolyam változás hatását a sokkot követő különböző hónapokban, majd kumulálva azokat megnézni az árfolyam emelkedés inflációs hatását.

### 3 Adatok

Az általam használt áradatbázis a KSH által a fogyasztói árindex kiszámításához használt kiskereskedelmi árakat tartalmazza. A minta 2001 decembere és 2007 júniusa közötti bolt szintű árfelírásokat tartalmazza, azaz 68 egymást követő hónapról állnak rendelkezésre adatok. A fogyasztói árindex kiszámításához használt 896 reprezentáns közül 770 maradt a mintában, ami fogyasztói kosár 70,12% jelenti (lásd a 2. táblázatot). Alapvetően két ok miatt kerültek ki reprezentánsok a mintából: vagy szabályozottak az áraik (például óvodai és iskolai étkeztetés, elektromos áram, vezetékes gáz, autópálya matricák stb.) vagy az adatgyűjtés módszertani problémái nem teszik alkalmassá őket az



árazási viselkedés vizsgálatára (például új és használt autók, fapados repülőjegyek stb.).

CPI kategória	CPI kosár		Eredeti minta		Végső minta	
	Súly	Darab	Súly	Darab	Súly	Darab
feldolgozott élelmiszerek	17,427	139	16,907	137	16,121	128
nem feldolgozott élelmiszerek	5,665	53	5,665	53	4,151	34
ruházkodási cikkek	5,305	171	5,305	171	3,147	101
tartós fogyasztási cikkek	9,240	112	4,976	73	3,562	49
egyéb ipari cikkek	15,277	214	10,235	192	7,852	159
szolgáltatások	25,134	161	11,934	106	9,789	78
energia	13,203	16	6,350	8	5,468	5
szeszes italok	6,066	24	6,066	24	6,066	24
dohányárúk	2,684	6	2,684	6	2,237	6
összesen	100,000	896	70,122	770	58,394	584

2. táblázat. A reprezentánsok száma és súlya a különböző mintákban

Az eredeti mintában szereplő a 770 reprezentánshoz általában havonta 80-120 különböző boltokból származó ármegfigyelés tartozik. Ezt megszorozva a rendelkezésre álló 68 hónappal ez azt jelenti, hogy egy reprezentánshoz megközelítőleg 6200 megfigyelés tartozik, a teljes minta pedig 4,684 millió megfigyelést tartalmaz. Minden megfigyelés egy 5 jegyű termékkódból, árból, a bolt kódjából, a megfigyelés hónapjából, 3 jegyű és 5 jegyű termék kategória kódjából áll. Sajnos nem mind a 770 reprezentánsból áll rendelkezésre elég megfigyelés ahhoz, hogy az előző részben felvázolt becslési eljárást el lehessen végezni rajta (például motorbiciklik esetében). Más esetekben az árakat csak szezonálisan gyűjtik (például krumpli és más zöldségek), ami miatt további 186 reprezentánst kellett elhagyni, mielőtt a 2. táblázatban bemutatott végleges mintáig eljutottam. Az ebben szereplő 584 reprezentáns 128 CPI csoportba sorolható (ezek az *A függelékben* találhatóak), ez az a szint, amin a becsléseket elvégzem. A 128 csoport tovább aggregálható abba a 9 CPI kategóriába, amelyek alapján 2. táblázat bemutatja a mintákat, és ezen az aggregációs szinten fogom az eredményeket prezentálni.

Ugyanez a 128 termék csoport az, amihez a magyarázó változók illeszkednek, azaz a becslési eljárás lefolytatásához mind a 128 CPI csoporthoz külön  $NEER_{it}$ ,  $PPI_{it}$  és  $FPPI_{it}$  idősort állítottam elő. Minden esetben a változók logaritmusának differenciáját használtam magyarázó változóként.

A nominál effektív árfolyam idősor elkészítéséhez minden termékcsoporthoz ki kell választani az importáló országokat és meg kell határozni azok súlyát az importban, hogy a súlyok segítségével az árfolyam (és később a termelői árindex) idősoraik változásait összesúlyozhassam. Ehhez a művelethez a KSH termékszintű kereskedelmi statisztikáját használtam, ami TARIC (Integrated Tariff of the European Communities) kód alapján épül fel. A CPI és a TARIC besorolás megfeleltetése után minden termékcsoporthoz meg lehetett határozni az importáló országokat és az importjuk méretét. Az országok kiválasztásakor kiindulásként kiválasztottam az összes, 2003-2006 között Magyarországra érkező import alapján a 20 legfontosabb kereskedelmi partnert, majd ezt a csoportot további országokkal egészítettem ki, úgy hogy

minden CPI csoport esetében a kiválasztott országok lefedjék Magyarország importjának legalább 80%-t.<sup>6</sup> Ez az eljárás végül összesen 38 országot eredményezett<sup>7</sup>, amik a *B függelékben* kerülnek felsorolásra. Egy ország súlyát minden termék csoport esetében az adott ország 38 ország importjához viszonyított aránya határozta meg. Azokban az esetekben pedig, amikor a CPI csoportnak nem volt TARIC megfelelője, vagy nem lehetett importálni (pl. szolgáltatások) az összes termék importja alapján számítottam ki az importáló országok súlyait.

A nominál effektív árfolyam kiszámolásához, ahol lehetett, az MNB árfolyam adatait használtam, ahol ez nem volt lehetséges, ott az IMF IFS adatbázisára támaszkodtam. A fent ismertetett a súlyokat használtam a termék-kategória szintű külföldi termelői árindex kiszámításakor is, ebben az esetben az idősorok többsége az IMF-IFS vagy az OECD adatbázisból származnak. Az árváltozások hazai kontroll változójaként a magyar termelői árindexet használtam, a fel nem dolgozott élelmiszer esetében pedig a mezőgazdasági termelői árindexet. Mindkét adatsort a KSH gyűjti. Itt a KSH által használt TEÁOR'03 kategóriákat kellett összehangba hozni a CPI 128 csoportosítással. Szolgáltatások esetében a termelői árindexet az adott szektorban jellemző bértváltozásokkal is kiegészítettem.<sup>8</sup>

A fenti módon előállított magyarázó változók segítségével került sor a (10)-(12) egyenletrendszer becslésére.

## 4 Az árfolyam inflációs hatása

Ebben a részben rátérek az előző részekben bemutatott becslési eljárás eredményeire. Az egyenletek becslésekor 6 késleltetést használtam. Először az (5) egyenlet különböző elemeire (gyakoróságok és árváltozások átlagos mértéke) mutatom meg az árfolyam 1% emelkedésének marginális hatását, majd az inflációra gyakorolt kumulatív hatás következik.

Az áremelkedések gyakoróságának esetében a változás várt előjele pozitív, mivel egy leértékelődésnek gyakoribbá kellene tennie az áremelkedéseket. Általánosságban az eredmény meg is felel a várakozásoknak, hiszen egy eset kivételével (4 hónappal az eredeti árfolyam emelkedés után) az összesített hatások pozitívak, de az is látható a 3. táblázat A részében, hogy jó néhány esetben és termékkategóriában negatív az árfolyam hatása az áremelés gyakoróságára, ami ellentmond az intuíciónak.

<sup>6</sup>Erre kiegészítésre leginkább gyümölcsök, fűszerek, kávé és ékszeres esetében volt szükség.

<sup>7</sup>Az első ötlet szerint minden termékcsoport esetében a 15 legnagyobb importáló országot vettem volna figyelembe, de ez az eljárás összességében 79 országot eredményezett, és ezek közül sokhoz nem sikerült megfelelő árfolyam és termelői árindex idősort találni.

<sup>8</sup>Erre kiegészítésre leginkább gyümölcsök, fűszerek, kávé és ékszeres esetében volt szükség.

Árfolyam-begyűrés mértéke a KSH bolt-szintű áradatbázisa alapján 165

CPI kategória	súly	marginális hatás <sup>a</sup>						
		0	1	2	3	4	5	6
hónap után								
<i>A. az áremelkedések gyakoriságára</i>								
feldolgozott élelmiszerek	0,161	-0,001	0,004	0,000	0,005	0,003	0,003	0,003
nem feldolgozott élelmiszerek	0,042	-0,004	-0,003	0,007	0,003	-0,001	0,009	0,010
ruházkodási cikkek	0,031	0,000	0,001	-0,001	0,000	0,000	0,001	0,000
tartós fogyasztási cikkek	0,036	-0,001	0,000	0,001	-0,001	0,001	0,002	-0,002
egyéb ipari cikkek	0,079	-0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
szolgáltatások	0,098	-0,001	0,001	0,000	0,003	0,002	0,002	0,004
energia	0,055	0,045	0,023	0,022	-0,007	-0,030	0,045	0,012
szeszes italok	0,061	0,000	0,001	-0,003	0,003	0,002	-0,002	0,001
dohányárak	0,022	-0,011	-0,017	0,011	-0,023	0,000	0,027	0,001
<i>összesen</i>	<i>0,583</i>	<i>0,003</i>	<i>0,003</i>	<i>0,003</i>	<i>0,001</i>	<i>-0,002</i>	<i>0,007</i>	<i>0,003</i>
<i>B. az áremelkedések átlagos méretére</i>								
feldolgozott élelmiszerek	0,161	0,176	-0,124	-0,008	-0,084	-0,055	-0,198	-0,006
nem feldolgozott élelmiszerek	0,042	0,150	-0,005	0,036	0,003	-0,217	0,125	-0,100
ruházkodási cikkek	0,031	-0,161	-0,104	-0,367	0,118	-0,216	0,283	-0,113
tartós fogyasztási cikkek	0,036	0,118	0,041	-0,068	-0,078	0,038	-0,072	-0,116
egyéb ipari cikkek	0,079	0,161	0,031	-0,017	-0,084	-0,008	-0,035	-0,024
szolgáltatások	0,098	0,090	-0,196	0,207	-0,138	0,010	0,013	0,049
energia	0,055	-0,107	0,193	-0,077	-0,039	0,082	0,039	0,027
szeszes italok	0,061	0,167	0,061	0,097	0,001	-0,100	0,026	0,013
dohányárak	0,022	-0,093	-0,317	0,029	-0,376	-0,368	-0,096	-0,026
<i>összesen</i>	<i>0,583</i>	<i>0,099</i>	<i>-0,054</i>	<i>0,013</i>	<i>-0,074</i>	<i>-0,056</i>	<i>-0,035</i>	<i>-0,014</i>
<i>C. az árcsökkentések gyakoriságára</i>								
feldolgozott élelmiszerek	0,161	-0,001	-0,001	0,000	0,000	0,000	-0,001	0,000
nem feldolgozott élelmiszerek	0,042	-0,002	-0,001	-0,008	-0,002	-0,005	-0,006	-0,005
ruházkodási cikkek	0,031	0,000	0,000	0,001	0,000	0,001	0,001	0,000
tartós fogyasztási cikkek	0,036	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	-0,002	-0,001
egyéb ipari cikkek	0,079	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,000	-0,001
szolgáltatások	0,098	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
energia	0,055	-0,024	-0,031	-0,037	-0,027	-0,014	-0,063	-0,060
szeszes italok	0,061	-0,001	-0,004	-0,001	-0,002	-0,002	-0,001	0,000
dohányárak	0,022	0,008	0,009	0,000	0,009	0,009	-0,003	-0,001
<i>összesen</i>	<i>0,583</i>	<i>-0,002</i>	<i>-0,003</i>	<i>-0,004</i>	<i>-0,002</i>	<i>-0,002</i>	<i>-0,007</i>	<i>-0,006</i>
<i>D. az árcsökkentések átlagos méretére</i>								
feldolgozott élelmiszerek	0,161	0,013	0,019	-0,215	0,065	0,056	-0,178	-0,161
nem feldolgozott élelmiszerek	0,042	0,036	0,019	0,116	0,021	0,066	0,010	0,068
ruházkodási cikkek	0,031	-0,171	0,220	0,142	0,531	0,829	0,221	0,240
tartós fogyasztási cikkek	0,036	0,060	-0,078	0,308	-0,108	0,049	0,104	0,064
egyéb ipari cikkek	0,079	0,086	0,039	0,256	0,094	0,204	-0,131	-0,115
szolgáltatások	0,098	-1,796	0,979	-6,370	0,594	-3,791	2,021	-1,005
energia	0,055	-0,077	-0,143	-0,074	-0,014	-0,209	0,187	-0,026
szeszes italok	0,061	-0,134	-0,112	0,432	-0,014	0,108	-0,022	0,148
dohányárak	0,022	-0,211	0,508	-0,627	0,145	1,341	-0,557	0,654
<i>összesen</i>	<i>0,583</i>	<i>-0,318</i>	<i>0,178</i>	<i>-1,046</i>	<i>0,156</i>	<i>-0,499</i>	<i>0,285</i>	<i>-0,169</i>

<sup>a</sup> marginális hatások a következő módon számolhatóak például az árnövekedés gyakorisága esetében:  $f_E^+ - f^+$  (pl. 1 hónap utáni marginális hatás  $f_{E1}^+ - f^+$ , ahol  $f_{E1}^+$  áremelkedések gyakoriságára gyakorolt hatás 1 hónappal a sokk után)

Az árfolyamok hatása az áremelkedések átlagos nagyságára, ha lehetséges, még ellentmondásosabb. Annak ellenére, hogy a várakozások szerint az árfolyamok emelkedésének növelnie kellene az árak emelkedésének átlagos méretét a 3. táblázat B részének tanulsága szerint ez alig egy-két esetben jellemző. Az árfolyam emelkedésének csökkentenie kellene az árcsökkenések gyakoriságát. A becslés 3. táblázat C részében bemutatott eredményei átlagosan meg is felel ennek az elvárásnak, de itt is vannak olyan eredmények, amik ellentmondanak az intuíciónak. Annak ellenére, hogy egy árfolyam leértékelődésnek csökkentenie kellene az árcsökkenések átlagos méretét, 3. táblázat D részében bemutatott eredmények nincsenek összhangban ezzel. Ennek az egyik oka a szolgáltatások viselkedése. A szolgáltatások esetében ugyanis általánosságban elegendő megfigyelés áll rendelkezésre a becslések kivitelezéséhez, de rendkívül ritkák az árcsökkenések (pl. a háztartási gépek javítása kategóriában 15631 ármegfigyelésből csak 66 esetben következett be árcsökkenés), ami erősen csökkenti a becslések hatékonyságát.

