NÉHÁNY SPECIÁLIS OLIGOPOL PROBLÉMA[1]

SZIDAROVSZKY FERENC – MOLNÁR SÁNDOR
Budapesti Corvinus Egyetem – Szent István Egyetem

A klasszikus oligopol játék néhány kiterjesztését mutatjuk be. Tárgyalásra kerül a bizonytalan árfüggvények esete, amikor a becslési hibát valószínűségi változónak tekintjük, és a kifizetőfüggvény várható értékének maximalizálása és szórásának minimalizálása egy többcélú optimumfeladatra vezet. Ha a kifizetőfüggvények nem folytonosak, akkor a klasszikus módszerek nem alkalmazhatók, így újabb módszer válik szükségessé. A részlegesen kooperáló játékosokat leíró modell speciális esetként tartalmazza mind a nem-kooperatív és a kooperatív játékok eseteit. Kimutatjuk, hogy többféle olyan esetet is tartalmaz, amikor a játékosoknak a többiek vállalatában érdekeltsége van. Az utolsó modellben feltételezzük, hogy az állami hatóság megbünteti (vagy jutalmazza) azokat a vállalatokat, amelyek egy előírt szennyeződésmennyiségnél többet (vagy kevesebbet) bocsátanak ki egyenként vagy együttesen.

1 Bevezetés

Jelen cikk szerzőinek hosszú és gyümölcsöző kapcsolata van a SZIGMA folyóirattal, amihez az is hozzájárul, hogy a korábbi és jelenlegi főszerkesztő a szerzők régi barátja, volt hallgatója vagy kollégája. Ez a kapcsolat 1976-ban kezdődött, és ezután 18 tanulmány került publikálásra. A SZIGMA komoly nemzetközi érdeklődés középpontjába került, például az Arizonai Egyetem könyvtárában is megtalálható. Jelen cikkünkben a SZIGMA 50 éves jubileumához szeretnénk hozzájárulni néhány újszerű, módosított oligopol modell bemutatásával.

A matematikai közgazdaságtan egyik fontos területe a játékelmélet és ezen belül az oligopol probléma. A legegyszerűbb, klasszikus model Cournot (1838) munkájához vezethető vissza, az ő úttörő kutatásai alapján számos kutató vizsgálta ezt a kérdéskört. Okuguchi (1976) munkája az első összefoglaló mű, amely a 70-es évek közepéig elért eredményeket mutatja be. Ezek többtermékes általánosításait tárgyalja az Okuguchi és Szidarovszky (1999) monográfia, amelyben néhány módosított modellt is bemutatnak, beleértve a modellek dinamikus kiterjesztését és stabilitási vizsgálatukat. A legegyszerűbb modell a következőképpen írható le. Tekintsünk n vállalatot, akik ugyanazt a terméket gyártják és egy közös piacon értékesítik. Jelölje $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a gyártott és piacra bocsátott termékmennyiségeket, $X = \sum_{i=1}^{n} x_i$ a teljes termék

[1]Beérkezett: 2019. november 5. E-mail: szidarka@gmail.com, molnar.sandor@gek.szie.hu.

kibocsátást és $X_k = \sum_{i \neq k} x_i$ a k-adik vállalat szempontjából a többi vállalat együttes termékmennyiségét. A piaci ár, $f(X)$, a teljes termékmennyiség monoton csökkenő függvénye, és a k-adik vállalat költségfüggvénye, $C_k(x_k)$ a vállalat termékkibocsátásának szigorúan növekvő függvénye. Ezek alapján a k-adik vállalat profitja a bevétel és kiadás különbsége:

$$\Pi_k(x_k, X_k) = x_k f(x_k + X_k) - C_k(x_k). \tag{1.1}$$

Ha L_k jelöli a k-adik vállalat kapacitáskorlátját, akkor egy n-személyes játékot definiálhatunk, ahol a vállalatok a játékosok és a k-adik játékos stratégiahalmaza a $[0, L_k]$ zárt intervallum és kifizetőfüggvénye $\Pi_k(x_k, X_k)$. Általánosan a következőket teszik fel az ár és költségfüggvényekről:

(A) f kétszer folytonosan differenciálható a $[0, \sum_{k=1}^{n} L_k]$ intervallumon, és C_k a $[0, L_k]$ intervallumon

(B) $f'(X) < 0$

(C) $x_k f''(X) + f'(X) \leq 0$

(D) $f'(X) - C_k''(x_k) < 0$

az értelmezési tartományba eső összes változóértékek és $k = 1, 2, \ldots, n$ esetén. Az (A) feltétel az analitikus vizsgálatot könnyíti meg, a (B) feltétel szerint f szigorúan csökkenő. A (C) feltétel teljesül, ha f konkáv, azonban ez nem szükséges. Hasonló a helyzet a (D) feltételnél, ami biztosan teljesül, ha C_k konvex.

