TUDÁSHÁLÓZATOK STRUKTÚRÁJÁNAK SZEREPE EGY EGYSZERŰ ÁLTALÁNOS EGYENSÚLYI MODELLBEN[1]

SEBESTYÉN TAMÁS
PTE Közgazdaságtudományi Kar

A hálózatok szerepe egyre kiemeltebb figyelmet kap az innovációval foglalkozó irodalomban, a hálózatok strukturális felépítésének kérdései pedig számos területen keltették fel a kutatók érdeklődését. A dolgozatban azt vizsgáljuk, hogy a vállalatok közötti tudáshálózatok struktúrája milyen hatással van a gazdaság teljesítményére. Egy egyszerű általános egyensúlyi modellbe építjük be a hálózati kapcsolatokon keresztül végbemenő tudás-transzfer hatását és szimulációs technikákkal vizsgáljuk a modell működését. A kapott eredmények azt mutatják, hogy a hálózati struktúra lényeges hatással van a gazdaság teljesítményére: magasabb szintű skálafüggetlenség magasabb kibocsátáshoz vezet. A dolgozat eredményei rávilágítanak a sokféleség speciális dimenzióinak szerepére a gazdasági teljesítményben: ebben az esetben is a skálafüggetlenség pozitív hatása mutatható ki.

Kulcsszavak: Hálózati struktúra, tudáshálózatok, általános egyensúly, skálafüggetlenség

JEL: C68, C63, C15, E13, O33

1 Bevezetés

Az utóbbi időben az innovációval foglalkozó szakirodalom kiemelt figyelemmel fordult a hálózati struktúrák tanulmányozása felé. Ez az érdeklődés részben onnan származik, hogy a személyes kapcsolatok szerepe a tudástranszferben nyilvánvalóvá vált, másrészt viszont a hálózat-elemzési módszertan az elméleti fizika és a szociológia irányából ösztönözte az innovációval foglalkozó szakembereket az ilyen irányú kutatások kiterjesztésére.

Először a szociológiai vizsgálatok mutattak rá, hogy a társadalmi hálózatok nem írhatóak le teljes mértékben a véletlen hálózatok modellje segítségével.[2] Travers és Milgram (1969) a Harvard egyetem ismeretségi hálózatát vizsgálva jutott arra a felismerésre, hogy az átlagos elérési út még egy ilyen kiterjedt kapcsolati hálózatban is meglepően rövid, mindössze 5,5 lépés. Ez az érték lényegesen kisebb, mint a hasonló méretű véletlen hálózatban mérhető értékek. Barabási (2002) megemlíti, hogy a relatíve rövid átlagos távolságok

[1] Beérkezett: 2010. április 23. E-mail: sebestyent@ktk.pte.hu.

[2] Véletlen hálózaton olyan hálózatot értünk, amelyben a csomópontok közötti kapcsolatok létezésének valószínűsége egyenletes a teljes hálózaton. A véletlen hálózatok részletesebb leírását a dolgozat második része adja meg.

gondolatát korábban Karinthy Frigyes vettette fel egy írásában, ahol meglepően pontosan „előrejelezve" a későbbi tudományos eredményeket, 5 lépéses távolságról ír (Karinthy, 1929). Granovetter (1973, 1983) tanulmányai a szorosan integrált társadalmi csoportokat összekötő „gyenge" kapcsolatok jelentőségét emelik ki, amelyek kiemelten fontosak a rövid elérési utak kialakulásában. A rövid elérési utakkal, szorosan kapcsolt lokális csoportokkal és ezeket összekötő gyenge kapcsolatokkal jellemezhető hálózatokat kisvilágoknak nevezi a szakirodalom (Csermely, 2005).[3]

A véletlen hálózatok jellemezhetőek egy reprezentatív csomóponttal, vagyis egy átlagos kapcsolati számmal. Ez azt jelenti, hogy az átlagostól lényegesen kisebb vagy lényegesen nagyobb kapcsolati számok előfordulásának valószínűsége elhanyagolható. Barabási (2002) azonban azt emeli ki, hogy a valós hálózatok nem jellemezhetőek reprezentatív szereplővel: néhány csomópont rendkívül nagy számú kapcsolattal rendelkezik, míg a csomópontok többsége kevés kapcsolattal bír. Az átlagos fokszám ugyan megadható, azonban a hálózat struktúráját nagy részben a nagyszámú kapcsolattal rendelkező, extremális elemek határozzák meg: egy-egy ilyen csomópont kiesése adott esetben a hálózat szétesséséhez vezethet. Ezt a speciális struktúrát skálafüggetlen hálózatnak nevezik, ami a hálózat fokszámeloszlásának speciális tulajdonságára utal.[4] Barabási és munkatársai azt a fontos felismerést mutatták be, hogy a valóságban előforduló hálózatok nagy része ilyen skálafüggetlen tulajdonságot mutat (közlekedési hálózatok, társadalmi kapcsolathálók, publikációs hálózatok, kristályszerkezetek, fehérjehálózatok, stb.) (Barabási és Albert, 1999; Barabási és szerzőtársai, 2000; Barabási, 2002). Barabási és Albert (1999) egy egyszerű modellt is felvázolnak, amely a skálafüggetlenség kialakulását magyarázza. A későbbiekben ezt a modellt is részletesebben ismertetjük majd.

A hálózatok megjelenése az innováció irodalmában tulajdonképpen egy logikus gondolatmenet eredménye. A gazdasági növekedéssel foglalkozó szakirodalom hamar felismerte, hogy a hosszú távú növekedés kulcsa a technológiai fejlődés, vagy más szemszögből nézve a tudás felhalmozása (csak példaként: Solow, 1956; Romer, 1990; Grosman és Helpman, 1991; Aghion és Howitt, 1992). Ez a felismerés az innováció, vagyis az új tudás keletkezésének és a diffúzió, azaz a tudás gazdaságban történő elterjedésének kérdéseit veti fel. A tudás terjedésével foglalkozó empirikus szakirodalom kimutatta, hogy számottevő lokális hatások érvényesülnek a tudás terjedésében: a más vállalatoktól, vagy a gazdaság más szereplőitől származó tudás nagyobb mértékben hat a térben közelebb található vállalatokra vagy más szereplőkre, mint a térben távolabb elhelyezkedőkre (Jaffe, 1989; Feldman, 1994; Anselin és szerzőtársai, 1997). Jaffe és Trajtenberg (1996) azonban azt is megmutatják, hogy a térbeli hatások idővel gyengülnek, Audretsch és Feldman (1996) pedig arra hívják fel a figyelmet, hogy a tudás terjedésének lokalizáltsága markánsabb azokban az ágazatokban, ahol a tudás fontos kompetitív faktor.

[3]A kisvilágok egy formális modelljét adja Watts és Strogatz (1998) tanulmánya.

[4]A skálafüggetlenség és a fokszámeloszlás kapcsolata bemutatásra kerül a dolgozat második részében. A témáról részletesen lásd: Chung és Lu (2006).

Ezek az empirikus vizsgálatok részben hozzájárultak ahhoz is, hogy a közgazdasági mainstream irodalomba visszatérjen a térbeliség kérdése. Ez az irodalom Marshall (1890) nyomán lokális agglomerációs externáliákról beszél, amelyeknek egyik lényeges vetülete a tudás térben korlátos terjedése (Johansson és Forslund, 2008). Az egyes interpretációk ugyanakkor sokszor csak odáig mennek el, hogy a helyi agglomerációt egy olyan közegnek fogják fel, ahol a tudás szabadon áramlik, és a kérdéses határvonal e tudáshoz való hozzáférés tekintetében valamilyen térbeli korlátot jelent.[5] Breschi és Lissoni (2003) azonban rámutatnak arra, hogy a személyes kapcsolatok jelentősége a tudás-áramlásban és ezáltal a helyi agglomerációs hatásokban árnyaltabb megközelítést kíván. Felhívják a figyelmet arra, hogy a térbeli közelséget inkább a társadalmi közelség (social proximity) közelítő változójaként lehet felfogni. A térbeli közelség annyiban fontos, amennyiben hozzájárul a társadalmi kapcsolatok és az azokban foglalt bizalom kialakulásához. Mivel a térbeli közelség a kapcsolatok és a bizalom kialakulását nagy mértékben elősegíti, e kapcsolatok lokálisan sűrűek lesznek és az innovációs (vagy tágabb értelemben gazdasági) aktivitás térbeli koncentrációja olyan színben tűnik fel, mint a tudás-spilloverekhez való hozzáférés fontos médiuma. Ez pedig elfedi azt a valós helyzetet, hogy a spilloverek személyes kapcsolatokon és társadalmi hálózatokon keresztül fejtik ki hatásukat, így a tudástranszfer csak annyiban lokális, amennyiben az alapjául szolgáló hálózatok is azok. Ezen a gondolati vonalon egyes tanulmányok megmutatják, hogy a tudás-spilloverek lokális hatásai csupán a munkaerő régiók közötti viszonylagos immobilitásán alapulnak (Zucker és szerzőtársai, 1994; Almeida és Kogut 1999; Balconi és szerzőtársai, 2004).

A hálózati módszertannal foglalkozó gondolati irányzat és az innováció hálózati megközelítésével kapcsolatos szakirodalom ezen a ponton összefonódnak. A technológiai diffúziót, azaz a tudás terjedését leíró modellekben először Abrahamson és Rosenkopf (1997) fogalmazza meg explicit módon a hálózatok szerepét: modelljükben arra keresik a választ, hogy milyen strukturális jellemzők állítanak akadályokat az innovációk teljes elterjedése elé. Cowan és Jonard (2004) valamint Cowan (2005) olyan statikus hálózati modelleket mutatnak be, amelyekben a tudás terjedése tudás-csere vagy tudásemisszió formájában valósul meg. Eredményeik azt mutatják, hogy a korábban bemutatott kis világ struktúrák a leghatékonyabbak a tudás terjedése szempontjából.

A hálózati modellek egy másik köre a hálózati kapcsolatok dinamikáját is vizsgálja: melyek azok a struktúrák, amelyek stabilan fennmaradnak, ha a hálózat tagjai önállóan alakíthatják kapcsolataikat. Jackson és Wolinsky (1996) gráfelméleti, Bala és Goyal (2000) játékelméleti alapokon vizsgálja a kapcsolatok kialakulásának dinamikáját. Eredményeik szerint a stabil (Nash-egyensúlyi) struktúrák a kapcsolatok fenntartásának relatív hasznától és költségétől függően más-más formát öltenek. Cowan és szerzőtársai (2006) a struktúra mellett a tudás-bázisok viszonyának kérdéseit tárgyalja: modelljük

[5]Talán Kaldor (1966) használta elsőként a „mennyből hulló manna” hasonlatot a tudás terjedésének ilyenfajta felfogása kapcsán.

két vezérlő ereje egyrészt a kapcsolatok bizalom-építő szerepe, amely a közös innovációs tevékenység (várható) hatékonyságát növeli az együttműködés eredményessége kockázatának csökkentésével, másrészt pedig a kapcsolatok azon hatása, hogy az együttműködés a tudásbázisok közelítése révén a közös innováció (várható) hatékonyságát csökkenti. Sebestyén (2010) hasonló, stratégiai kapcsolat-kialakításon alapuló modellt mutat be, amellyel a sokféleség szerepét vizsgálja az innovációs folyamatban. Carayol és Roux (2006) egy olyan modellt mutatnak be, amely a hálózat dinamikus formálódása mellett térbeli vonásokat is tartalmaz. Megmutatják, hogy a tudás transzferálhatóságának nagy közbülső tartományaiban kisvilágok alakulnak ki, rövid elérési utakkal és magas klaszterezettséggel. Így sikerül gazdasági, költség-haszon megfontolásokon alapuló magyarázatot adniuk arra a jelenségre, hogy a hálózati kapcsolatok jellemzően lokálisan alakulnak és így a tudásáramlás is lokális.

Ez a dolgozat az eddig leírt gondolati ív lezárása irányába kísérel meg egy lépést tenni. A gazdasági növekedés kérdései elvezetnek az innováció szerepéhez, az innováció kapcsán a lokalitás és a hálózatok szerepe merül fel, a hálózatok szempontjából pedig a hálózati struktúra válik érdekes tereppé. A hálózatok struktúrája jelentős hatással lehet a tudás-transzfer hatékonyságára, mértékére. A korábban bevezetett kisvilág fogalom segítségével ez könnyen érzékeltethető: minél több átkötő kapcsolatot találunk a lokális csoportok között, annál gyorsabb lesz az innováció terjedése. A skálafüggetlen struktúrák esetén is hasonló hipotézissel élhetünk. A skálafüggetlen kapcsolati struktúra a néhány centrális szereplő révén a hálózat relatíve elszigeteltebb pontjain keletkező tudást is gyorsan képes szétteríteni a rendszer egészében.

A hálózati modellek a struktúra és a hálózati teljesítmény közötti kapcsolatot elemzik, ezek azonban parciális modellek: jellemzően a hálózat elemei (csomópontjai) rendelkeznek valamilyen információval (tudással), amelyet aztán a hálózati struktúra „szétoszt” a hálózat tagjai között. Ugyanakkor nem merül fel annak a kérdése, hogy a csomópontok gazdasági szereplők, amelyek más kontextusban gazdasági kapcsolatban állnak egymással. A dolgozat célja és egyben újdonsága egy olyan modell bemutatása és elemzése, amely a tudáshálózatok strukturális kérdéseit egy általános egyensúlyi modellbe foglalja. Ezzel tulajdonképpen a hálózatok parciális modellezése felől egy, eddig hiányzó lépést tesz a gazdasági növekedést leíró egyensúlyi közgazdasági modellek irányába, egyúttal az itt leírt gondolati ív lezárása felé. Ugyanakkor a dolgozat további újdonsága az is, hogy a hálózati struktúra hatását mutatja be az adott általános egyensúlyi keretben.

