DÖNTÉSTÁMOGATÓ MÓDSZEREK A BESZÁLLÍTÓ-VÁLASZTÁS OPTIMALIZÁLÁSÁHOZ[1]

SZABÓ BALÁZS – HAUCK ZSUZSANNA
PTE Közgazdaságtudományi Kar

Olyan vállalatok beszállító-választási problémáját tekintjük, amelyek célja jelentős mennyiségű kereslet lehető legnagyobb várható megbízhatóság mellett történő kielégítése. Ehhez a saját termelési képességeinek ismeretében kell beszereznie a termeléshez szükséges inputokat. A beszállítók kiválasztásáról és súlyozásáról való döntéshez rendelkezésére állnak a potenciális beszállítók megbízhatóságára és költségeire vonatkozó adatok.A javasolt döntési mechanizmus két lépésből áll. Először a beszállítók optimális halmazát határozzuk meg egy, a hátizsák-probléma módszertanából kiinduló algoritmus segítségével. Ezt követően az egyes beszállítói súlyok, továbbá a beszállítóktól rendelendő mennyiségek meghatározását a termelő vállalat kockázatosságának minimalizálása mentén végezzük el, azaz a pénzügyi portfólió-analízisből ismert módszertant alkalmazunk. Eredményeinket numerikus példákkal is illusztráljuk.

Kulcsszavak: beszállító-választás, megbízhatóság, optimalizáció, markowitzi portfólió logika. *JEL:* C6, D8, G1.

1 Bevezetés

Jelen munka az ellátási lánc menedzsment problémakörén belül a beszállítók kiválasztására fókuszál, emellett mikromegalapozást is nyújt összetettebb gazdasági jelenségek vizsgálatához. Olyan termelő vállalatok problémáját tekintjük, amelyek már eldöntötték, hogy bizonyos nyersanyagok, félkész termékek, alkatrészek beszerzését egy vagy több külső vállalat bevonásával teszik meg, és ehhez keresnek megfelelő partnert vagy partnereket. A téma jelentőségét elméleti oldalról alátámasztja például a portieri öt erő modell (Porter 1979), amelynek egyik eleme a beszállítók hatása. A gyakorlati relevanciát igazolja többek között Thornton et al. (2013) empirikus kutatása, amely szerint a beszállító-választás jelentős hatással van a vállalat üzleti teljesítményére.

[1]A kutatást az Emberi Erőforrások Minisztériumának Felsőoktatási Intézményi Kiválósági Programja finanszírozta, a Pécsi Tudományegyetem 4. tématerületi ,,A hazai vállalatok szerepének növelése a nemzet újraiparosításában" programja keretében (szerződés száma: 20765-3/2018/FEKUTSTRAT). A szerzők ezúton mondanak köszönetet Komlósi Sándor professzor úrnak segítségéért és hasznos útmutatásaiért. Köszönetüket fejezik ki továbbá egy anonim lektor hasznos megjegyzéseiért. E-mail: `szabo.balazs @ktk.pte.hu`, `hauckzs@ktk.pte.hu`. Beérkezett: 2018. december 4.

Vizsgálódásaink célja egy olyan döntési mechanizmus kidolgozása és bemutatása, amely – a lehetőségekhez mérten és a szükséges információk birtokában – optimális beszállítói portfólióhoz juttatja az egyes termelő vállalatokat. A tanulmány egyik legfőbb újdonsága a pénzügytanból ismert Markowitz-féle portfóliószemlélet módszertanának alkalmazása. A beszállítók kiválasztása során fontos figyelembe venni, hogy az üzleti partnerek viselkedéséből eredő kockázat jelentős hatással van a termelő vállalatok működésére, így az alkalmazott módszertannal is a kockázatkezelés fontosságát kívánjuk hangsúlyozni.