Speciális modellek esetén az f függvény linearitását tételezik fel, $f(X) = A - BX$ ahol A és B pozitív konstansok. Ha C_k konvex, akkor az összes feltétel teljesül. Gyakran hiperbolikus árfüggvénnyel is dolgoznak: $f(X) = \frac{A}{X}$, ahol $A > 0$. Ez a függvény azonban 0-ban nincs értelmezve, így az analitikus vizsgálatokban ez nehézséget jelent. A továbbiakban a klasszikus modellnek néhány érdekes kiterjesztését mutatjuk be.

2 Bizonytalan árfüggvény esete

Tegyük fel, hogy az f függvény korábbi ár adatok alapján lett megbecsülve, így hibával terhelt. A pontos függvényről feltesszük, hogy a k-dik játékos azt hiszi, hogy ez $f(X) + \eta_k$, ahol η_k egy valószínűségi változó, ahol $E(\eta_k) = 0$ és $\mathrm{Var}(\eta_k) = \delta_k^2$. Ekkor (1.1) alapján

$$E(\Pi_k) = x_k (f(X) + E(\eta_k)) - C_k(x_k) = x_k f(X) - C_k(x_k) \tag{2.1}$$

és

$$\mathrm{Var}(\Pi_k) = x_k^2 \delta_k^2, \tag{2.2}$$

amelyek a k-adik játékos számára a profit várható értékét és varianciáját jelentik. A játékos a várható érték maximalizálására és a variancia csökkentésére törekszik, így egy két célfüggvényes optimumfeladatot ír fel,

$$x_k f(X) - C_k(x_k) \to \max \quad \text{és} \quad x_k^2 \delta_k^2 \to \min .$$

A súlyozásos módszer alapján ezt egy közönséges optimumfeladatra vezeti vissza

$$x_k f(x_k + X_k) - C_k(x_k) - \alpha_k x_k^2 \delta_k^2 \to \max, \tag{2.3}$$

ahol α_k a két célfüggvény relatív fontosságát mutatja.

Ez a feladat ekvivalens az (1.1) profitfüggvény maximalizálásával, ahol a költségfüggvényt $C_k(x_k) + \alpha_k x_k^2 \delta_k^2$ helyettesíti. Ha az eredeti oligopol probléma kielégíti az (A)$-$(D) feltételeket, akkor a (2.3) kifizetőfüggvényekkel rendelkező játék is kielégíti. A k-dik játékos válaszfüggvénye (2.3) maximalizálásával adódik a $[0, L_k]$ intervallumon. A (2.3) függvény szigorúan konkáv, első és másodrendű deriváltja x_k szerint

$$f(x_k + X_k) + x_k f'(x_k + X_k) - C_k'(x_k) - 2\alpha_k \delta_k^2 x_k$$

és

$$2f'(x_k + X_k) + x_k f''(x_k + X_k) - C_k''(x_k) - 2\alpha_k \delta_k^2 < 0,$$

így a k-dik játékos válaszfüggvénye

$$R_k(X_k) = \begin{cases} 0, & \text{ha } f(X_k) - C_k'(0) \le 0 \\ L_k & \text{ha } f(L_k + X_k) + L_k f'(L_k + X_k) - C_k'(L_k) - 2\alpha_k L_k \delta_k^2 \ge 0 \\ \widetilde{x}_k & \text{különben,} \end{cases} \tag{2.4}$$

ahol $\widetilde{x}_k$ az

$$f(x_k + X_k) + x_k f'(x_k + X_k) - C_k'(x_k) - 2\alpha_k \delta_k^2 x_k = 0 \tag{2.5}$$

egyenletnek a nyílt $(0, L_k)$ intervallumon való megoldása. A harmadik esetben $x_k = 0$ esetén (2.5) értéke pozitív, $x_k = L_k$ esetében negatív, és szigorúan csökken, így a (2.5) egyenletnek egyértelmű megoldása van. A válaszfüggvényeket felírhatjuk a teljes termékmennyiség függvényében is:

$$\overline{R}_k(X) = \begin{cases} 0, & \text{ha } f(X) - C_k'(0) \le 0 \\ L_k, & \text{ha } f(X) + L_k f'(X) - C_k'(L_k) - 2\alpha_k L_k \delta_k^2 \ge 0 \\ \overline{x}_k & \text{különben,} \end{cases} \tag{2.6}$$

ahol $\overline{x}_k$ az

$$f(X) + x_k f'(X) - C_k'(x_k) - 2\alpha_k \delta_k^2 x_k = 0 \tag{2.7}$$

egyenlet egyértelmű megoldása a $(0, L_k)$ nyílt intervallumon. Az első két esetben $\overline{R}_k(X)$ konstans, a harmadik esetben pedig $\overline{R}_k(X)$ csökkenő függvénye X-nek. Ez abból látható, hogy ha a (2.7) egyenletben az $x_k = \overline{R}_k(X)$ helyettesítését elvégezzük, majd X szerint differenciáljuk, akkor

$$\overline{R}_k'(X) = -\frac{f'(X) + \overline{R}_k(X) f''(X)}{f'(X) - C_k''\left(\overline{R}_k(X)\right) - 2\alpha_k \delta_k^2} \le 0 \tag{2.8}$$

adódik. A (2.6)-ban adott függvény folytonos, így $\overline{R}_k(X)$ az egész tartományon nem növekvő. Az egyensúlyi összes termékmennyiség nyilvánvalóan a