Miután (5) egyenlet minden eleme rendelkezésre áll, már használható az árfolyam változások inflációra gyakorolt hatásának vizsgálatára. Általánosságban annyi elmondható, hogy 3. táblázatban bemutatott várakozással ellentétes eredmények az árváltozásokra is hatottak, és így az árváltozások esetében is megjelennek az árfolyam leértékelődésére árcsökkenéssel reagáló termék kategóriák. A 4. táblázatban található eredmények alapján folyamatosan emelkedő begyűrzést tapasztalható a feldolgozott és a nem feldolgozott élelmiszerek esetében és az energia és a szolgáltatások árainál. Viszont ellentétes a várakozásokkal, hogy a mind a ruházati cikkek, mind pedig az egyéb fogyasztási cikkek esetében az árfolyam emelkedés folyamatosan csökkenő árakat eredményez. Nehéz erre magyarázatot találni, de a megoldás valószínűleg az intenzív nemzetközi versenyben keresendő, ami például az átlag alatti inflációt is eredményezte ezeknél a termékeknél. A dohányárak negatív begyűrzésére könnyebb magyarázatot adni, mivel az árfolyam változásoktól független a jövedéki adó változtatások torzíthatták az eredményeket. Hasonló okok miatt nem lehet bízni a szeszes italok eredményeiben sem.

A különböző kategóriák súlyát is felhasználva, aggregálni lehet az eredményeket, azaz azt is meg lehet mutatni, hogy az árfolyam változása mekkora inflációt okozott volna a mintában szereplő termékek és szolgáltatások esetén. Az eredményeket a 4. táblázat mutatja be.

Árfolyam-begyűrés mértéke a KSH bolt-szintű áradatbázisa alapján 167

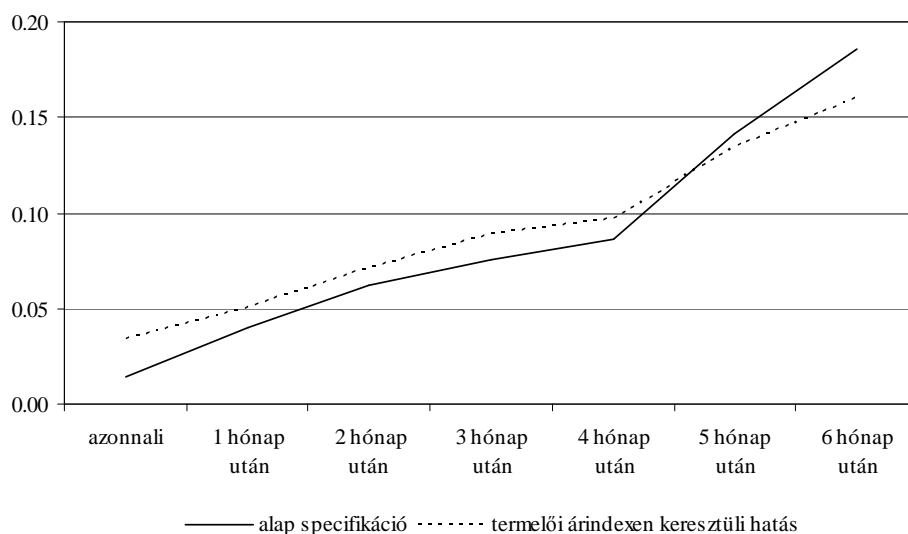
CPI kategória	súly	kumulált inflációs hatás						
		0	1	2	3	4	5	6
		hónap után						
feldolgozott élelmiszerek	0,161	0,009	0,048	0,053	0,099	0,139	0,151	0,177
nem feldolgozott élelmiszerek	0,042	0,063	-0,027	0,172	0,128	0,143	0,321	0,438
ruházkodási cikkek	0,031	-0,012	-0,002	-0,056	-0,043	-0,058	-0,044	-0,050
tartós fogyasztási cikkek	0,036	-0,012	-0,011	0,007	-0,019	-0,008	0,032	0,025
egyéb ipari cikkek	0,079	-0,013	-0,011	-0,021	-0,026	-0,036	-0,032	-0,022
szolgáltatások	0,098	-0,010	-0,005	-0,003	0,013	0,019	0,040	0,090
energia	0,055	0,102	0,279	0,347	0,363	0,326	0,582	0,736
szeszes italok	0,061	0,021	0,083	0,096	0,155	0,188	0,178	0,201
dohányárúk	0,022	-0,148	-0,356	-0,287	-0,551	-0,637	-0,458	-0,444
összesen	0,584	0,008	0,029	0,052	0,060	0,069	0,122	0,164
összesen (szeszes italok és dohányárúk nélkül) <sup>a</sup>	0,501	0,014	0,040	0,062	0,076	0,086	0,141	0,186

<sup>a</sup> A szeszes italok és dohány termékek esetében a jövedéki adó többszöri változtatása torzíthatja a becslések eredményeit

4. táblázat. 1% árfolyam-emelkedés kumulált inflációs hatása az első 6 hónapban

Az aggregált eredményt a korábbi mérések eredményeivel (lásd 1. táblázat) összehasonlítva látható, hogy az eredmény majdnem fele annak, amit *Darvas* [2001] becsült. Az ő esetében 1%-os árfolyam emelkedés árakra gyakorolt azonnali hatása az első negyedév végére 0,1% volt, szemben a 4. táblázatban található 0,06-0,076% eredménnyel. *Darvas* [2001] 2. negyedév végére a hatás 0,3% árfolyam-begyűrészt mért, hasonló időhorizonton az eredmény 0,164-0,186%. Az én eredményeim *Vonnák* [2010] eredményeivel van inkább összhangban, aki azt találta, hogy a 2. negyedév végére a begyűrés mértéke 0,13-0,14%. A korábbi mérésekhez képest alacsonyabb begyűrésnek számos oka lehet. Az egyik lehetőség az alacsonyabb inflációs környezet, ami *Taylor* [2000] érvelése szerint jobban lehorgonyzott inflációs várakozásokat és ezen keresztül az árfolyam sokkok kisebb hatását eredményezi. Másik magyarázat lehet az alkalmazott módszertan, az 1. táblázat, *Beirne és Bijsterbosch* [2011] és *Coricelli et al.* [2006b] összefoglalóinak tanulsága szerint, az egy egyenletes módszerek gyakran alacsonyabb árfolyam-begyűrészt mérnek. További okát jelentheti az alacsonyabb átgyűrésnek, hogy megváltozott az árfolyam politika, az intervenció sáv kiszélesedésével az árfolyam mozgása kiszámíthatatlanabb és kevésbé tartós, így kevesebb támaszt jelent az inflációs várakozások befolyásolására (nominális horgony szerepe megszűnt).

A bemutatott módszertan szerint az árfolyam-begyűrés két csatornán keresztül hathat az árakra, az egyik egy direkt csatorna, a másik pedig egy indirekt csatorna a termelői árindexen keresztül. Felmerülhet a kérdés, hogy a két csatorna közül melyik a fontosabb, melyik közvetíti a nagyobb mértékben az árfolyam hatását. A kérdés megválaszolásához újra becsültem a modellt, azzal a változtatással, hogy kikapcsoltam a direkt csatornát és csak a termelői árindexen keresztüli hatást számoltam ki. Ennek a kísérletnek az eredménye szerepel a 1. ábrán.



1. ábra. 1% árfolyam emelkedés kumulált inflációs hatása a termelői árindexen keresztül az első 6 hónapban<sup>9</sup>

A 1. ábra tanulsága szerint a közvetlen importált fogyasztói termékek árain keresztül direkt hatás negatív az első 4 hónapban. Ez alapján az árfolyam változás hamarabb megemeli a termelői árakat és azokon keresztül az itthon előállított termékek árát, mint a külföldről importáltakét. Ez lehet a jele annak, hogy az importált fogyasztásra szánt termékek esetében mégis jelen van valamilyen mértékű piacra árazás. Ennek árragadósága okozhatja, hogy a közvetlenül importált termékek árai csak a 4 hónap késleltetéssel kezdenek reagálni az árfolyam leértékelődésére.

## 5 Robosztusság vizsgálatok

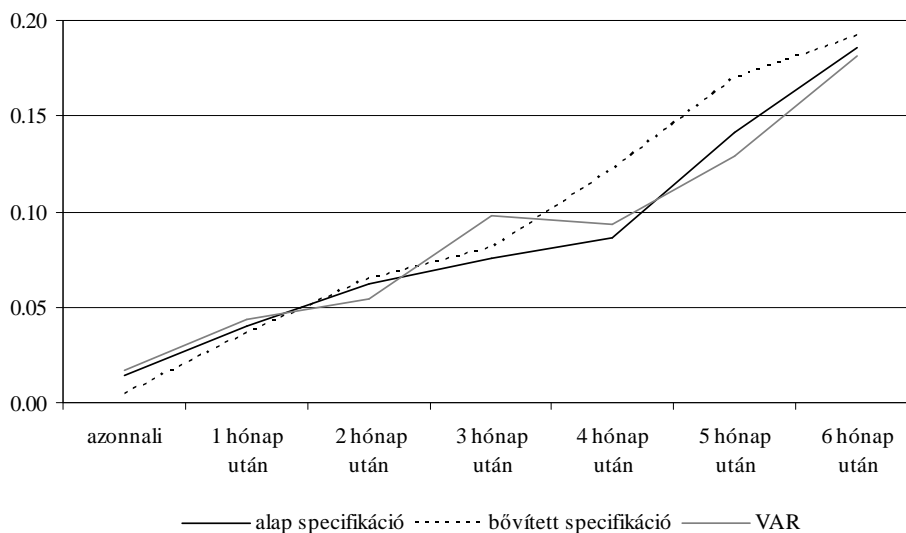
A 4. táblázatban bemutatott árfolyam-begyűrűzési eredményeket két módszerrel is igyekszem ellenőrizni: az első egy bővített specifikáció, ahol további magyarázó változók kerültek a (10)-(12) egyenletrendszerbe. Ez azzal indokolható, hogy a fentiekén túl más hatások is szerepet játszhatnak egy-egy termékcsoport ármeghatározási mechanizmusában. Egyrészt még importált termékek esetében is hozzáadódhat a hazai disztribúció költsége a termék árához (Burstein et al. [2003]). Ezt a hatást az adott jószágkategória nagy- és kiskereskedelem béreinek változása írhatja le magyarázó változóként az egyenletekben. Másrészt a kereslet változása is szerepet játszhat az árak alakulásában, emiatt a kiskereskedelmi forgalom változásával is bővítettem

<sup>9</sup>A szeszes italok és dohány termékek esetében a jövedéki adó többszöri változtatása torzíthatja a becslések eredményeit ezért az ábra a dohány és szeszes italok nélküli kumulált inflációs hatásokat mutatja be.

a (10) és a (12) egyenletet. A harmadik hozzáadott változó az IMF nyersanyag árindexének változása, ami a termelői árindexet meghatározó (11)-es egyenletbe építettem be.

A kis- és nagykereskedelmi bérek alakulásához a KSH adatbázisát használtam (szintén TEÁOR'03 alapján rendezve). A keresleti hatásokat megjelenítő kiskereskedelmi forgalom adatait a KSH 10 termékcsoporthoz árusító bolttípusra (pl. élelmiszer-, ital-, dohányáru-kiskereskedelem) lebontva gyűjti. A hazai termelői árindexet magyarázó egyenletbe pedig az IMF árupiaci árindexe került további magyarázó változónak. Látható, hogy ezeket az idősorokat már nem lehetett annyira finoman hozzáilleszteni a használt 128 CPI csoporthoz, mint akár a nominál effektív árfolyam, akár a hazai termelői árindex esetében.