A dolgozat felépítése a következő. A 2. szakaszban egy rövid kitérőben a hálózatok reprezentációja és a hálózatelmélettel kapcsolatos (a dolgozatban is előforduló) legfontosabb fogalmak ismertetésére kerül sor. Ezt követően a 3. szakasz adja meg a vizsgált általános egyensúlyi modell leírását, majd a 4. szakasz mutatja be a dolgozatban alkalmazott hálózati modellt. Az 5. szakasz kitér a numerikus szimulációk során alkalmazott paraméter-értékek meghatározására, majd a 6. szakasz elemzi a modell szimulációjának eredményeit. Végül a dolgozat legfontosabb megállapításait összegezzük.

2 Hálózatok reprezentációja

A modell központi eleme a vállalatok közötti hálózati kapcsolatok struktúrája. A hálózati kapcsolatokat a modellben az ún. kapcsolati mátrix írja le. Egy N csomóponttal rendelkező (N elemű) gráfot egy $N \times N$-es kapcsolati mátrix definiál, amely mátrix elemei a sor és az oszlop indexének megfelelő csomópontok közötti kapcsolatot mutatják. A mátrix általános formája:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} . \tag{1}$$

A mátrix eleme nulla, ha a két csomópont között nincsen él és nullától különböző, ha van él. A kapcsolati mátrix lehet bináris, ebben az esetben csak a kapcsolat létezését vizsgáljuk, ha pedig az élek súlyozottak, akkor a kapcsolatok intenzitását is figyelembe vesszük. A kapcsolati mátrix szimmetrikus, ha a gráf irányítatlan, irányított gráf esetén azonban nem feltétlenül szimmetrikus. A dolgozatban használt modellben a tudáshálózatot irányítatlan, bináris kapcsolati mátrix írja le, azaz a kapcsolatok intenzitásának és a tudásáramlás irányának vizsgálatától eltekintünk. A kapcsolati mátrix általános eleme tehát: $a_{ij} \in \{0; 1\}$, továbbá igaz, hogy $a_{ij} = a_{ji}$.

A fenti egyszerűsítések természetesen megszorító jellegűek, ugyanakkor a tárgyalás kezelhető keretek között tartása érdekében szükségesek. A kapcsolaterősség explicit figyelembe vételétől eltekintünk, mivel ez addicionális paraméter-halmazok figyelembevételét kívánná, ezáltal a modell elemzését megnehezítené. Az itt vizsgált strukturális formák ugyanakkor nem feltétlenül igénylik a súlyozott kapcsolatok figyelembe vételét. Ennek ellenére a modell tartalmazza a kapcsolaterősség explicit figyelembevételének lehetőségét, a később bevezetendő spillover paraméteren keresztül. A kapcsolatok irányítottságának beépítését tekintve egy ilyen változtatás érdemben nem módosítja a modell működését.

A továbbiakban alkalmazott fontos hálózatelméleti fogalom a fokszámeloszlás és a skálafüggetlenség. Egy hálózatban egy csomópont fokszáma alatt az adott csomópont kapcsolatainak számát értjük. Jelen esetben a fokszám egyszerűen:

$$s_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} , \quad i = 1, \ldots, N . \tag{2}$$

Ismert fokszámok esetén felírható e fokszámok eloszlása, amely az egyes fokszám-értékek gyakoriságát mutatja meg. A fokszámeloszlás és a hálózat egészének egy fontos mutatója az átlagos fokszám, ami az egyedi fokszámértékek egyszerű átlaga.

A hálózatelmélet (gráfelmélet) eleinte úgy tekintett a valós hálózatokra, mint véletlen hálózatokra (Barabási, 2002). Ez azt jelenti, hogy a hálózat csomópontjai közötti kapcsolatok minden rendszer nélkül, véletlenszerűen jönnek létre. Első ránézésre ez a megállapítás meg is állja a helyét, hiszen a valós hálózatok kapcsolatainak kialakulásában minden bizonnyal nagymértékű véletlenszerűség van. Ezen a vonalon Erdős és Rényi (1959) munkáját követően a véletlen hálózatoknak széles irodalma alakult ki (Bollobás, 2001).

Véletlen hálózatok felépítésére egy rendkívül egyszerű algoritmus adható. Haladjunk végig valamennyi lehetséges kapcsolaton (azaz minden (i,j) csomópontpáron, vagy másképpen a kapcsolati mátrix minden a_{ij} elemén) és egy előre definiált q valószínűséggel hozzunk létre kapcsolatot a két csomópont között (állítsuk a mátrixelem értékét 0-ról 1-re). Az így létrejött hálózatoknak számos érdekes tulajdonsága van, jelen esetben azonban az a leglényegesebb, hogy a kialakuló hálózatban a fokszámok Poisson-eloszlást követnek, amely jól jellemezhető egy átlagos fokszámmal,[6] ebből fakadóan pedig nem alkalmas a skálafüggetlen struktúrák leírására.

Ahogyan a bevezetőben már kiemeltük, Barabási (2002) éppen arra hívja fel a figyelmet, hogy a valós hálózatok a legtöbb esetben tipikusan skálafüggetlenek, ahol néhány súlyponti szereplőnek nagyon sok kapcsolata van, míg a többségnek kevesebb. Ebben az esetben a fokszám-eloszlás nem Poisson-eloszlás. Miként Barabási és Albert (1999) kimutatják, a skálafüggetlen hálózatok esetén a fokszámeloszlás tipikusan az alábbi hatványfüggvénnyel írható le:

$$P(s) = \phi s^{-\delta} , \tag{3}$$

ahol $P(s)$ az s fokszámérték előfordulásának valószínűsége, ϕ és δ pedig pozitív konstansok. Csermely (2005) összefoglalása alapján a δ kitevő értékei a legkülönfélébb hálózatokban tipikusan 1,5 és 3 közötti értéket vesznek fel, ezen belül a különféle társadalmi hálózatokra számolt értékek jellemzően az 1,5–2,5 közötti tartományban találhatóak. A δ kitevő értéke alkalmas mércéje lehet a skálafüggetlenségnek: a fokszámeloszlást leíró függvény görbületeként ugyanis azt tükrözi, hogy milyen súlya van a köztes, átlagos fokszám értékeknek. Minél nagyobb a görbület, annál kisebb a köztes értékek előfordulásának valószínűsége: a hálózat néhány centrális, nagyon sok kapcsolattal rendelkező szereplőre és nagyon sok periferikus, alacsony fokszámú szereplőre tagozódik. Minél kisebb a görbület, annál többen lesznek a köztes fokszámértékkel rendelkező csomópontok. A δ paraméter értéke ismert hálózatra meghatározható a fokszámok gyakorisági eloszlására illesztett függvény segítségével.[7]

Amennyiben a hálózat véletlenszerű, úgy a fenti hatványfüggvény a fokszámeloszlást nem írja le megfelelően: az alacsonyabb fokszámértékek előfordulási valószínűsége kisebb, a nagyon nagy értékek előfordulásának valószínűsége pedig elhanyagolható. A (3) függvény természetesen ekkor is illeszthető a fokszámeloszlásra, csak az illesztés hibája növekszik meg. Ugyanakkor várható, hogy véletlenszerű hálózat esetén δ értéke nullához tart, ahogy a fokszámeloszlás elveszti a hatványfüggvényre jellemző aszimmetriáját és a Poisson eloszlásra jellemző szimmetrikusabb formát ölti.

[6] Irányítatlan hálózat esetén a hálózat méretének növekedésével az átlagos fokszám $q(N-1)$-hez tart.

[7] A (3) egyenlet logaritmált formában standard regressziós módszerekkel becsülhető.

Barabási és Albert (1999) egy algoritmust javasolnak arra vonatkozóan, hogy miként jönnek létre (állíthatók elő) skálafüggetlen hálózatok. Ez az algoritmus a dolgozat 4. szakaszában kerül bemutatásra.

3 A modell leírása

Ebben a szakaszban a hálózati kapcsolatokat integráló általános egyensúlyi modell bemutatására kerül sor. A hálózati kapcsolatok egyelőre csak az (1) összefüggésben definiált **A** kapcsolati mátrix formájában jelennek meg, a kapcsolatok kialakulását leíró hálózati modellt a 4. szakaszban tárgyaljuk. Először a modell kínálati, majd keresleti oldala kerül bemutatásra, végül az egyensúlyi helyzet meghatározásával zárul a szakasz.

3.1 A modell kínálati oldala

A hálózatok explicit figyelembe vétele szükségessé teszi, hogy a modellt az egyes vállalatok szintjén értelmezzük. Ennek megfelelően a termelési függvényre az alábbi specifikáció adható:

$$y_i = K_i L_i^{\alpha} , \quad i = 1, \ldots, N , \tag{4}$$

ahol y_i az i-edik vállalat által előállított output, L_i az i-edik vállalat által felhasznált munkamennyiség. Az összefüggésben szereplő K_i tényező kiemelten fontos szerepet játszik: ez jelöli a vállalat számára hozzáférhető, a termelésben produktívan felhasználható tudást. Ebből a szempontból K_i hasonlítható a ,,hagyományos" termelési függvények technológiai együtthatójához, vagy más szavakkal a teljes tényező-termelékenységhez. Mivel a dolgozat a tudásáramlásra és ennek hálózati struktúrájára fókuszál, a jól tárgyalhatóság érdekében a tőketényező explicit modellezésétől eltekintünk.[8] A (4) termelési függvény rugalmassági paraméterének (α) értelmezése a szokásos.

A hálózat beépítése a modellbe a termelési függvény K_i változóján keresztül valósul meg, ehhez azonban szükség van a hálózatok valamilyen matematikai interpretációjára. Ezeket a kapcsolatokat az előző szakaszban bemutatott módszerrel modellezzük.

A tudáshálózatok explicit figyelembe vételéhez értelemszerűen szükséges a tudás matematikai reprezentációja is: a gazdaságmodellezési irodalomban elterjedt módon a tudást egy valós szám reprezentálja. Természetesen ez a módszer a tudás számos fontos dimenzióját figyelmen kívül hagyja, azonban egyszerűségénél fogva alkalmas arra, hogy néhány lényeges aspektust megragadjunk és vizsgálhassunk. Lényeges szempont azonban az is, hogy jelen esetben a tudás többdimenziós jellege nem explicit módon, a vállalatok által közvetlenül birtokolt tudásterületek sokféleségében jelenik meg, hanem a hálózaton keresztül hozzáférhető, adott esetben eltérő jellegű tudás-források tekintetében.

[8] A hasonló specifikáció nem ritka a makromodellezési irodalomban, lásd például Fujita et al. (1999) vagy Duarte és Wolman (2002) modelljeit.

A vállalatok a saját (autonóm) tudás egy adott szintjével jellemezhetőek, amelyet az ún. tudás-vektor határoz meg. Ha a gazdaságban N számú vállalat működését tételezzük fel, akkor ez a tudás-vektor az alábbi formában írható fel:

$$\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_N)\ . \tag{5}$$

A $\mathbf{k}$ vektor elemei az egyedi vállalatok tudásszintjeit reprezentálják, amely tudásszintek a modell exogén változói. A valamennyi vállalat számára adott (4) termelési technológia mellett tehát a gazdaság termelési oldalát a k_i értékek eloszlása jellemzi.

A tudáshálózatok szerepe ebben a kontextusban az, hogy az egyes vállalatok tudásbázisait összekapcsolja, így a vállalatok által felhasználható, rendelkezésre álló tudás eltér a saját tudásbázistól. Ezen összefüggés modellbe építéséhez az egyedi tudásszintek hálózaton keresztül történő aggregálására van szükség. Feltevésünk szerint az egyes vállalatok tudása nem tökéletesen helyettesíthető. Ez azt jelenti, hogy a vállalatok mindegyike egy kicsit más technológiai területen működik, így bármely más vállalat tudása értékes többletet jelenthet egy adott vállalat számára. Ez a nem tökéletes helyettesíthetőség azonban értelmezhető úgy is, hogy a vállalatok az azonos technológiai terület (iparág) ellenére más tudás-bázist alakítottak ki: más technikákkal más eljárásokkal, szervezeti rutinokkal operálnak, így egy másik vállalattól származó tudás e különbségek révén hordozza azt a szinergiát, ami a nem tökéletes helyettesíthetőségben nyilvánul meg. Mindezek alapján a különböző vállalatoktól származó tudás aggregálását az alábbi CES technológia mentén végezzük el:

$$K_i = k_i + \left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij} (\theta k_j)^\rho \right)^{1/\rho} , \quad i = 1, \ldots, N\ . \tag{6}$$

A (6) egyenletben K_i a (4) termelési függvényből már ismert, a vállalat által felhasználható, hozzáférhető tudást jelöli, k_i az i-edik vállalat saját tudásszintje, amely egy az egyben hozzájárul a felhasználható tudáshoz. A többi vállalattól származó tudás aggregált „értékét” adja meg a jobb oldali zárójelben található kifejezés, amely a jól ismert Dixit-Stiglitz aggregátor egy speciális formája. ρ az egyes vállalatok tudása közötti helyettesítés paramétere, a helyettesítés rugalmassága $1/(1-\rho)$.

A helyettesítési paraméter értékére a $0 < \rho < 1$ kikötést tesszük, amire azért van szükség, hogy a CES aggregátorban adódó „isoquantok” az origóra konvexek legyenek. Ez a kitétel tulajdonképpen annak a könnyen belátható összefüggésnek felel meg, hogy a partner-vállalatoktól származó tudás (k_j) határhozama csökkenő. A két szélsőséges lehetőség azért zárható ki, mivel $\rho = 0$ esetén a (6) kifejezésben az $1/\rho$ hatványkitevő csak határértéken értelmezhető, illetve $\rho = 1$ esetén a helyettesítés tökéletes lenne. A továbbiakban, funkciójából adódóan, a (6) összefüggésre *tudás-aggregátorként* hivatkozunk.

