A HÁZASSÁGOK VÁRHATÓ TARTAMA ÉS TÚLÉLÉSE[1]

FARAGÓ MIKLÓS
Központi Statisztikai Hivatal

Hány év van még hátra várhatóan egy házasságból, ha ismert a házastársak kora, és hány évvel éli túl majd egyikük a másikat, feltéve, hogy megözvegyül, vagy hány évig élnek várhatóan a válás után? A házasságokból hátralévő tartam és a házasság megszűnését követő élettartam várható értékét a szerző tudomása szerint a házasfelek korának kétváltozós függvényeként még nem vizsgálták. A cikk ezekre adja meg a formulákat, ráadásul különböző megszűnési okonként is, és elemzi az eredményeket a magyar népességre vonatkozóan, négy évtizedig visszamenően.

Bevezetés

A cikk eredete egy —az özvegyek várható élettartamára irányuló— kérdésfelvetés volt, melynek közvetlen általánosításaként adódott a különböző családi állapotú népesség halandósági tábláinak előállítása. Ebből egyáltalán nem közvetlenül támadt az ötlet: meghatározni a házasságok hátralévő várható tartamát, esetleg a házasság „kimenetelének" (válás, halálozás) függvényében. E célra már házaspárokra vonatkozó statisztikákra volt szükség. A két probléma megoldhatóságának megállapítása után és módszertanának kifejlesztése közben már természetesen vetődött fel a házasság utáni élet vizsgálata, azaz a túlélés (a házasságé) várható tartamának kiszámítása. Itt is értelmesnek tűnt megkülönböztetni egymástól a házasságot követő családi állapotokat (elvált, özvegy). A cikk a fentieknek megfelelően három fejezetből áll, mindegyik a számítási módszer bemutatásával kezdődik, majd ezt követi az eredmények elemzése.

1. A családi állapot szerinti rövidített halandósági táblák módszertana megegyezik a KSH-ban használatossal, azzal a különbséggel, hogy speciálisan az egyes családi állapotokban élők népesség- és halálozási számait használja a halálozási valószínűségek és ezeken keresztül a tábla egyéb elemeinek, így a várható élettartam becslésére.

2. A házasságtartamok kiszámítását az tette lehetővé, hogy a népszámlálások éveire —és csak akkorra— vonatkozóan rendelkezésre állnak a házaspárok kor(pár)függő létszám-, halálozási és válási adatai. Ez a fejezet a következő kérdésre ad választ: adott egy (x, y) korú házaspár (x a férj kora, y a feleségé) ismeretlen számú házasságban eltöltött év után, várhatóan hány év van még hátra a házasságukból, feltéve, hogy elválnak vagy feltéve, hogy

[1] Beérkezett: 2010. szeptember 28. E-mail: `faragomik@t-online.hu`.

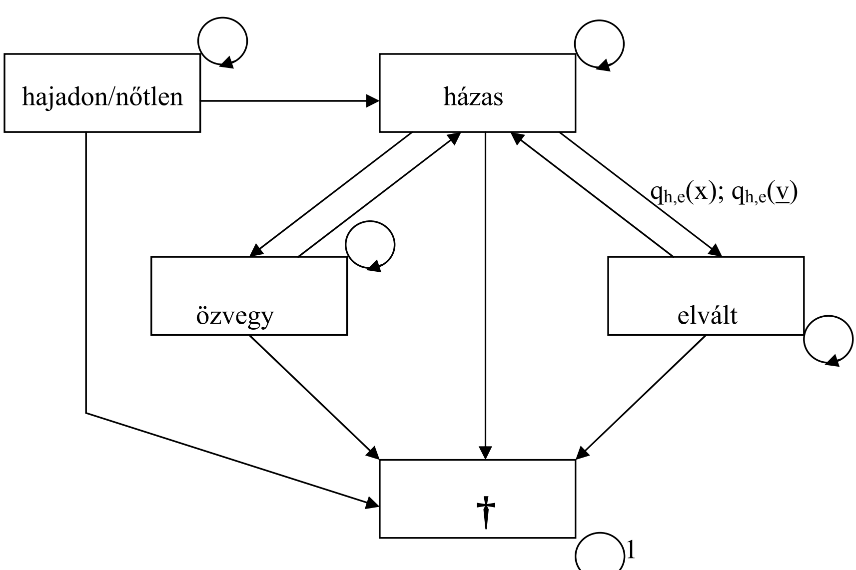
a férj vagy a feleség meghal, vagy nem feltéve semmit, azaz ilyenkor az ismertetett három ok közül a ,,legkorábbi" miatt ér véget a házasság.

3. A ,,Túlélés" c. fejezet egyrészt azt tárgyalja, hogy a ,,most" (x, y) korú házaspár egyik tagja várhatóan hány évvel éli (majd) túl a házasságot, ismét feltéve, hogy elválnak, vagy feltéve, hogy a másik meghal, vagy nem feltéve semmit. Ezzel egyben előáll az (x, y) korú házaspár adott családi állapotú (özvegy vagy elvált) és nemű túlélőjének a várható teljes hátralévő élettartama, ez ugyanis a házasságból még várhatóan hátralévő tartam és a túlélési tartam összege. Kiszámítjuk például, hogy egy (x, y) korú házaspárból a férjnek mennyi a hátralévő várható élettartama, feltéve, hogy ő fog megözvegyülni (vagy elválnak, vagy nem feltéve semmit, azaz hogy e két ok bármelyike vet véget a házasságnak).

A 2. és 3. fejezetre, azaz a házasságok várható hátralévő tartamának, valamint a várható túlélési tartamoknak – mint kétváltozós függvényeknek – kiszámítására eredeti módszert fejlesztettünk ki.

Számításaink az ún. ,,periódus-tábla" módszerén alapulnak. Az alapgondolat, hogy ti. egy populáció adott – általában egy vagy két naptári éves – időintervallumra, az ún. *periódusra* vonatkozó arányszámait kivetítik a jövőre, régóta elterjedt a demográfiában: klasszikusan a halandósági táblák értelmezése is ezzel a feltételezéssel történik. Ezzel a módszerrel számítják ki a teljes termékenységi rátákat (Total Fertility Rate), lásd Pl. Faragó (2011), vagy az egészségesen várható élettartamokat is (Healthy Life Years). A módszer gondolatmenete három lépésből áll. Először a valódi populációról szerzett statisztikai adatokból egy főre eső korfüggő arányszámokat képeznek (halálozási, szülési, válási stb.), majd ezeket valószínűségekbe transzformálják. Ezután elképzelnek egy ,,kiinduló" rögzített létszámú fiktív kohorszot, pl. egyidőben született újszülötteket vagy 15 éves nőket, akikre érvényesnek tekintik a képzett valószínűségeket. E népességen, az ún. tábla populáción, mely ezekkel a valószínűségekkel él, hal, szül, válik stb., különböző könnyen végrehajtható számításokat végeznek. Végül az eredményeket (várható élettartam, egy anyára eső várható születésszám stb. becslései) érvényesnek tekintik az eredeti, a valódi népességre, de továbbra is azzal a feltételezéssel, hogy a periódus rátái a népesség hátralévő ,,élete" során érvényben maradnak. Ez nyilván soha nem teljesül, a ráták évente változnak, ezért kell pl. a halandósági táblákat évente újra elkészíteni. A tábla-módszer lényege, hogy egy pillanatnyi állapot tulajdonságainak ,,kimerevítése" mellett készít becsléseket a jövőre vonatkozóan. Azonban valójában a pillanatnyi helyzetet jellemzi. A 2. fejezet nóvuma az, hogy a kohorszok házaspárokból állnak.