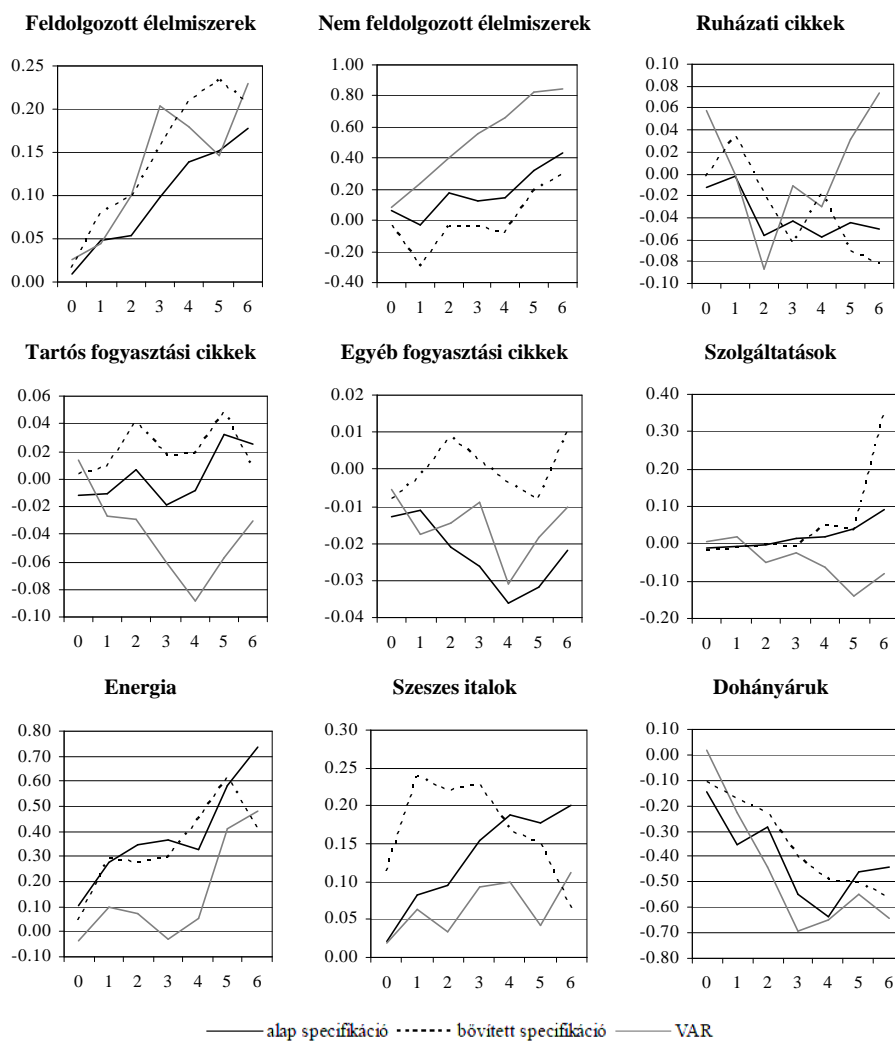
A második robusztusság vizsgálat vektor autoregresszív (VAR) modellel alapszik és az a célja, hogy eredmény ne a korábban már többször említett endogenitási problémák következménye legyen (pl. ha a termelői árindex befolyásolja az árfolyamot). Ennek ellenőrzésére mind a 128 termékcsoporthoz külön modellt becsültem, ahol az endogén változók sorrendje *NEER*, *PPI*, *CPI* és egyszerű alsó háromszög identifikációt használok a sokkok identifikációjához (*FPPI* exogén változóként szerepel az egyenletekben). A *NEER*, *PPI* és *FPPI* idősorok ugyanazok, mint a korábban már bemutatottak, de a fogyasztói árindexhez a KSH által aggregált idősorokat használtam. A VAR becslés és előző eredmények összehasonlíthatósága érdekében itt is 6 késleltetést építettem a modellekbe és ugyanazokkal a súlyokkal összegeztem az eredményül kapott 128 impulzus válasz függvényt, mint amit az előző becsléseknél is használtam.



2. ábra. 1% árfolyam emelkedés kumulált inflációs hatása a VAR módszertannal az első 6 hónapban<sup>10</sup>

<sup>10</sup>A szeszes italok és dohány termékek esetében a jövedéki adó többszöri változtatása

A 2. ábra mutatja a két robusztussági vizsgálat eredményét, és az összehasonlíthatóság érdekében a 4. táblázatban szereplő eredmény is szerepel az ábrán. A VAR modell esetében egy 1 százalékos sokk kumulált hatását mutatja az ábra. Az ábrán jól látható, hogy az aggregált eredmények nagyon hasonlóak, mind méretben, mind pedig dinamikában.



3. ábra. Robusztussági vizsgálatok termékcsoportonként – 1%-os árfolyam emelkedés kumulált hatása az első 6 hónapban<sup>11</sup>

torzíthatja a becslések eredményeit, ezért az ábra a dohány és szeszes italok nélküli kumulált inflációs hatásokat mutatja be. A bővített specifikációban nem szerepelnek bizonyos szolgáltatások, mivel begyűrésük robbant (171 eszpresszókávé, 630 testápolási szolgáltatás, 640 járműjavítás karbantartás és a 691 fel nem sorolt szolgáltatások)

<sup>11</sup>A bővített specifikációban nem szerepelnek bizonyos szolgáltatások, mivel begyűrésük robbant (171 eszpresszókávé, 630 testápolási szolgáltatás, 640 járműjavítás karbantartás és a 691 fel nem sorolt szolgáltatások)



Azonban ha termékkategóriánként nézzük meg a különböző becslési eljárások eredményeit, akkor jelentős különbségeket lehet megfigyelni (3. ábra). A feldolgozott és a nem feldolgozott élelmiszer, illetve az energia árak esetében a három begyűrés dinamikája hasonló, de az eredmények szóródnak. A nem feldolgozott élelmiszerek esetében például a VAR eredményei kétszer nagyobbak, mint az alap specifikáció és háromszor akkorák, mint a bővített specifikáció esetében. A többi termékcsoportról ez a közös dinamika nem mondható el. A ruházati cikkeknel a VAR becslés lóg ki a csökkenő dinamikából, a szolgáltatások esetében a bővített modell eredményei robbannak az utolsó hónapban, az egyéb fogyasztási cikkek esetében szintén a bővített modell mér pozitív begyűrészt, szemben a másik két módszerrel.

## 6 Összefoglaló

A KSH által az infláció kiszámításához használt adatbázisán becsültem az árfolyam 1%-os változásának hatását az árváltozások gyakoriságára, átlagos méretére és az inflációra. Ehhez minden termékkategóriához az CPI 128 aggregációs szinten saját nominál effektív árfolyam, külföldi termelői és hazai termelői árindex idősort készítettem. Ezeknek a magyarázó változóknak a segítségével megbecsültem az árfolyam hatását az árváltozások gyakoriságára és átlagos mértékére, majd ezekből az eredményekből aggregáltam az árfolyam hatását az inflációra.

Az eredmények vegyesek. Egyrésztől több kategóriában a rossz hatások előjele (pl. az árfolyam leértékelődés csökkenti az áremelkedések méretét), másrésztől viszont az aggregált eredmények viszonylag robusztusak a különböző specifikációk között. Eszerint 1% leértékelődés 0,06% áremelkedést okoz 1 negyedév után és 0,186% a második negyedév végére. Ez a 18%-os árfolyam-begyűrés az előző 6 hónapos becslések alsó határán található, de összehasonlítható Vonnák [2010] eredményeivel. Ez az alacsonyabb becsült begyűrés következhet az alkalmazott becslési eljárásból, ami az egy-egyenletes módszertanon alapul, vagy abból, hogy a minta 2001-2007 közötti, azaz egy alacsonyabb inflációjú és kevésbé kiszámítható árfolyamú időszakot ölel fel.

További érdekesség, hogy az árfolyam direkt és indirekt hatásának elkülönítésekor, arra a megfigyelésre jutottam, hogy az indirekt csatona csak 4. hónap után kezd el hatni az áremelkedésekre. Ez alapján az árfolyam-változás hamarabb megemeli a termelői árakat és azokon keresztül az itthon előállított termékek árát, mint a külföldről importáltakét. Ez lehet a jele annak, hogy az importált fogyasztásra szánt termékek esetében mégis jelen van valamilyen mértékű piacra árazás.

Maradtak még bőven kérdések, kutatási lehetőségek a magyar árfolyam begyűréssel kapcsolatban. Meg lehet próbálni a hibakorrekciós módszert is alkalmazni a mikro panel adatokon. További kérdésként felmerülhet, hogy vannak-e nem-lineáris hatásai az árfolyamnak: különbözhet-e a hatása egy kis és nagy árfolyam változásnak, vagy egy leértékelődésnek felértékelődéstől? Érdemes lenne ezeket a kérdéseket jövőbeli kutatások témájává tenni.

## A függelék. 128 CPI kategória és módosított súlyuk a fogyasztói kosárban

CPI kategória	Súly	CPI kategória	Súly
100 sertéshús	1,0690	315 férfilábbeli	0,3488
101 marha- és borjúhús	0,1320	316 férfing, -fehérmű	0,2314
103 belsőségek	0,0830	317 férfiharisnya, -zokni	0,1670
104 baromfihús	0,8900	323 női szoknya, blúz, nadrág	0,0807
105 szalámi, szárazkolbász, sonka	0,6870	324 női felső kötöttáru	0,0278
106 párizsi, kolbász, hurka	0,8240	325 női lábbeli	0,3793
107 húskonzerv	0,0750	326 női fehérmű	0,1575
108 hal	0,0587	327 női harisnya, zokni	0,1643
109 halkonzerv	0,0600	330 gyermekkabát	0,0660
110 tojás	0,3760	332 gyermekfelsőruha	0,1119
111 tej	1,4580	334 gyermek felső kötöttáru	0,0437
112 sajt	0,3810	335 gyermeklábbeli	0,1785
113 tejtermékek (sajt nélkül)	1,2330	336 gyermekfehérmű	0,0276
120 vaj, vajkrém	0,0750	337 gyermekharisnya, -zokni	0,0570
121 sertés- és baromfizsiradék	0,1900	338 ruházat 3 év alattiaknak	0,1806
122 étkezési szalonna	0,1670	340 divatáru	0,0907
123 étolaj	0,3840	341 rövidáru	0,1110
124 margarin	0,2870	342 bőrönd, táska, bőrdíszmű	0,0790
130 liszt, dara	0,3300	400 szobabútor	0,7065
131 rizs, hántolmányok	0,2300	401 konyha és egyéb bútor	0,2554
132 kenyér	1,6060	402 hűtőszekrény, fagyasztógép	0,2313
133 péksütemények	0,3750	403 mosógép, centrifuga	0,2590
134 száraztészta	0,3520	404 fűtő és főzőberendezések	0,4367
135 cukor	0,5060	405 porszívógép, varrógép	0,2910
136 csokoládé, kakaó	0,3525	413 kerékpár	0,2710
137 cukrászáru, fagyalt	0,2867	420 rádió	0,0370
138 édesipari lisztesáru	0,2490	421 televízió	0,2250
139 cukorka, méz	0,1894	422 video, magnetofon, lemezjátékos	0,3456
141 friss zöldség, főzelék	0,5227	424 fényképezőgép, óra, hangszer	0,2536
142 friss hazai- és déligyümölcs	0,3327	431 ékszerek	0,2500
143 gyümölcs-, zöldséglé, szörp	0,6320	507 palackos gáz	0,7230
144 tartósított zöldség, főzelék	0,2130	510 lakásjavító, -karbantartó cikkek	0,7498
145 tartósított gyümölcs	0,0280	520 bútorszövet, szőnyeg, függöny	0,3810
146 száraz hüvelyesek	0,0490	521 ágy- és asztalnemű	0,3830
147 dió, mák, mogyoró	0,1270	522 edény, konyhafelszerelés	0,4271
150 tartósított húsos ételek	0,0940	523 lakásfelszerelés, alkatrész	0,4380
151 tartósított hústalan ételek	0,2290	524 barkácsolási kellékek	0,0790
152 fűszerek, ételízesítők	0,5590	525 háztartási fogyóanyagok	0,6320
160 éttermi étkezés (nem előfizetéses)	0,8556	526 mosó- és tisztítószer	1,1220
161 munkahelyi és előfiz. menü étkezés	1,3720	530 testápolási cikkek	1,3310
164 büféáruk	0,2850	531 gyógyszer, gyógyáru	0,1249
170 kávé (bolti)	0,6810	540 járműalkatrész	0,5120
171 eszpresszókávé	0,2480	541 járműüzemanyag	4,7450
172 tea	0,0750	553 tanszer, írószer	0,2960
173 alkoholmentes üdítőitalok	1,0625	554 sportszer, játék	0,3715
180 bor	1,0610	555 hanglemez, magnókazetta	0,1660
181 sör	3,0300	556 fotocikk, film	0,0720
182 tömény ital	1,9750	557 videokazetta, fejhallgató	0,2160
190 dohányáruk	2,2367	560 virág, dísznövény	0,3360
300 pamut- és pamut típusú szövet	0,0850	561 hobbi állattartás	0,2150
301 gyapjú- és gyapjú típusú szövet	0,0245	601 ruhajavítás, -készítés, kölcsönzés	0,0950
302 egyéb szövetek	0,0180	610 labber	0,0400
312 férföltöny	0,0675	612 társasház közös költség	1,3760
313 férfinadrág, -zakó	0,3282	613 lakásjavítás, -karbantartás	1,2200
314 férfi felső kötöttáru	0,0358	615 személyszállítás stb.	0,9270

CPI kategória	Súly	CPI kategória	Súly
620 háztartási berendezés javítása	0,1700	660 kulturális cikkek javítása	0,1280
621 takarítás, mosatás	0,1580	661 oktatási szolgáltatás	0,6315
630 testápolási szolgáltatás	0,8290	663 mozi	0,0607
631 egészségügyi szolgáltatás	0,3755	664 tv-előfizetés	0,4720
640 járműjavítás, -karbantartás	1,2940	665 sportrendezvények, múzeum	0,2316
642 gépkocsi kölcsönzés, garázbérlet	0,1270	681 üdülés belföldön nem beutalóval	0,5508
644 taxi	0,1940	690 fényképezési szolgáltatás	0,2980
647 teherszállítás	0,0940	691 fel nem sorolt szolgáltatások	0,5173

## B. függelék. A nominál effektív árfolyam és a külföldi termelői árindex idősorok előállításához használt országok

Ország	Súly	Ország	Súly
1 Argentína	0,0002	20 Japán	0,0310
2 Ausztrália	0,0003	21 Kína <sup>a</sup>	0,0581
3 Ausztria	0,0827	22 Lengyelország	0,0376
4 Belgium	0,0230	23 Németország	0,2956
5 Brazília	0,0024	24 Olaszország	0,0549
6 Bulgária	0,0015	25 Oroszország	0,0718
7 Chile	0,0000	26 Románia	0,0181
8 Csehország	0,0300	27 Spanyolország	0,0146
9 Dánia	0,0067	28 Svájc	0,0138
10 Dél-Korea	0,0171	29 Svédország	0,0136
11 Egyesült Államok	0,0166	30 Szingapúr	0,0088
12 Egyesült Királyság	0,0268	31 Szlovákia	0,0236
13 Finnország	0,0091	32 Szlovénia	0,0073
14 Franciaország	0,0487	33 Thaiföld	0,0025
15 Hollandia	0,0472	34 Törökország	0,0059
16 Hongkong	0,0134	35 Uganda	0,0001
17 Horvátország	0,0023	36 Ukrajna	0,0108
18 India	0,0018	37 Uruguay	0,0000
19 Izrael	0,0014	38 Vietnám	0,0004

<sup>a</sup> Tajvan is beleértve.