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{R}_k(X) - X = 0 \tag{2.9}$$

egyenlet megoldása. A bal oldal $X = 0$ esetben nemnegatív, $X = \sum_{k=1}^{n} L_k$ esetén nempozitív, és szigorúan csökkenő. Ezért az X^* megoldás létezik és egyértelmű, valamint az egyes játékosok egyensúlyi stratégiáit az

$$x_k^* = \overline{R}_k(X^*)$$

egyenlet szolgáltatja.

Írjuk át a (2.7) egyenletet

$$f(X) + x_k f'(X) - C_k'(x_k) = 2\alpha_k \delta_k^2 x_k \tag{2.10}$$

alakra, ahol a bal oldal szigorúan csökken x_k-ban, ezért a megoldás is csökken, ha α_k vagy δ_k növekszik. Kimutatható továbbá, hogy a teljes termékmennyiség az egyensúlypontban csökken, ha bármely α_k vagy δ_k érték növekszik. Tegyük fel például, hogy $\overline{\alpha}_k < \alpha_k$, de a többi paraméter értéke nem változik. Jelölje $\overline{X}$ és X a teljes termékmennyiséget ebben a két esetben. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy $\overline{X} < X$. Akkor $i \neq k$ esetén

$$\overline{R}_i(\overline{X}) = R_i(\overline{X}) \geq R_i(X), \quad \text{valamint} \quad \overline{R}_k(\overline{X}) \geq R_k(\overline{X}) \geq R_k(X),$$

amiből

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} \overline{R}_i(\overline{X}) \geq \sum_{i=1}^{n} R_i(X) = X, \tag{2.11}$$

ami ellentmondás. Itt $\overline{R}_j$ és R_j jelöli a játékosok (2.6) választófüggvényeit $\overline{\alpha}_k$ és α_k mellett. A lineáris és a hiperbolikus esetek tárgyalása, valamint dinamikus kiterjesztésük stabilitási vizsgálata a Chiarella és Szidarovszky (2009) és a Chiarella, Matsumoto és Szidarovszky (2013) tanulmányokban találhatók.

3 Szakadásos kifizetőfüggvények esete

Tegyük fel először, hogy az összes termelő a termékmennyiség arányában bocsát ki szennyeződést, amiből maximum K_k mennyiséget a cég vagy kitisztít vagy elszállíttat, ha ennél több a szennyeződés, akkor egy külső céget fogad fel, akinél az elszállítás egységköltsége is nagyobb és ezen kívül a felvonulás költsége is megterheli. Jelölje a_k a szennyeződési kibocsátás arányát és b_k a cég tisztítási vagy elszállítási egységköltségét. Ugyanez a külső cég esetében $\overline{b}_k$, és φ_k a felvonulási költség. Ezek alapján a k-dik játékos profitfüggvénye

$$\Pi_k(x_k, X_k) = x_k(A - BX_k - Bx_k) - c_k x_k - \begin{cases} \alpha_k x_k, & \text{ha } a_k x_k \leq K_k \\ \varphi_k + \beta_k x_k & \text{különben,} \end{cases} \tag{3.1}$$

ahol $f(X) = A - BX$, $C_k(x_k) = c_k x_k$, $\alpha_k = a_k b_k$, $\beta_k = a_k \overline{b}_k$.

A (3.1) függvénynek az $x_k = K_k/a_k$ helyen szakadása van, így az előző esetben alkalmazott módszer nem alkalmazható az egyensúlypont létezésének és egyértelműségének az igazolásához. A létezés bizonyítható, azonban az egyértelműség nem igaz, amint azt a következő példa mutatja. Legyen $n = 2$, $A = 14$, $B = 2$, $a_k = \alpha_k = \varphi_k = K_k = 1$, $\beta_k = L_k = 2$ $(k = 1, 2)$. Ekkor a két játékos válaszfüggvénye, ahol $X_k = x_{3-k}$,

$$R_k(X_k) = \begin{cases} 2, & \text{ha } 0 \leq X_k < 1{,}5 \\ \{1; 2\}, & \text{ha } X_k = 1{,}5 \\ 1 & \text{ha } X_k > 1{,}5, \end{cases}$$

amiből azonnal látszik, hogy az $x_1 = 1, x_2 = 2$ és az $x_1 = 2, x_2 = 1$ stratégiák egyensúlypontot adnak. Ezt a modellt a (Szidarovszky és Matsumoto, 2016) tanulmány tárgyalja részletesen.