Különböző családi állapotokban eltöltött várható élettartamok kiszámításának adekvát matematikai modellje lehetne az ún. ,,többállapotú tábla modell" (multistate table): az *1. ábra* irányított gráfjának szögpontjai (a dobozok) egy személy családi állapotainak, az irányított élek a lehetséges átmeneteknek felelnek meg. Utóbbiak cimkéi az átmenet valószínűségei, melyek a periódusban szerzett statisztikai adatokból származnának. Egy adott korú személy adott állapotból kiinduló véletlen bolyongása áll elő, ha az átmeneti valószínűségek szerinti sorsolás eredményeként lép minden ütemben valamely kimenő élre. Éves ütemeket véve az átlépés előtt x éves személy $x+1$ évesen érkezik meg az új dobozba – vagy marad helyben, ha hurokélre lépett. Megjegyezzük, hogy az i állapotból a j-be történő átmenet valószínűségei a legprimitívebb modell esetében sem konstansok, legalábbis időfüggőek, pontosan: az élre rálépő korától függenek. Ezután nem nehéz kiszámolni az egyes állapotokban eltöltött várható időtartamokat, a kiinduló $x(0)$ kor és $s(0)$ állapot függvényeként. (A legegyszerűbb Monte Carlo-módszerrel, tetszőleges pontossággal becsülni.) Az egyetlen nehézséget az adekvát átmeneti valószínűségek megállapítása okozza. A tapasztalatok szerint ugyanis egy átmenet valószínűsége a bolyongás egész előtörténetétől függ, azaz attól, hogy a bolyongó megelőzően mely családi állapotába hány éves korában lépett be és meddig tartózkodott ott (tehát a bolyongás nem Markov-folyamat). Egy válás valószínűsége függ a házasságból már eltelt időtől, de egy második vagy harmadik válás vagy megözvegyülés valószínűsége is különbözik az elsőétől. (Az ábrán $\underline{\mathbf{v}}$ jelöli az átlépés előtt a bolyongó által betöltött állapotok változó hosszúságú idősorát.) Azonban ilyen mélységű és mennyiségű statisztikai adat begyűjtése igen költséges, ezért a többállapotú modell alkalmazásáról lemondunk. Az 1. ábrának megfelelő többállapotú modell alapján Willekens és szerzőtársai (1982) számítottak várhatóan eltöltött tartamokat az egyes állapotokban, azonban csak korfüggő – és nem múltfüggő – átmeneti valószínűségek alkalmazásával. Egy összefoglaló mű a többállapotú tábla modellekről: Keyfitz és szerzőtársai (2005).



1. ábra

Maradunk tehát a ,,sima” halandósági tábla modellnél (illetve a 2. és 3. fejezetben annak házaspárokra történő általánosításánál), amely esetünkben, a különböző családi állapotban eltöltött várható élettartamok kiszámításakor azzal a megszorító feltétellel jár, hogy ez a családi állapot a vizsgált személy haláláig változatlanul fennmarad. Azaz feltételezzük, hogy a hajadon, a nőtlen, az elvált és az özvegy nem házasodik meg (újra), a házas nem válik el. Ez úgy értelmezendő, hogy a számított eredmények csak ilyen ,,életpályájú”, azaz az állapotában (hajadon, özvegy stb.) megmaradó személyekre érvényesek.

Előrebocsátjuk, hogy a számításokban minden esetben demográfiai jellegű arányszámokból becsüljük először a valószínűségeket, majd ezekből a különböző tartamok várható értékét. Eltekintünk a közvetlen valószínűségek részletes elemzésétől, figyelmünket inkább az áttételesebb várható tartamokat vizsgálatának szenteljük. Mint látni foguk, ezek értelmezése – összetett mivoltuk miatt – gyakran nem nyilvánvaló. Már a legegyszerűbb, a rögzített korhoz tartozó várható élettartam maga is az adott – és az annál magasabb – életkorokhoz tartozó halálozási valószínűségeknek egyfajta ,,összegöngyölése”. A számszerű eredmények részletes vizsgálata helyett inkább általános megállapításokat teszünk, ugyanakkor megkíséreljük feltárni a belső összefüggéseket és a meglepőnek tűnő jelenségek okait.

Input-output

A halandósági táblák számítása egy zárt népességnek valamely rögzített megfigyelési időintervallumban – a periódusban – bekövetkezett halálozási eseményein alapul. Kétfajta népességet vizsgálunk: különböző családi állapotú személyekét, valamint házaspárokét. Mindkét esetben a legkisebb előforduló életkor 20 év. A korcsoportokhoz tartozó kis esetszámok (személyek és házaspárok korfüggő létszáma, korfüggő halálozási és válási számok) miatt célszerű volt kétéves periódusokat választani a szokásos egyéves helyett. Számításainkban házaspárok esetén a periódus: 1969–1970, 1979–1980, 1989–1990 és 2000–2001, azaz a legutóbbi népszámlálási és az azokat megelőző naptári évek. Személyek esetén a fentieken kívül még a 2006–2007 intervallum is, melynek adatai a 2001. évi népszámlálás továbbvezetett értékekei. Elemzéseket az idősorokon kívül csak a legutolsó, azaz a 2000–2001 és 2006–2007 periódusokra végzünk.

Jelölések

A tanulmány könnyebb áttekinthetősége érdekében a jelölések nagyobb részét itt, a többit pedig a megfelelő fejezetekben ismertetjük:

– f, n : férfi, nő

– x: a személy betöltött kora (egész év)

– $\langle x, m\rangle$: a személy korcsoportja: a kora az $[x, x+m)$ intervallumba esik

– (x, y): a házaspár kora: a férj kora x év, a feleség kora y év

– $\langle x, y, m\rangle$: a házaspár korcsoportja, ahol a férj, ill. feleség kora rendre $[x, x+m)$-be, illetve $[y, y+m)$-be esik, speciálisan a legfelső korcsoportban, azaz $m = \infty$ esetén $\langle x, m\rangle$, illetve $\langle x, y, m\rangle$ az x-nél nem fiatalabb személyeket, illetve az (x, y)-nál nem fiatalabb párokat jelöli

– a családi állapotok jelei: zf: nőtlen; zn: hajadon; hf: házas férfi; hn: házas nő; vf: elvált férfi; vn: elvált nő; of: özvegy férfi; on: özvegy nő.

Az alábbi jelölésekben, ha egy jel az s indexet tartalmazza „s családi állapotban” jelentéssel, akkor a jel az s-t elhagyva is értelmezendő: „bármely családi állapotban” jelentéssel:

– k: a periódus hossza (év)

– ${}_mP_x^s$: az s családi állapotú $\langle x, m\rangle$ korcsoportúak száma a vizsgált népességben a periódus közepén

– ${}_mP_{x,y}$: az $\langle x, y, m\rangle$ korcsoportú házaspárok száma a periódus közepén

– ${}_mD_x^s$: azon $\langle x, m\rangle$ korcsoportúak száma, akik a periódusban az s családi állapotban halnak meg.

– *Házasságmegszűnési okok:* a) elemi okok: v: válás; f: a férj halála; n: a feleség halála; b) összetett okok: h: halál, azaz bármelyik házastárs halála; b: bármely ok, azaz válás vagy bármelyik házastárs halála

– ${}_mD_{x,y}^v$; ${}_mD_{x,y}^f$; ${}_mD_{x,y}^n$; ${}_mD_{x,y}^h$; ${}_mD_{x,y}^b$: a periódusban az egyes vizsgált okok miatt megszűnt házasságok száma az $\langle x, y, m\rangle$ korcsoportban.

– A megszűnési okok halmaza: $C = \{v, f, n, h, b\}$. Értelemszerűen teljesül

$$ {}_mD_{x,y}^h = {}_mD_{x,y}^f + {}_mD_{x,y}^n\,, \quad {}_mD_{x,y}^b = {}_mD_{x,y}^v + {}_mD_{x,y}^h\,. $$

Természetesen fennáll ${}_mD_x^{hf} = \sum_y D_{x,y}^f$ és ${}_mD_x^{hn} = \sum_y D_{x,y}^n$ is. (A házas férfiak halálozási esetszáma egyenlő a férj halálával végződő házasság-megszűnésekével.)

– ${}_mM_x^s$: az $\langle x, m\rangle$ korcsoportú személy halálozási rátája az s családi állapotban

– ${}_mM_{x,y}^c$: az $\langle x, y, m\rangle$ korcsoportú házaspár házasságának $c \in C$ okú megszűnési rátája

– ${}_mq_x^s$: a s családi állapotban az $x+m$ éves életkor előtt bekövetkezett halálozás valószínűsége, feltéve az x éves életkor elérését az s családi állapotban

– ${}_mq_{x,y}^c$: annak a valószínűsége, hogy egy (x, y) korú házaspár házassága m éven belül c okból megszűnik

– ${}_mp_x^s = 1 - {}_mq_x^s$: a személy $x+m$ éves életkora elérésének valószínűsége az s családi állapotban, feltéve az x éves életkor elérését az s családi állapotban.

– ${}_xp_{20}^s = {}_5p_{20}^s \cdot {}_5p_{25}^s \cdot \ldots \cdot {}_5p_{x-5}^s$: az 5-tel osztható x éves kor elérésének valószínűsége, a kezdeti 20 éves kortól az s állapotban folyamatosan megmaradva,

– $l_x^s = 100000{}_xp_{20}^s$: a továbbélők, azaz a kezdeti $l_{20}^s = 100000$ számú s állapotú 20 éves személyből – az s családi állapotot nem elhagyva – az x éves kort elérők várható száma.