*Megjegyzés.* A 20 legfőbb importáló ország (2003-2006 között euróban mért importjuk alapján), kiegészítve plusz országokkal úgy, hogy minden CPI kategóriában a mintában szereplő országok lefedjék a Magyarországra érkező import legalább 80%-t (Erre kiegészítésre leginkább gyümölcsök, fűszerek, kávé és ékszeres esetében volt szükség.).

## Irodalom

1. Beirne, John – Bijsterbosch, Martin [2011]: Exchange rate pass-through in central and eastern European EU Member States. *Journal of Policy Modeling*, Vol. 33., Issue 2., (March-April, 2011), pp. 241–254.
2. Burstein, Ariel T. – Neves, João C. – Rebelo, Sergio [2003]: Distribution costs and real exchange rate dynamics during exchange-rate-based stabilization. *Journal of Monetary Economics*, Vol. 50., Issue 6., (Sep. 2003), pp. 1189–1214.

3. Campa, Jose Manuel – Goldberg, Linda S. [2005]: Exchange rate pass-through into import prices. *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 87., No. 4., (Nov., 2005), pp. 679–690.
4. Ca’Zorzi, Michele – Hahn, Elke – Sánchez, Marcelo [2007]: *Exchange rate pass-through in emerging markets*. European Central Bank, ECB Working Paper Series, WP No. 739., (March, 2007).
5. Coricelli, Fabrizio – Égert, Balázs – MacDonald, Roland [2006a]: *Monetary transmission mechanism in Central and Eastern Europe: Gliding on a wind of change*. Bank of Finland, Institute for Economies in Transition, BOFIT Discussion Papers, No. 8.
6. Coricelli, Fabrizio – Jazbec, Boštjan – Masten, Igor [2006b]: Exchange rate pass-through in EMU acceding countries: Empirical analysis and policy implication. *Journal of Banking & Finance*, Vol. 20., Issue 5., (May 2006), pp. 1375–1391.
7. Darvas, Zsolt [2001]: *Exchange rate pass-through and real exchange rate in EU candidate countries*. Economic Research Centre of the Deutsche Bundesbank, Discussion paper No. 10/01, (May, 2001).
8. Dornbusch, Rudiger [1987]: Exchange Rates and Prices. *American Economic Review*, Vol. 77., No. 1., (March, 1987), pp. 93–106.
9. Gábel, Péter – Reiff, Ádám [2010]: Price setting in Hungary — a store-level analysis. *Managerial and Decision Economics* Vol. 31., Issue 2-3., (March - April 2010) pp. 161–176.
10. Goldberg, Pinelopi Koujianou – Knetter, Michael M. [1997]: Goods Prices and Exchange Rates: What Have We Learned? *Journal of Economic Literature*, Vol. 35., No. 3., (Sep., 1997), pp. 1243–1272.
11. Heckman, James J. [1979]: Sample Selection Bias as a Specification Error. *Econometrica*, Vol. 47., No. 1., (January, 1979), pp. 153–161.
12. Hoffmann, Johannes – Kurz-Kim, Jeong-Ryeol [2006]: *Consumer price adjustment under the microscope. Germany in a period of low inflation*. European Central Bank, ECB Working Paper Series, WP No. 652., (July, 2006)
13. Jakab, Zoltán – Várpalotai, Viktor – Vonnák, Balázs [2006]: How does monetary policy affect aggregate demand? A multimodel approach for Hungary in Vonnák Balázs (szerk.) [2006]: *Monetary Transmission in Hungary*. Magyar Nemzeti Bank, Budapest, pp. 181–206.
14. María-Dolores, Ramón [2010]: Exchange rate pass-through in new member states and candidate countries of the EU. *International Review of Economics and Finance*, Vol. 19., Issue 1., (January, 2010), pp. 23–35.
15. Mihaljek, Dubravko – Klau, Marc [2008]: Exchange rate pass-through in emerging economies: what has changes and why? in BIS [2008]: *Transmission mechanism for monetary policy in emerging market economies*. Bank for International Settlement, Monetary and Economic Department, BIS Papers, No. 35., (January, 2008) pp. 103–130.
16. Osbat, Chiara – Wagner, Martin [2005]: Sectoral Exchange Rate Pass-Through in the Euro Area. mimeo, on conference: Second Italian Congress of Econometrics and Empirical Economics 25-26. january 2007. download: <http://www.cide.info/conf/papers.php>
17. Rezessy, András [2006]: Estimating the immediate impact of monetary policy shocks on the exchange rate and other asset prices in Hungary. in Vonnák Balázs (szerk.) [2006]: *Monetary Transmission in Hungary*. Magyar Nemzeti Bank, Budapest, pp. 53–68.

18. Taylor, John B. [2000]: Low Inflation, Pass-Through and the Pricing Power of Firms. *European Economic Review*, Vol. 44., No. 7., pp. 1389–1408.
19. Vonnák Balázs [2006]: Estimating the effect of Hungarian monetary policy within a structured VAR framework. in Vonnák Balázs (szerk.) [2006]: *Monetary Transmission in Hungary*. Magyar Nemzeti Bank, Budapest, pp. 155–180.
20. Vonnák, Balázs [2010]: *Risk premium shocks, monetary policy and exchange rate pass-through in the Czech Republic, Hungary and Poland*. Magyar Nemzeti Bank, MNB Working Paper Series, WP No. 2010/1., (2010).

THE EFFECT OF EXCHANGE RATE ON PRICES USING THE  
HUNGARIAN CSO'S STORE-LEVEL PRICE QUOTAS DATABASE

This paper uses store level price panel data to estimate exchange rate pass through on prices and inflation. I decompose price changes into frequency and average size of price changes, and estimate the effect of exchange rate on them. With this methodology I find that 1% depreciation causes about 0,18% rise in the inflation after two quarters. *Keywords*: exchange rate pass-through, inflation, micro price data. Journal of Economic Literature (JEL) code: E30, E31.



## EGY HIBRID ELJÁRÁS A TÖBB MEGVALÓSÍTÁSI MÓDÚ ERŐFORRÁS-KORLÁTOS PROJEKTÜTEMEZESI PROBLÉMA MEGOLDÁSÁRA<sup>1</sup>

SZENDRŐI ETELKA

*PTE Pollack Mihály Műszaki Kar*

A tanulmány egy hibrid algoritmust mutat be a több megvalósítási módú erőforrás-korlátos projektek ütemezési problémájának megoldására. Az ismertetett megközelítésben egy harmóniakereső algoritmust kombináltunk egy új és hatásos „head-tail” lokális kereső eljárással, amely egy vegyes egészértékű lineáris programozási modellen (MILP) alapszik. Az új megközelítés lényegének és életképességének igazolására a jól ismert PSPLIB tesztkönyvtár J30MM halmazára vonatkozó számítási eredményeket tesszük közzé. A „head-tail” javítás generálására egy jól ismert MILP megoldó szoftvert (CPLEX) alkalmaztunk.

*Kulcsszavak:* több megvalósítási módú erőforrás-korlátos projektütemezés, heurisztikus és metaheurisztikus technikák, harmóniakereső optimalizálás, hibrid eljárások, projektmenedzselés, számítási eredmények

### 1 Bevezetés

A tanulmány egy hibrid algoritmust ismertet a több megvalósítási módú erőforrás-korlátos projektütemezési probléma megoldására (MRCPSP, Multi-mode Resource-Constrained Project Scheduling Problem). Az algoritmus a „Sounds of Silence” („Csend hangjai”) harmóniakereső metaheurisztikán alapul, amelyet Csébfalvi [7] fejlesztett ki az erőforrás-korlátos ütemezési feladatok megoldására és Csébfalvi et al. [5] fejlesztette tovább az MRCPSP feladatok esetére. Magát a harmóniakereső (HS) metaheurisztikát eredetileg Lee és Geem [16] dolgozta ki a zenei improvizációs folyamatok analógiájaként, ahol a zenészek improvizálásának célja a minél tökéletesebb harmónia elérése. A bemutatott továbbfejlesztett algoritmus az eredeti „Sounds of Silence” harmóniakereső metaheurisztika és egy új, hatékony, a MILP formulán alapuló „head-tail” lokális kereső eljárás kombinációja. A módosított modell váza a Szendrői [23] tanulmányban került ismertetésre, részletes számítási, futtatási eredmények nélkül. Jelen tanulmány mélyebben ismerteti az algoritmust és részletes futtatási eredményekkel támasztja alá annak hatékonyságát. A módosítás lényege, hogy az eredetileg teljesen véletlenszerű kezdő repertoárt helyettesítjük egy előoptimalizált melódiahalmazzal, amely a relaxált megoldásból véletlen perturbációval keletkezik. A „head-tail” eljárás megpróbálja csökkenteni a projekt teljes időszükségletét azoknak az erőforrásoknak

<sup>1</sup>Beérkezett: 2010. július 11. E-mail: szendroi@pmmk.pte.hu.

az újraelosztásával, amelyeket a HS eljárás a kezdő és befejező tevékenységekhez rendelt. A lokális kereső eljárás kihasználja azt a tényt, hogy egy gyors és hatékony megoldó szoftver használata a kisméretű MILP problémákra elfogadható időn belül képes megoldást adni. Az ajánlott metaheurisztika hatékonyságának és életképességének bizonyítására, közöljük a számítási eredményeket, amelyeket a jól ismert és népszerű PSPLIB tesztkönyvtár J30MM részalmazán végzett futtatások [14] során kaptunk. A „head-tail” megoldás generálásához egy korszerű MILP szoftvert (CPLEX 8.1) alkalmaztunk.

Az erőforrás-korlátos több megvalósítási módú projektütemezési problémák (MRCPSP) irodalma rendkívül szerteágazó, számos megközelítést, megoldási módszert dolgoztak ki a probléma megoldására. Jelen dolgozat terjedelmi korlátai nem teszik lehetővé, hogy a teljes irodalmat részletesen áttekintse, csak néhány jelentős munka megemlézésére vállalkozhat. Az MRCPSP problémák célja a projekt időtartamának (makespan) minimalizálása, az erőforráskorlátok és a több megvalósítási mód figyelembevételével. A több megvalósítási módú projektekben a tevékenységek erőforrás szükséglete és végrehajtásának időtartama függ a megvalósítási mód megválasztásától. Kisméretű problémák megoldására jól használhatók az optimális megoldást adó egzakt módszerek, míg nagyméretű problémák esetén a gyakorlatban heurisztikus módszereket és metaheurisztikákat alkalmaznak.

Az egzakt eljárásokat kidolgozó kutatók közül Talbot [24] volt az első, aki egy leszámolási (enumeration) sémát publikált a feladat megoldására. Patterson at al. [20] egy leszámoláson alapuló branch and bound algoritmust tett közzé, amelyben egy keresési fa generálásával jutnak el az optimális megoldáshoz. Sprecher et al. [22], Hartmann és Drexl [11] valamint Sprecher és Drexl [21] branch and bound algoritmusokat közöltek, melyben különböző elsőbbségi szabályokat alkalmaznak a keresési fa metszéséhez. Demeulemeester [8] egy mélységi keresést kombinál a branch and bound eljárással.

Heurisztikus eljárásokat publikált Drexl és Grünwald [9], Özdamar és Ulusoy [19], Boctor [2,3], Kolish és Drexl [15]. Drexl és Grünwald egy sztochasztikus ütemezési modellt tett közzé, míg Özdamar és Ulusoy egy lokális korlátokon alapuló elemzési módszert alkalmaz. Boctor első munkájában prioritási szabályokon alapuló heurisztikákat javasol, míg a második munkájában egy kritikus út módszeren alapuló heurisztikus algoritmust publikál. Kolish és Drexl egy lokális kereső heurisztikát mutat be, amely három fázisból áll.

A metaheurisztikus eljárásokat közlő munkák közül evolúciós algoritmusokat alkalmaz Özdamar [18], Hartmann [10], Alcaraz et al. [1], Lova at al. [17]. Józefowska et al. [13], Bouleimen és Lecocq [4] a szimulált hűtés elvét alkalmazza. Zhang et al. [26] a részecske rajzás (particle swarm) optimalizáló eljárást használja az MRCPSP probléma megoldására.