Hasonló modell adódik, ha $a_k x_k > K_k$ esetén K_k szennyeződést a cég saját maga tisztít vagy szállít el, és csak a K_k feletti $a_k x_k - K_k$ mennyiséget bízza a külső cégre.

A (Burr, Gardini és Szidarovszky, 2015) cikk egy hasonló modellt mutat be és elemez diszkrét dinamika feltételezésével. Tegyük most fel, hogy $f(X) = A - BX, C_k(x_k) = c_k x_k$, és a $(t-1)$-dik időpontban x_k a k-dik játékos termékmennyisége.

A t-dik időpontban a játékos válaszfüggvénye (2.4) alapján

$$R_k(X_k) = \begin{cases} 0, & \text{ha } f(X_k) - C_k'(0) \leq 0 \\ L_k & \text{ha } f(L_k + X_k) + L_k f'(L_k + X_k) - C_k'(L_k) \geq 0 \\ \widetilde{x}_k & \text{különben}, \end{cases} \tag{3.2}$$

ahol $\widetilde{x}_k$ az

$$f(x_k + X_k) + x_k f'(x_k + X_k) - C_k'(x_k) = 0 \tag{3.3}$$

egyenlet megoldása. Ennek az első két esetre való kiterjesztése lenne a legjobb döntése a játékosnak a t-dik időpontban, ha statikus becslést feltételezünk X_k-ra.

Azonban a játékos a következő feltételeket akarja teljesíteni:

– ha $\widetilde{x}_k$ és x_k közel van egymáshoz, akkor a változtatási költségek miatt a játékos nem akar változtatást;

– ha $\widetilde{x}_k$ nagyon kicsi, akkor nem érdemes kevés termékmennyiséggel a piacon maradnia.

Ezek alapján a módosított válaszfüggvény a következő

$$\overline{R}_k(X_k) = \begin{cases} x_k, & \text{ha } |\widetilde{x}_k - x_k| \leq \varepsilon_k \\ 0, & \text{ha } \widetilde{x}_k < l_k \\ \widetilde{x}_k & \text{különben}, \end{cases} \tag{3.4}$$

ahol ε_k és l_k a vállalat által meghatározott kicsi értékek.

Vegyük észre, hogy ennek a függvénynek az $\widetilde{x}_k$ szempontjából $x_k - \varepsilon_k, x_k + \varepsilon_k$ és $x_k = l_k$ helyeken szakadása van. Kimutatható, hogy végtelen sok egyensúlypont létezik, amelyet az $n = 2$ esetben az

$$\begin{aligned} \frac{A-c_1}{B} - 2\frac{\varepsilon_1}{K_1} \leq x_2 + 2x_1 \leq \frac{A-c_1}{B} + 2\frac{\varepsilon_1}{K_1} \\ \frac{A-c_2}{B} - 2\frac{\varepsilon_2}{K_2} \leq x_1 + 2x_2 \leq \frac{A-c_2}{B} + 2\frac{\varepsilon_2}{K_2} \end{aligned} \tag{3.5}$$

egyenlőtlenségek írnak le, ahol K_1, és K_2 a két játékos dinamikus

$$x_k(t) = x_k(t-1) + K_k \left(\overline{R}_k(X_k(t-1)) - x_k(t-1)\right) \tag{3.6}$$

egyenletének együtthatója. A (3.5) halmaz az eredeti oligopol játék egyensúlypontját is tartalmazza.

4 Részlegesen kooperáló játékosok esete

Tekintsük ismét a bevezetésben leírt alapesetet. Tegyük fel, hogy az egyes játékosok a saját profitjukon kívül a többiek profitjához is hozzá kívánnak járulni. Ez például úgy történhet, hogy a következő kifizetőfüggvényt választják:

$$\varphi_k = \Pi_k + \sum_{l \neq k} \alpha_{kl} \Pi_l \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.1}$$

azaz az l-dik ($l \neq k$) játékos profitjának α_{kl} részét is szerepeltetik a k-dik játékos kifizetőfüggvényében. Ezt a konstrukciót Cyert és DeGroot (1973) alapján részleges kooperációnak nevezzük. Az $\alpha_{kl} \equiv 0$ esetben az eredeti játékot kapjuk vissza, az $\alpha_{kl} \equiv 1$ esetben pedig az együttes profitot maximalizálja az összes játékos. A φ_k függvény átírható a következő alakra:

$$\varphi_k = (x_k + S_k) f(x_k + X_k) - C_k(x_k) - \sum_{l \neq k} \alpha_{kl} C_l(x_l) \tag{4.2}$$

ahol $S_k = \sum_{l \neq k} \alpha_{kl} x_l$.