A továbbélő házaspárok (vagy „megmaradó házasságok”) számának előállításához feltesszük, hogy az $(x, 20)$ és $(20, y)$ korú házaspárok induló létszámai:

– $l_{x,20} = l_{20,y} = 100000$, $(x, y = 20, 25, \ldots, 85)$, azaz a fiatalabbik fél 20 éves

– $l_{x+t,y+t}$: a továbbélő (x, y) korú házaspárok várható száma, $\min(x, y) = 20$

– ${}_mL_x^s$: A kezdeti 100000 s családi állapotú személy által az $\langle x, m\rangle$ korcsoportban, azaz $x, \ldots, x+m-1$ évesen összesen megélt emberévek várható száma az s családi állapotban

– ${}_mL_{x,y}^c$: az induló 100000 házaspár által a $c \in C$ okból megszűnő házasságok során megélt házaspárévek várható száma az $\langle x, y, m\rangle$ korcsoportban

– e_x^s: az x korú személy várható élettartama —végig— az s családi állapotban

– $\tau_{x,y}^c$: egy (x, y) korú házaspár $c \in C$ okból megszűnő házasságának várható hátralévő tartama.

1 Családi állapottól függő halandósági táblák

A rövidített (korcsoportos) halandósági táblák előállításának módszereit egy 1956-os ENSZ-kézikönyv szabályozza. Az algoritmus részletes leírása megtalálható Chiang (1968) könyvében. A KSH is ezt használja a rövidített halandósági táblák számítására, lásd Radnóti (2003) . Mi is ezeket az ismert formulákat alkalmazzuk az alábbiakban külön-külön, az egyes —s-sel jelölt— családi állapotokra, felső indexben jelölve ezeket.

Az egyes s-sel jelölt családi állapotokban lévők ${}_5q_x^s$ halálozási valószínűsége az $[x, x+5)$ korintervallumban vett, azaz öt éven belül bekövetkezett haláleset valószínűségét jelenti, míg e_x^s az x éves korban várható élettartamot jelöli, ahol $x = 20, 25, \ldots, 85$. Az emberi élet végességét feltételezve, a utolsó, $[85, \infty)$ intervallumra előírjuk, hogy ${}_\infty q_{85}^s = 1$. Az s családi állapotban a halálozási valószínűség becslése a halálozási számokból:

$$ {}_mq_x^s = m\frac{{}_mM_x^s}{1 + m/2\,{}_mM_x^s} \ , $$

ahol a halálozási ráta: ${}_mM_x^s = {}_mD_x^s/(k_m P_x^s)$. A kezdeti $l_{20}^s = 100000$ számú s állapotú személyből s állapotban továbbélők száma így generálható m évenként: $l_{x+m}^s = l_x^s(1 - {}_mq_x^s)$, amint az l_x^s és ${}_mq_x^s$ definíciójából következik (lásd a Jelöléseket). Az x éves kort elérők által újabb m év alatt megélt emberévek várható száma:

$$ {}_mL_x^s = \frac{m}{2}(l_x^s + l_{x+m}^s) \ , $$

időben lineáris fogyást feltételezve x és $x+m$ között $(x + m \le 85)$.

Egy kivétellel $m = 5$ éves korcsoportokat használunk: $[20, 25)$, $[25, 30)$, $\ldots$, $[80, 85)$, $[85, \infty)$. A $[85, \infty)$ intervallumban a túlélők számát exponenciális eloszlásúnak feltételezve ${}_\infty M_{85}^s$ paraméterrel, azaz feltéve, hogy a túlélők száma évről évre egy konstans hányadával, $1/{}_\infty M_{85}^s$ részével csökken, belátható, hogy az l^s_{85} számú 85 éves által megélt emberévek várható száma a továbbiakban, életük folyamán:

$$_\infty L^5_{85} = L^5_{85} / _\infty M^s_{85} \ .$$

A fentiekkel az x éves korban várható élettartam az irodalomból ismert:

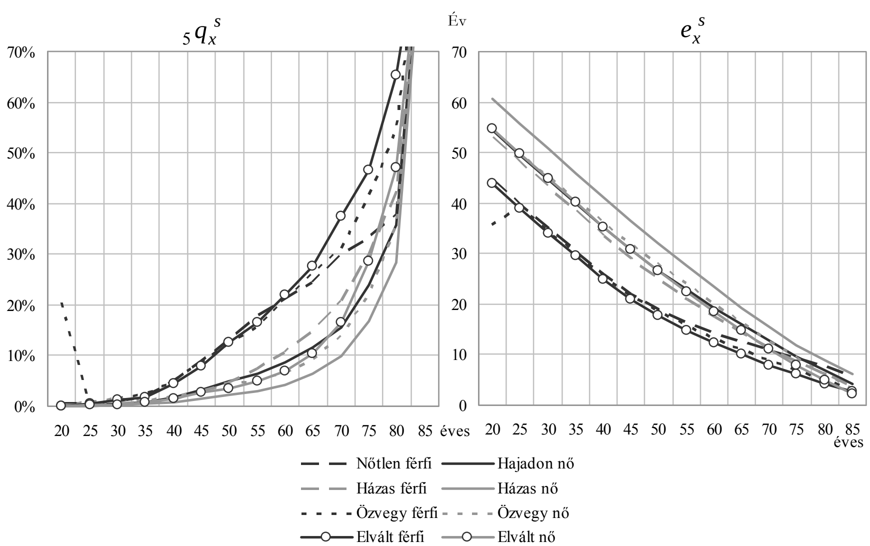
$$e^s_x = \frac{1}{l^s_x} \sum_{im=0}^{85-x} {}_m L^s_{x+im} \quad i \in I\!N \ , \tag{1}$$

ahol m (az utolsó korcsoport miatt) i-től függ.

2006–2007. évi eredmények

A 30 évesnél fiatalabb özvegyek és elváltak halálozási valószínűségei – a kis esetszám miatt – bizonytalanok. Ez különösen szembetűnő a *2. ábra* özvegy férfi görbéinek alakulásában.

A 2. ábrán, valamint az *1. táblázatban* feltűnő az özvegy nők és a nőtlen férfiak kedvező pozíciója mind a halálozási valószínűségek, mind a várható élettartamok szerinti rangsorban, továbbá, hogy jó házasnak lenni (amennyiben jó élni) és rossz elváltnak. Utóbbi a 65 évesnél fiatalabb férfiakra nem érvényes.



2. ábra Halálozási valószínűségek 5 éven belül és várható élettartamok családi állapot szerint

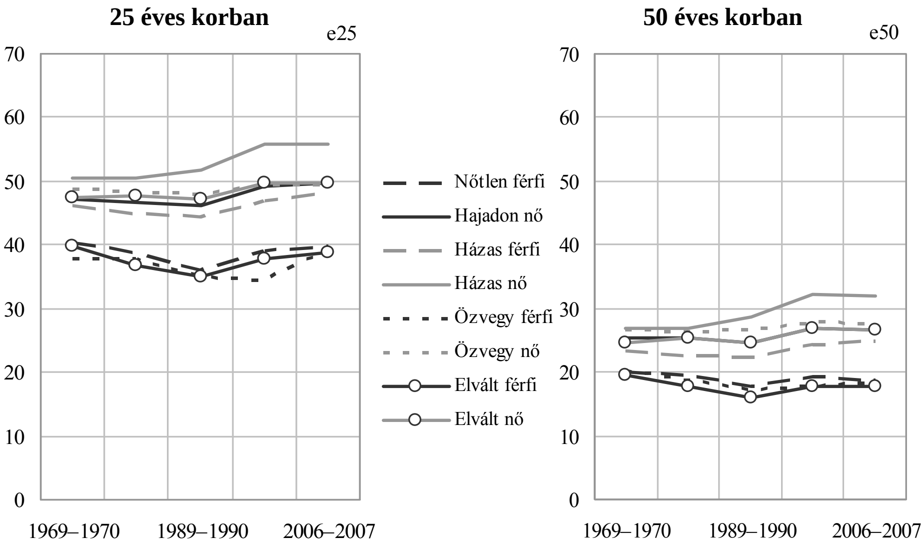
Életkor (év)	Nőtlen	Hajadon	Házas férfi	Házas nő	Özvegy férfi	Özvegy nő	Elvált férfi	Elvált nő	Férfi	Nő
20	44,6	54,5	53,0	60,7	35,8	54,5	43,9	54,8	49,7	57,5
25	39,7	49,6	48,1	55,8	39,3	49,5	38,9	49,8	44,9	52,6
30	34,9	44,7	43,2	50,9	34,3	45,0	34,1	44,9	40,1	47,6
35	30,2	39,8	38,4	46,0	29,8	40,6	29,5	40,1	35,4	42,8
40	25,8	35,1	33,6	41,1	25,5	36,1	25,0	35,3	30,8	38,0
45	22,0	30,8	29,1	36,4	21,7	31,8	21,1	30,8	26,5	33,3
50	18,9	26,7	24,9	31,9	18,5	27,7	17,6	26,6	22,7	29,0
55	16,3	23,0	21,0	27,6	15,7	23,9	14,8	22,5	19,3	24,7
60	14,3	19,3	17,5	23,4	13,2	20,0	12,3	18,5	16,1	20,6
65	12,5	16,0	14,2	19,3	11,0	16,3	10,0	14,7	13,2	16,7
70	10,8	12,7	11,2	15,5	9,0	12,7	7,9	11,1	10,5	12,9
75	9,3	9,6	8,5	11,9	6,9	9,3	6,1	7,8	7,9	9,4
80	7,7	6,8	6,1	8,8	5,0	6,2	4,3	5,0	5,6	6,3
85	5,9	4,2	3,7	6,3	3,0	3,3	2,6	2,2	3,3	3,4