$N$	A valóságos tevékenységek száma
$M$	A tevékenységek megvalósítási módjainak száma
$m$	Megvalósítási módok indexe $m \in \{1, 2, \dots, M\}$
$i$	az $i$ -edik tevékenység indexe $i \in \{1, 2, \dots, N\}$
$D_{im}$	az $i$ -edik tevékenység időtartama az $m$ -edik megvalósítási módban
$i \rightarrow j$	$i$ tevékenység a $j$ tevékenység előzménye
$PS$	az $i \rightarrow j$ elsőbbségi (megelőző-rákövetkező) kapcsolatok halmaza
$R$	a megújuló erőforrás típusok száma
$C$	a nem-megújuló erőforrások száma
$R_{imr}$	az $i$ -edik tevékenység erőforrás-szükséglete az $r$ -edik megújuló erőforrásból az $m$ -edik megvalósítási módban
$R_r$	az $r$ -edik megújuló erőforrás felső korlátja
$C_c$	a $c$ -edik nem-megújuló erőforrás felső korlátja
$C_{imc}$	az $i$ -edik tevékenység erőforrás-szükséglete a $c$ -edik nem-megújuló erőforrásból az $m$ -edik megvalósítási módban
$\bar{T}$	A projekt időszükségletének felső korlátja (a tevékenységek időtartamának összege)
$X_{ims}$	bináris változó, $X_{ims} \in \{0, 1\}$ értéke 1, ha az $i$ -edik tevékenység az $m$ -edik megvalósítási módban $s$ időpontban kezdődik el, egyébként 0.
$T$	a projekt időperiódusainak száma $t \in \{1, 2, \dots, T\}$
$X_i$	az $i$ -edik tevékenység kezdőidőpontja nem korlátos esetben
$\underline{X}_{im}$	az $i$ -edik tevékenység legkorábbi kezdési időpontja az $m$ -edik megvalósítási módban a nem korlátos, (csak elsőbbségi korlátokat kielégítő) esetben
$\overline{X}_{im}$	az $i$ -edik tevékenység legkésőbbi kezdési időpontja az $m$ -edik megvalósítási módban a nem korlátos, (csak elsőbbségi korlátokat kielégítő) esetben
$s$	A tevékenység kezdési időpontja az $\underline{X}_{im}, \overline{X}_{im}$ időintervallumban
$M_i$	Az $i$ -edik tevékenység megvalósítási módja
$W_{imst}$	Bináris változó, értéke 1, ha a tevékenység aktív a $t$ időperiódusban, egyébként 0.

1. táblázat. A modellben használt jelölések listája

## 2 A modell

A vizsgált modellünkben a következő állításokból indulunk ki: A projekt  $N$  darab valós tevékenységből áll, amelyeket 1-től  $N$ -ig sorszámozunk. Minden  $i$  tevékenység,  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$  az  $M$ -féle megvalósítási mód valamelyikében valósul meg. Jelölje a 0-dik és az  $N + 1$ -dik látszólagos tevékenység a projekt egyedi kezdetét és végét. A tevékenységek végrehajtását megelőző-rákövetkező (elsőbbségi) feltételek és erőforrás korlátok befolyásolják. A megelőző-rákövetkező kapcsolat meghatározza, hogy egy adott tevékenység addig nem kezdődhet meg, amíg az azt megelőző tevékenységek be nem fejeződnek. Jelölje  $PS$  halmaz,

$$PS = \{i \rightarrow j \mid i \neq j, i \in \{0, 1, \dots, N\}, j \in \{1, 2, \dots, N + 1\}\}$$

a tevékenységek közötti elsőbbségi feltételek halmazát, ahol a nyíl szimbólum azt jelzi, hogy a  $j$  tevékenység csak az  $i$  tevékenység befejezése után kezdődhet el. Az erőforrások két nagy csoportba sorolhatók, a megújuló és a nem-megújuló erőforrások csoportjába. A megújuló erőforrásfajták számát jelölje  $R$ , a nem-megújuló erőforrásfajták számát jelölje  $C$ . Az  $i$ -edik tevékenység végrehajtása,  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$  az  $m$ -edik megvalósítási módban,  $m \in \{1, 2, \dots, M\}$ ,  $D_{im}$  időegységet igényel. Jelölje  $R_r$  az időegység alatt rendelkezésre

álló  $r$ -edik megújuló erőforrás korlátját, ahol  $r \in \{1, 2, \dots, R\}$ . Legyen  $C_c$  a projekt teljes erőforráskorlátja a  $c$ -edik,  $c \in \{1, 2, \dots, C\}$  nem-megújuló erőforrásra vonatkozóan. Jelölje  $R_{imr}$  az  $i$ -edik tevékenység időegységre eső megújuló erőforrásigényét az  $m$ -edik megvalósítási módban, az  $r$ -edik erőforrásból. Legyen  $C_{imc}$  az  $i$ -edik tevékenységnek a nem-megújuló erőforrásigénye a  $c$ -edik erőforrásból az  $m$ -edik megvalósítási módban. Jelölje  $\bar{T}$  az elsőbbségi és erőforráskorlátokat kielégítő projekt időtartamának felső korlátját:

$$\bar{T} = \sum_{i=1}^N \max(D_{im} \mid m \in \{1, 2, \dots, M\}). \quad (1)$$

Jelölje  $X_i$  az  $i$ -edik,  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$  tevékenység kezdetét, és legyen  $[\underline{X}_{im}, \bar{X}_{im}]$  az az időintervallum, amelyben az  $i$ -edik tevékenység az  $m$ -edik megvalósítási módban elkezdődhet  $m \in \{1, 2, \dots, M\}$ . Az  $\underline{X}_{im}$  ( $\bar{X}_{im}$ ) jelöli az  $i$ -dik tevékenység legkorábbi (legkésőbbi) lehetséges kezdőidőpontját az  $m$ -edik módban, az erőforráskorlátok nélküli esetben rögzített legkésőbbi projektbefejezésnek megfelelően. Az MRCPSZ célja, hogy megfelelő megvalósítási módot találjon a tevékenységek számára, figyelembe véve az elsőbbségi- és erőforráskorlátokat úgy, hogy a projekt végrehajtásának időszükséglete minimális legyen. Jelöljük a modell döntési változóit az  $X_{ims}$  bináris változókkal, amelyek értéke 1, ha az  $i$ -edik tevékenység az  $m$ -edik  $m \in \{1, 2, \dots, M\}$  megvalósítási módban kerül ütemezésre  $s$  kezdési idővel, egyébként az értéke legyen 0. A modell a következő formulákkal írható le:

$$\min[X_{N+1}] = X_{N+1}^* \quad (2)$$

$$X_{N+1} \leq \bar{T} + 1 \quad (3)$$

$$\sum_{m=1}^M \sum_{s=\underline{X}_{im}}^{\bar{X}_{im}} X_{ims} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

$$\sum_{m=1}^M \sum_{s=\underline{X}_{im}}^{\bar{X}_{im}} s * X_{ims} \leq X_{N+1}, \quad i \rightarrow N+1 \in PS \quad (5)$$

$$\sum_{m=1}^M \sum_{s=\underline{X}_{im}}^{\bar{X}_{im}} (s + D_{im}) * X_{ims} \leq \sum_{m=1}^M \sum_{s=\underline{X}_{jm}}^{\bar{X}_{jm}} s * X_{jms}, \quad i \rightarrow j \in PS \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M \sum_{s=\underline{X}_{im}}^{\bar{X}_{im}} W_{imst} * R_{imr} * X_{ims} \leq R_r, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad r = 1, 2, \dots, R \quad (7)$$

$$W_{imst} = \begin{cases} 1 & \text{ha } s \leq t \wedge t < s + D_{im} \\ 0 & \text{ha } t < s \vee t \geq s + D_{im} \end{cases} \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M \sum_{s=\underline{X}_{im}}^{\bar{X}_{im}} C_{imc} * X_{ims} \leq C_c, \quad c = 1, 2, \dots, C \quad (9)$$

$$X_i = \sum_{m=1}^M \sum_{s=\underline{X}_{im}}^{\overline{X}_{im}} s * X_{ims}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (10)$$

$$M_i = \sum_{m=1}^M \sum_{s=\underline{X}_{im}}^{\overline{X}_{im}} m * X_{ims}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (11)$$

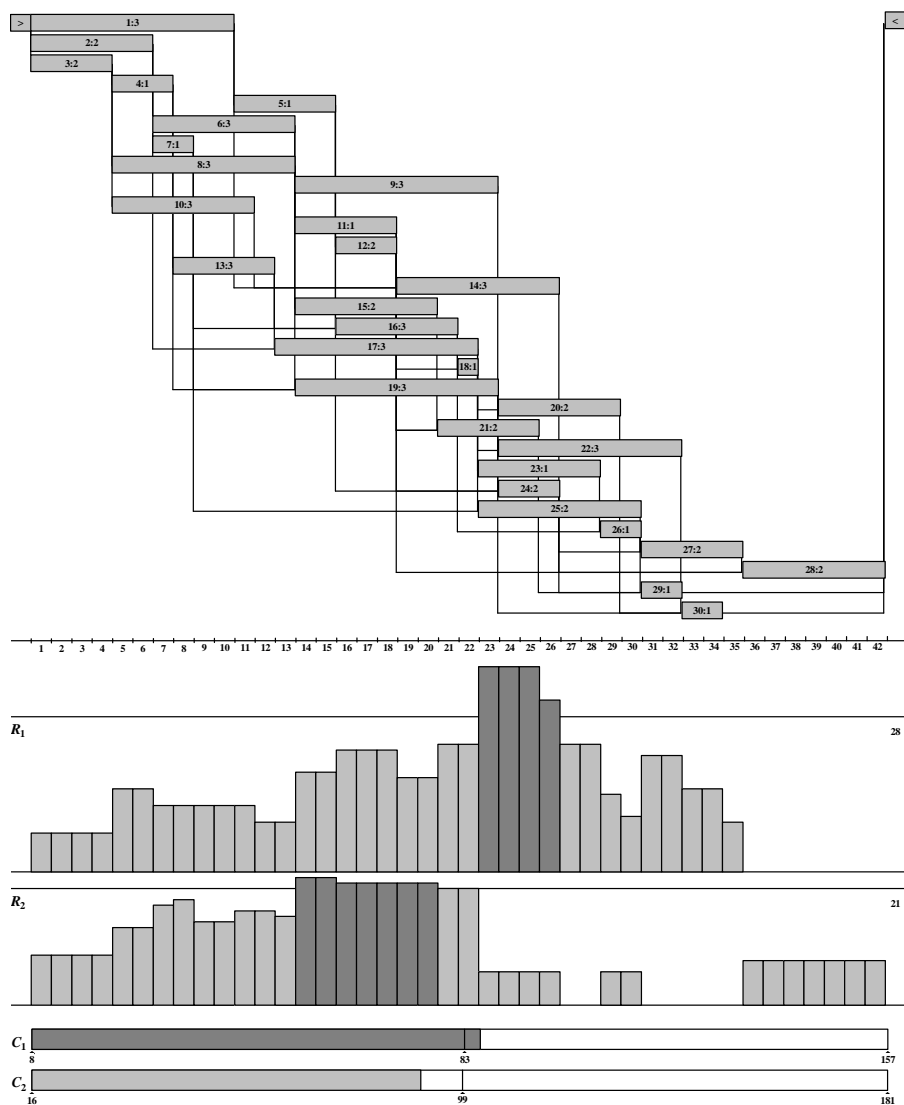
$$X = \{X_1, X_2, \dots, X_N\} \quad (12)$$

$$M = \{M_1, M_2, \dots, M_N\} \quad (13)$$

$$X_{ims} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad s = \underline{X}_{im}, \dots, \overline{X}_{im} \quad (14)$$

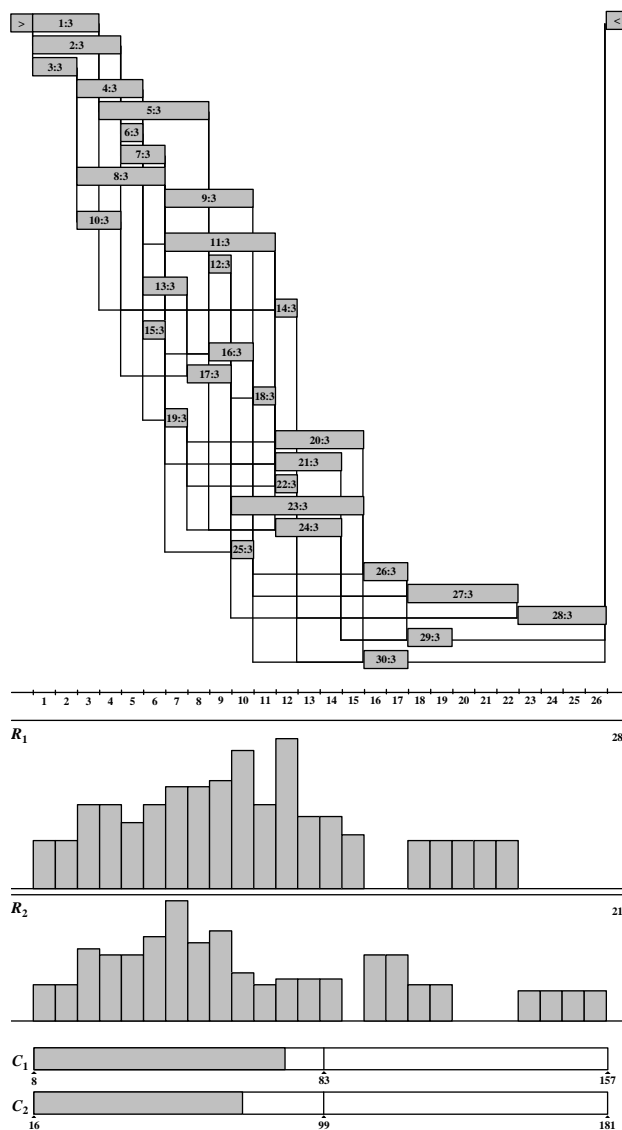
A (4) feltétel biztosítja, hogy minden  $i$ -edik tevékenység végrehajtása pontosan egyszer, egyetlen megvalósítási módban és a megvalósítási módjának megfelelő időintervallumban kezdődjék el. A (5-6) feltételek az elsőbbségi (megelőzési-rákövetkezési) relációkat írják le. Az időperiódusokban rendelkezésre álló megújuló erőforrás típusokra vonatkozó korlátokat a (7-8) feltételek adják meg. A (9) feltétel a teljes nem-megújuló erőforrás kapacitás korlátot írja le. A döntési változókra vonatkozó feltételeket a (10-14) kifejezések tartalmazzák. Végül, de nem utolsó sorban, a (2) kifejezés a modell célfüggvénye, amely a projekt végrehajtásának időszükségletét minimalizálja.