A dolgozatban javasolt döntési mechanizmus két lépésből áll (multi-stage megközelítés). Elsőként a potenciális beszállítók körét kell leszűkítenie a vállalatnak. Erre a hátizsák probléma módszertanából kiinduló algoritmust írunk fel, amelyben a várható megbízhatóságot szerepeltetjük döntési kritériumként. Megbízhatóság alatt a jó teljesítések arányát értjük, amelyet a szerződésekben megrendelt mennyiségből határidőre és jó minőségben leszállított termékek arányával mérünk. Ennek oka, hogy a vállalati gyakorlatban termelési anomáliákat okoznak a késve, illetve nem megfelelő minőségben leszállított termékek.

A beszállítói kosár kiválasztását követően a beszállítók súlyát, valamint az egyes beszállítóktól rendelendő inputok mennyiségét határozzuk meg a portfólióanalízis eszközei segítségével. A beszállítói kockázatot a megbízhatóság varianciájával mérjük, és a termelő vállalat célja ennek (pontosabban a varianciák súlyozott összegének) minimalizálása. A kockázat varianciával való mérése klasszikus eljárásnak számít a portfólió- és kockázatmenedzsment irodalmában (lásd Markowitz 1952), sőt mostanra már az ellátási láncok elemzésének területén is jelen van (lásd Hosseininasab & Ahmadi 2015).

Kétlépcsős modell alkalmazása nem újkeletű az irodalomban. Aissaoui et al. (2007) irodalmi összefoglalója szerint gyakori a beszállítók előzetes szűrése, amelyben objektív vagy szubjektív kritériumok alapján kizárják a jelöltek jelentős részét a halmazból, és csak a következő lépésben döntenek a beszállítók összetételéről. Jellemzően rangsor alapján történik a döntés, a mi modellünkben azonban a második kör a már kiválasztott beszállítók súlyát, valamint a tőlük rendelt inputok mennyiségét határozza meg. A portfólió-szemlélet az elmúlt néhány évben jelent meg az irodalomban. A kockázat minimalizálásának céljával ajánl beszállítói portfóliót Lee & Chien (2014), Kellner et al. (2019) és Kellner & Utz (2019).

A tanulmány az alábbi struktúrát követi: A következő szakaszban áttekintjük az irodalmat, majd bemutatjuk a modell alapvetéseit, valamint a beszállítók kiválasztáshoz alkalmazott hátizsák problémát megoldó algoritmust. A 4. szakaszban a beszállítói súlyok és a rendelendő inputok mennyiségének optimalizálását tekintjük át egy egyszerűbb és egy összetettebb modell keretében. Általánosságban megfogalmazott eredményeinket az 5. részben numerikus példákkal illusztráljuk. Az utolsó szakaszban összegezzük tanulmányunk főbb gondolatait.

2 Irodalom

A termelésmenedzsment alaptankönyvei (lásd Krajewski et al. 2019, Heizer et al. 2017, magyar nyelven Vörös 2018) felhívják a figyelmet arra, hogy a vállalat minden egyes tevékenységének, döntésének összhangban kell lennie egymással, és ezeket a stratégia irányítja. Természetesen ez az integrált stratégia annál sikeresebb, minél inkább az egész ellátási hálózatra kiterjed, ezért a kiválasztott beszállítóknak is jól kell illeszkedniük hozzá.

A termelési stratégia alapján Fisher (1997) megkülönböztet hatékony és fogékony típusú ellátási láncokat. Előbbi standard termékek nagy volumenben történő termelését tűzi ki célul, amelynek következtében a beszállítók kiválasztásának alapvető szempontjai az alacsony költségszint és a konzisztens minőség. A fogékony ellátási láncokban a termék innovatív, minél inkább testre szabott és kis volumenben elérhető, a beszállítók reakcióidejének ezért nagyon gyorsnak kell lennie. Flexibilis, innovatív partnerekre van szükség. Mivel a sok beszállítót feltételező, nagy mennyiségben történő termelés inkább a tömegtermékek előállítására koncentrál, ezért megállapításaink inkább a hatékony típusú ellátási láncokra igazak, bizonyos feltevések mellett azonban utóbbiakra is értelmezhető.