1. táblázat. Várható élettartamok (e_x^s) családi állapot szerint

Az 2. ábra szerint a nőtlen férfiak halálozási valószínűségei 75 év fölött még a házas férfiak értékeinél is kedvezőbbek (kisebbek), várható élettartamuk 80 év felett pedig a házas nők kivételével mindenkinél hosszabb (a jobb oldali ábra).

Idősorok

Az 1989–1990-es évek a házas nők kivételével minden családi állapotban és minden korcsoportban kedvezőtlenek voltak a halálozások szempontjából. Ennek megfelelően az 1989–1990-es periódusból számított várható élettartamok minimumot vesznek fel —a házas nőkétől eltekintve— minden családi állapotban és életkorban (*3. ábra*).



3. ábra. Várható élettartamok családi állapot szerint 25 és 50 éves korban (e_{25}^s és e_{50}^s)

2 Házasságtartam

Ebben a fejezetben a házasságból hátralévő tartam várható értékét megadó formulákat dolgozzuk ki különböző ,,majdani" c kimenetelek esetén. A gondolatmenet hasonlítani fog az 1. fejezetben leírtakhoz. Az analógia ugyanis aközött, hogy ti. várhatólag ,,meddig él egy (adott korú) ember" és hogy ,,meddig él egy házasság", így ragadható meg: Az élő személyek kohorszának fogyását, azaz a l_x, l_{x+m}, l_{x+2m}, ... sorozat csökkenését (ebből számítjuk a várható élettartamot), az egyetlen ,,kilépési" lehetőség (az élet állapotából) valószínűségei határozzák meg, a halálé. A házaspárok kohorszának létszámcsökkenését három elemi kilépési lehetőség (a házasság állapotából) valamelyike idézi elő: a férj halála, a feleségé vagy válás. Továbbá tekinthetők az ezekből előállítható összetett okok is, pl. a halál (bármelyik félé) vagy a ,,bármely okból" történő megszűnés. Az utóbbi matematikai modellje azonos az egyén várható élettartamáéval (eltekintve attól, hogy itt házaspárok kohorszától van szó), hiszen a ,,bármely ok"-on kívül nincs más alternatíva a kilépésre a házasságból, ahogy az életből is egyetlen van. A kilépési okok összetétele így ábrázolható:

$$\begin{tikzcd}
\text{bármely ok} \arrow[r] \arrow[dr] & \text{halál} \arrow[r] \arrow[dr] & \text{férj halála} \\
& \text{válás} & \text{feleség halála}
\end{tikzcd}$$

Jelölje $\tau^c_{x,y}$ az (x, y) korú házaspár (az első szám mindig a férfi kora) c okból végződő házasságából még hátralévő idő várható értékét. Jelentése pontosan: a c esemény (pl. a férj halála) bekövetkeztéig eltelt idő – mint valószínűségi változó – várható értéke, *feltéve*, hogy c következik be legkorábban a lehetséges kimenetelek közül. Kivétel, ha $c =$,,bármely ok": ekkor a három elemi kimenetel közül a legkorábbi időpontjáig eltelt idő várható értéke.

Az eredmények megértéséhez látni kell, hogy egy összetett kimenetelhez tartozó várható érték mindig kisebb vagy egyenlő, mint az összetevőké. Például egy adott korú házaspár feltételezetten halálesettel végződő házasságából hátralévő várható tartam nem nagyobb, mint a férj (vagy a feleség) halálával végződő házasságból várhatóan hátralévő. Ugyanis az összetett okhoz tartozó várható érték valójában az összetevő események közül mindig a *legkorábbi* bekövetkezésig eltelt idő várható értéke. Ez pedig nem nagyobb, mint az összetevők külön-külön számított várható értékei:

$$\mathrm{E}(\min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)) \le \min(\mathrm{E}(\xi_1), \mathrm{E}(\xi_2), \dots, \mathrm{E}(\xi_N)) \, ,$$

következvén az integrál monotonitásából.

A módszertan most is ,,rövidített" jellegű, a várható tartamok 20, 25, ..., 85 éves házastársakra érvényesek. A közbenső értékek interpolációval előállíthatók. A továbbiakban, ha házasságokról lesz szó, akkor a képletekben a házastársak kora, x és y egymástól függetlenül befutja a korintervallumok kezdőpontjait, azaz $\{20, 25, \dots, 85\}$-t, ezt külön nem jelöljük.

A megmaradó házasságok várható száma az egyes kohorszokban a kiinduló létszámból, mely

$$l^c_{x,20} = l^c_{20,y} = 100000\,, \quad c \in C = \{v, f, n, h, b\}\,,$$

az életkor növekedésével az alábbi képlet szerint fogy, a c megszűnési ok – válás, a férj halála, a feleség halála, valamelyikük halála vagy bármely ok – valamelyike miatt:

$$l^c_{x+m,y+m} = l^c_{x,y}(1 - {}_mq^c_{x,y})\,.$$

A képletbeli ${}_mq^c_{x,y}$-nak, azaz a házasság c okból való megszűnési valószínűségének becslése:

$${}_mq^c_{x,y} = m\frac{{}_mM^c_{x,y}}{1 + m/2{}_mM^c_{x,y}}\,,$$

ahol a megszűnési ráta:

$${}_mM^c_{x,y} = \frac{1}{k}\frac{{}_mD^c_{x,y}/k}{{}_mP_{x,y} + {}_mD^c_{x,y}/2}\,.$$

Az ${}_mM^c_{x,y}$-t előállító formula magyarázata a többszörös kilépésű táblák (multiple decrement tables) elmélete alapján a következő. Feltételezzük a kilépési okok (közel) függetlenségét, valamint a kilépések perióduson belüli egyenletességét. Ekkor például válás ($c = v$) esetén a másik két okból bekövetkezett megszűnések fele esik a válás „elé”, illetve „mögé”, ezért a második nevező:

$${}_m\tilde{P}_{x,y} - {}_mD^f_{x,y}/2 - {}_mD^n_{x,y}/2\,,$$

ahol ${}_m\tilde{P}_{x,y}$ a periódus eleji népesség. Mivel azonban

$${}_m\tilde{P}_{x,y} = {}_mP_{x,y} + ({}_mD^v_{x,y} + {}_mD^f_{x,y} + {}_mD^n_{x,y})/2\,,$$

behelyettesítéssel előáll a formula $c = v$-re.