Vegyük észre, hogy

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k} = f(x_k + X_k) + (x_k + S_k) f'(x_k + X_k) - C_k'(x_k)$$

és

$$\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_k^2} = 2f'(x_k + X_k) + (x_k + S_k) f''(x_k + X_k) - C_k''(x_k) < 0,$$

azaz a k-dik játékos φ_k kifizetőfüggvénye szigorúan konkáv, így a válaszfüggvény egyértelmű:

$$R_k(X_k, S_k) = \begin{cases} 0, & \text{ha } f(X_k) + S_k f'(X_k) - C_k'(0) \leq 0 \\ L_k & \text{ha } f(L_k + X_k) + (L_k + S_k) f'(L_k + X_k) - C_k'(L_k) \geq 0 \\ \widetilde{x}_k & \text{különben,} \end{cases} \tag{4.3}$$

ahol $\widetilde{x}_k$ az

$$f(x_k + X_k) + (x_k + S_k)f'(x_k + S_k) - C_k'(x_k) = 0 \tag{4.4}$$

egyenlet egyetlen megoldása. A (4.3) válaszfüggvényt átírhatjuk, mint X és S_k függvényét

$$\overline{R}_k(X, S_k) = \begin{cases} 0, & \text{ha } f(X) + S_k f'(X) - C_k'(0) \leq 0 \\ L_k & \text{ha } f(X) + (L_k + S_k)f'(X) - C_k'(L_k) \geq 0 \\ \overline{x}_k & \text{különben,} \end{cases} \tag{4.5}$$

ahol $\overline{x}_k$ az

$$f(X) + (x_k + S_k)f'(X) - C_k'(x_k) = 0 \tag{4.6}$$

egyenlet egyértelmű megoldása a $(0, L_k)$ nyílt intervallumon. Kimutatható, hogy az egyensúlyi össztermék mennyisége csökken, ha egy vagy több α_k érték növekszik, amihez a (C)$-$(D) feltételeket módosítani kell:

(C') $$(1 + \alpha_k)f' + vf'' \leq 0$$

(D') $$(1 - \alpha_k)f' - C_k'' < 0$$

az összes $X, v \in [0, \sum_{k=1}^n L_k]$ és $x_k \in [0, L_k]$ esetén, ahol feltesszük, hogy a játékosok azonosan kezelik a többieket, azaz $\alpha_{kl} \equiv \alpha_k$ $(l \neq k)$. A Bischi, Chiarella, Kopel és Szidarovszky (2010) monográfia külön fejezetet szán a részlegesen kooperatív oligopol játékoknak.

Matsumoto, Merlone és Szidarovszky (2010) kimutatja, hogy többféle vállalati összefonódás matematikailag a (4.1) modellre vezethető vissza.

Tegyük fel először, hogy a k-dik vállalatnak a többi vállalatban δ_{kl} érdekeltsége van $(l \neq k)$, ekkor kifizetőfüggvénye a

$$\varphi_k = \Big(1 - \sum_{l \neq k} \delta_{lk}\Big)\Pi_k + \sum_{l \neq k} \delta_{kl}\Pi_l \tag{4.7}$$

alakban írható fel. Ha bevezetjük az $\alpha_{kl} = \delta_{kl}/(1 - \sum_{l \neq k} \delta_{lk})$ változókat, akkor φ_k maximalizálása ekvivalens a (4.1) függvény maximalizálásával.

Tegyük fel, hogy a k-dik játékos csak a saját érdekeltségét tekinti a többi vállalatban, de ignorálja mások érdekeltségét a saját vállalatában. Ekkor azonnal (4.1) adódik az $\alpha_{kl} = \delta_{kl}$ választással.

Az indirekt tulajdonú érdekeltségek esetén a k-dik játékos kifizetőfüggvénye

$$\varphi_k = \Pi_k + \sum_{l \neq k} \delta_{kl}\varphi_l\,, \tag{4.8}$$

amely tartalmazza a saját vállalati profilját és a többi vállalatból származó részesedését is. Ha bevezetjük a $D = (\delta_{kl})$ mátrixot a $\delta_{kk} = 0$ diagonális elemekkel, akkor (4.8) a

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{\Pi} + \mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}$$

alakban írható fel, ahol $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_k)$, $\mathbf{\Pi} = (\Pi_k)$. Innen

$$\boldsymbol{\varphi} = (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1}\mathbf{\Pi}$$

adódik. Vegyük észre, hogy $\sum_{l \neq k} \delta_{lk} < 1$ feltételezésével az $\mathbf{I} - \mathbf{D}$ mátrix M-mátrix nemnegatív inverzzel. Ha b_{kl} jelöli az $(\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1}$ elemeit, akkor (4.9)-ből

$$\varphi_k = \sum_{l=1}^{n} b_{kl} \Pi_l \tag{4.10}$$

adódik, ami az $\alpha_{kl} = b_{kl}/b_{kk}$ választással (4.1)-gyel ekvivalens optimumproblémává alakul.