Vörös (2018) szerint az ideális beszállító betartja a határidőket, a minőségi és mennyiségi követelményeket. Folyamatosan csökkenti a termelési költségeket és fejleszti a terméket, szolgáltatást. Képes gyorsan reagálni a változásokra, és minden információt önzetlenül megoszt az ellátási lánc többi tagjával. Ezek szerint a beszállítók kiválasztásakor ezeket a tényezőket a termelő vállalat a számára legmegfelelőbb súlyozással figyelembe tudja venni. Dickson (1966) és Chen (2011) szerint a szakirodalomban használt beszállítóválasztási kritériumok közül a minőség, a határidők betartása és a korábbi teljesítmény a legfontosabbak. Az általunk definiált megbízhatósági kritérium tulajdonképpen ezen három tényező kombinációja.

A beszállítók kiválasztásának módszertanát tekintve Chen (2011) és Chai et al. (2013) is az AHP, a DEA és az LP alkalmazásának gyakoriságát emeli ki. Chen (2011) a matematikai módszerek mellett a többváltozós statisztika, valamint a mesterséges intelligencia módszertanát alkalmazó modelleket különbözteti meg. A kombinált modellek kategóriájában pedig kettő, jellemzően matematikai modelltípust kombináló megoldásokat sorol fel. Chai et al. (2013) a döntési környezet alapján hét típust különböztet meg, amelyekből egy determinisztikus, a többi a fuzzy logikát követi. Determinisztikus modelljében az AHP módszerét alkalmazza Levary (2008) egy úgynevezett megbízhatósági láncra. A szerző olyan nehezen számszerűsíthető kockázati tényezőket is figyelembe vesz, mint az országkockázat, és a beszállítók megbízhatóságába beleérti a menedzsment iránti bizalmat vagy a sztrájk előfordulásának kockázatát. Döntési módszert objektív és szubjektív kritériumok együttes jelenlétével alakít ki.

Wetzstein et al. (2016) huszonöt év több mint kétszáz irodalmát áttekintve hat különböző kategóriába sorolja a beszállító-választás szakirodalmát. A tanulmányok csaknem fele matematikai modellezési technikákat mutat be.

A szerzők szerint feltörekvőben vannak a stratégiai és a fenntarthatósági kérdéseket figyelembe vevő irányzatok. Utóbbinak magyar képviselőit, Dobos & Vörösmarty (2014) munkáját is kiemelik, akik a DEA módszertanát alkalmazzák a döntési probléma megoldására. Újabb tanulmányában Dobos & Vörösmarty (2019) a fenntarthatóság mellett a készletezéssel kapcsolatos költségeket is figyelembe veszik. Wetzstein et al. (2016) megemlíti továbbá a behaviorista irányzatot, valamint a több periódust feltételező modellek jelentőségét, amely megközelítés jelen munka egyik későbbi kiterjesztési iránya lehet. A legújabb tanulmányokban az adatbányászat eszközei is megjelentek. Su & Chen (2018) a beszállítók kockázatának mérésével foglalkozik ezen módszer segítségével.

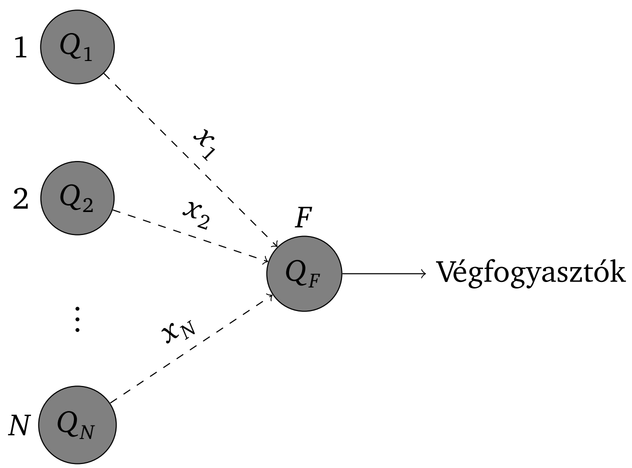
Az ellátási kockázat minimalizálása is célja Kellner et al. (2019) modelljének, akik a portfólióelmélet eszközeit is felhasználják a beszállítóválasztási probléma megoldásában. A kockázat számszerűsítésére a varianciát alkalmazzák, amelyről megjegyzik, hogy széles körben elfogadott az irodalomban, azonban a kritikai észrevételektől sem tekinthetünk el.