A (6) aggregátorban szereplő a_{ij} a korábban definiált $\mathbf{A}$ kapcsolati mátrix megfelelő elemeit reprezentálja. Mivel a_{ij} értéke csak nulla és egy lehet, ezért jelentősége abban áll, hogy az aggregátorban csak azon vállalatok tudása adódik össze, amelyek az adott i-edik vállalat közvetlen szomszédjai a hálózatban. További paraméter θ, amely a tudástranszfer erősségét méri. Értéke definíció szerint 0 és 1 közé esik: ha értéke 0, akkor a partnerek tudásából semmi nem érzékelhető, ha értéke 1, akkor maximálisan képes a vállalat a partnerek tudását felhasználni. A 0 és 1 közötti érték azért releváns, mivel egyrészt az egyes vállalatok közötti különbségek okán, másrészt pedig a kommunikáció eleve adott információs torzításából fakadóan nagy valószínűséggel a partnerek tudásának csupán egy része válik használhatóvá a tudástranszfert követően. Cohen és Levinthal (1990) nyomán a θ paraméter értelmezhető a vállalatok abszorpciós képességeként, vagyis azon képességként, hogy a környezetükből származó információkat, tudást milyen mértékben képesek saját tudásbázisukba integrálni. E szempontból természetesen a paraméter értelmezése meglehetősen restriktív, mivel az abszorpciós képességek nem függetlenek a vállalat jellemzőitől (saját tudás nagysága, kutatás-fejlesztési ráfordítások, stb.) de környezeti tényezőktől sem (amilyen például a technológiai lehetőségek szerepe az iparágban, vagy a tudás jellege).[9] Carayol és Roux (2009) nyomán a θ paraméter értelmezhető a tudás tacit vagy kodifikált jellege szempontjából is. E szerint a megközelítés szerint a tudás tacit vagy kodifikált jellegétől függően kevésbé vagy jobban transzferálható, így a tudásáramlás során keletkező veszteségek attól függenek, hogy milyen típusú tudás átadására kerül sor. Így θ alacsony értéke inkább tacit, míg θ magasabb értéke inkább kodifikált tudásra utal.

A modell kínálati oldalát tehát három tényező adja. A vállalatok exogén $\mathbf{k}$ tudásvektora, a vállalatok közötti kapcsolatokat leíró $\mathbf{A}$ kapcsolati mátrix, az ezekre épülő (6) tudás-aggregátor, valamint a vállalatok kibocsátását meghatározó (4) termelési függvény.

A modell a közgazdasági irodalomban elterjedt monopolisztikus versenymodell elemeire épít. Egyfelől a partner-vállalatoktól származó tudás-elemek korlátozott helyettesíthetősége miatt szükséges a tökéletes verseny és így a vállalatok homogenitásának feladása. Ha ugyanis a vállalatok tudás-bázisai egymást korlátozottan helyettesítik, az a vállalatok tudása és az alkalmazott technológiák (folyamatok, rutinok, stb.) között létező különbségeket implikál. Így a vállalat által előállított termékek is, legalábbis néhány dimenzió mentén és minimálisan, különbözőek lesznek, így a termékek tökéletes helyettesíthetősége már nem alkalmazható feltevés. Másfelől viszont a hálózati kapcsolatok dinamikájának endogén modellezése kívánná meg a tökéletes versenytől és a homogén vállalatoktól eltérő piaci struktúra feltevését. Ilyen esetekben ugyanis egy adott kapcsolat értéke a vállalat számára attól függ, hogy a másik vállalat milyen addicionális tudást képes nyújtani számára. Így ahhoz, hogy a hálózati kapcsolatokról szóló döntés ne pusztán a kapcsolatok számáról történő döntésre redukálódjon, hanem a konkrét partnerek

[9] Egy korábban már említett kiterjesztés esetén a θ paraméter kapcsolat-specifikus heterogenitását feltételezhetjük, ami a hálózati kapcsolatok súlyozásával ekvivalens.

kiválasztása is jelen legyen a döntésben, ahhoz a potenciális partnereknek különbözőeknek kell lenniük, legalább minimálisan eltérő tudásbázissal, amely az előzőek alapján már implikálja a végtermékek piacán tapasztalható heterogenitást. Jelen dolgozat ugyan a hálózati kapcsolatok dinamikájának explicit modellezésével nem foglalkozik, egy későbbi kiterjesztés során a monopolisztikus alap fontos eleme lehet a dinamikus vizsgálatoknak.

3.2 A modell keresleti oldala

Minthogy a vállalatok monopolisztikusan versenyzőek, így az általuk előállított termékek a fogyasztók számára nem tökéletes helyettesítők. Jelölje az i-edik vállalat által előállított termékből fogyasztott mennyiséget x_i. A fogyasztók a különböző termékek fogyasztásából jutnak hasznossághoz, a hasznossági függvényt pedig Dixit és Stiglitz (1977) modellje alapján az alábbi formában írjuk fel:

$$U = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^{\sigma} \right)^{1/\sigma} . \tag{7}$$

A hasznossági függvény fenti specifikációja konstans helyettesítési rugalmasságot feltételez az egyes termékek között, amelynek értéke: $\varepsilon = 1/(1-\sigma)$. Akárcsak a korábban definiált tudásaggregátorban a ρ paraméter, σ helyettesítési paraméterként értelmezhető és kikötjük rá a $0 < \sigma < 1$ feltételt. Így a hasznossági függvény közömbösségi görbéi (hiperfelületei) az origóra konvexek lesznek, ami az egyes termékek csökkenő határhasznát mutatja.

A háztartások által elkölthető összes nominális jövedelmet jelölje I. Így a háztartások költségvetési korlátja egyszerűen a következő alakot ölti:

$$I = \sum_{i=1}^{N} p_i x_i . \tag{8}$$

Adottnak véve a rendelkezésre álló I jövedelmet, a háztartások döntési problémája a (7) hasznossági függvény maximalizálását jelenti a (8) költségvetési korlát figyelembevételével. A függelékben megtalálható levezetés alapján a fenti probléma megoldásaként az i-edik termék keresletére az alábbi összefüggés adódik:

$$x_i = p_i^{-\varepsilon} \frac{I}{\sum_{j=1}^{N} p_j^{1-\varepsilon}} , \quad i = 1, \ldots, N , \tag{9}$$

ahol $\varepsilon = 1/(1-\sigma)$.

E levezetések során tehát rendelkezésünkre áll a modell-gazdaság egy első leírása: a kínálati oldalt a $\mathbf{k}$ tudás-vektor, az $\mathbf{A}$ kapcsolati mátrix, a (6) tudás-aggregátor valamint az (N darab) (4) termelési függvény alkotják, a keresleti oldalt pedig a (szintén N darab) (9) keresleti függvény határozza meg.

3.3 Általános egyensúly

A fenti modell-gazdaságban a vállalatok profitfüggvénye a következő:[10]

$$\pi_i = p_i y_i - wL_i - zs_i \ , \tag{10}$$

ahol w az egységnyi munka költsége (munkabér), s_i a vállalat által fenntartott hálózati kapcsolatok száma, míg z egy kapcsolat fenntartásának a költsége. A vállalat kapcsolatainak száma egyszerűen felírható a kapcsolati mátrix segítségével, ahogy azt a (2) egyenletben láthattuk.

Minthogy a feladat gazdaság általános egyensúlyi helyzetének a meghatározása, valamennyi piacon egyensúlyt kell feltételeznünk. Jelen esetben ez egyrészt N számú egyedi termékpiac egyensúlyát jelenti, amelyet egyenként az $x_i = y_i$ egyenlőségek írnak le, másrészt pedig a munkapiacra vonatkozó egyensúlyi feltételt. Felhasználva a termékpiaci egyensúly feltételeit, a termelési függvény inverzét, valamint a keresleti függvényt, a (10) profitfüggvényt az alábbi formára hozhatjuk:

$$\pi_i = p_i^{1-\varepsilon} \frac{I}{\sum_{j=1}^{N} p_j^{1-\varepsilon}} - wK_i^{-1/\alpha} p_i^{-\varepsilon/\alpha} \left(\frac{I}{\sum_{j=1}^{N} p_j^{1-\varepsilon}} \right)^{1/\alpha} - rs_i \ , \quad i = 1, \ldots, N \ . \tag{11}$$

Minthogy a hálózati kapcsolatok (az $\mathbf{A}$ mátrix elemei) exogén adottságként jelennek meg a modellben, az eleve adott $\mathbf{k}$ tudásvektor és a kapcsolati mátrix együttesen meghatározzák a vállalatok K_i rendelkezésre álló tudását. Ennélfogva ez a tudásszint a vállalatok számára adottságot jelent, akárcsak a kapcsolatok rögzítettségéből fakadóan a kapcsolati költségek (rs_i), továbbá a munkabér (w). A vállalat számára adottságként jelenik meg ezen kívül az összes nominális jövedelem (I) és a versenytársak árai is (p_j). Így viszont a (11) profitfüggvény a vállalatok szemszögéből csupán egyetlen döntési változót, a termék árát (p_i) tartalmazza.

A profitmaximalizációs feladat megoldása során szokásos feltevés az, hogy a vállalatok egyenként relatíve kicsinyek a piac egészéhez viszonyítva, így a saját áraiknak a (11) profitfüggvényben található $\sum_j p_j^{1-\varepsilon}$ összegre gyakorolt hatását elhanyagolhatónak tekintik. Ez a technikai megoldás a levezetéseket és a kapott eredményeket egyszerűsíti, ugyanakkor lényegi torzításokat nem okoz a következtetések szempontjából. Figyelembe véve ezt az egyszerűsítést, valamint azt a korábbi megállapítást, hogy a vállalatok által felhasznált munka ugyan változhat, a kapcsolatok és ezen keresztül a kapcsolatok fenntartásához kötődő költségek rögzítettek (és ezzel együtt a kapcsolatok változása miatt a kibocsátás és az ár sem változik) a vállalatok optimális árdöntésére

[10] A profitfüggvény e specifikációja nem tartalmazza explicit módon a tudás előállításának költségeit. Mivel a vállalat-specifikus k_i autonóm tudásszintek a modell exogén adottságai, ezek előállítási költsége múltbeli fix költségként jelenik meg és a profitmaximum számítása során nem játszik szerepet. A más vállalatoktól származó tudás költségét pedig a kapcsolatok fenntartásának z költsége reprezentálja.

az alábbi összefüggés adódik:[11]

$$p_i = w^{\varphi} K_i^{-\frac{\varphi}{\alpha}} \left(\frac{\varepsilon}{(\varepsilon - 1)\alpha} \right)^{\varphi} \left(\frac{I}{\sum_{j=1}^{N} p_j^{1-\varepsilon}} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}\varphi} , \qquad i = 1, \ldots, N , \tag{12}$$

ahol φ az α és σ paraméterek függvénye: $\varphi = (\alpha - \alpha\sigma)/(1 - \alpha\sigma)$. A fenti összefüggés tehát azt mutatja, hogy a vállalat profitmaximalizáló ára a munkabértől, a vállalat által hozzáférhető tudástól (K_i), a versenytársak áraitól (p_j), a nominális jövedelemtől (I) és a modell paramétereitől (α és σ) függ. Minthogy φ értéke pozitív, ezért a bérek növekedése az árakat növeli, a versenytársak árainak növekedése szintén pozitívan hat a saját termék árára, akárcsak az összes nominális jövedelem növekedése. Ezzel szemben a vállalatok által felhasználható tudás (K_i) növekedése az optimális árat csökkenti.

A monopolisztikus verseny modelljében tipikus feltevés, hogy a profit zérus. Ez azonban együtt jár a vállalatok számának endogenitásával, ami a piacon lévő vállalatok számának növekedésével (csökkenésével) az elérhető profitot csökkenti (növeli), így a hosszú távú ágazati egyensúlyban a profit zérus. A modellben a vállalatok száma azonban szükségképpen rögzített, mivel a vállalatok hálózata is a modell részét képezi és e hálózat dinamikáját nem vizsgáljuk (vagyis a csomópontok száma adott). Ezen oknál fogva a profit zérus voltát sem tesszük fel.

A modell lezárásaként a munkapiac egyensúlyi helyzetét biztosító egyenlet meghatározására van szükség. Ehhez figyelembe kell venni, hogy a vállalatok optimális árdöntése az adott peremfeltételek közepette meghatározza a kibocsátás (y_i) és a felhasznált munkaerő mennyiségét (L_i) is. A modellben a munkakínálati döntést nem vesszük explicite figyelembe, a munkakínálat rögzített. Ezt az exogén munkakínálatot $\overline{L}$-sal jelölve a munkapiac egyensúlyi helyzetét az alábbi egyszerű összefüggés írja le:

$$\sum_{i=1}^{N} L_i = \overline{L} . \tag{13}$$

A gazdaság általános egyensúlyi helyzetét így $N+1$ egyenlet írja le, amiből N a vállalatok profitmaximalizáló árára felírt (12) összefüggéseket jelent, illetve a plusz egy a munkapiaci egyensúlyt leíró (13) egyenletet. Ez az $N+1$ egyenlet tartalmazza az általános egyensúly valamennyi feltételét, mivel a (12) egyenletek már tartalmazzák a háztartások optimális (hasznosságot maximalizáló) döntését csakúgy, mint a termékpiaci egyensúlyi helyzetek feltételét, valamint a vállalatok profitmaximalizációs döntését is. Ezt egészíti ki a (13) egyenlet a munkapiaci egyensúly feltételével, így tehát adott valamennyi piac egyensúlyi feltétele, továbbá valamennyi szereplő optimális döntése. Az egyensúlyt leíró

[11] A levezetést lásd a függelékben.

egyenletrendszer tehát az alábbi:

$$(12') \quad p_i = w^\varphi K_i^{-\frac{\varphi}{\alpha}} \left(\frac{\varepsilon}{(\varepsilon - 1)\alpha} \right)^\varphi \left(\frac{I}{\sum_{j=1}^N p_j^{1-\varepsilon}} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}\varphi} , \qquad i = 1, \ldots, N ,$$

$$(14) \qquad \sum_{i=1}^N \left(p_i^{-\varepsilon} \frac{I}{\sum_{j=1}^N p_j^{1-\varepsilon}} \right)^{1/\alpha} K_i^{-1/\alpha} = \overline{L} .$$

Az $N+1$ egyenlethez $N+1$ változó tartozik: az árvektor ($\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$) és a munkabér ($w$). A modell számára adottságot jelentenek értelemszerűen az α és σ paraméterek, ezen túl pedig az exogén hálózati kapcsolatok miatt a rendelkezésre álló tudásbázisok vektora (a K_i értékek), a rendelkezésre álló munkamennyiség ($\overline{L}$), valamint az összes nominális jövedelem (I).