Az összetett kimenetelek megszűnési rátája is így áll elő, használva az alábbi azonosságokat:

$${}_mD^h_{x,y} = {}_mD^f_{x,y} + {}_mD^n_{x,y}\,, \quad {}_mD^b_{x,y} = {}_mD^v_{x,y} + {}_mD^f_{x,y}\,.$$

Az $I^c_{x,y}$ számú $c \in C$ okból megszűnő (x, y) korú továbbélő házaspár által megélt házaspárévek várható száma m év alatt:

$${}_mL^c_{x,y} = \frac{m}{2}\left(l^c_{x,y} + l^c_{x+m,y+m}\right) \quad (x, y = 20, 25, \ldots, 80)\,,$$

az utolsó korcsoportokban pedig a következő eljárást követjük. Itt is feltesszük, hogy az utolsó korcsoportokban, azaz $\max(x, y) = 85$ esetén a kohorszok $l^c_{x,y}$ $c \in C$ létszáma exponenciális eloszlású, paramétere a korcsoportbeli halálozási ráta, ${}_\infty M^c_{x,y}$. Ekkor a házaspárévek várható száma az utolsó korcsoportban:

$${}_mL^c_{85,y} = \frac{l^c_{85,y}}{{}_{15}M^c_{85,y}} \quad \text{és} \quad {}_mL^c_{x,85} = \frac{l^c_{x,85}}{{}_{15}M^c_{x,85}}\,.$$

Ezekkel pedig egy (x, y) korú házaspár c okból megszűnő házasságának várható hátralévő tartama az előző fejezetben leírtakkal analóg módon:

$$\tau^c_{x,y} = \frac{1}{l^c_{x,y}} \sum_{im=0}^{85-\max(x,y)} {}_mL^c_{x+im,y+im} \ , \quad (i \in I\!N) \ , \tag{2}$$

ahol m az utolsó korcsoport miatt i-től függ. A fenti képlet azonosan átírható a következő alakba:

$$\tau^c_{x,y} = \sum_{im=0}^{85-\max(x,y)} {}_{im}p^c_{x,y} \cdot {}_mq^c_{x+im,y+im} \cdot im \ , \tag{2'}$$

ahol ${}_{im}p^c_{x,y}$ annak a valószínűsége, hogy a c kohorsz (x, y) korú házaspárának házassága im éven át fennmarad. Ezt az alakot alkalmazzuk majd a várható túlélés formulájában.

Eredmények (2000-2001)

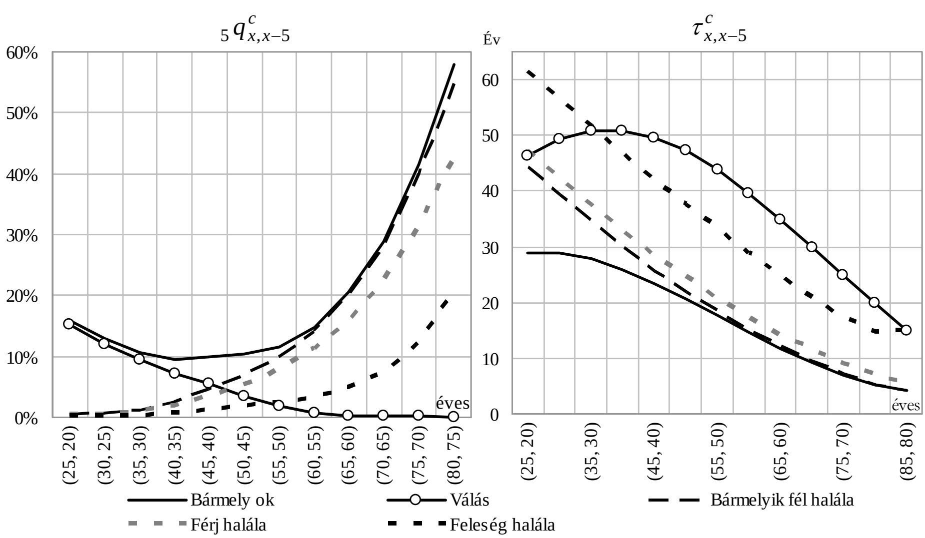
A továbbiakban korkülönbségen $x - y$-t értjük, tehát pozitív korkülönbség mindig idősebb férjet jelent. A *2. táblázat* tartalmazza a házasságok várható hátralévő tartamait, a férj halálát feltételezve. Terjedelmi okok miatt nem közöljük a másik négy kilépési okhoz tartozó táblázatot. A táblázatokon az „idő jobbra lefelé múlik”. A *4.ábra* 5 évvel fiatalabb feleség esetén ábrázolja a különböző kimenetelek valószínűségeit, illetve az egyes kimenetelek esetén a várható tartamokat. A jobb oldali ábrán a „férj halála görbe” a 2. táblázat főátlójával párhuzamos egyenesen elhelyezkedő cellák értékeit tartalmazza. A bal oldali ábra „pillanatnyi”, azaz az adott korhoz tartozó értékeket mutat, a jobb oldali azonban az adott kortól „jobbra” elhelyezkedő kumulált értékeket, melyek épp a bal oldali ábra értékeiből származnak.

- A 2. táblázatbeli, a férj halálára vonatkozó értékek nem sokkal haladják meg – legfeljebb 3 évvel, ha a férj az idősebb –, a bármelyik házastárs halálára vonatkozóakat. A feleség halálára vonatkozó értékek annál jobban: 10–20 évvel. A 4. ábra jobb oldali grafikonja is ezt mutatja speciális esetben, 5 évvel idősebb férjeknél. Ez egyszerűen azt a tény jelzi, hogy a férj halála jóval előbb következik be, mint a feleségé, tehát elsődleges a hatása a bármelyik házastárs halálára vonatkozó értékekre (lásd az összetett kimenetelek természetével kapcsolatos korábbi megállapítást).

- Hasonlóan, a bármely okból végződő házasságokra vonatkozó értékek nem sokkal térnek el a bármelyik házastárs halálára vonatkozóktól, legalábbis, ha a férj az idősebb, és mindketten legalább 40 évesek: legfeljebb 3 évvel. A válási adatoktól való eltérés ellenben 20 év fölötti. Ez azt jelenti, hogy a hátralévő várható tartamot ebben a tartományban elsődlegesen a „haláleset szabja ki”, a válásnak kicsi a szerepe.

Férj, éves \ Feleség, éves	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85
20	50,6	49,0	45,6	42,3										
25	47,3	45,8	44,2	40,6	38,2									
30	43,2	42,5	41,0	39,3	36,0	33,2								
35	39,1	38,4	37,7	36,2	34,6	31,3	28,7							
40		34,4	33,8	33,0	31,6	30,1	26,9	24,5						
45			30,1	29,4	28,6	27,3	26,0	22,8	21,0					
50				26,0	25,2	24,5	23,3	22,0	19,6	18,4				
55					21,9	21,4	20,8	19,6	18,6	16,5	16,0			
60						18,3	18,0	17,3	16,2	15,3	13,9	14,2		
65							15,1	14,9	14,2	13,1	12,7	12,5	14,0	
70								12,5	12,0	11,4	10,4	10,4	11,3	13,3
75									9,8	9,4	8,9	8,1	8,7	11,3
80										7,6	7,3	6,9	6,1	7,4
85											5,7	5,4	5,2	4,1

2. táblázat. A házasság várható hátralévő tartama a házastársak életkora szerint, a férj halálát feltételezve, 2000–2001



4. ábra. A házasság megszűnésének 5 éven belüli valószínűsége és várható hátralévő tartama megszűnési okok szerint, 5 évvel fiatalabb feleség esetén, 2000-2001

A bal oldali ábráról az alábbiak olvashatók le:

- A „bármely ok” görbéje fiatalkorban a válás, később pedig a bármely okbóli halálozás görbéjével esik szinte egybe, azaz a házasság megszűnését eleinte (fiatal korban) a válások, később a halálesetek okozzák.

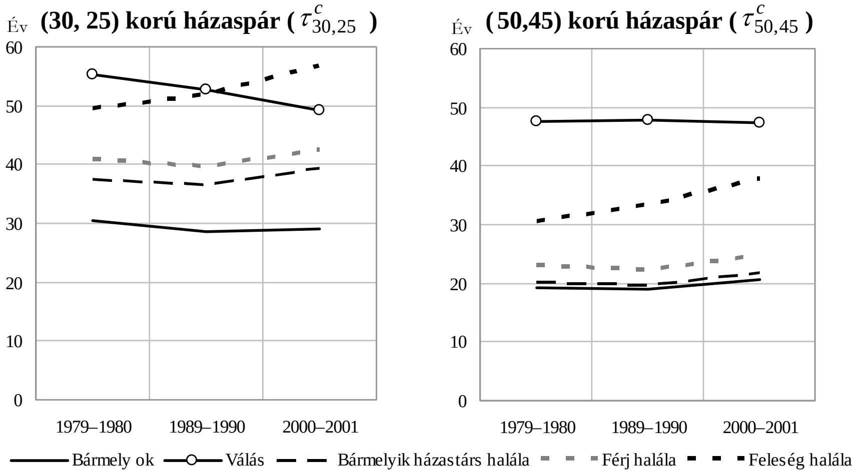
- A teljes kortartományban (5 évvel fiatalabb feleség esetén) 3–3,5-ször nagyobb a valószínűsége annak, hogy a házasság a férj halálával végződik, mint hogy a feleségével.
- A $(45, 40)$ éves kor felett kezdi a halálozás (bármelyik félé) valószínűsége meghaladni a válásét.