Kim & Wagner (2012) szerint a beszállító-választás egy olyan döntési folyamat, amelynek célja a legjobb beszállító(k) kiválasztása egy előszűrt merítési bázisból, előre meghatározott célok és kritériumok alapján. A választás vonatkozhat egy, azaz a legjobb beszállítóra vagy több beszállítóra együtt. Jelen tanulmányban legalább egy beszállító kiválasztását tűzzük ki célul, a partnerek számát tulajdonképpen a kapacitás- és a várható megbízhatósági szintek alapján határozzuk meg. Kim & Wagner (2012) alapján feltételezzük, hogy a merítési bázisban olyan potenciális beszállítók vannak, akik jól illeszkednek a termelő vállalat stratégiájához. Ha például a vállalat magas színvonalú JIT rendszerben termel, akkor a beszállító is tegyen úgy. Az előzetes elvárásoknak megfelelő potenciális partnervállalatokról ezután várható megbízhatóságuk és a hozzájuk kapcsolódó költségek alapján döntünk. Feltételezzük, hogy ezen információk a döntéshozók rendelkezésére állnak. Megállapításaink a Fisher-féle kategóriák közül inkább a hatékony ellátási láncokra lesznek igazak, azaz olyan vállalatok ellátási láncára, amelyeknél standard termékek nagy volumenben történő gyártásáról van szó.

Tanulmányunkban a beszállítók kiválasztása, így az egyszerű beszállítói, hálózati struktúra kialakítása endogén módon történik. A struktúra kiválasztásához a könnyen számszerűsíthető szempontokat vettük figyelembe. Amennyiben a termelő vállalat szeretne figyelembe venni kevésbé objektív módon mérhető tényezőket is, úgy érdemes lehet Slack et al. (2015) egy, illetve több beszállító alkalmazásának előnyeit és hátrányait elemző keretrendszerét felhasználni Slack et al. (2015, 238. o.)

3 A modell

Egy egyszerű ellátási láncból indulunk ki, amelyben az F termelő vállalatot és az ő összesen $N > 0$ számú lehetséges beszállítóját tekintjük, amelyeket az $\{1, 2, \ldots, N\}$ halmaz elemeivel indexelünk. Feltételezzük, hogy a termelő vállalat közvetlenül a végfogyasztóknak értékesít, akiknek ismeri az összkeresletét. Az ellátási lánc kiindulási struktúráját az *1. ábra* mutatja. Az ábrán, illetve a tanulmány egészében alkalmazott jelöléseket az *1. táblázat* tartalmazza.



1. ábra. A vizsgált ellátási lánc kiindulási struktúrája

Jelölés	*Magyarázat*
N	Az összes lehetséges beszállító száma (pozitív konstans egész szám)
M	F által kiválasztott beszállítók száma (pozitív egész szám)
x_i	Bináris változó, amelynek értéke pontosan akkor 1, ha i-edik vállalat beszállítója a termelő vállalatnak, egyébként 0 (döntési változó)
β_F	Az F termelő vállalat megbízhatóságát jellemző valószínűségi változó
b_F	Az F termelő vállalat várható megbízhatósága
σ_F	Az F termelő vállalat β_F megbízhatóságának szórása
β_i	Az i-edik beszállító megbízhatósága (százalékban mért pozitív értékű valószínűségi változó)
b_i	Az i-edik beszállító várható megbízhatósága (véges érték)
σ_i	Az i-edik beszállító β_i megbízhatóságának szórása (véges érték)
Q_F	Az F termelő vállalat által megrendelendő teljes inputmennyiség
Q_i	Az F termelő vállalat által az i-edik beszállítótól rendelendő inputmennyiség (döntési változó)
w_i	Az i-edik beszállító súlya F termelő vállalat rendelési portfóliójában (döntési változó)
S_F	A termelő vállalat várható kínálatának nagysága, azaz várható kibocsátási szintje
K_i	Az i-edik beszállítótól rendelendő input kapcsán felmerülő szállítási és járulékos költségek (pozitív állandó érték)
K_F	A szállítási és járulékos költségek összegének maximuma az F termelő vállalat szempontjából, azaz F egy költségvetési korlátja (pozitív állandó érték)
$v(\cdot)$	Az F termelő vállalattal kapcsolatban álló beszállítók várható megbízhatóságainak összege