Az MRCPSP modell szemléltetésére egy 30 valóságos tevékenységből álló projektet mutatunk be. A projektben 2 megújuló és 2 nem-megújuló erőforrás használható fel a tevékenységek végrehajtásakor. A valós tevékenységek mindegyike a három megvalósítási mód valamelyikében hajtható végre. A bemutatásra kerülő projektpélda a J30MM-10-1, amely a „legnehezebb” kategóriába tartozik a PSPLIB tesztkönyvtár J30MM több megvalósítási módú projekthalmazából, amelyet Kolisch és Sprecher [14] hozott létre. Az 1. ábrán látható ütemezés az erőforráskorlátok figyelembe vétele nélkül kapott legkorábbi J30MM-10-1 projektütemezés, véletlenszerűen generált megvalósítási módokkal. A tevékenységeket téglalapokkal, a tevékenységek közötti kapcsolatokat vonalakkal szemléltetjük. A valódi tevékenységeket az  $i : m$  formában jelöljük. Az egységnyi látszólagos forrás (nyelő) tevékenységeket a  $>$  ( $<$ ) szimbólumok jelzik. A megújuló (nem-megújuló) erőforrás felhasználási hisztogramokban sötétebb szürke szín jelöli azokat az időperiódusokat, amelyekben az erőforrás szükséglet az erőforráskorlátokat meghaladja.



1. ábra. Legkorábbi J30MM-10-1 projektütemezés a véletlenszerűen generált működési módokkal

A 2. ábra az első ábrán bemutatott modell egy optimális (minimális időtartamú erőforrás korlátokat kielégítő) ütemezését, szimplex módszerrel kapott egzakt megoldását mutatja. Meg kell jegyeznünk, hogy több optimális megoldás is lehetséges.



2. ábra. A J30MM-10-1 projekt egy optimális ütemezése

### 3 Az algoritmus

A harmóniakereső (HS) algoritmust Lee és Geem [16] dolgozta ki a zenei improvizáció analógiájára, ahol a zenészek egy jobb harmónia elérésére törekednek. A harmóniakereső eljárásban az optimalizálási feladat a következőképpen

írható le:

$$\max \left\{ f(X) \mid X = \{ X_i \mid \underline{X}_i \leq X_i \leq \overline{X}_i, i \in \{1, 2, \dots, N\} \} \right\}, \quad (15)$$

A zene nyelvén  $X$  egy dallam, amelynek esztétikai értékét az  $f(X)$  függvény írja le. Minél magasabb  $f(X)$  értéke, annál jobb a hangzás minősége. A zenekarban a zenészek száma  $N$ , és az  $i$ -edik zenész,  $i = \{1, 2, \dots, N\}$  az  $X_i$  dallam megszólalásáért felel. Az improvizációs folyamatot két paraméter vezérli:

- A repertoár figyelembe vételi rátának megfelelően ( $RCR$ , repertoire consideration rate) minden zenész választ egy dallamot a saját repertoárjából az  $RCR$  rátának megfelelő valószínűséggel, vagy egy teljesen véletlen érték alapján ( $1 - RCR$ ) valószínűséggel;
- A hangmagassági rátának megfelelően ( $SAR$ , sound adjusting rate) egy, a zenész saját repertoárjából választott hang  $SAR$  valószínűséggel módosul.

Az algoritmus egy teljesen véletlenszerű „repertoár betöltő” fázissal kezdődik, ezt követően a zenekar improvizálni kezd. Az improvizáció során, ha egy új dallam jobb, mint a repertoár legrosszabb darabja, akkor a repertoár legrosszabb darabját helyettesítjük a jobb dallammal. A HS algoritmus két legfontosabb paramétere a repertoár mérete és az improvizációk száma. A HS algoritmus egy „explicit” algoritmus, mivel közvetlenül a hangokon fejti ki hatását.

A Csébfalvi féle SoS algoritmus és ebben a tanulmányban szereplő algoritmus is implicit módon kezeli a hangokat, így be kellett vezetni a „karmester” fogalmát a probléma megoldásához. A HS-beli improvizáció véletlenszerűen választott hangok véletlenszerű módosítását jelenti. Az SoS-ben és az itt bemutatott algoritmusban is az improvizáció egy a karmester által választott dallam módosítása.

Először megmutatjuk, hogyan lehet az eredeti feladatot a zene világába áttranszformálni. A zene világában az erőforrásprofilok egy „többszólamú dallamot” alkotnak. Tegyük fel, hogy minden szólamban csak a „magas hangok” hallhatóak, így a transzformált probléma a következő lesz: Keressük a legrövidebb „Sounds of Silence (Csend hangjai)” melódiát az improvizáció során, vagyis a legrövidebb csendet! Természetesen a zenei analógiában szereplő „magas hang” a projektütemezésben az erőforráskorlát átlépését (túlmunka) jelenti.

A zenei analógia nyelvén fogalmazva a több megvalósítási módú projektütemezési probléma a következőképpen írható le:

Zenei analógia	MRCPSP modell
A zenekar $N$ zenészből áll	A projekt $N$ tevékenységből áll
Zenész	Tevékenység
Minden $i$ zenész jellemezhető egy diszjunktív többszólamú hanghalmazzal és a hang lejátszásához szükséges energiával	Minden $i$ tevékenység több megvalósítási móddal és erőforrás igényel rendelkezik
Polifonikus dallam	Erőforrásprofil
Magas, hallható hang	Túlmunka, erőforráskorlát túllépése
Szólam	Erőforrástípus (megújuló)
Hangok megszólalási sorrendje	Tevékenységek sorrendje, ütemezés
Zenész belépési időpontja	A tevékenység kezdési időpontja
Előadáshoz szükséges energia	Nem megújuló erőforrás

Az MRCPSP esetben minden  $i$  zenész,  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$  jellemezhető egy diszjunktív többszólamú hanghalmazzal, és a nem-megújuló erőforrást egy adott energiatípusból származó, az előadáshoz szükséges „energiaként” interpretálva, a nem-megújuló erőforrást egy hang megszólaltatásához szükséges „fizikai energiának” tekinthetjük, vagy az előadás minőségének ellenőrzéséhez szükséges „spirituális” energiaként foghatjuk fel. Természetes feltételezés az is, hogy mindegyik energia fajtából a zenekar „teljes” energiája korlátozott és a teljes energiát az előadás során felhasználják.

Minden lépésben minden zenész egy  $IS_i$ ,  $IS_i \in [1, M]$  valószínűségi értéket ad (módosít) a „legjobb”  $M_i$  melódiáról, és egy  $IP_i$ ,  $IP_i \in [-1, 1]$  valószínűségi értéket ad arról, hogy mikor kívánja megszólaltatni a dallamot, azaz a „legjobb” belépési  $X_i$  időpontról nyilatkozik. A nagy pozitív (negatív) érték azt jelenti, hogy a zenész amilyen korán (későn) csak lehet, olyan korán (későn) kíván belépni a dallamba. Az elképzelés lényege a 3-4. ábrákon látható. A 3. ábrán szereplő  $\pi_{im}$  súlyérték, amely annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott ( $x$ ) érték az  $m \pm 0.5$  környezetébe esik, a következőképpen definiálható:

$$\pi_{im} = \int_{m-0.5}^{m+0.5} \text{Gauss}(x, IS_i, \sigma) dx, \quad i = \{1, 2, \dots, N\} \quad m = \{1, 2, \dots, M\}, \quad (16)$$

ahol  $IS_i$  a várható érték,  $\sigma$  a szórás. Az eredeti változatban a repertoár feltöltési fázisban  $IS_i$  értékét normális eloszlásból generáljuk

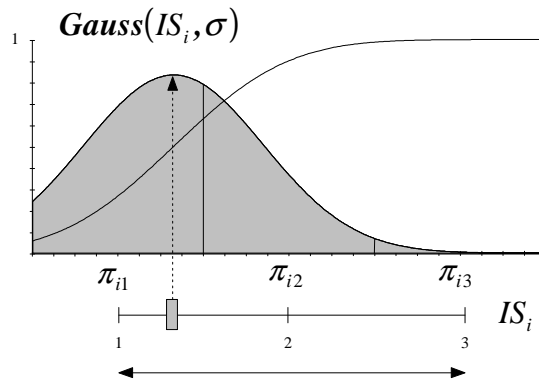
$$IS_i = \text{RandomGauss}(\mu, \sigma), 1 \leq IS_i \leq M, \quad \mu = 1, \sigma = 1 \text{ paraméterekkel.} \quad (17)$$

A bemutatott módosított változatban a relaxált megoldásból véletlenszerű perturbációval egy elő-optimalizált repertoárt hozunk létre:

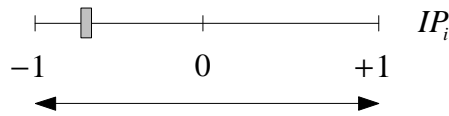
$$IS_i = \text{RandomGauss}(\tilde{M}_i, \sigma), \quad 1 \leq IS_i \leq M, \quad (18)$$

ahol  $\tilde{M}_i$ ,  $1 \leq \tilde{M}_i \leq M$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$  a relaxált mód érték a relaxált megoldásból. Az előoptimalizáláskor a repertoárt az adott multimódos szituációnak megfelelően állítjuk elő, kikeverjük azokat a valószínűségeket, amelyek diszjunktív dallamokhoz tartozhatnak. A módosított változatban  $\sigma$  az algoritmus egy „bűvös száma” mivel a kezdő repertoár változatosságára nagy hatással van ez az érték. Minden heurisztikának vannak állítható paraméterei,

a mi esetünkben ez a „bűvös szám” az állítható paraméter. Az előzetes eredményeinknek megfelelően egy jó beállítás a következő lehet:  $0.1 \leq \sigma \leq 0.2$ . Kezdetben a választás szabadsága nagy, majd az improvizációk során, az idővel csökken a választás szabadsága, azaz  $\sigma$  értéke csökken.

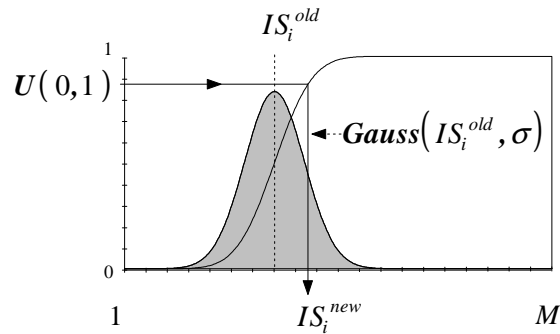


3. ábra. Egy  $IS_i$  elképzelés a „legjobb” megvalósítási módról ( $M = 3$ )



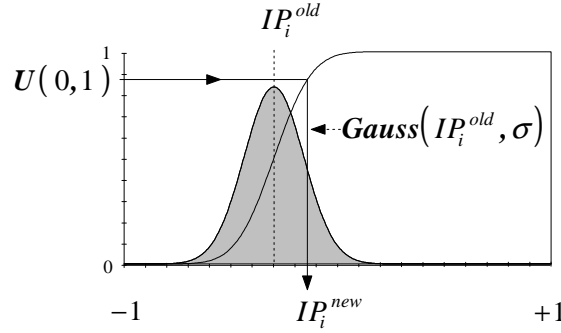
4. ábra. Egy  $IP_i$  elképzelés a „legjobb” pozícióról

Az improvizációs fázisban a régi  $IS_i$  ( $IP_i$ ) az eloszlás várható értéke lesz, amelyből az új, perturbált  $IS_i$  ( $IP_i$ ) értékek keletkeznek, ahol a  $\sigma$  szórás folyamatosan csökken (lásd 5-6. ábra).



5. ábra.  $IS_i$  perturbációja



6. ábra.  $IP_i$  perturbációja

Az eredeti HS algoritmusban a zenészek szabadsága maximális, és az improvizáció definíciója távol van a valóságtól. A HS-ben egy improvizáció a véletlenszerűen választott hangok véletlenszerű módosításainak halmaza. A mi megközelítésünkben az improvizáció a többé vagy kevésbé harmonikus melódia véletlenszerű perturbációját jelenti, ezért az improvizáció valóban közelebb van a valósághoz.

Az algoritmus lényege nagyon egyszerű: az eljárás a repertoár feltöltési fázisával kezdődik. Ezután minden improvizációs lépésben a karmester kiválaszt egy dallamot (minél rövidebb a dallam, annál nagyobb az esély, hogy azt választja a karmester), a zenészek módosítják saját elképzeléseiket, majd a karmester összegyűjti a módosított elképzeléseket és egy MILP és egy LP problémát old meg, azért hogy kiegyenlítse a többé vagy kevésbé ellentétes elképzeléseket a jobb harmóniáról.