A fenti felsorolásból talán a nominális jövedelem (I) exogenitása igényel némi magyarázatot. Bár az árakat explicite kezeljük, a modell valójában reálmodell: az árak konkrét nagyságára éppen azért tudunk önálló értéket meghatározni, mert adott az összes nominális jövedelem. Ebből következően az I változót nem csak nominális jövedelemként, hanem pénzmennyiségként is felfoghatjuk.

4 Egy hálózati modell

Az előbbiekben bemutatott modell lehetőséget ad arra, hogy a tudáshálózatok és struktúrájuk szerepét értelmezzük és értékeljük a modell keretein belül. Ehhez azonban a hálózatok és a hálózati struktúra explicit figyelembevételére van szükség. A hálózat struktúráját az (1) kapcsolati mátrix egy adott realizációja, azaz a mátrix elemeinek egy adott kombinációja határozza meg. Könnyen igazolható, hogy N alacsony értéke esetén is rendkívül sok ilyen kombináció létezhet, így a hálózati struktúra ilyen szempontból történő kezelése meglehetősen nehézkes volna. Mivel célunk a különböző hálózati struktúrák szerepének vizsgálata, ehhez a hálózati struktúrák számára bizonyos referencia-pontokat (kategóriákat) szükséges meghatározni. Ebben a szakaszban két ilyen referencia-pont és ezekhez kapcsolódóan egy hálózati modell bemutatására kerül sor, amelyet később az általános egyensúlyi modellbe integrálunk.

Barabási és Albert (1999) egy egyszerű algoritmust javasolnak arra vonatkozóan, hogy miként jönnek létre (állíthatók elő) skálafüggetlen hálózatok. Az algoritmus két fontos eleme a hálózatok növekedése és az ún. preferenciális kapcsolódás. Előbbi azt jelenti, hogy a hálózathoz egyre újabb és újabb csomópontokat adunk hozzá, míg az utóbbi azt tükrözi, hogy az újonnan csatlakozó csomópontok úgy alakítják ki új kapcsolataikat, hogy nagyobb valószínűséggel csatlakoznak olyan, már a hálózatban lévő csomópontokhoz, amelyeknek fokszáma magasabb. Ez a két jelenség együttesen vezet ahhoz, hogy a kialakuló hálózatok skálafüggetlenek lesznek. A preferenciális kapcsolódás értelemszerűen egyre nagyobb szerepet biztosít azoknak a csomópontoknak, amelyek több kapcsolattal rendelkeznek, ugyanakkor a növekedés puszta ténye is a skálafüggetlenséget erősíti, hiszen a legtöbb kapcsolattal éppen a legrégebbi, legidősebb csomópontok fognak rendelkezni (Barabási, 2002; Sebestyén és Parag, 2010). A tanulmányban a Barabási-Albert modell egy speciális módosítását vezetjük be, amely lehetőséget ad arra, hogy egy normált paraméter segítségével a skálafüggetlenség különböző fokait érjük el egy hálózatban. A modell az alábbi algoritmust követi:

- Alakítsunk ki egy M elemű véletlen hálózatot, melynek átlagos fokszáma d.[12]
- Adjunk hozzá a hálózathoz egy új csomópontot és az új, valamint a már létező csomópontok között hozzunk létre d számú kapcsolatot.[13] Az egyes kapcsolatok kialakítása során az alábbi forgatókönyvek szerint járunk el:
  - r valószínűséggel az új kapcsolat a legtöbb kapcsolattal rendelkező olyan partnerhez kapcsolódik, amelyikkel az adott csomópont még nincsen kapcsolatban.
  - $1-r$ valószínűséggel a kapcsolat véletlenszerűen jön létre egy olyan csomóponttal, amelyikkel az adott csomópont még nincsen kapcsolatban.
- A fenti lépést iteráljuk, amíg a hálózat mérete el nem éri N-et.

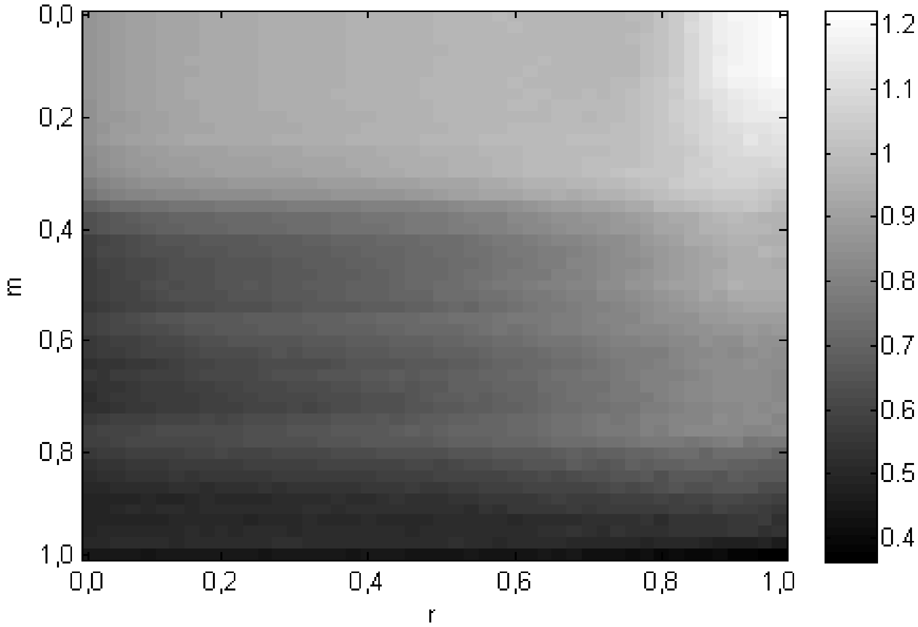
A fenti algoritmus segítségével olyan hálózatok hozhatóak létre, amelyek N csomóponttal és d átlagos fokszámmal rendelkeznek, míg r érétkétől függően a skálafüggetlenség (centralizáltság) mértéke a hálózatban különböző. A véletlenszerűség az r paraméteren keresztül lép be a modellbe. Ha $r = 1$, akkor egy szélsőségesen centralizált hálózatot kapunk eredményül, ahol a kezdeti hálózat tagjainak rendkívül sok kapcsolata van, míg a többieknek csupán d. Amennyiben $r = 0$, úgy a kapcsolatok véletlenszerűen alakulnak ki, míg r növekedésével a fokszám egyre nagyobb súlyt kap.

A hálózat struktúrája szempontjából két fontos jelenség adódik. Egyfelől a hálózat csak speciális esetben lehet szélsőségesen centralizált, mivel a kezdeti hálózat véletlenszerűsége csak abban az esetben teszi lehetővé a szigorúan csillag-topológiájú hálózat kialakulását, ha $r = 1$ mellett $M = 2$ vagy $M = 1$ és $d = 1$. Minden más esetben $r = 1$-re egy szorosan kapcsolt központi mag körül jön létre a csomópontok egy kevés kapcsolattal rendelkező periferikus halmaza. Másfelől pedig azt is hozzá kell tennünk, hogy $r = 0$ esetén sem kapunk teljes mértékben véletlen hálózatot, mivel a véletlenszerűség ellenére a hálózat növekedésének időbeli dimenziója azt eredményezi, hogy a korábban csatlakozó csomópontok automatikusan több kapcsolattal rendelkeznek.

[12] A véletlen hálózatot kialakító algoritmus valószínűségi paramétere ennek megfelelően $d/(M-1)$.

[13] Speciális esetben, ha d nagyobb, mint a potenciális partnerek száma, akkor a kapcsolati számot ez utóbbira módosítjuk.

Ezek alapján megállapítható, hogy az r paraméter önmagában csak korlátozottan képes a véletlen és a skálafüggetlen (centrális) hálózatok közötti átmenet leképezésére. A hálózati modellnek azonban van két további paramétere is: a hálózat (végső) méretét adó N és a kiindulási hálózat méretét adó M paraméterek. Mivel a kiindulási hálózatot véletlenszerűnek feltételezzük, ezért a végső hálózat véletlenszerűségét az is befolyásolja, hogy az induló hálózat mekkora a végső hálózathoz képest. Ezt az $m = M/N$ arány határozza meg. Minél közelebb van ez az arány egyhez, annál véletlenszerűbb a hálózat (mivel a skálafüggetlenséget kialakító algoritmus rövidebb ideig működik), nullához közelítő arány mellett viszont a skálafüggetlenség növekszik.



1. ábra. Véletlenszerűség és skálafüggetlenség a módosított Barabási-Albert modellben

A fenti hálózati modell segítségével egyszerű szimuláció végezhető az r és az m paraméterek releváns értékeire (mindkét paraméter a 0 és 1 közötti tartományban mozoghat). A szimulációk során a hálózat méretét $N = 50$-nek, az átlagos fokszámot 6-nak választva valamennyi paraméter-kombinációra 1000 futtatást végeztünk. A futtatások során a kapott fokszámeloszlásra a (3) egyenletnek megfelelő hatványfüggvényt illesztve és a kapott kitevők értékét az 1000 futtatásra átlagolva kaphatunk képet a hálózati modell működéséről. Az eredményeket összegzi az *1. ábra* az r és az m paraméterek terében. A világos árnyalatok magasabb, a sötétek alacsonyabb szintű skálafüggetlenséget jelentenek. A skálafüggetlenség mértékét a (3) egyenletben bevezetett δ kitevő segítségével mérjük.

Az ábráról látható, hogy a vizsgált két paraméter terében a véletlenszerű hálózatoktól (bal alsó tartomány) az egészen centralizált hálózatokig (jobb felső tartomány) juthatunk el. A köztes területeken a skálafüggetlenség különböző fokait mutatja a kialakuló hálózat.

5 Szimulációk és paraméter-értékek

Az előző pontban bemutatott általános egyensúlyi modell hálózati struktúrákkal kibővített változata a hálózat csomópontjainak (a gazdasági egységeknek) egyedi modellezése miatt analitikusan nem oldható meg. Ennek okán a modellt numerikus módszerekkel oldjuk meg, ami ahhoz vezet, hogy a paraméterekre specifikus értéktartományokat és értékeket kell definiálnunk. A modell numerikus megoldásának algoritmusát a függelék tartalmazza, a továbbiakban a paraméterek rögzítésének elveit adjuk meg. Az elemzések során az egyes paraméterek nem minden esetben kerülnek rögzítésre, amennyiben viszont igen, úgy az alábbi elveket alkalmazzuk.

5.1 Rögzített paraméter-értékek

Korábban már kiemeltük, hogy a modellben a vállalatok rögzített számával dolgozunk, ami egyben a hálózat csomópontjainak számát is jelenti. A paraméter rögzítése arra ad lehetőséget, hogy a hálózati struktúra változásainak hatását elválasszuk a hálózat méretének változása által okozott hatásoktól. A hálózat méretét $N = 50$-nek választjuk, aminek praktikus oka, hogy így kezelhető hálózat-méretet kapunk, ami a numerikus szimulációk során hasznos a hatékony erőforrás-kihasználás szempontjából. A hálózat méretét a bemutatott elemzések teljes tartományán rögzítjük.

A tudás-hálózatot meghatározó paraméterek közül rögzítésre kerül R, a kapcsolatok átlagos száma is, melyet 6-nak választunk. Minthogy N is rögzített, így a hálózatok sűrűsége is adott (12%). Ennek a későbbiekben lényeges következménye lesz az eredmények értékelése szempontjából. A hálózatot leíró paraméterek közül egyetlen futtatás során sem rögzítjük az r és az m paramétereket, mivel ezek (a hálózat méretével együtt) határozzák meg a struktúrát, ami az elemzés fókusza.

Az elemzések egy részében rögzítésre kerül a nominális jövedelem (pénzmennyiség). Mivel a modell korábban már említett dichotómiája okán I értékének csak az árváltozók abszolút nagyságának meghatározása során van jelentősége, így értékét $I = 100$-nak állítjuk be. Hasonló módon egyes futtatásokban rögzítjük a munkakínálat nagyságát is: $\overline{L} = 100$. A szimulációk egy részénél szintén rögzítjük ρ és θ értékét: $\rho = 0,5$, $\theta = 0,8$. Ezek a választások természetesen önkényesek, azonban a további vizsgálatok során ezt a rögzítettséget feloldjuk.

Egyes futtatások során rögzítésre kerülnek az α és σ paraméterek. Mivel e két paraméter a széles körben elterjedt és alkalmazott DSGE modellek szerves részét képezi, értékük a makroökonómiai szakirodalom alapján könnyen meghatározható. Különböző DSGE modellekben használt, becsült vagy kalibrált értékeket tartalmaz az *1. táblázat* a vizsgált két paraméterre vonatkozóan. Jól látható, hogy a paraméterek értékei jól definiálható tartományban szóródnak. A szimulációk során az egyedi értékek átlagát alkalmazzuk, így α és σ értékét rendre 0,7-es és 0,85-os szinten rögzítjük.