1. táblázat. Alkalmazott jelölések

A vállalat tudja tehát, hogy milyen mennyiségű terméket kell a vizsgált időszakban előállítania. Ismeri saját termelési képességeit, így azt is, hogy a megfelelő mennyiségű eladásra szánt outputhoz mennyi jó minőségű inputra van szüksége. A döntési probléma ezen Q_F-fel jelölt mennyiség beszerzésének módjára irányul. Az egyes beszállítók által kínált inputok nagymértékben (a levezetés szempontjából feltesszük, hogy tökéletesen) helyettesíthetők egymással, tehát ebből a szempontból homogén a beszállítók halmaza. A termelő ugyancsak ismeri minden egyes beszállító pozitív értékűnek vett β_i megbízhatóságát. Megbízhatóság alatt a megrendelt mennyiség azon részét értjük, amely időben megérkezett és kifogástalan minőségű (röviden nem selejt). Ennek természete sztochasztikus lehet, így β_i egy (diszkrét vagy abszolút folytonos) valószínűségi változó véges várható értékkel és pozitív, véges szórással. A termelő megrendel tehát egy adott mennyiséget valamely beszállítótól, amelynek β_i szerint realizálódó százalékát fogja tudni ténylegesen inputként felhasználni. Se a minőségi hibás, se a késve leszállított árut nem fogadja el a vevő, vagyis esetünkben a termelő vállalat. Az újságárus problémához hasonlóan azt feltételezzük tehát, hogy a késve leszállított árut már nem lehet eladni, így az értéktelen a vállalat számára.

Az ismert beszállítói megbízhatóságok várható értéke és varianciája alapján a termelő vállalatnak ki kell választania, hogy melyik beszállítókkal köt szerződést, azaz kiktől rendel. Erre bevezetjük az x_i bináris változót, amelynek értéke akkor 1, ha a szerződés létrejött, és 0, ha nem. A termelőnek arról is döntenie kell, hogy az egyes beszállítóktól mennyi inputot rendel, ezzel mintegy súlyokkal is ellátja őket. Az i-edik beszállító súlya a tőle rendelendő $Q_i \geq 0$ mennyiség és az összesen megrendelendő mennyiség hányadosa, vagyis

$$w_i = \frac{x_i Q_i}{Q_F}, \tag{1}$$

ahol $Q_F = \sum_{i=1}^{N} x_i Q_i$, feltéve, hogy van olyan i, hogy $x_i = 1$ és $Q_i > 0$. A fenti definíció garantálja, hogy a súlyok összege egységnyi legyen, azaz $\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$.

Megjegyezzük, hogy mivel a súlyokat a megrendelendő mennyiségekből számítjuk ki, ezért a beszállítók várható megbízhatósági szintjeitől függően akár jelentősen is eltérhetnek az $x_i b_i Q_i / \sum_{j=1}^{N} x_j b_j Q_j$ aránytól. Egy alacsonyabb b_i várható megbízhatósági szinttel rendelkező vállalattól ugyanis nagyobb mennyiséget kell rendelnünk ahhoz, hogy a kívánt mennyiségű és minőségű inputot határidőre leszállítsa.

Cikkünk legfontosabb feltevéseit az alábbiakban összegezzük:

1) Egy adott F termelő vállalat $N \geq 1$ beszállítóval léphet kapcsolatba, amelyeket az $\{1, 2, \ldots, N\}$ halmaz elemeivel indexelünk.