A MILP a következőképpen írható le:

$$\max \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M \pi_{im} * Y_{im} \right] \quad (19)$$

$$\sum_{m=1}^M Y_{im} = 1, \quad i \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (20)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M C_{imc} * Y_{im} \leq C_c, \quad c \in \{1, 2, \dots, C\} \quad (21)$$

$$Y_{im} \in \{0, 1\}. \quad (22)$$

A MILP eredménye egy energia korlátot kielégítő dallamkombináció  $M = \{M_1, M_2, \dots, M_N\}$ , amely maximalizálja a zenészek megelégedettségét. A projektütemezési problémára visszautalva a MILP eredménye az erőforráskorlátokat kielégítő megvalósítási módok halmaza lesz. Elméletileg ez a MILP modell egy úgynevezett több-választásos több-dimenziós hátizsák probléma

(MMKP), számos gyors és hatékony problémamegoldó lehetőséggel. G. Csébfalvi és A. Csébfalvi [5] egy egyszerű probléma-specifikus heurisztikát fejlesztett ki a probléma megoldására, amely versenyképes az elterjedt MILP megoldó szoftverekkel (például: CPLEX).

Az LP probléma, amely maximalizálja a zenészek megelégedettségét a hang pozicionálásával, a következő:

$$\min \left[ \sum_{i=1}^N IP_i * X_i \right] \quad (23)$$

$$X_i + D_i \leq X_j, \quad i \rightarrow j \in PS, \quad D_i = D_{iM_i} \quad (24)$$

$$\underline{X}_i \leq X_i \leq \overline{X}_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (25)$$

A feladat változóit a hangok (tevékenységek) kezdési időpontjai alkotják. A feltételrendszer a hangok (tevékenységek) közötti kapcsolatokat (követő hang kezdési időpontja nem lehet kisebb, mint a megelőző hang kezdési időpontja+hossza) írja le. Az optimalizálás eredménye egy ütemezés (dallam), amelyet a karmester arra használ, hogy meghatározza a hangok (zenészek) végső kezdési (belépési) sorrendjét. A karmester létrehoz egy „hangnélküli”, az energia korlátnak megfelelő melódiát a kiválasztott hangok (tevékenységek) adott sorrendbe helyezésével, és ütemezi őket a lehetséges legkorábbi (legkésőbbi) kezdési időpontra.

Ezután a jól ismert forward-backward improvement (FBI) eljárással (lásd Tormos és Lova [25]) és az új „head-tail” lokális kereső heurisztikával, a karmester megpróbálja javítani a létrehozott dallam minőségét. Természetesen a karmester megjegyzi az addigi legrövidebb lehetséges melódiát, azaz ütemezést.

A „head-tail” lokális kereső algoritmus csak egyetlen hangolható paraméterrel rendelkezik, amely a „head-tail” mérete. Ha ez a paraméter egyenlő eggyel, akkor csak a projekt kezdő és befejező elemeit használja fel az újraallokálási folyamatban. Ha ez az érték egyenlő kettővel, akkor a kezdő tevékenységek és az őket közvetlenül követők valamint a befejező tevékenységek és az ő közvetlen megelőző tevékenységei alkotják a „head-tail” halmazt. A head-tail algoritmus segítségével újraoszthatjuk a nem megújuló erőforrásokat a projekt eleje és vége között, ha ez azt eredményezi, hogy a projekt időtartama rövidebb lesz. Természetesen minél nagyobb a „head-tail” mérete, annál nagyobb az esély arra, hogy a projekt időszükséglete csökkenthető az erőforrások újraallokálásával. Meg kell jegyezni, a számítási költségek drámaian megnövekedhetnek a „head-tail” méretének függvényében. Így tehát egyensúlyt kell teremtenünk a költségek és a minőség között.

## 4 Számítási eredmények

Az algoritmust a jól ismert PSPLIB (<http://129.187.106.231/psplib/>) teszt-könyvtár J30MM alkönyvtárának projektjein teszteltük. A J30 halmazban a valóságos tevékenységek száma 30, két megújuló és két nem-megújuló

erőforrás szükséglettel. Mindegyik valódi tevékenységet a három megvalósítási mód valamelyikében lehet végrehajtani. A J30 halmaz 640 projektből áll, de néhány projektre nem létezik elsőbbségi és erőforrás korlátokat kielégítő megoldás, ezért ezeket nem vettük figyelembe. Erre a halmazra nem ismert az összes optimális megoldás, így először az optimális megoldásokat hoztuk létre.

Az egzakt megoldások generálására a jól ismert MILP megoldó szoftvert (CPLEX 8.1) használtuk, alapértelmezett beállításokkal, 900 sec-os időkorláttal. A megadott időkorláton belül 382 esetben sikerült az optimális megoldást elérni a CPLEX használatával, amely nagyon jól jelzi az MRCPSP nehézségi fokát. Az itt bemutatott algoritmus Visual C++<sup>(R)</sup> 6.0 és Visual Basic<sup>(R)</sup> 6.0 nyelven íródott.

A számítási eredményeket az algoritmus egy 1.8 GHz Pentium IV IBM PC típusú számítógépen történő futtatásával állítottuk elő. A gép 256 MB memóriával rendelkezett és Microsoft Windows XP<sup>(R)</sup> operációs rendszer futott rajta. A futtatási eredményeket a 2-5. táblázatokban foglaltuk össze. A megoldás minőségét a projekt időszükségletének és az optimális időszükséglet értékének százalékos eltéréseivel mértük (QM). Minden projekt példányra vonatkozóan 30 egymástól független futtatást végeztünk, hogy az eredményeink statisztikailag is szignifikánsak legyenek.

Átlag	Szórás	Minimális idő	Maximális idő	Megoldott esetek
25.44	98.82	0.02	665.00	382

2. táblázat. Megoldási idő CPLEX 8.1 (sec)

Iterációk	Módszer	Megoldás	Megoldási idő	
		minősége Eltérés(%)	$\mu$ (sec)	$\sigma$ (sec)
100	standard repertoár	8.14	3.581	7.781
100	elő-optimalizált repertoár	1.53	1.550	2.779
100	elő-optimalizált repertoár + head-tail-1	1.38	4.140	6.614
100	elő-optimalizált repertoár + head-tail-2	0.50	24.267	9.345

3. táblázat. „Sounds of Silence” eredmények

A 4. táblázatban a minimális, a maximális és az átlagos eltéréseket, valamint a szórást mutatjuk be 30 egymástól független futtatásra vonatkozóan, standard repertoár esetében. A negatív értékek azt mutatják, hogy jobb megoldást talált a bemutatott algoritmus az egzakt CPLEX megoldásnál.

Példány neve	Minimum QM (%)	Maximum QM (%)	Átlag QM (%)	Szórás
J30MM-14-2	0.00	6.25	3.12	1.1606
J30MM-14-10	0.00	3.45	1.73	1.7545
J30MM-22-2	-5.13	-5.13	-5.13	0.0000
J30MM-22-8	3.03	9.09	8.69	1.3155
J30MM-25-1	2.94	14.71	8.82	3.3684
J30MM-34-5	2.22	6.67	5.56	1.5192
J30MM-35-9	-2.70	-2.70	-2.70	0.0000
J30MM-38-10	-7.50	-7.50	-7.50	0.0000
J30MM-39-3	2.00	4.00	2.07	0.3651
J30MM-39-5	-10.81	-10.81	-10.81	0.0000
J30MM-39-8	-2.22	-2.22	-2.22	0.0000
J30MM-40-1	-7.32	-4.88	5.45	1.0496
J30MM-40-3	0.00	5.56	1.39	2.1596
J30MM-41-5	7.50	7.50	7.50	0.0000
J30MM-42-2	-6.90	-3.45	-4.37	1.5517
J30MM-42-5	5.71	8.57	6.00	0.8727
J30MM-42-7	-6.06	3.03	-1.41	2.6069
J30MM-43-6	0.00	10.34	6.32	2.7281
J30MM-46-1	0.00	5.71	2.10	1.4887
J30MM-46-3	-15.79	-5.26	-9.65	3.1945
J30MM-46-5	2.94	11.76	7.15	2.5236
J30MM-46-9	-2.27	0.00	-0.08	0.4144
J30MM-47-3	-3.23	6.45	3.01	2.3862
J30MM-47-5	0.00	0.00	0.00	0.0000
J30MM-48-3	-5.41	2.70	-3.06	2.7255
J30MM-54-3	-12.00	0.00	-6.93	2.7660
J30MM-62-2	0.00	0.00	0.00	0.0000
J30MM-62-3	0.00	3.85	2.70	1.7945

4. táblázat. Minőségi mutató (QM) értékek 30 független futtatásra

A táblázatban látható értékek azt mutatják, hogy a J30MM-22-2, J30MM-35-9, J30MM-38-10, J30MM-39-5, J30MM-39-8, J30MM-40-1, J30MM-42-2, és a J30MM-46-3 esetekre vonatkozóan a hibrid algoritmus jobb megoldást talált, mint az egzakt CPLEX által adott optimum. Fontos megjegyezni, hogy a J30MM-22-2, J30MM-35-9, J30MM-38-10, J30MM-39-5, J30MM-39-8 esetekben a szórás értéke 0.0000, ami azt mutatja, hogy mind a 30 független futtatás ugyanazt a megoldást adta. A J30MM-47-5 és J30MM-62-3 esetekben a szórás szintén 0.000, és a 30 független futásnál kapott eredmény megegyezik a CPLEX által adott eredménnyel. Ez a bemutatott hibrid algoritmus robusztus és hatékony tulajdonságát bizonyítja.

Az 5. táblázatban a vizsgált esetek CPU felhasználási idejét gyűjtöttük össze, szintén 30 egymástól független futásokra vonatkozóan.

Példány neve	Átlagos idő sec	Min idő sec	Max idő sec	Szórás
J30MM-14-2	3.1921	2.3910	4.0930	0.4990
J30MM-14-10	1.2883	0.7490	3.5540	0.6468
J30MM-22-2	0.4259	0.2520	0.6060	0.0828
J30MM-22-8	0.4336	0.1860	0.6420	0.0995
J30MM-25-1	0.3976	0.2050	0.5270	0.0772
J30MM-34-5	4.4782	3.4280	5.8310	0.6140
J30MM-35-9	7.1133	5.4790	9.4320	0.9328
J30MM-38-10	3.7818	2.8890	4.5220	0.3704
J30MM-39-3	8.2220	6.3240	11.4020	1.2037
J30MM-39-5	3.0148	2.3430	4.0290	0.3526
J30MM-39-8	1.8616	1.4050	2.6730	0.2755
J30MM-40-1	8.1606	5.8620	10.9770	1.2722
J30MM-40-3	5.6851	4.0190	7.8760	0.8806
J30MM-41-5	5.2309	3.4060	7.8730	0.8387
J30MM-42-2	8.9140	5.7620	15.2710	2.1945
J30MM-42-5	16.8075	8.9740	44.1380	6.8167
J30MM-42-7	3.9662	3.1460	6.4170	0.6649
J30MM-43-6	6.6160	3.3730	10.7850	1.96654
J30MM-46-1	4.9304	3.7170	6.4900	0.6255
J30MM-46-3	5.4374	3.3970	7.6860	1.0986
J30MM-46-5	5.8117	4.0500	8.7030	1.1988
J30MM-46-9	4.9696	3.8870	5.7170	0.3703
J30MM-47-3	6.2602	4.2940	9.7590	1.2650
J30MM-47-5	6.9102	5.0200	11.2050	1.4175
J30MM-48-3	4.4953	3.4510	5.5500	0.5164
J30MM-54-3	9.0400	6.2750	16.8730	2.2133
J30MM-62-2	0.4501	0.2940	0.6100	0.0740
J30MM-62-3	0.4831	0.3560	0.6870	0.0676
Átlag, szélsőérték	4.9421	0.1860	44.1380	1.2922

5. táblázat. Felhasznált CPU idő 30 egymástól független futtatásra vonatkozóan

Öt esetben (J30MM-22-2, J30MM-22-8, J30MM-25-1, J30MM-62-2 és J30MM-62-3) a maximális futási idő (CPU idő) 1 másodpercnél kisebb volt. Hat esetben a maximális futási idő 10 és 17 másodperc közé esett. A J30MM-42-5 eset maximális CPU idő felhasználása jóval magasabb volt, mint a többi eseté. A már említett J30MM-42-5 eset kivételével, az átlagos futási idők 10 másodpercnél kisebbek voltak. Az átlagos futási idő az összes példány 30 független futtatására vonatkozóan 4.9421 másodperc volt.

Az eredmények alapján állítható, hogy a bemutatott algoritmus a J30MM halmazon versenyképes a jelenleg legjobb J30MM-re alkalmazott populáció alapú heurisztikával, 5000 iterációval (egy szimulált hűtés algoritmus, amelyet Bouleimen és Lecocq [4] fejlesztett ki), amely biztató előzetes eredmény. Ebben az esetben az átlagos eltérés az optimális megoldástól 2.61%. A legjobb megoldást a J30MM halmazra Jarboui et al. [12] publikálták (2.35%), de a megoldási időt vagy egyéb más minőségi paramétert nem közölték.