Nettó indirekt tulajdonú érdekeltségek esetén (4.8) a következőképpen módosul

$$\varphi_k = \Big(1 - \sum_{l \neq k} \delta_{lk}\Big)\Big(\Pi_k + \sum_{l \neq k} \delta_{kl} \varphi_l^B\Big), \tag{4.11}$$

ahol a bruttó profit φ_l^B értékek az

$$\varphi_k^B = \Pi_k + \sum_{l \neq k} \delta_{kl} \varphi_l^B \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.12}$$

egyenletrendszer megoldásai. Innen

$$\boldsymbol{\varphi}^B = (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} \mathbf{\Pi},$$

és a

$$\mathbf{\Delta} = \operatorname{diag}\Big(1 - \sum_{l \neq 1} \delta_{l1},\ 1 - \sum_{l \neq 2} \delta_{l2},\ \ldots,\ 1 - \sum_{l \neq n} \delta_{ln}\Big)$$

mátrix segítségével (4.11) alapján

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{\Delta}(\mathbf{\Pi} + \mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}^B) &= \mathbf{\Delta}\left((\mathbf{I} - \mathbf{D})(\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1}\mathbf{\Pi} + \mathbf{D}(\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1}\mathbf{\Pi}\right) = \\ &= \mathbf{\Delta}(\mathbf{I} - \mathbf{D} + \mathbf{D})(\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1}\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Delta}(\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1}\mathbf{\Pi},\end{aligned}$$

amiből látható, hogy $k = 1, 2, \ldots, n$ esetén

$$\varphi_k = \Big(1 - \sum_{l \neq k} \delta_{lk}\Big) \sum_{l=1}^{n} b_{kl} \Pi_l, \tag{4.13}$$

amely a (4.1) függvény maximumfeladatával ekvivalens az $\alpha_{kl} = b_{kl}/b_{kk}$ választással.

5 Környezeti szennyezés büntetésének figyelembevétele

Most azt is tegyük fel a bevezetésben vázolt modellhez, hogy az egyes játékosok a termelés mellett szennyeződést is kibocsátanak, ami arányos a termékmennyiséggel. Ha x_k a k-dik játékos termékmennyisége, akkor $e_k x_k$ a kibocsátott szennyeződés mennyisége. Az állami hatóság a maximálisan megengedhető E_k szennykibocsátást engedélyez számára, és ha ezt a játékos túllépi, akkor büntetést fizet, ami arányos az $e_k x_k - E_k$ különbséggel. Ha pedig az előírtnál kevesebbet bocsát ki, akkor az $E_k - e_k x_k$ különbséggel arányos jutalmat kap. Ha m_k jelöli az arányossági tényezőt, akkor a játékos kifizetőfüggvénye a következő:

$$\Pi_k = x_k(A - BX_k - Bx_k) - c_k x_k - m_k(e_k x_k - E_k)\,, \tag{5.1}$$

ahol lineáris ár és költségfüggvény szerepel. Megjegyezzük, hogy az állandó költségek nem befolyásolják a játékosok optimum problémáját, így ezektől eltekinthetünk. Azt is feltehetjük, hogy az egyensúlypontokban az összes játékos kibocsátása pozitív, ugyanis zérus kibocsátás esetén a játékos kilép a piacról. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy nem kell őket figyelembe vennünk. Az elsőrendű optimumfeltétel (5.1) alapján

$$A - BX_k - 2Bx_k - c_k - m_k e_k = 0$$

vagy

$$A - BX - Bx_k - c_k - m_k e_k = 0\,, \tag{5.2}$$

amiből látható, hogy a játékos válaszfüggvénye, mint a teljes kibocsátás függvénye,

$$x_k = \frac{A - BX - c_k - m_k e_k}{B}\,. \tag{5.3}$$

Ez valóban maximumot szolgáltat, mert (5.1) szigorúan konkáv. Adjuk össze ezeket az egyenleteket $k = 1, 2, \dots, n$ esetére, ekkor

$$X = \frac{An - nBX - \sum_{k=1}^{n}(c_k + m_k e_k)}{B}$$

adódik, amiből látható, hogy

$$X = \frac{An - \sum_{k=1}^{n}(c_k + m_k e_k)}{(n+1)B}\,. \tag{5.4}$$

Ha valamelyik játékos marginális költsége, szennyeződés kibocsátási rátája, vagy a büntetési (jutalmazási) tényezője növekszik, az csökkenőleg hat a teljes kínálatra. Az (5.3) egyenlőség alapján