A jobb oldali ábrán megfigyelhető, hogy:

- a ,,bármely ok" görbe hozzásimulása a ,,halálozás" görbéjéhez azt jelzi, hogy az adott korú házaspárok – későbbi – válásának csekély a valószínűsége.
- A válással végződő házasságok görbéjének kezdeti emelkedése meglepő, hiszen ez azt jelenti, hogy az idősebb pároknak várhatóan több van még hátra a válásig, mint a fiatalabbaknak. Ez azonban a korai válások nagy valószínűségéből egyenesen következik.
- A $(85, 80)$ korú házaspárra válás és a feleség halála esetén a várható hátralévő tartam egyaránt 15 év, ami azt jelzi, hogy e kor fölött nagyon ritkán fordul elő válás vagy a feleség halála (mert nyilván ezeket megelőzi a férjé), és így a házasság eltart a lehetséges maximumig, azaz az idősebbik fél – általunk ,,adminisztratíve" rögzített – 100 éves koráig.

Idősorok

A *5. ábra* görbéi közötti kapcsolat megértését ismét segíti az a meggondolás, hogy az összetett események görbéinek alakját annál jobban befolyásolja egy összetevő görbéje, minél közelebb esik hozzá. Az $(50, 45)$ korú házaspárra vonatkozó görbék közül a legalsó, a ,,bármely ok"-hoz tartozó például szinte egybeesik a ,,bármelyik házastárs halálá"-hoz tartozóval. Ez azt jelenti, hogy ilyen magas korban a házasság hosszának alakításában a haláleseté a főszerep (főleg a férj halláé).



5. ábra. A házasságok várható hátralevő tartama

Látható, hogy $(30, 25)$ éves korban is a haláleset befolyása a legnagyobb, de a válásnak is jut szerep. Hasonlóan, a „bármelyik házastárs halála” görbe alakját a férj halála görbe jóval erősebben befolyásolja, mint a feleség halála görbe.

– A fiatalkori válások számának az eltelt két évtized alatt bekövetkezett nagymértékű növekedését tükrözi a válással végződő házasságok várható hosszának jelentős csökkenése a $(30, 25)$ évesek körében és stagnálása az $(50, 45)$ korban.

– Ezt azonban 1990 és 2000 között már kompenzálja a halálozások mindkét nemre érvényes javulása: a bármely okból végződő házasságok várható hossza 2000–2001-ben már nagyobb, mint 1999–2000-ben.

Észrevehető egy mélyebb összefüggés az egyének családi állapottól függő várható élettartamai és a házasságtartamok között. Egy adott korú házas férfi várható élettartamának kiszámításakor (1. képlet) feltételeztük, hogy családi állapota mindvégig változatlan. Ekkor azonban e tartam meg kell, hogy egyezzen az ő házasságának hátralévő várható tartamával, ha azt az ő (a férj) halálának feltételezésével számítjuk ki. A helyzetet kissé bonyolítja, hogy utóbbit különböző korú feleségek mellett számoltuk ki (2. képlet). Így viszont annak kell teljesülnie, hogy az x éves házas férfi várható hátralévő élettartama megegyezik a különböző y korú feleségekhez tartozó várható házasságtartamok súlyozott közepével, feltételezve a férj halálát. Ellenőrizhető, hogy ez igaz, ha a súly:

$$s(x, y) = \Pr\left(\text{a feleség kora } y \mid \text{az } x \text{ éves férj hal meg}\right),$$

azaz annak a valószínűsége, hogy egy x éves férj halála esetén a feleség éppen y éves.

Valóban, pl. a 1. táblázat „házas férfi” oszlopának valamely rögzített x korhoz tartozó eleme súlyozott közepe a 2. táblázat férj halálára vonatkozó rész megfelelő (az x korú férjhez tartozó) sorába eső különböző (y korú feleségekhez tartozó) tartamoknak. (Annak, hogy ez láthatóan nem mindig teljesül pontosan, az az oka, hogy az egyének és a párok halálozási valószínűségeinek becslési formulája – a rátákból – nem teljesen kompatibilis ebből a szempontból.)

3 Túlélés

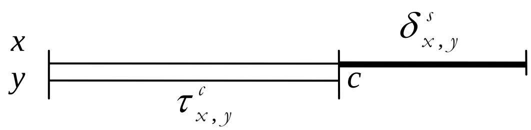
Ebben a fejezetben az (x, y) korú házaspárok valamelyik tagjának várható hátralévő élettartamát, továbbá ennek a házasságon túli részét, azaz a házasság után várható élettartamot vizsgáljuk, feltételezve a házasság valamilyen okból történő megszűnését. Ennek megfelelően a (majdani) özvegy vagy elvált férfi és nő várható élettartamát ($e^s_{x,y}$), illetve túlélési tartamát ($\delta^s_{x,y}$) számítottuk ki, ahol s a most felsorolt, a házasságot követő négy állapot valamelyikét jelöli. Nem állítottuk elő az összetett megszűnési okokhoz tartozó értékeket, hiszen nem értelmezhető például a bármelyik házastárs halálával (nem tudni, melyik melyikükével) végződő házasság túlélőjének (a másik félnek) a várható túlélési élettartama.

A teljes hátralévő élettartam definíció szerint: $e^s_{x,y} = \tau^s_{x,y} + \delta^s_{x,y}$, ahol s és c értelemszerűen összetartozó értékek. Például, ha $c =$ „férj halála", akkor a hozzátartozó $s =$ „özvegy nő" stb. Ekkor tehát az x éves férjjel élő y éves feleség özvegység esetén várható élettartama egyenlő a házasság férj halála esetén várható hátralévő tartamának és a feleség özvegyen várható túlélési tartamának összegével.

A továbbiakban is: x és y egymástól függetlenül befutja a korintervallumok kezdőpontjait, $\{20, \ldots, 85\}$-t.

3.a *Egy (x, y) korú házaspár s állapotú túlélőjének a házasság megszűnése után várható élettartama, feltéve, hogy élete végéig megmarad az s állapotban*

A következő séma az (x, y) korú házaspár c okból megszűnt házasságát és annak s állapotú túlélését szemlélteti. A túlélés várható tartamát, azaz a vastag vonallal jelzett tartam várható hosszát a (3) képlet állítja elő.



A képletben szereplő, a házasság megszűnésének okát kódoló c értelemszerűen tartozik s-hez az alábbi hozzárendelés szerint:

s	$\longrightarrow$	c
elvált férfi		válás
özvegy férfi		feleség halála
elvált nő		válás
özvegy nő		férj halála

Ekkor az s állapotú túlélő (özvegy vagy elvált férfi vagy nő) várható túlélési tartama, amely a c ok miatt végződő házasságot követi:

$$\delta^s_{x,y} = \sum_{t=0}^{\infty} {}_t p^c_{x,y} \cdot {}_m q^c_{x+t,y+t} \cdot e^s_{z+t+m/2}\,, \qquad (t = im) \tag{3}$$

ahol ${}_t p^c_{x,y}$ annak a valószínűsége, hogy a házasság t éven át fennmarad, továbbá ahol a z index függvénye s-nek: $z = x$ vagy $z = y$ aszerint, hogy s férfira vagy nőre utal, rendre (pl. $s = of$ esetén $z = x$).

A (3) hibrid formulában (mely a teljes várható érték tétele) egymás mellett szerepelnek az egyénekre és a házaspárokra vonatkozó – az előző két fejezetben definiált – fogalmak jelei. A ${}_t p^c_{x,y} \cdot {}_m q^c_{x+t,y+t}$ súly annak a valószínűsége, hogy a házasság $t = im$ éven át fennmarad, majd m éven belül megszűnik c okból. Ebből már következik, hogy a súlyok összege 1. A harmadik tényező, $e^s_{z+t+m/2}$ a házaspár egyik – a megszűnés pillanatában átlagosan $z+t+m/2$ korú – tagjának az ettől a pillanattól számított várható hátralévő élettartamát jelenti – azt végig az s állapotban eltöltve. Ezt a tényezőt 85 éves korig a családi állapottól függő halandósági táblákban már kiszámítottuk, a ${}_mq^c_{x,y}$ megszűnési valószínűségeket pedig a házasságtartam számítása során előállítottuk.