Szerző	Ország	α	σ
Smets-Wouters (2007)	USA	0,81	0,90
Ratto et al. (2009)	Eurozóna	0,52	0,90
Dib (2001)	Kanada	0,67	0,83
Mendoza (1991)	Kanada	0,68	
Harrison et al. (2005)	Anglia	0,69	0,91
Adolfson et al. (2007)	Svédország	0,71	0,82
Jakab-Világi (2008)	Magyarország	0,83	0,83
Baksa et al. (2009)	Magyarország	0,72	
Erceg et al. (2006)	USA		0,83
Christoffel et al. (2008)	Eurozóna		0,70
Átlag		0,70	0,85

1. táblázat. DSGE modellek strukturális paraméterei

6 Szimulációs eredmények

A továbbiakban a fent bemutatott modell szimulációi során kapott eredmények bemutatására kerül sor. Először a hálózati struktúrát közvetlenül meghatározó két paraméter (r és m) kivételével a modell valamennyi más paraméterét rögzítjük az előző pontban megadott értékek mellett, így kizárólag a struktúra 1. ábrán bemutatott különböző realizációi és a gazdasági teljesítmény közötti kölcsönhatás vizsgálható. Ezt követően Monte Carlo szimuláció segítségével valamennyi további paraméter változása mellett mérjük fel a struktúra hatását. Végül olyan elemzéseket mutatunk be, amelyek a vállalati tudásszintek nem egyenletes eloszlását feltételezik.

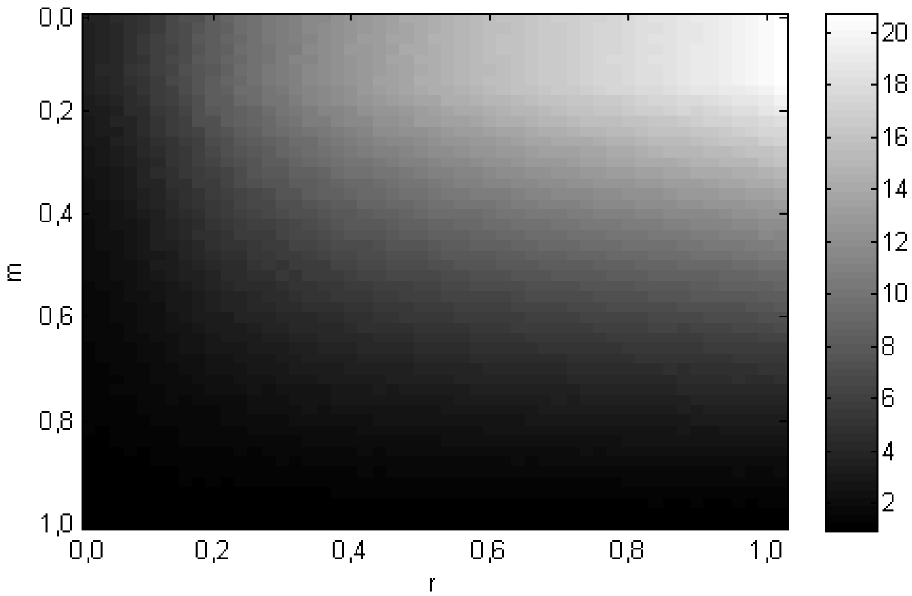
6.1 Általános egyensúly homogén tudásszintek esetén

A fentieknek megfelelően a következő numerikus szimulációt vizsgáljuk. A módosított Barabási-Albert modell r és m paramétereinek különböző kombinációi mellett kialakuló hálózati struktúrát alapul véve megoldható az általános egyensúlyi modell (a szimuláció során használt algoritmus a függelékben kerül bemutatásra). A modell további paramétereit az előző szakaszban megadott értékeken rögzítjük. A most rögzítésre kerülő paraméterek változásának hatását később részletesebben is megvizsgáljuk, egyelőre csupán a hálózati struktúrát reprezentáló r és m paraméterek hatásának elemzése a cél.

A modell további fontos exogén változója a vállalatok autonóm tudásszintjeit leíró $\mathbf{k}$ vektor. Ennek értékeit a most bemutatandó szimulációk során azonosan egységnyinek választjuk. Ez azt jelenti, hogy a vállalatok homogének tudásszintjük tekintetében. Ezt az egyszerűsítést a későbbiekben feloldjuk, azonban jelen esetben lehetőséget teremt arra, hogy a struktúra hatását a vállalatok tudásszintbeli heterogenitásától elkülönítve tárgyaljuk.

A modellt megoldva az általános egyensúlyra jellemző output változók adódnak, melyek közül a kibocsátást emeljük ki a dolgozatban. A vizsgálat során valamennyi (r, m) kombinációra 1000 független futtatást végeztünk majd a kapott eredményeket átlagolva küszöböltük ki a hálózati modell sztochasztikus jellegéből fakadó variabilitást. Az egyes paraméter-kombinációk mellett adódó kibocsátás-értékeket mutatja a *2. ábra*.[14] A világos árnyalatok magasabb, a sötétebb árnyalatok alacsonyabb kibocsátási szinteket jelölnek, illetve az 1. ábrához hasonlóan az ábra bal alsó tartományában a véletlenszerűbb, a jobb felső tartomány felé haladva pedig egyre centralizáltabb hálózatokat találunk.

Az ábra alapján jól látható, hogy az általános egyensúlyi modell alapjául szolgáló tudáshálózat struktúrája jelentős hatással lehet a kibocsátásra. Alacsonyabb szintű kibocsátás adódik a véletlenszerűbb és magasabb a skálafüggetlen struktúrát mutató hálózatok esetén. Az is fontos eredmény, hogy a skálafüggetlenségnek nem található egy köztes optimális szintje: a legnagyobb kibocsátási szintet a leginkább centralizált hálózati struktúrák mellett tapasztaljuk.

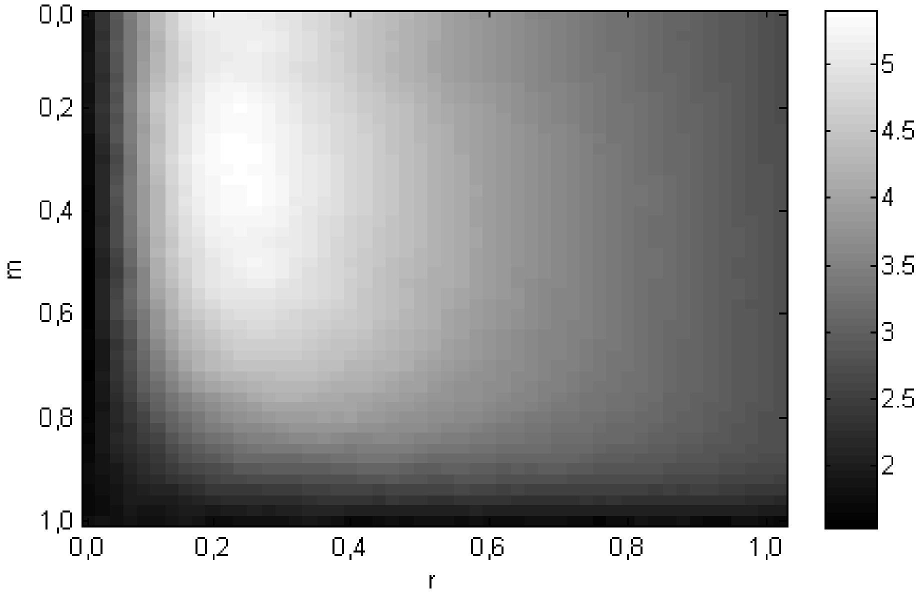


2. ábra. A kibocsátás alakulása a hálózati struktúra függvényében

Nagyon fontos kiemelnünk, hogy az ábrán látható tendenciák kizárólagosan a hálózat struktúrájának változásából fakadnak. Ha ugyanis visszatekintünk a második szakasz elején bevezetett (4) termelési függvényre és (6) tudás-aggregátorra, akkor könnyen beláthatjuk, hogy a vállalatok által kialakított kapcsolatok száma önmagában pozitív hatással van a kibocsátásra.

[14] Az ábrán a kibocsátásszintek nem abszolút nagyságukban, hanem a véletlen hálózat ($r = 0$ és $m = 1$) kibocsátási szintjéhez viszonyítva kerülnek feltüntetésre.

Az alkalmazott hálózati modell jelentősége éppen abban áll, hogy minden esetben azonos átlagos kapcsolati számot adnak eredményül. Az induló hálózat átlagos fokszámát paraméterként állítjuk be, majd a hálózatot kialakító algoritmus minden egyes új csomópontja pontosan egyforma számú kapcsolatot alakít ki, így a kapcsolatok átlagos száma a hálózatokban mindvégig azonos.[15] Így tehát a fenti ábrán látható hatás nem fakadhat abból a triviális megállapításból, hogy több kapcsolat több hozzáférhető tudást és ezáltal magasabb termelékenységet és kibocsátást jelent. Az eredmények tehát azt bizonyítják, hogy magának a hálózati struktúrának, vagyis a kapcsolatok egymáshoz képest vett elhelyezkedésének is külön szerepe van a gazdasági teljesítmény alakulásában.



3. ábra. A vállalatok egyedi kibocsátási szintjeinek relatív szóródása különböző hálózati struktúrák esetén

A modell segítségével vizsgálható az árszínvonal alakulása is, ezek az eredmények azonban triviálisnak tekinthetőek, hiszen adott nominális kibocsátás (pénzmennyiség) mellett a magasabb aggregált kibocsátáshoz alacsonyabb árszínvonalnak kell társulnia. A szimulációs eredmények ezt megerősítik: a skálafüggetlenség növekedésével az árszínvonal csökken. Ennél érdekesebb kérdés annak vizsgálata, hogy az egyedi vállalatok kibocsátása milyen mértékben szóródik különböző hálózati struktúrák esetén. Ehhez az

[15]A teljes pontosság érdekében fontos megjegyezni, hogy a kiindulási pontul szolgáló véletlen hálózatban az átlagos fokszám nem lehet pontosan a paraméter szerinti érték. Ezt a variabilitást azonban kis kezdeti hálózat esetén a később a hálózatba integrált számos csomópont pontosan meghatározott és azonos kapcsolati száma ellensúlyozza, nagy hálózat esetén pedig a véletlen hálózat átlagos fokszáma is egyre pontosabban közelíti a paraméterértéket.

egyes futtatások során kiszámoljuk a vállalatok egyedi kibocsátási szintjeinek relatív szórását, mint az egyenlőtlenség mértékét. Az eredményeket a már ismert struktúrában mutatja a *3. ábra*. A világos árnyalatok nagyobb szóródást, a sötétebb árnyalatok kisebb szóródást mutatnak.

Az ábra alapján hasonló tendenciát találunk, mint a kibocsátás esetén: a skálafüggetlenség magasabb szintjei mellett a vállalatok kibocsátási szintjei egyenlőtlenebbül oszlanak el. Ez azonban csak tendenciájában igaz, mivel a vállalati kibocsátási szintek szóródásának egy jól látható maximuma van a vizsgált paramétertér bal felső tartományában. Ez közepesen skálafüggetlen hálózati struktúrát takar, ahol a kiinduló hálózat relatíve kicsi, ugyanakkor a hálózat fejlődése során a preferenciális kapcsolódás alacsony súllyal van jelen, vagyis a kapcsolatok véletlenszerűen alakulnak ki. Más szavakkal, olyan hálózati struktúra esetén találjuk a legnagyobb mértékű diverzitást a vállalatok között, amelynél a skálafüggetlenséget elsősorban a hálózat növekedése (az „idősebb" csomópontok központi helyzete) és kevésbé a preferenciális kapcsolódás alakítja ki.

Ha összevetjük a 2. és a 3. ábra eredményeit, akkor az is látható, hogy a vizsgált rendszer legmagasabb teljesítményéhez (erősen skálafüggetlen hálózat) közepes mértékű diverzitás társul. Ez arra enged következtetni, hogy a rendszer teljesítménye szempontjából sem a túlzott, sem pedig a korlátozott sokféleség nem kedvező.

A fenti elemzés segítségével sikerült rávilágítani arra, hogy a gazdasági tevékenység alapjául szolgáló tudáshálózatok struktúrája hatással van az aggregált kibocsátásra. A skálafügetlenség és a kibocsátás között pozitív kapcsolat fedezhető fel, a nagyobb kibocsátás azonban a vállalatok közötti növekvő mértékű egyenlőtlenséggel társul. Fontos azonban azt is megvizsgálni, hogy a kapott képet mennyiben árnyalja, ha a modell eddig rögzített paramétereit megváltoztatjuk. Ennek érdekében egy olyan szimulációs stratégiát alkalmazunk, amely bizonyos értelemben analóg a modell megoldásának analitikus levezetésével, amennyiben lehetőséget nyújt arra, hogy a modell-paraméterek output (endogén) változókra gyakorolt hatását nyomon kövessük.

Ehhez a statisztikában jól ismert Monte Carlo szimulációk elvét vesszük alapul, amelynek a lényege, hogy a modell paramétereit véletlenszerű kombinációban választjuk meg. A módszer során különböző (véletlen) paraméterkombinációkra oldjuk meg a modellt és feljegyezzük a paraméterek valamint az eredményváltozók értékét. A lépést elegendő alkalommal elvégezve egy egyszerű keresztmetszeti adatbázishoz jutunk, amelyben egy rekord egy futtatás paraméterértékeit és az eredményváltozók értékeit tartalmazza. Az eredményváltozók és a paraméterek értékei közötti kapcsolat az adatbázis alapján statisztikai eszközökkel vizsgálható, így az eddig fixnek vett paraméterek hatása is bevonható az elemzésbe. Az alábbi elemzés elvégzéséhez összesen 10 000 futtatást végeztünk el véletlenszerűen választott paraméterértékekkel, majd egyszerű regresszió-analízis segítségével vizsgáljuk a hálózati struktúra és a modell eredményváltozói közötti kapcsolatot, amelyben a magyarázó változók szerepét a modell paraméterei, a magyarázott változó szerepét pedig a modell eredményváltozói töltik be.