## 5 Összefoglalás

Ebben a tanulmányban bemutatunk egy javított harmóniakereső metaheurisztikát az MRCPSP-re. A bemutatott algoritmusban az eredeti „Sounds

of Silence” harmóniakereső algoritmust kombináltuk egy új, hatékony „head-tail” lokális kereső eljárással, amely a vegyes egészértékű lineáris (MILP) formulán alapul és az eredetileg teljesen véletlenszerű kezdő repertoárt (véletlenszerű megvalósítási módok és tevékenység kezdő időpontok), helyettesítettük egy elő-optimalizált dallamhalmazzal, amelyet egy relaxált megoldásból állítottunk elő véletlen perturbációval. Az improvizációs lépések során a MILP és LP formulák megoldásával az egyes tevékenységek megvalósítási módjára vonatkozó listát és egy, a tevékenységek sorrendjére vonatkozó listát kapunk. A „karmester” ezekhez a megvalósítási módokhoz és tevékenységekhez próbál megfelelő ütemezést találni. A további lépések során mindig azt az ütemezést cseréljük, amelynél van jobb, rövidebb ütemezés. Ezután az algoritmus a head-tail eljárással megpróbálja tovább csökkenteni a projekt teljes időszükségletét, a kezdő és befejező tevékenységekhez rendelt erőforrások újraelosztásával. Az optimalizálás eredménye egy optimális, legrövidebb erőforrás-korlátos több megvalósítási módú projektütemezés. A számítási eredmények azt mutatták, hogy a „Sounds of Silence” algoritmus javított több megvalósítási módú verziója egy gyors és magas minőségű algoritmus.

## Irodalom

1. Alcaraz, J., C. Maroto, R. Ruiz, "Solving the multi-mode resource constrained project scheduling problem with genetic algorithms", *Journal of the Operational Research Society*, 54, 614–626, 2003.
2. Boctor, F. F., "A new and efficient heuristic for scheduling projects with resource restrictions and multiple execution modes", *European Journal of Operational Research*, 90, 349–361, 1996.
3. Boctor, F. F., "Heuristics for scheduling projects with resource restrictions and several resource-duration modes", *International Journal Production Research*, 31, 11, 2547–2558, 1993.
4. Bouleimen, K., H. Lecocq, "A new efficient simulated annealing algorithm for the resource-constrained project scheduling problem and its multiple mode version", *European Journal of Operational Research*, 149, 268–281, 2003
5. Csébfalvi, G., A. Csébfalvi, "A new metaheuristic for the multidimensional 0-1 knapsack problem", in *Computational Management Science Conference 2008*, Imperial College, London, UK, 38–39, 2008.
6. Csébfalvi, G., A. Csébfalvi, E. Szendrői, "A harmony search metaheuristic for the resource-constrained project scheduling problem and its multi-mode version", in *Project Management and Scheduling 2008*, F. S. Serifoglu, Ü. Bilge (Editors), Istanbul, Turkey, 56–59, 2008.
7. Csébfalvi, G., Sounds of Silence: a harmony search metaheuristic for the resource-constrained project scheduling problem. *European Journal of Operational Research*, (under reviewing process), 2007.
8. Demeulemeester, E., B. DeReyck, W. Herroelen, "The discrete time/resource trade-off problem in project networks: a branch and bound approach", *IEE Transactions*, 32, 1059–1069, 2000.
9. Drexler, A., J. Grünwald, "Nonpreemptive Multi-mode resource constrained project scheduling", *IEE Transaction*, 25, 5, 74–81, 1993.

10. Hartmann, S., "Project scheduling with multiple modes: a genetic algorithm", *Annals of Operation Research*, 102, 111–135, 2001.
11. Hartmann, S., A. Drexl, "Project scheduling with multiple modes: a comparison of exact algorithms", *Networks*, 32, 283–297, 1998.
12. Jarboui, B., N. Damak, P. Siarry, A. Rebai, "A combinatorial particle swarm optimization for solving multi-mode resource-constrained project scheduling problems", *Applied Mathematics and Computation*, 195, 299–308, 2008.
13. Józefowska, J., M. Mika, R. Rozycki, G. Waligora, J. Weglarz, "Simulated annealing for multi-mode resource-constrained project scheduling", *Annals of Operations Research*, 102, 137–155, 2001.
14. Kolisch, R., A. Sprecher, "PSPLIB – a project scheduling library", *European Journal of Operational Research*, 96, 205–216, 1996.
15. Kolish, R., A. Drexl, "Local search for nonpreemptive multi-mode resource-constrained project scheduling", *IEE Transactions*, 29, 987–99, 1997.
16. Lee, K. S., Z. W. Geem, "A new meta-heuristic algorithm for continuous engineering optimization: harmony search theory and practice", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194, 3902–3933, 2005.
17. Lova, A., P. Tormos, M. Cervantes, F. Barber, "An efficient hybrid genetic algorithm for scheduling projects with resource-constrained and multiple execution modes", *International Journal of Production Economics*, 117, 302–316, 2009.
18. Özdamar, L., "A genetic algorithm approach to a general category project scheduling problem", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, Part C: 29, 44–59, 1999.
19. Özdamar, L., G. Ulusoy, "A local constrained based analysis approach to project scheduling under general resource constraints", *European Journal of Operational Research*, 79, 287–298, 1994.
20. Patterson, J. H., F. B. Talbot, R. Slowinski, J. Weglarz, "Computational experience with a backtracking algorithm for solving a general class of precedence and resource-constrained scheduling problems", *European Journal of Operational Research*, 49, 68–79, 1990.
21. Sprecher, A., A. Drexl, "Solving multi-mode resource-constrained project scheduling problems by a simple, general and powerful sequencing algorithm", *European Journal of Operational Research*, 107, 431–450, 1998.
22. Sprecher, A., S. Hartmann, A. Drexl, "An exact algorithm for the project scheduling with multiple modes", *OR Spektrum*, 19, 195–203, 1997
23. Szendrői, E., "A hybrid method for the multi-mode resource-constrained project scheduling problem", in *Proceedings of the First International Conference on Soft Computing Technology in Civil, Structural and Environmental Engineering*, B. H. V. Topping, Y. Tsompanakis, (Editors), Civil-Comp Press, Stirlingshire, United Kingdom, paper 3, 2009. doi:10.4203/ccp.92.3
24. Talbot, F. B., "Resource-constrained project scheduling with time-resource tradeoffs: the nonpreemptive case", *Management Science*, 28, 10, 1197–1210, 1982
25. Tormos, P., A. Lova, "A competitive heuristic solution technique for resource-constrained project scheduling", *Annals of Operations Research*, 102, 65–81, 2001.
26. Zhang, H., C. Tam, H. Li, "Multi-mode project scheduling based on particle swarm optimization", *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 21, 93–103, 2006.

A HYBRID OPTIMIZATION ALGORITHM FOR SOLVING MULTI-MODE  
RESOURCE-CONSTRAINED PROJECT SCHEDULING PROBLEMS

This paper presents a hybrid algorithm for the multi-mode resource-constrained project scheduling problem (MRCPS). In the presented approach a harmony search algorithm is combined with a new and effective „head-tail” local search procedure based on a mixed integer linear programming (MILP) formulation. In order to illustrate the essence and viability of the proposed new approach, we present computational results for the J30MM set from PSPLIB. To generate the „head-tail” improvements a state-of-the-art callable MILP solver (CPLEX) was used.



# TÁRSASÁGI HÍREK

## Beszámoló a XXXIX. Magyar Operációkutatási Konferenciáról

A Bolyai János Matematikai Társulat (BJMT) a Magyar Operációkutatási Társasággal (MOT) és a Gazdaságmodellezési Társasággal (GMT), mint társszervezőkkel együttműködve 2011. szeptember 28-30-án rendezte meg a XXIX. Magyar Operációkutatási Konferenciát a balatonöszödi üdülőszállóban. A szervezőbizottság elnöke Jordán Tibor (ELTE, BJMT), titkára Mádi-Nagy Gergely (ELTE, MOT), tagjai pedig Ligeti Csák (GMT) és Recski András (BME, BJMT) voltak.

A konferencia programbizottsága az alábbiak szerint állt össze:

A programbizottság elnöke: Szántai Tamás (BME, BJMT, MOT),  
 titkára: Illés Tibor (BME, BJMT, MOT),  
 tagjai: Frank András (ELTE, BJMT),  
 Jordán Tibor (ELTE, BJMT),  
 Csendes Tibor (SZTE, MOT),  
 Bessenyei István (PTE, GMT),  
 Tallos Péter (BCE, GMT).

Plenáris előadásában Zalai Ernő —Bródy után szabadon— újra szemügyre vette a rokon többszektoros modellek közötti hasonlóságokat és eltéréseket, továbbá áttekintette az e modellek terén végzett kutatások fontosabb eredményeit rámutatva a többszektoros egyensúlyi modellek egy érdekes kérdésére.

Recski András plenáris előadásában a Hajós György és Gallai Tibor intervallumgráfokkal kapcsolatos eredményeire épülő hatékony algoritmusok több alkalmazási lehetőségét mutatta be, részletesen tárgyalva a VLSI chipek tervezése során felmerülő problémákat.

A harmadik plenáris előadást Király Tamás tartotta a GMPLS vezérelt optikai hálózatokban felmerülő hálózattervezési feladatokról. Ennek során például olyan ládapakolási feladatokat kellett megoldani, ahol csak a szabványok által megengedett méretek szerepelhettek.

A Gazdaságmodellezési Társaság Elnöksége 2000. február 21-i ülésén határozta el a Krekó Béla-díj alapítását. A díjat a gazdaságmodellezés területén folytatott eredményes kutatómunkáért, illetve a Társaság szakmai tevékenységének tartós, aktív segítségével lehet elnyerni. A díjat évente egy alkalommal, a Gazdaságmodellezési Társaság mindenkori Elnöksége mint kuratórium ítéli oda. Az egyhangú döntés értelmében az ez évi díjazott Kovács Erzsébet, aki a biztosítási rendszerek, különösen a nyugdíjbiztosítások területén kifejtett kiemelkedő tudományos munkássága és a Gazdaságmodellezési Társaság

érdekében végzett tevékenysége alapján (beleértve aktív szerkesztőbizottsági és társszerkesztői munkáját a Szigma folyóiratnál, és nem utolsósorban a lelkes és hatékony utódnevelést) vehette át a rangos elismerést. Ezzel kapcsolatban érdemes felidézni az eddig kitüntetettek névsorát: Augusztinovics Mária (2000) Martos Béla (2000) Szép Jenő (2000) Bod Péter (2001) Forgó Ferenc (2001) Hunyadi László (2002) Meszéna György (2003) Bródy András (2005) Gether Istvánné (2006) Komlósi Sándor (2007) Zalai Ernő (2008) Mihályffy László (2009) Vörös József (2010) Kovács Erzsébet (2011).

A legjobb előadások megjelenésére — a szokásos lektorálási eljárást követően — a Szigma, az Alkalmazott Matematikai Lapok és a Central European Journal of Operations Research folyóiratokban lehet számítani.

Bessenyei István

# CONTENTS

FARAGÓ, MIKLÓS: Tabular Data Protection and Graph Optimization .....	99
SEBESTYÉN, TAMÁS: The Role for the Structure of Knowledge Networks in a Simple Model of General Equilibrium .....	121
HERCZEG, BÁLINT: The Effect of Exchange Rate on Prices Using the Hungarian CSO's Store-level Price Quotas Database .....	155
SZENDRŐI, ETELKA: A Hybrid Optimization Algorithm for Solving Multi-mode Resource-constrained Project Scheduling Problems .....	177
SCIENTIFIC LIFE	
The 39th Conference on Operation Research: A Report (Bessenyei, István) .....	195

# TARTALOM

FARAGÓ MIKLÓS: Táblázatok adatvédelme és gráf optimalizáció .....	99
SEBESTYÉN TAMÁS: Tudáshálózatok struktúrájának szerepe egy egyszerű általános egyensúlyi modellben .....	121
HERCZEG BÁLINT: Árfolyam-begyűrés mértéke a KSH bolt-szintű áradat- bázisa alapján .....	155
SZENDRŐI ETELKA: Egy hibrid eljárás a több megvalósítási módú erőforrás- korlátos projektütemezési probléma megoldására .....	177

## TÁRSASÁGI HÍREK

Beszámoló a XXXIX. Magyar Operációkutatási Konferenciáról (Bessenyei István) ..	195
---	-----

# **SZIGMA**

## **Matematikai-közgazdasági folyóirat**

**A Gazdaságmodellezési Társaság lapja**

Főszerkesztő:

**BESSENYEI ISTVÁN**

PTE Közgazdaságtudományi Kar, H-7622 Pécs, Rákóczi út 80.

Tel.: 72/501-599, Fax: 72/501-553

e-mail: [essenyei@ktk.pte.hu](mailto:essenyei@ktk.pte.hu)

Társszerkesztők:

**FÜLÖP JÁNOS**

e-mail: [fulop@oplab.sztaki.hu](mailto:fulop@oplab.sztaki.hu)

**HUNYADI LÁSZLÓ**

e-mail: [laszlo.hunyadi@office.ksh.hu](mailto:laszlo.hunyadi@office.ksh.hu)

**KOMLÓSI SÁNDOR**

e-mail: [komlosi@ktk.pte.hu](mailto:komlosi@ktk.pte.hu)

**KOVÁCS ERZSÉBET**

e-mail: [erzsebet.kovacs@uni-corvinus.hu](mailto:erzsebet.kovacs@uni-corvinus.hu)

**VÍZVÁRI BÉLA**

e-mail: [vizvari@cs.elte.hu](mailto:vizvari@cs.elte.hu)

Szerkesztőbizottság:

FORGÓ FERENC, GETHER ISTVÁNNÉ, LIGETI CSÁK, MELLÁR TAMÁS,  
MESZÉNA GYÖRGY, TAKÁCS TIBOR, TEMESI JÓZSEF, VÖRÖS JÓZSEF

Terjeszti a Gazdaságmodellezési Társaság. A kiadvány megjelenését az MTA  
Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága támogatta.

ISSN 0039-8128

[www.sigma.ktk.pte.hu](http://www.sigma.ktk.pte.hu)