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{1}{B}\Big(A - \frac{An - \sum_{k=1}^{n}(c_k + m_k e_k)}{n+1} - (c_k + m_k e_k)\Big) = \\ &= \frac{1}{B(n+1)}\Big(A + \sum_{l \neq k}(c_l + m_l e_l) - n(c_k + m_k e_k)\Big) \end{aligned} \tag{5.5}$$

ami szintén csökkenő, ha a c_k, m_k vagy e_k értéke növekszik. Ez akkor következik be, ha valamelyik játékos rosszabb technológiára vált a marginális költség, a szennykibocsátási ráta növelésével, vagy a büntetési (jutalmazási) tényezőt növeli az állami hatóság. A többi játékos kibocsátása pedig növekszik, ezzel együtt pedig növekszik a szennyeződés kibocsátásuk is. A k-dik játékos szennyeződés kibocsátása pedig

$$e_k x_k = \frac{1}{B(n+1)}\Big(Ae_k + e_k \sum_{l\neq k}(c_l + m_l e_l) - nc_k e_k - nm_k e_k^2\Big)$$

aminek e_k szerinti deriváltja

$$\frac{1}{B(n+1)}\Big(A + \sum_{l\neq k}(c_l + m_l e_l) - nc_k - 2nm_k e_k\Big) = x_k - \frac{nm_k e_k}{B(n+1)}. \tag{5.6}$$

Ennek előjele viszont az x_k és e_k egymáshoz viszonyított arányától függ.

Sok iparág esetén a hatóság nem tudja az egyes játékosok szennyeződés kibocsátását mérni, csak a játékosok együttes kibocsátását. Ilyenkor a teljes kibocsátásra ad meg egy maximálisan elfogadható értéket, és ehhez viszonyítja a büntetés, vagy jutalom mértékét hasonlóan az előbbi esethez. Így a k-dik játékos kifizetőfüggvénye

$$\Pi_k = x_k(A - BX_k - Bx_k) - c_k x_k - m_k\Big(\sum_{l=1}^{n} e_l x_l - E\Big). \tag{5.7}$$

Az elsőrendű optimális feltétel azonos (5.2)-vel, így az egyensúlyi stratégiák és az azokból levont következtetések is megmaradnak erre az esetre.

A matematikai egyszerűség miatt lineáris ár és költségfüggvényt választottunk. Amennyiben egy általánosabb oligopol modellből indulunk ki, amely eleget tesz az (A)–(D) feltételeknek, akkor az előbbi két modellhez hasonlóan egy lineáris tag adódik a költségfüggvényhez, amely nem befolyásolja a feltételek teljesülését.

Egy harmadik, némiképp bonyolultabb modellt kapunk, ha a büntetés (jutalmazás) mechanikáját megváltoztatjuk. A k-dik játékos $e_k x_k$ kibocsátásának aránya a teljes kibocsátáshoz képest $e_k x_k / \big(\sum_{l=1}^{n} e_l x_l\big)$, így az E megengedett együttes maximumot ilyen arányban osztja szét az állami hatóság az egyes játékosok között. Így a k-dik játékos kifizetőfüggvénye

$$\Pi_k = x_k(A - BX_k - Bx_k) - c_k x_k - m_k\Big(e_k x_k - \frac{e_k x_k}{\sum_{l=1}^{n} e_l x_l} E\Big). \tag{5.8}$$

Az elsőrendű optimumfeltételek lényegesen bonyolultabbak, mint az előző esetekben, ezért az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $m_k \equiv m$ és $e_k \equiv e$. Ekkor (5.8) leegyszerűsödik,

$$\Pi_k = x_k(A - BX_k - Bx_k) - c_k x_k - m\Big(ex_k - \frac{x_k}{\sum_{l=1}^{n} x_l} E\Big), \tag{5.9}$$

aminek x_k-szerinti deriváltja zérus kell legyen optimum esetében,

$$A - BX_k - 2Bx_k - c_k - me + mE\,\frac{\sum_{l=1}^{n} x_l - x_k}{\big(\sum_{l=1}^{n} x_l\big)^2} = 0\,,$$

vagy

$$A - BX - Bx_k - c_k - me + mE\,\frac{X - x_k}{X^2} = 0\,,$$

amiből a k-dik játékos válaszfüggvénye

$$x_k = \frac{AX^2 - BX^3 - c_k X^2 - meX^2 + mEX}{BX^2 + mE}\,. \tag{5.10}$$

Ha ezeket az egyenleteket összeadjuk $k = 1, 2, \ldots, n$ esetére, akkor

$$X = \frac{n(AX^2 - BX^3 - meX^2 + mEX) - X^2 \sum_{l=1}^{n} c_l}{BX^2 + mE}$$

adódik, amely X-re egy másodfokú egyenletre vezet,

$$X^2(n+1)B + X\Big(nme + \sum_{l=1}^{n} c_l - nA\Big) + mE(1-n) = 0\,, \tag{5.11}$$

ha X-szel egyszerűsítünk. Az együtthatók előjeleitől függően a pozitív gyökök száma $0, 1, 2$ lehet, és ha ezeket beírjuk az (5.10) egyenletbe, megkapjuk az egyes játékosok egyensúlyi stratégiáit.