	Homogén vállalatok	Normális eloszlás	Skálafüggetlen eloszlás
Konstans	43290, 9***	43646, 4***	59846, 3***
	(0,0000)	(0,0000)	(0,0000)
α	17008,2***	16732,3***	21509,2***
	(0,0000)	(0,0000)	(0,0000)
σ	9301,38***	9609,26***	11690,2***
	(0,0000)	(0,0000)	(0,0000)
θ	18193,7***	18255,7***	27364,4***
	(0,0000)	(0,0000)	(0,0000)
ρ	−110716***	−109700***	−150761***
	(0,0000)	(0,0000)	(0,0000)
I	2,42332	2,3559	−5,2669
	(0,5295)	(0,5353)	(0,2503)
L	49,1607***	49,4303***	60,3038***
	(0,0000)	(0,0000)	(0,0000)
r	11048***	9361,66***	11807,6***
	(0,0000)	(0,0000)	(0,0000)
M	−381,97***	−374,84***	−516,54***
	(0,0000)	(0,0000)	(0,0000)
μ		−1492,8**	5517,42***
		(0,0499)	(0,0000)
Korrigált R^2	*0,517941*	*0,511605*	*0,56544*

2. táblázat. Regressziós eredmények a paraméter-variációs szimulációk alapján

Az *2. táblázat* tartalmazza a kibocsátásra felírt regressziós modell eredményeit, amelyben valamennyi paramétert magyarázó változóként szerepeltettük. A táblázat tartalmazza a szokásos statisztikai outputokat.[16]

Az eredményekből (első oszlop, homogén vállalatok) az látható, hogy a hálózati struktúra 2. ábrán kimutatott hatása szignifikáns marad abban az esetben is, ha a modell többi paraméterét nem rögzítjük, vagyis tendenciájában a skálafüggetlenség aggregált kibocsátásra gyakorolt pozitív hatása fennmarad. Ezt az r paraméterre kapott pozitív, valamint az M paraméterre kapott negatív regressziós koefficiens mutatja.[17]

Az aggregált termelési függvény két paramétere, α és $\overline{L}$ pozitív hatással van a kibocsátásra, amely triviális eredmény, tekintve a termelési függvény specifikációját. A termékvariánsok közötti helyettesíthetőséget kifejező σ paraméter esetében szintén pozitív hatást kapunk, ami azt mutatja, hogy nagyobb fokú helyettesíthetőség magasabb aggregált kibocsátással párosul. Ez az eredmény tulajdonképpen a piacon érvényesülő monopol-hatások és a kibocsátás közötti jól ismert összefüggést tükrözi.[18] A spilloverek erősségét mutató θ paraméter hatása szintén pozitív, ami logikus következtetésnek tűnik, hiszen a magasabb spillover azt jelenti, hogy minden egyéb tényező változatlansága mellett a vállalatokhoz több tudás áramlik más szereplőktől,

[16]Zárójelben az adott koefficiens p-értéke található, a csillagok száma pedig rendre 10, 5 és 1 százalékos szignifikancia szinteket jelöl.

[17]Az M paraméter változása N rögzítettsége okán megegyezik az m paraméter változásával.

[18]Minél erősebb a vállalatok monopolereje, azaz a termékdifferenciálás foka, annál nagyobb a holtteher-veszteség. A helyettesíthetőség növekedése a homogén termékek és így a tökéletes verseny irányába mozdítja a gazdaságot, ami a holtteher-veszteséget csökkenti.

így saját felhasználható tudásbázisuk magasabb lesz, ami az egyedi és az aggregált kibocsátási szintek növekedését eredményezi. A vállalatok tudásbázisai közti helyettesíthetőséget mérő ρ paraméter esetében negatív együtthatót kapunk: minél tökéletesebb a helyettesítés, annál kisebb a kibocsátás. Ez az eredmény azt mutatja, hogy a magasabb kibocsátási szintek a vállalatok magasabb fokú heterogenitása esetén figyelhetőek meg. Végül megemlítjük, hogy a nominális jövedelem nincsen kimutatható hatással a kibocsátásra, ami a modell korábban már hangsúlyozott dichotomikus jellegéből nyilvánvalóan következik és az elemzés ezt a dichotómiát megerősíti.

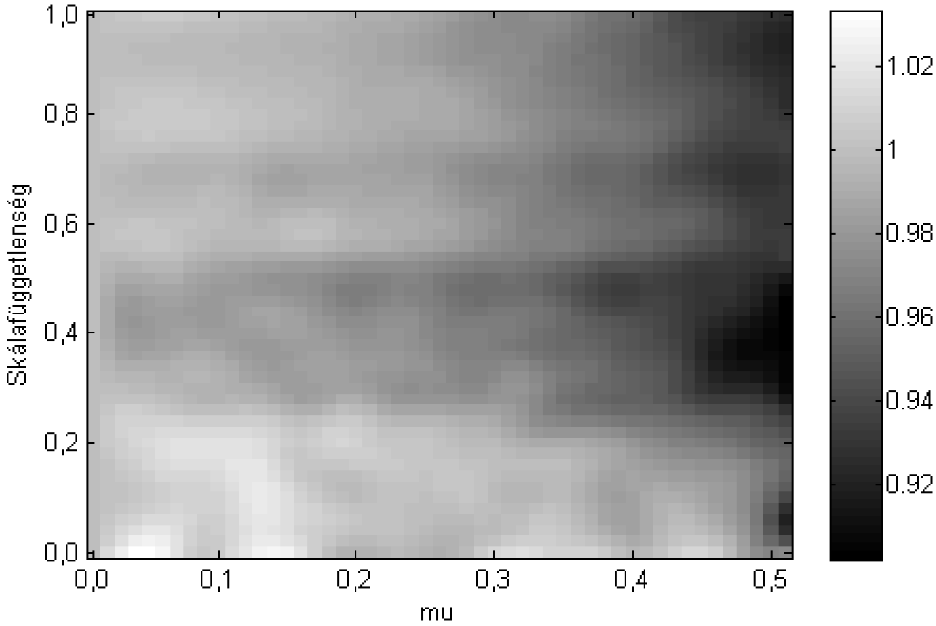
6.2 Általános egyensúly heterogén vállalati tudásszintek esetén

Az előző pontban azzal a feltevéssel éltünk, hogy a vállalatok (autonóm) tudásszintjei azonosak. Ez a feltevés természetesen feloldható, ekkor azonban a tudásszintek eloszlására vonatkozóan kell addicionális feltevéseket tennünk. A továbbiakban két esetet vizsgálunk. Egyrészt egy olyan szituációt, amikor a tudásszintek normális eloszlást követnek, másrészt pedig egy olyan esetet, amikor a tudásszintek skálafüggetlen eloszlással jellemezhetőek.

6.2.1 Normális eloszlás a tudásszintekben

Ez az eset tulajdonképpen az előző pontban vizsgált szituáció egy logikus kiterjesztéseként fogható fel. Tegyük fel, hogy a vállalatok autonóm tudásszintje $k_i \sim N(1, \mu)$ normális eloszlást követ. Az eloszlás várható értékének megválasztása mindössze skálázási hatással bír, mivel a nagyobb vállalati tudásszintek ceteris paribus nagyobb hatékonyságot és nagyobb kibocsátási szintet eredményeznek. A szórás megválasztása lényegesebb, itt a $\mu = 0$ választással az előző pont elemzését kapjuk vissza, jelen esetben azonban a szórást a (0;0,5) intervallumon vizsgáljuk. A *4. ábra* mutatja a kibocsátás alakulását a hálózat skálafüggetlensége és a tudásszintek eloszlásának szórása függvényében.[19] A könnyebb értelmezés érdekében a kibocsátási szinteket a skálafüggetlenség valamennyi szintjén (függőleges tengely) a $\mu = 0$ esethez viszonyítjuk (a sötét árnyalatok alacsonyabb, a világos árnyalatok pedig magasabb kibocsátást mutatnak).

[19] A hálózat skálafüggetlenségét jelen esetben egy dimenzióra szűkítjük a korábbi kettő helyett. A modell paramétereit csupán a 2. és 3. ábra átlója mentén változtatjuk, vagyis az r és m paraméterek értékeit egymással összekapcsolva változtatjuk. Az ábrán a függőleges tengelyen az r paraméter értékei szerepelnek, de az előbbiek miatt ez jelen esetben az m paraméter értékét is meghatározza: $r = 0$ esetén $m = 1$ és fordítva.



4. ábra. Kibocsátás a tudásszintek szórásának függvényében

Az ábráról az látható, hogy a kibocsátás tipikusan alacsonyabb azokban az esetekben, amelyekben a vállalatok tudásszintjeinek szóródása nagyobb, ez a tendencia azonban a skálafüggetlenség magasabb fokain válik igazán érzékelhetővé. Alacsony skálafüggetlenség esetén (a tudáshálózat nagyobb véletlenszerűsége mellett, amennyiben $r < 0{,}2$) a tudásszintek szórása nem hat érdemben a kibocsátásra. A 4. ábrán ugyan kiszűrtük a skálafüggetlenség közvetlen hatását, de az eredmények azt mutatják, hogy a korábban tapasztalt pozitív összefüggés a skálafüggetlenség és a kibocsátás között a tudásszintek szórásától függetlenül markánsan kimutatható.

A vállalatok egyedi kibocsátási szintjeinek szórását vizsgálva nem található érdemi összefüggés a tudásszintek szórása és a vállalatok közötti heterogenitás között. Ez azt mutatja, hogy lényegi különbség fedezhető fel a tudásszintekben jelentkező sokféleség valamint a vállalatok kibocsátási szintjeiben jelentkező sokféleség között. Míg az első a modell exogén eleme, a második endogén, ezért a tudásszintekben megfigyelt sokféleség magyarázó tényezője lehet a kibocsátási szintekben megfigyelhető sokféleségnek. Jelen esetben azt látjuk, hogy a tudásszintek nagyobb szóródása nem magyarázza meg kibocsátási szintekben tapasztalt nagyobb szóródást.

A 2. táblázat második oszlopában látható a normális eloszlású tudásszintekre elvégzett szimulációk regressziós elemzése. Az eredmények itt is azt mutatják, hogy a skálfüggetlenség kibocsátásra gyakorolt pozitív hatása fennmarad, ugyanakkor a tudásszintek szóródásának szignifikáns negatív hatása van a kibocsátásra.

6.2.2 Skálafüggetlen eloszlás a tudásszintekben

Mindamellett, hogy az autonóm tudásszintek vállalatok közötti szóródása reális feltevés, az eloszlásra tett feltevés meglehetősen önkényes. Az előző pontban a normalitás feltevésével éltünk, azonban a tudásszintek skálafüggetlen eloszlása szintén reális alternatíva. A továbbiakban ezt az esetet vizsgáljuk. A vizsgálatok során feltesszük, hogy a vállalatok tudásszintje $k_i \sim P(1, \mu)$ Pareto-eloszlást követ.[20] Ilyen eloszlás esetén azonban felmerül az a kérdés is, hogy a tudásszintek eloszlása milyen összefüggésben van a hálózat fokszámeloszlásával. Mivel a modellben mindkét eloszlás exogén faktor, ezért a vállalatok tudásszintjeinek és fokszámainak eloszlását szinkronizálhatjuk. Ehhez egyszerűen összerendezzük az adott eloszlás alapján generált tudásszinteket és a hálózati modellből adódó fokszámokat úgy, hogy a legnagyobb fokszámmal rendelkező vállalat egyben a legnagyobb tudásszinttel rendelkezzen, stb.[21] A skálafüggetlen eloszlás μ paraméterét a $(0, 2)$ intervallumon változtatjuk.[22] Az *5. ábrán* látható az elvégzett szisztematikus futtatások eredménye, hasonlóan a 4. ábrához (az ábrán a kibocsátási szinteket most is a $\mu = 0$ esethez viszonyítjuk, valamennyi skálafüggetlenségi szint esetén).

Jól látható, hogy a μ paraméter növekedése bármely skálafüggetlenségi szint esetén pozitívan hat a kibocsátási szintre. Vagyis minél inkább érvényesül a skálafüggetlenség a tudásszintek eloszlásában (minél kevesebb a köztes tudásszint), annál magasabb kibocsátást érhet el a gazdaság, függetlenül a tudáshálózat skálafüggetlenségének mértékétől. Bár az ábrán a hálózat skálafüggetlenségének hatását kiszűrtük, ez a hatás a 2. ábrán bemutatott tendenciának továbbra is megfelel, vagyis a hálózati skálafüggetlenség is pozitívan hat a kibocsátásra.

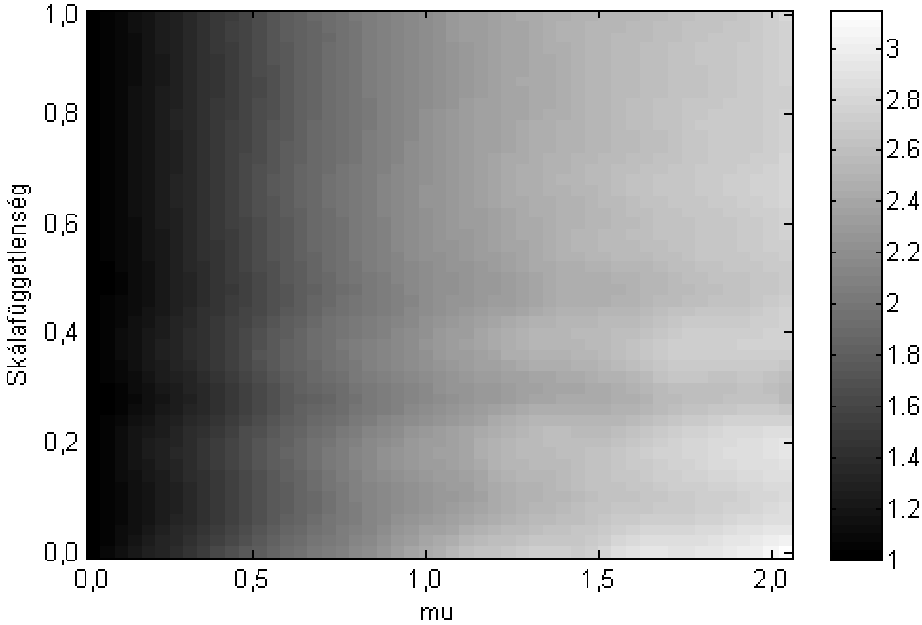
Ezek alapján a skálafügetlenséget két dimenzió mentén értelmezve (a tudáshálózatok fokszámeloszlásának skálafüggetlensége egyrészt és a tudásszintek eloszlásának skálafüggetlensége másrészt) azt a következtetést vonhatjuk le, hogy mindkét dimenzió mentén a magasabb szintű skálafüggetlenség a rendszer magasabb szintű teljesítményével jár együtt.