A magas életkorokra vonatkozó kis esetszámok miatt 85 év fölött most is exponenciális modellt alkalmazunk. Így a (3) képlet finomításra szorul, a benne szereplő szumma két részre esik szét. Amíg 85 év alatt $m = 5$, addig fölötte $m = 1$ korévenként számolunk. Egyben pótoljuk a ${}_ip^c_{x,y}$-t előállító formulákat is.

Legyen a férj, illetve a feleség kora x és y egyaránt 5-tel osztható. Egy τ idő elteltével az idősebbik eléri a 85 éves kort, ekkor a korukat jelölje $\tilde{x}$ és $\tilde{y}$, azaz $\tilde{x} = x + \tau$, $\tilde{y} = y + \tau$ és $\max(\tilde{x}, \tilde{y}) = 85$. Ha t is 5-tel osztható, $\tilde{t}$ egész, akkor

$$\delta^s_{x,y} = \frac{1}{l^c_{x,y}}\left(\sum_{\substack{t\ge 0\\ x+t,y+t\le 80}} l^c_{x+t,y+t}\cdot {}_5q^c_{x+t,y+t}\cdot e^s_{x+t+5/2} + \sum_{\tilde{t}=0}^{\infty} l^c_{\tilde{x}+\tilde{t},\tilde{y}+\tilde{t}}\cdot {}_1q^c_{\tilde{x}+\tilde{t},\tilde{y}+\tilde{t}}\cdot e^s_{\tilde{z}+\tilde{t}} \right), \tag{3'}$$

ahol $l^c_{x,y} = 100000$, ha $\min(x, y) = 20$, azaz ha a fiatalabbik 20 éves. (A képletbeli t megfelel a (2')-beli im-nek.) Ha pedig $\min(x, y) > 20$, akkor

$$l^c_{x+5,y+5} = l^c_{x,y}(1 - {}_5q^c_{x,y}) ,$$

ha $z \le 80$, különben pedig

$$l^c_{\tilde{x}+\tilde{t},\tilde{y}+\tilde{t}} = l^c_{\tilde{x},\tilde{y}} \exp(-{}_{15}M^c_{\tilde{x},\tilde{y}}\tilde{t}) \quad {}_1q^c_{\tilde{x}+\tilde{t},\tilde{y}+\tilde{t}} = 1 - \exp(-{}_{15}M^c_{\tilde{x},\tilde{y}}\tilde{t}) \quad \tilde{t} \ge 0 .$$

A túlélő ,,egyszemélyes" folyamatát továbbra is exponenciálisnak feltételezzük 85 év fölött, így: $e^s_{x+t} \equiv 1/{}_{15}M^s_{85}$. (Tehát nem függ a kortól, megfelelve az exponenciális folyamat ,,örökifjú" jelzőjének.) Valójában 5-tel osztható indexekre számoltuk ki, a szükséges $e^s_{x+t+5/2}$ értékeket $(e^s_{x+t} + e^s_{x+t+5})/2$ -vel közelítjük.

Észrevehető, hogy a (3') formula $e^s_{x+t+5/2}$ ill. $e^s_{\tilde{z}+\tilde{t}}$ súlyozott közepeit számítja ki, ahol a súlyok a házasság c okú megszűnésének valószínűségei t idő elteltével. Valóban, hiszen a fenti képleteket az alábbi szummákba helyettesítve előáll

$$\sum_{\substack{t\ge 0\\ x+t,y+t\le 85}} l^c_{x+t,y+t}\cdot {}_5q^c_{x+t,y+t}/l^c_{x,y} = 1 \quad \text{és} \quad \sum_{\tilde{t}=0}^{\infty} l^c_{\tilde{x}+\tilde{t},\tilde{y}+\tilde{t}}\cdot {}_1q^c_{\tilde{x}+\tilde{t},\tilde{y}+\tilde{t}}/l^c_{\tilde{x},\tilde{y}} = 1 ,$$

mivel az első egyenlőség közvetlenül adódik, a második szummából pedig ez lesz:

$$(1 - \exp(-{}_{15}M^c_{\tilde{x},\tilde{y}})) \sum_{\tilde{t}=0}^{\infty} \exp(-{}_{15}M^c_{\tilde{x},\tilde{y}}\tilde{t}) ,$$

amely egy 1 összegű mértani sor. Az (3') képlet második szummája átírható így is:

$$\frac{l^c_{\tilde{x},\tilde{y}}}{l^c_{x,y}}(1 - \exp(-{}_{15}M^c_{\tilde{x},\tilde{y}})) \sum_{\tilde{t}=0}^{\infty} \exp(-{}_{15}M^c_{\tilde{x},\tilde{y}}\tilde{t}) e^s_{\tilde{z}+\tilde{t}} .$$

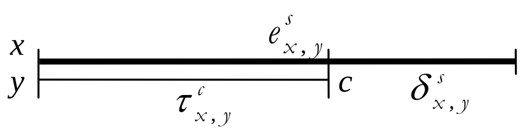
Ha a túlélő az idősebb, vagy azonos korúak, akkor $e^s_{\tilde{z}+\tilde{t}}$ nem függ $\tilde{t}$-től, hisz $\tilde{z}+\tilde{t} \geq 85$. Kiemelve őt a szummából, ezt kapjuk:

$$\frac{l^c_{\tilde{x},\tilde{y}}}{l^c_{x,y}} \frac{1}{{}_{15}M^s_{85}} \; .$$

Ha a túlélő a fiatalabb, akkor $e^s_{\tilde{z}+\tilde{t}}$-t $\tilde{z}$ és 84 között minden korévre ki kell számolni. Ezeket lineáris interpolációval közelítjük 5-tel osztható indexű szomszédaikból: ha $w' \leq w \leq w''$, akkor

$$e^s_w = \big((w''-w)e^s_{w'} + (w-w')e^s_{w''}\big)/5 \; .$$

3.b Egy (x, y) korú házaspár s állapotú túlélőjének a várható teljes *élettartama (beleértve a házasságban eltöltöttet is) feltéve, hogy élete végéig megmarad az s állapotban*



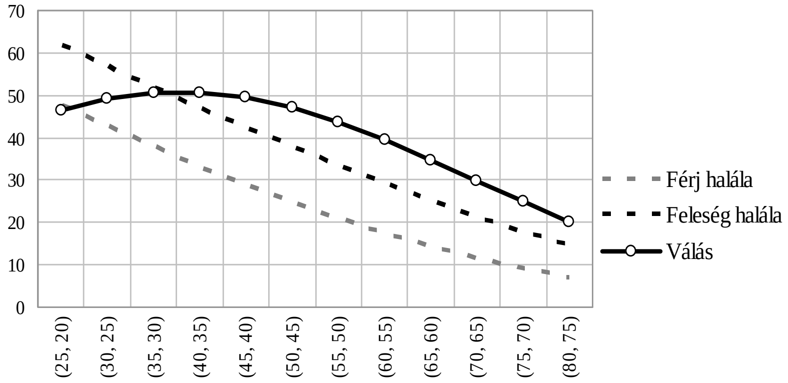
Amint azt a séma mutatja, az (x, y) korú házaspár c okból végződő házasságának s állapotú túlélője

$$e^s_{x,y} = \tau^c_{x,y} + \delta^s_{x,y} \tag{4}$$

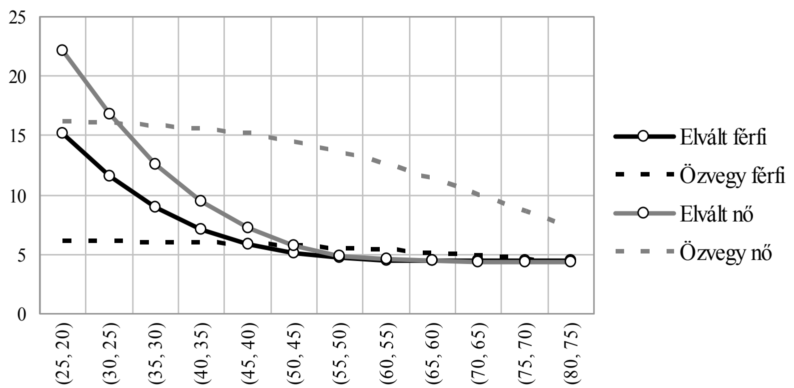
várható teljes hátralévő élettartammal rendelkezik, mely a házasságból várhatóan hátralévő tartam és a várható túlélési tartam összege, ahol s és c a 3.a-ban már ismertetett módon felelnek meg egymásnak.