Az előzőekben bemutatott modellek kissé általánosabb változatait tárgyalják a Matsumoto, Szidarovszky és Yabuta (2018) és a Matsumoto, Szidarovszky és Takizawa (2018) dolgozatok.

6 Következtetések és befejező megjegyzések

A bemutatott modellek tisztán mutatják, hogy az oligopol játék vizsgálata milyen gazdag. Ha ehhez hozzávesszük, hogy a tárgyalt modellek hiperbolikus árfüggvények mellett is vizsgálhatók, a Cournot modellt a Bertrand oligopol játékok is felválthatják, amikor a játékosok döntése az árra és nem a termékmennyiségre vonatkozik. Az itt bemutatott modellek kiterjeszthetők a többtermékes, valamint az alkalmazott tulajdonú esetekre is. Különlegesen érdekes a modellek dinamikus kiterjesztése a késleltetés nélküli (Bischi, Chiarella, Kopel és Szidarovszky, 2010) és a késleltetéssel bíró dinamikák (Matsumoto és Szidarovszky, 2018) eseteire is. Őszintén reméljük, hogy ez a cikk felhívja néhány fiatal kutató érdeklődését a témakör iránt, így ezen a területen is tovább gazdagodhat a hazai kutatás.

Irodalom

1. Bischi, G. I., Chiarella, C., Kopel, M. és Szidarovszky, F. (2010): *Nonlinear Oligopolies: Stability and Bifurcations,* Springer, Berlin/Heidelberg.
2. Burr C., Gardini L. és Szidarovszky F. (2015): Discrete time dynamic oligopolies with adjustment constraints, *Journal of Dynamics and Games,* 2(1): 65–87.
3. Chiarella, C. és Szidarovszky F. (2009): A multiobjective model of oligopolies under uncertainty, *CUBO a Mathematical Journal,* 11(2):107–115.

4. Chiarella, C., Matsumoto, A. és Szidarovszky F. (2013): Isoelastic oligopolies under uncertainty, *Applied Mathematics and Computation,* 219(21):10475–10486.
5. Cournot A. (1838): *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses*, L. Hachette, Paris (Angol fordítás, 1960, Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth, Kelley, New York.)
6. Cyert, R. M. és DeGroot, M. H. (1973): An analysis of cooperation and learning in a duopoly context, *American Economic Review,* 63(1):24–37.
7. Matsumoto A, Merlone U. és Szidarovszky F. (2010): Dynamic oligopoly with partial cooperation and antitrust threshold, *Journal of Economic Behavior and Organization,* 73:259–272. DOI: 10.1016/j.jebo.2009.08.014
8. Matsumoto, A., Szidarovszky F. és Yabuta, M. (2018): Environmental effects of ambient charge in Cournot oligopoly, *Journal of Environmental Economics and Policy,* 7(1):41–56. https://doi.org/10.1080/21606544.2017.1347527
9. Matsumoto, A., Szidarovszky F. és Takizawa, H. (2018): Extended oligopolies with pollution penalties and rewards, *Discrete Dynamics in Nature and Society,* 2018:1-8. DOI: 10.1155/2018/7861432
10. Matsumoto, A. és Szidarovszky F. (2018): Dynamic Oligopolies with Time Delays, *Springer Nature,* Singapore, DOI: 10.1007/978-981-13-1786-6.
11. Okuguchi, K. (1976): *Expectations and Stability in Oligopoly Models,* Springer, Berlin/Heidelberg/New York.
12. Okuguchi, K. és Szidarovszky, F. (1999): *The Theory of Oligopoly with Multi-Product Firms,* (2. kiadás) Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.
13. Szidarovszky F. és Matsumoto A. (2016): On a discontinuous Cournot oligopoly. In: von Mouche P., Quartieri F. (szerk.) *Equilibrium Theory for Cournot Oligopolies and Related Games: Essays in Honour of Koji Okuguchi,* Springer, Berlin/New York, 97–112.

ON SOME SPECIAL OLIGOPOLY MODELS

Some extensions of the classical oligopoly model is discussed including the case of uncertain price function, when the expected profit is maximized and the variance of the profit is minimized. This multiobjective optimum problem is then solved. If the profit functions are discontinuous, then the usual methodology cannot be applied to find equlibria, so new idea has to be developed. The model with partially cooperative firms contains both the fully cooperative and noncooperative games as special cases. It is shown that several variants of co-ownership among the firms can be modeled by using this structure. The last model describes several firms and a regulator, who wants to control emission volumes with appropriate penalties and rewards.