---

[20] Az eloszlás sűrűségfüggvénye: $f(k_i) = \mu / k_i^{\mu+1}$. Jegyezzük meg, hogy az eloszlás μ paramétere most más tartalommal rendelkezik, mint a normális eloszlás esetén. Ott a tudásszintek szóródását mutatta, jelen esetben a skálafüggetlenség mértékét tükrözi.

[21] A vállalatok tudásszintje és fokszáma közötti teljes szinkron természetesen erős feltevés, azonban a szinkronizáció hiányában elvégzett kontrollfuttatások az itt bemutatott szinkronizált esettel mind minőségi, mind pedig mennyiségi szempontból azonos eredményekre vezetnek.

[22] Figyelembe véve a használt eloszlás definícióját, a vizsgált tartomány az empirikus eloszlások esetén jellemző skálafüggetlenségi tartományt járja be. Ezeknél az eloszlásoknál a (3) függvény δ kitevője tipikusan az $(1, 3)$ tartományban található (lásd például: Csermely, 2005), amihez vegyük figyelembe, hogy $\delta = 1 + \mu$.



5. ábra. Kibocsátás a tudásszint-eloszlás skálafüggetlenségének függvényében

Az 2. táblázat harmadik oszlopában található eredmények a jelen esetre elvégzett Monte Carlo szimulációk eredményeit mutatják. Ezek alapján megerősíthetjük, hogy a hálózati struktúra hatása nem változik a tudásszintek skálafüggetlen eloszlásának feltevése esetén sem: a fokozottabban skálafüggetlen hálózati struktúrák magasabb szintű aggregált kibocsátással társulnak. A táblázat adatai megerősítik az előbb vázolt összefüggést is: a skálafüggetlenség növekedése a tudásszintek tekintetében is nagyobb aggregált kibocsátással jár együtt.

Érdemes egy fontos összehasonlítást tennünk a tudásszintek normális eloszlása esetén kapott eredményekkel. Bár az alkalmazott eloszlások μ paramétere eltérő interpretációval bír a két esetben, bizonyos analógia észrevehető. A normális eloszlás esetén a paraméter közvetlenül a tudásszintek átlag körüli szóródását tükrözi. A Pareto (skálafüggetlen) eloszlásnál a paraméter az eloszlásfüggvény görbületét tükrözi, ezáltal pedig a nagyon magas és a nagyon alacsony közötti „átmeneti" tudásszintek relatív gyakoriságát: μ magasabb értéke ezen köztes értékek kisebb előfordulási valószínűségét jelenti. Az analógia abban áll, hogy a skálafüggetlenség esetén is egyfajta szóródást mér a paraméter, mégpedig azt, hogy a vállalatok tudásszintjei milyen mértékben oszlanak magas és alacsony kategóriákra.[23] A normális eloszlás esetén a szóródás növekedése strukturálatlan (fehér zaj), a skálafüggetlenség esetében viszont strukturáltnak nevezhető: a vállalatok közötti tudászintbeli különbségek növekedése jól meghatározható formát követ.

[23]Szimulációk segítségével megmutatható az is, hogy μ növekedésével a szimulált Pareto-eloszlású minták szórása növekszik a vizsgált paramétertartományon.

Ezen interpretáció alapján viszont azt is mondhatjuk, hogy a tudásszintek szóródásának két formája alapvetően eltérő hatással bír a gazdaság kibocsátására. A fehér zaj jellegű, strukturálatlan szóródás tipikusan csökkenti a kibocsátást, ha azonban a szóródás skálafüggetlen struktúrát követ, akkor a skálafüggetlenség növekedése a kibocsátás növekedéséhez vezet.

7 Összefoglalás

A tanulmány arra tett kísérletet, hogy egy egyszerű általános egyensúlyi modellbe integrálva a hálózati struktúra szerepét vizsgálja a tudásáramlásban, a termelékenységre gyakorolt hatásban és ezáltal a gazdasági teljesítményben. A modell analitikus megoldását numerikus szimulációk alkalmazásával helyettesítettük, mivel a hálózati struktúrák figyelembevétele a gazdasági szereplők egyedi modellezését igényli, így a reprezentatív szereplők feltevése nem alkalmazható és a modell analitikus eszközökkel nem kezelhető. A hálózati struktúrák értelmezése során a preferenciális kapcsolódás modelljének egy speciális kiterjesztését alkalmaztuk, amely lehetővé teszi a véletlenszerű és a skálafüggetlen hálózatok közötti átmenetek reprezentációját.

A szimulációk során kapott eredmények egyértelműen megmutatják, hogy a tudás-hálózatok strukturális jellemzői lényegesen befolyásolják a gazdaság aggregált teljesítményét: a véletlenszerűség alacsonyabb, az erős skálafüggetlenség magasabb kibocsátási szinttel társul. Ez az eredmény egyrészt rávilágít a hálózati kapcsolatok struktúrájának rejtett hatásaira, másrészt pedig lényeges adalékkal szolgál a hálózati struktúrák evolúcióját tekintve. A valós hálózatok nagy száma által mutatott skálafüggetlen struktúra felveti azt a hipotézist, hogy a skálafüggetlenség kialakulása egy olyan folyamat eredménye, amely során a rendszer elemeinek kapcsolódási struktúrája hatékonysági elven, a környezeti feltételekhez történő legkedvezőbb alkalmazkodás mentén választódik ki, így ez a folyamat bizonyos analógiát mutat az evolúciós elképzelésekkel (Barabási, 2002; Csermely, 2005). Másként fogalmazva, a skálafüggetlen struktúra a rendszer egészének magasabb teljesítményét generálja (természetesen mind a struktúrát, mind a rendszert és annak teljesítményét széles értelemben véve). A tanulmány eredményei igazolni látszanak ezt az elképzelést, hiszen a skálafüggetlens struktúra valóban magasabb szintű aggregált teljesítménnyel társul.

A skálafüggetlenség és az aggregált teljesítmény közötti kapcsolat nem csak a tudáshálózatok struktúrájának dimenziójában mutatható ki, hanem a vállalatok egyedi tudásszintjeinek eloszlása esetén is: a gazdaság kibocsátása nagyobb abban az esetben, ha a vállalatok tudásszintje a fokszámmal szinkronban lévő skálafüggetlen eloszlást mutat.

A dolgozat eredményei érdekes következtetésekhez vezetnek a sokféleség és az aggregált teljesítmény összefüggése kapcsán. Először is fontos elkülönítenünk a gazdasági teljesítményre ható, azt befolyásoló (exogén) sokféleséget, valamint a gazdasági tevékenység eredményeképpen előálló (endogén) sokféleséget. Az előbbi tekintetében azt az eredményt kapjuk, hogy a skálafüggetlen struktúrának jelentős szerepe van ebből a szempontból. A vállalatok közötti tudászintbeli szóródás csökkenti az aggregált kibocsátást, ha ez a szóródás fehér zaj jellegű, azonban növeli a kibocsátást, ha a tudásszintek skálafüggetlen eloszlást követnek és ez a skálafüggetlenség erősebbé válik a szóródás növekedésével. Az endogén sokféleség tekintetében azt találjuk, hogy a magasabb kibocsátási szint magasabb diverzitással, egyenlőtlenséggel jár együtt a paraméterek jelentős tartományán, azonban a legmagasabb kibocsátási szint mellett a vállalatok sokfélesége mérsékeltebb.

Az itt bemutatott és elemzett modell természetesen számos ponton kiegészíthető, tovább bővíthető. Egyfelől vizsgálható segítségével a technológiai diffúzió dinamikája és a hálózati struktúrák szerepe ebben a dinamikában. Egy további fontos kiterjesztése lehet a modellnek a hálózati kapcsolatok dinamikájának beépítése, amely a hálózati struktúra endogenizálását teszi lehetővé. Érdekes kiterjesztésként adódik a hálózati csomópontok más dimenzióba helyezése: amennyiben a csomópontokat vállalatok helyett régiókként értelmezzük, úgy a modell regionális szempontok elemzésére is alkalmas lehet. Ezen felül az alapul szolgáló egyensúlyi modell alkalmas kiterjesztése (például az SCGE modellezés eszközeivel) ezt a regionális perspektívát egy komplexebb modellkeretbe helyezheti.

Függelék

A keresleti függvény levezetése

Adott a hasznossági függvény és a költségvetési korlát. A megoldandó feladat:

$$U = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^\sigma \right)^{1/\sigma} \to \max \, , \quad \text{s.t.} \quad I = \sum_{i=1}^{N} p_i x_i \; . \tag{F.1}$$

A feladat Lagrange függvénye:

$$\Gamma = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^\sigma \right)^{1/\sigma} + \lambda \left(I - \sum_{i=1}^{N} p_i x_i \right) \; . \tag{F.2}$$

A Lagrange függvény x_i szerint vett első deriváltja:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} = \left(\sum_{j=1}^{N} x_j^\sigma \right)^{1/\sigma - 1} x_i^{\sigma-1} - \lambda p_i \; . \tag{F.3}$$

A deriváltat egyenlővé téve nullával kapjuk, hogy

$$\left(\sum_{j=1}^{N} x_j^\sigma \right)^{1/\sigma - 1} x_i^{\sigma-1} = \lambda p_i \; . \tag{F.4}$$

Az így kapott N egyenletből λ-kat kiküszöbölve azt kapjuk, hogy

$$\frac{x_i}{x_j} = \left(\frac{p_i}{p_j}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \tag{F.5}$$

bármely i, j párra (értelemszerűen $i = j$ esetén egyszerű azonosságot kapunk). Ha élünk a $j = 1$ helyettesítéssel, akkor a fenti összefüggést felírhatjuk, mint

$$x_i = \left(\frac{p_i}{p_1}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} x_1 \ , \tag{F.6}$$

azaz bármely x_i termék keresletét kifejezhetjük egy másik termék kereslete és az árarányok függvényében. A fenti összefüggéseket a költségvetési korlátba helyettesítve:

$$I = \sum_{i=1}^{N} p_i \left(\frac{p_i}{p_1}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} x_1 \tag{F.7}$$

adódik, amelyet kifejezve x_1-re kapjuk, hogy

$$x_1 = \frac{I}{\sum_{i=1}^{N} p_i \left(\frac{p_i}{p_1}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}} \ . \tag{F.8}$$

Vezessük be az $\varepsilon = 1/(1-\sigma)$ jelölést. Így a fenti összefüggést egyszerűsíthetjük:

$$x_1 = p_1^{-\varepsilon} \frac{I}{\sum_{i=1}^{N} p_i^{1-\varepsilon}} \ . \tag{F.9}$$

Amennyiben a fenti műveletsort tetszőleges j-re elvégezzük, könnyen belátható, hogy a j termék iránti kereslet:

$$x_j = p_j^{-\varepsilon} \frac{I}{\sum_{i=1}^{N} p_i^{1-\varepsilon}} \ . \tag{F.10}$$

Többek között Carter (2001) megmutatja, hogy az itt használt egyszerű CES hasznossági függvény $\sigma \leq 1$ esetén konkáv, így a releváns értelmezési tartományon az (F.10) által meghatározott szélsőértékhely globális maximumhely, vagyis hasznosságmaximum. □

A profitmaximum meghatározása

Adott az alábbi profitfüggvény:

$$\pi_i = p_i^{1-\varepsilon} \frac{I}{\sum_{j=1}^{N} p_j^{1-\varepsilon}} - wK_i^{-1/\alpha} p_i^{-\varepsilon/\alpha} \left(\frac{I}{\sum_{j=1}^{N} p_j^{1-\varepsilon}}\right)^{1/\alpha} \ . \tag{F.11}$$

A fenti profitfüggvény p_i szerinti deriváltja, figyelembe véve, hogy a $\sum_j p_j^{1-\varepsilon}$ összeg megfelelő deriváltja feltevésünk szerint zérus:

$$\text{(F.12)}\quad \frac{\partial \pi_i}{\partial p_i} = (1-\varepsilon)p_i^{-\varepsilon}\frac{I}{\sum_{j=1}^N p_j^{1-\varepsilon}} + \frac{\varepsilon}{\alpha} w K_i^{-1/\alpha} p_i^{-\varepsilon/\alpha-1}\left(\frac{I}{\sum_{j=1}^N p_j^{1-\varepsilon}}\right)^{1/\alpha} .$$