Eredmények (2000–2001)

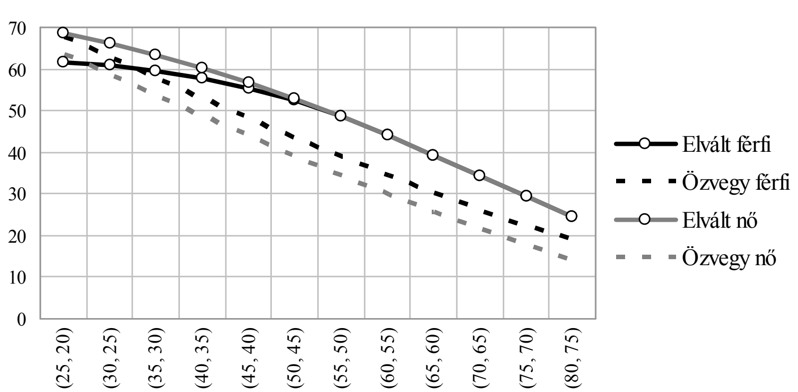
A *6. ábra* a tipikus +5 év korkülönbség mellett mutatja a számított értékeket. Az ábrán a harmadik grafikon görbéi az első két grafikon megfelelő görbéinek (függvény-) összegeként állnak elő. A megfelelést a görbék azonos mintázata jelzi. Például: férj halála – özvegy nő; vagy: elvált férfi, illetve elvált nő – válás.



6a. ábra. A házasság várható hátralévő tartama 5 évvel idősebb férj esetén ($\tau^s_{x,x-5}$)



6b. ábra. A várható túlélési tartam 5 évvel idősebb férj esetén ($\delta^s_{x,x-5}$)



6c. ábra. A teljes várható élettartam 5 évvel idősebb férj esetén ($e^s_{x,x-5}$)

Az 6. ábrából levonható következtetések például:

- özvegy nő: egy rövid várható házasság-tartamot (első ábra: férj halála) követő hosszú várható özvegység (második ábra: özvegy nő) = rövid várható összélettartam (harmadik ábra: özvegy nő), tehát a házasság-tartam dominál;
- válás (mindkét nemre): hosszú várható házasság-tartamot követő rövid várható túlélés = hosszú várható összélettartam;
- özvegy férfi: közepesen hosszú várható házasság után rövid várható özvegység = eléggé rövid várható élettartam.
- A teljes várható élettartam hosszát általában a házasság várható tartama (rövid, közepes, hosszú) határozza meg, a görbék közti (év-) távolságok a várható hátralevő tartam ábrán sokkal nagyobbak, mint a várható túlélési tartam ábrán. Ezt jelzi az is, hogy a majdan özveggyé váló férjek teljes várható élettartama hosszabb, mint 5 évvel fiatalabb feleségeiké, ha ők lesznek özvegyek (az ábra alsó két görbéje között közelítőleg állandó 5 év a különbség). Ugyanis özvegy férfi esetén először a feleség hal meg – sokkal később, mint a fordított esetben a férj (lásd a házasság várható hátralevő tartama görbéket). Ezt a különbséget a feleség hosszabb özvegyi élete már nem tudja kompenzálni.
- Érdekes, hogy $(55, 50)$ kor fölött a két elvált házasfél túlélési görbéje (és így az összélettartam görbéje is) szinte egybeesik. Ez azonban csak az 5 év korkülönbségű párokra teljesül.

Összességében megállapíthatjuk, hogy az egyes ábrákon belül a görbék összevetése óvatosságot igényel. Egyes túlélési értékek azért – is – rövidek, mert hosszú házasságot követnek (az elváltaké, főleg a nőké), ami után már nincs mód sokáig élni. Vagy például az özvegy nők hiába élik túl sokkal a házasságot, ha ez utóbbi olyan rövid, hogy az összélettartamuk végül is rövid lesz.

A továbblépés lehetőségei

Az elvégzett vizsgálat a probléma egy első közelítésének tekinthető. A számítások részletezettségének és az alapul szolgáló matematikai-statisztikai modell mélységének növelése egyaránt indokolt.

Érdemes lenne az ötéves korcsoportokat korévesre sűríteni: jelenleg például a $\langle 40, 35, 5\rangle$ korcsoportba beletartozik a 44 éves férfiből és 35 éves nőből álló – 9 év korkülönbségű – pár is.

A házasságtartamra és a túlélésre szolgáló modell jelenleg nem veszi figyelembe a házaspár „mögött álló” házaspáréveket, amelyek pedig bizonyára erősen befolyásolják az eredményeket. Jelenleg e hatások kiátlagolódnak. Ha a teljes múltat, azaz a korábban betöltött állapotokat nem is (lásd a Bevezetést), de az elmúlt házaspáréveket figyelembe lehetne venni.

Számítani kell azonban arra, hogy e változtatások hatására az eredmények mennyisége körülbelül 2000-szeresére ($5 \times 80 \times 80$) növekszik, ami azt jelenti, hogy azok kiértékelése is számítógépet igényel. Ennek azonban semmi akadálya, hiszen az eredmények olyan adatbázisba rendezhetők, amelynek oszlopai: a férfi kora, a nő kora, az eltelt tartam és a várható tartam. A rekordok száma egy rögzített periódusban 512000 ($80 \times 80 \times 80$), amely manapság már kezelhető méret.

Összefoglalás

Mennyi ideig él még várhatóan egy adott populációhoz tartozó személy, ha ismert a kora: x? A válasz: az e_x várható élettartam rögzített nem esetén egy egydimenziós táblázatból olvasható ki. Természetesen vetődik fel az analóg kérdés: mennyi ideig ,,él" még egy házasság, ha ismert a házasfelek (x, y) kora. Az ismertetett számítási módszerrel zárt alakban előállítottuk a választ tartalmazó $\tau_{x,y}$ kétdimenziós táblázat formuláit. Megadtuk e táblázat különböző megszűnési okokhoz (válás, egyik vagy másik, vagy bármelyik fél halála) tartozó változatait is. Végül kiszámítottuk a ,,most" (x, y) korú házaspár tagjainak a házasság után (elvált vagy özvegy állapotban) várható élettartamát. Ebből egy összegzéssel (házasság+túlélés) automatikusan előállnak a házasfelek várható teljes hátralévő élettartamait tartalmazó – az egyes megszűnési okokhoz tartozó – táblázatok is. A házasságból hátralévő várható tartam és a házasságot követő várható élettartam, mindkét házasfél korának függvényeként, nemcsak fogalmilag, illetve matematikai formuláiban analóg a klasszikus ,,egyszemélyes" várható élettartammal, hanem fontosságában is. Kiszámítása hasznos és izgalmas következtetésekre ad alkalmat.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom Radnóti Lászlónak a módszertani konzultációkért, valamint az anonim lektoroknak a gondolatébresztő bírálatért.

Irodalom

1. Chiang, L. C. (1968) *Introduction to Stochastic Process in Biostatistics.* Wiley. New York.
2. Faragó Miklós (2011) Paritásfüggő összetett termékenységi mutatók Magyarországon és különbségeik dekompozíciója, *Közgazdasági Szemle*, 58. évf. 11. sz. 970–993. o.
3. Keyfitz, N. and Caswell, H. (2005). *Applied Mathematical Demography. Statistics for Biology and Health.* Springer, third edition.
4. Radnóti László (2003) Az élettartamok statisztikája, *Statisztikai Szemle*, 81. évf. 7. sz. 559–570.
5. Willekens, F. J., Shah, I., Shah, J. M. and Ramachandran, P. (1982) *Multistate analysis of marital status life tables: theory and application.* Pop. Studies 36, 129.

EXPECTED DURATION OF MARRIAGE AND OF POST-MARITAL SURVIVAL

What is the expected remaining time of a marriage, if the ages of the spouses are given? By how many years will one of them survive the other, provided beeing widowed someday? Or what are their life expectations after the divorce? The expected remaining time of marriage or the life expectancies after cessations of marriage, to the authors knowledge, have not yet been studied as two-variable functions. In this paper, we develop formulas for these values as functions the ages of the two spouses, with respect to the various causes of cessation. Our results are analysed on the data of the Hungarian population for four decades retrospectively.