A fenti kifejezést 0-ra rendezve és p_i-t kifejezve adódik, hogy

$$\text{(F.13)}\qquad p_i = w^{\varphi} K_i^{-\varphi/\alpha}\left(\frac{\varepsilon}{(\varepsilon-1)\alpha}\right)^{\varphi}\left(\frac{I}{\sum_{j=1}^N p_j^{1-\varepsilon}}\right)^{\frac{(1-\alpha)\varphi}{\alpha}} ,$$

ahol $\varphi = (\alpha-\alpha\sigma)/(1-\alpha\sigma)$. Mivel az (F.11) profitfüggvény konvex és konkáv szakaszokkal is rendelkezhet, így e függvény konvexitásának/konkavitásának vizsgálatával a szélsőérték-hely jellege nem állapítható meg. Mivel azonban a profitfüggvény számunkra releváns értelmezési tartományán ($p_i > 0$) az (F.13) stacionárius pont egyértelműen létezik, elegendő csupán e stacionárius pont környezetében vizsgálni a profitfüggvény másodrendű tulajdonságait. Ehhez alkalmazzuk a profitfüggvény alábbi, egyszerűbb formáját:

$$\text{(F.14)}\qquad \pi(p) = ap^{1-\varepsilon} - bp^{-\varepsilon/\alpha} .$$

A profitfüggvény első deriváltja az (F.12) összefüggésnek megfelelően adható meg, ezek alapján pedig a szélsőértékhely az alábbi formát ölti:

$$\text{(F.15)}\qquad p = \left(\frac{b}{a}\right)^{\varphi}\left(\frac{\varepsilon}{\alpha(\varepsilon-1)}\right)^{\varphi} .$$

A profitfüggvény második deriváltja:

$$\text{(F.16)}\qquad \frac{\partial^2\pi}{\partial p^2} = (\varepsilon-1)\varepsilon a p^{-(\varepsilon+1)} - b\frac{\varepsilon}{\alpha}\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}+1\right)^{-\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}+2\right)} .$$

Az (F.15) szélsőértékhely akkor maximum, ha a $\pi(p)$ függvény második deriváltja negatív az adott pontban. Az (F.16) összefüggést egyszerűsítve és a maximumhely feltételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\text{(F.17)}\qquad \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+\alpha}\alpha^2\frac{a}{b} < p^{-1/\varphi} ,$$

amibe az (F.15) képletből behelyettesítve p értékét a stacionárius pontban egyszerűsítés után adódik a következő egyszerű összefüggés:

$$\text{(F.18)}\qquad \frac{1}{\varepsilon+\alpha}\alpha < \frac{1}{\varepsilon} .$$

Figyelembe véve az α paraméterre tett $0 < \alpha < 1$ kikötést, könnyen belátható, hogy a fenti feltétel mindig teljesül. Ez pedig azt jelenti, hogy a korábban meghatározott optimális árszint valóban maximális profitot eredményez. □

A szimulációs modell algoritmusa

- Első lépésként rögzítjük a modell paramétereit.
- Ezt követően a 3. szakaszban bemutatott hálózati modell segítségével előállítjuk az **A** kapcsolati mátrixot.
- Az **A** kapcsolati mátrix és az exogén változóként adott **k** tudás-vektor a (6) tudás-aggregátoron keresztül meghatározza a vállalatok számára hozzáférhető tudás mennyiségét, K_i-t, valamennyi i vállalat esetén.
- Ezt követően a gazdaság általános egyensúlyi állapotát határozzuk meg, vagyis azt a w bérszintet és **p** árvektort, amelyre mind a termékpiacokon, mind pedig a munkapiacon egyensúly áll fenn. Az egyensúly meghatározásának menete a következő:
  - Kiválasztunk egy induló bérszintet. Közelítő választásként adódik a szimmetrikus esetben ($K_i = K_j = \overline{K}$, minden i és j esetén) analitikusan is levezethető egyensúlyi bér.
  - A kiválasztott bérszint és a többi paraméter alapján megoldjuk az egyensúlyi árakat meghatározó (12') egyenletrendszert, így megkapjuk az adott bérszint esetén a termékpiacok egyensúlyát biztosító árvektort.
  - A kapott árvektor és a (9) keresleti függvények segítségével megadható az egyes termékekből keresett és a piaci egyensúly miatt egyben termelt mennyiség, azaz a vállalati kibocsátások **y** vektora.
  - A vállalatok kibocsátása a (4) termelési függvények alapján meghatározza a vállalatok által felhasznált munkamennyiséget, amit a munkafelhasználás **L** vektora ad meg.
  - A munkafelhasználás vektora lehetővé teszi, hogy ellenőrizzük a munkapiaci egyensúly feltételének teljesülését. Amennyiben a munkapiaci egyensúly nem teljesül, új bérszintet választunk és ennek segítségével ismét elvégezzük a fenti iterációt, meghatározzuk az árvektort, majd ebből a munka-felhasználási vektort. Munkapiaci túlkereslet esetén a bérszintet értelemszerűen növelni, míg túlkínálat esetén csökkentenünk kell, hogy az egyensúlyi helyzet irányába haladjunk.

  A fenti folyamat iterációjával végül eljutunk ahhoz a bérszinthez, amelyre a munkapiac és valamennyi termékpiac is egyensúlyba kerül.

Irodalom

1. Abrahamson, E., Rosenkopf, L. (1997): Social Network Effects on the Extent of Innovation Diffusion: A Computer Simulation. *Organization Science*, 8(3), 289-309.

2. Adolfson, M., Laseen, S., Linde, J. Villani, M. (2007): Bayesian estimation of an open economy DSGE model with incomplete pass through. *Journal of International Economics*, 72(2), 481–511.
3. Aghion, P., Howitt, P. (1992): A Model of Growth Through Creative Destruction. *Econometrica*, 60, 323–351.
4. Almeida P., Kogut, B. (1999): Localization of knowledge and the mobility of engineers. *Management Science*, 45, 905–917.
5. Anselin, L., Varga, A., Acs, Z. (1997): Local Geographic Spillovers between University Research and High Technology Innovations. *Journal of Urban Economics*, 42(3), 422–448.
6. Audretsch, D. B., Feldman, M. P. (1996): R&D Spillovers and the Geography of Innovation and Production. *American Economic Review*, 86(4), 253–273.
7. Baksa, D., Benk, Sz., Jakab, M. Z. (2009): A Költségvetési Tanács DSGE modelljének rövid leírása. Magyar Köztársaság Költségvetési Tanácsa.
8. Bala, V., Goyal, S. (2000): A Noncooperative Model of Network Formation. *Econometrica*, 68(5), 1181–1230.
9. Balconi, M., Breschi, S., Lissoni, F. (2004): Networks of inventors and the role of academia: An exploration of Italian Patent data. *Research Policy*, 33, 127–145.
10. Barabási Albert-László (2002): *Behálózva. A hálózatok új tudománya.* Magyar könyvklub.
11. Barabási, A-L., Albert, R. (1999): Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286, 509–512.
12. Barabási, A-L., Albert, R., Jeong, H. (2000): Scale-free characteristics of random networks: The topology of the world wide web. *Physica A*, 281, 69–77.
13. Bollobás, Béla (2001): *Random Graphs*, 2nd Edition, Cambridge University Press.
14. Breschi, S., Lissoni, F.(2003): *Mobility and social networks: localised knowledge spillovers revisited.* CESPRI, working paper no. 142.
15. Buchanan, M. (2003): *Nexus, avagy "kicsi-a-világ". A hálózatok úttörő tudománya.* Typotex, Budapest.
16. Carayol, N., Roux, P. (2009): Knowledge flows and the geography of networks: A strategic model of small world formation. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 71(2), 414–427.
17. Carter, M. (2001): *Foundations of Mathematical Economics.* MIT Press, Cambridge, MA.
18. Christoffel, K. Coenen, G. Warne, A. (2008): The new area-wide model of the euro area – a micro-founded open-economy model for forecasting and policy analysis. Working Paper Series 944, European Central Bank.
19. Chung, F., Lu, L. (2006): *Complex Graphs and Networks.* AMS, US.
20. Cohen, W. M., Levinthal, D. A. (1990): Absorptive capacity: A new perspective on learning and innovation. *Administrative Science Quarterly*, 35(1), 128–152.
21. Cowan, R. (2005): Network models of innovation and knowledge diffusion. In: Breschi, S., Malerba, F. (eds.): *Clusters, Networks and Innovation*, Oxford University Press, Oxford, 29–53.

22. Cowan, R. Jonard, N. (2004): Network structure and the diffusion of knowledge. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 28(8), 1557–75.
23. Cowan, R., Jonard, N., Zimmermann, J.-B. (2006): Evolving networks of inventors. *Journal of Evolutionary Economics*, 16(1), 155–174.
24. Csermely, P. (2005): *A rejtett hálózatok ereje*. Vince Kiadó, Budapest.
25. Dib, A. (2001): *An Estimated Canadian DSGE Model with Nominal and Real Rigidities*. Working Papers 01-26, Bank of Canada.
26. Dixit, A. K., Stiglitz, J. E. (1977): Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity. *American Economic Review*, 67(3), 297–308.
27. Duarte, M., Wolman, A. L. (2002): *Regional inflation in a currency union: fiscal policy vs. fundamentals*. International Finance Discussion Papers 746, Board of Governors of the Federal Reserve System (U.S.).
28. Erceg C.J., Guerrieri, L., Gust C. (2006): *SIGMA: a new open economy model for policy analysis*. International Finance Discussion Papers 835, Board of Governors of the Federal Reserve System (U.S.).
29. Erdős, P. Rényi, A. (1959): On Random Graphs I. In *Publ. Math*. Debrecen, 6, 290–297.
30. Feldman, M. P. (1994): *The Geography of Innovation*. Boston, Kluwer Academic Publisher.
31. Fujita, M., Krugman, P. R., Venables, A. J. (1999): *The Spatial Economy: Cities, Regions and International Trade*. MIT Press, Cambridge, MA.
32. Granovetter, M. (1983): The Strength of Weak Ties: A Network Theory Revisited. *Sociological Theory*, 1, 201–233.
33. Granovetter, M. S. (1973): The Strength of Weak Ties. *American Journal of Sociology*, 78(6), 1360–80.
34. Grossman, G. M., Helpman, E. (1994): Endogenous Innovation in the Theory of Growth. *Journal of Economic Perpectives*, 8, 23–44.
35. Harrison, R., Nikolov, K., Quinn, M., Ramsay, G., Scott, A., Thomas, R. (2005): *The Bank of England Quarterly Model*. London: Bank of England.
36. Jackson, M. O., Wolinsky, A. (1996): A Strategic Model of Social and Economic Networks. *Journal of Economic Theory*, 71(1), 44–74.
37. Jaffe, A. B. (1989): Real Effects of Academic Research. *American Economic Review*, 79(5), 957–970.
38. Jaffe, A. B., Trajtenberg, M. (2002): *Patents, Citations and Innovations: A Window on the Knowledge Economy*. MIT Press, Cambridge, MA.
39. Jakab, Z. M., Világi, B. (2008): *An estimated DSGE model of the Hungarian economy*. MNB Working Papers 2008/9, Magyar Nemzeti Bank (The Central Bank of Hungary).
40. Johansson, B., Forslund, U. (2008): The analysis of location, co-location and urbanization economies. In: Karlsson (ed.): *Handbook of Research on Cluster Theory*, Edward Elgar, UK.
41. Kaldor, N. (1966): Marginal Productivity and the Macro-Economic Theories of Distribution: Comment on Samuelson and Modigliani. *The Review of Economic Studies*, 33(4), 309–319.
42. Karinthy Frigyes (1929): *Minden másképpen van (Ötvenkét vasárnap)*. Athenaeum, Irodalmi és Nyomdai Rt., Budapest.
43. Marshall, Alfred (1890): *Principles of Economics*. London, Macmillan.

44. Mendoza, G. E. (1991): Real Business Cycles in a Small Open Economy. *The American Economic Review*, 81, 797–818.
45. Ratto, M., Roeger, W., Veld, Jan in 't (2009): QUEST III: An estimated open economy DSGE model of the euro area with fiscal and monetary policy. *Economic Modelling*, 26(1), 222–233.
46. Romer, P. (1990): Endogenous Technological Change. *Journal of Political Economy*, 98, S71–S102.
47. Sebestyén, T. (2010): *Innovation and diversity in a dynamic knowledge network*. KRTI Műhelytanulmányok, 2010/1.
48. Sebestyén, T., Parag, A. (2010): The Dynamics of Link Formation in Patent Innovation Networks. *Perspectives of Innovation, Economics and Business*, 4(1) 21–25.
49. Smets, F. Wouters, R. (2007): Shocks and Frictions in US Business Cycles: A Bayesian DSGE Approach. *American Economic Review*, 97(3), 586–606.
50. Solow, R. M. (1957): Technical Change and the Aggregate Production Function. *Review of Economics and Statistics*, 39, 312–320.
51. Sorenson, O. (2005): Social Networks, Informal Complexity and Industrial Geography. In: Fornahl, D., Zellner, C., Audretsch, D. B. (eds.): *The Role of Labour Mobility and Informal Networks for Knowledge Flows.* Springer.
52. Travers, J., Milgram, S. (1969): An Experimental Study of the Small World Problem. *Sociometry*, 32, 425–443.
53. Watts, D. J., Strogatz, S. H. (1998): Collective dynamics of ,,small-world" networks. *Nature*, 393, 409–410.
54. Zucker, L., Darby, M., Armstrong, J. (1994): *Intellectual capital and the firm: The technology of geographically localized knowledge spillovers.* NBER Working Paper Series, Working Paper no. 4946.

THE ROLE FOR THE STRUCTURE OF KNOWLEDGE NETWORKS IN A SIMPLE MODEL OF GENERAL EQUILIBRIUM

The role of networks gains increasing interest in the literature on innovation and the special effects of network structure is in the focus of attention in a growing number of fields. In this paper we analyze the effects of the structure of inter-firm knowledge networks on the aggregate performance of the economy relying on this network. The effect of knowledge transfer through explicit network connections is built into a simple general equilibrium model and simulation techniques are used to analyze the resulting model. The results show that network structure has a pronounced effect on the aggregate performance of the economy: a higher level of scale-freeness in the structure leads to a higher level of aggregate output. Further results shed light on the role of special dimensions of diversity in the aggregate performance of the economy: scale-free structures have a positive effect also in this respect.
Keywords: Network structure, knowledge networks, general equilibrium, scale-free structures.