2) F termelő vállalat minden, a döntéséhez szükséges információnak a birtokában van beszállítóival kapcsolatban.

3) F termelő vállalat nem beszállítója más vállalatnak, közvetlenül a végfogyasztókat szolgálja ki, akiknek a keresletét ismeri, és várható kínálati szintjét ezzel teszi egyenlővé.

4) Az $x_i \in \{0, 1\}$ bináris változó azt mutatja meg, hogy i vállalat beszállítója-e F-nek vagy sem. Értéke pontosan akkor 1, ha F rendel i-től, egyébként 0.

5) F-nek van olyan i beszállítója, hogy előbbi $Q_i > 0$ mennyiséget rendel az utóbbitól.

6) Egy adott beszállító pontosan egyfajta inputot szállít F számára.

7) A beszállítói inputok tökéletesen helyettesíthetők egymással.

8) Minden beszállítóhoz hozzárendelünk egy megbízhatóságnak nevezett β_i valószínűségi változót $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$, amely az i-edik beszállítótól rendelendő inputmennyiségből a határidőre leszállított jó minőségű input arányát adja meg. Feltesszük, hogy a szóban forgó valószínűségi változó az értékeit a $(0, 1]$ intervallumból veszi fel, tehát az inputarány mindig pozitív.

9) Az egyes beszállítókat pozitív vagy negatív hatások (például inkrementális innováció, néhány termelőegység átmeneti meghibásodása) érhetik, amelyek befolyásolják ezek megbízhatóságát, így a ténylegesen leszállított jó minőségű input mennyiségét is.

10) F minden beszállítójához hozzárendel egy w_i súlyt az (1) összefüggés szerint.

3.1 A beszállítók kiválasztása

A beszállítók optimális kiválasztásához egy, a 0/1-típusú hátizsák problémához kapcsolódó lineáris programozási feladatot mutatunk be. Ennek során F azokat a beszállítókat szeretné megtalálni, amelyek várható megbízhatóságainak $v(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} x_i b_i$ összege maximális egy bizonyos feltételrendszer mellett, ahol $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)^T$. Feltesszük, hogy a szóban forgó beszállítókhoz tartozó, a rendelendő inputmennyiségtől független K_i pozitív egész szállítási és egyéb járulékos költségek (vagyis K_i-k a rendelendő inputmennyiségektől független konstansok) $\sum_{i=1}^{N} x_i K_i$ összege egy K_F pozitív egész plafonnál nem lehet magasabb.

Az LP-feladat feltételi halmaza szempontjából definiálnunk kell F vállalat β_F megbízhatóságát. Ez azt mutatja meg, hogy F az eredetileg legyártani tervezett mennyiség hány százalékát képes előállítani a selejtes inputok miatt. A β_F megbízhatóság a $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$ megbízhatóságok alábbi konvex kombinációjának az eredménye:

$$\beta_F = \sum_{i=1}^{N} x_i w_i \beta_i, \tag{2}$$

ahol $\beta_i \in (0,1]$. Vegyük mindkét oldal várható értékét, és használjuk ki a várható érték linearitását:

$$\mathbf{E}(\beta_F) = \sum_{i=1}^{N} x_i w_i \mathbf{E}(\beta_i). \tag{3}$$

Utóbbi összefüggés átírható a jelölésjegyzék szerinti jelöléseket alkalmazva:

$$b_F = \sum_{i=1}^{N} x_i w_i b_i. \tag{4}$$

Tudjuk, hogy minden $b_i \in (0,1]$, azaz a várható megbízhatóság nem zérus, de elméletileg lehet akár 100 százalék is. Emiatt biztosan teljesül, hogy

$$\sum_{i=1}^{N} x_i b_i Q_i \leq \sum_{i=1}^{N} x_i Q_i. \tag{5}$$

Ennek az egyenlőtlenségnek mindkét oldalát Q_F-fel osztva és felhasználva w_i definícióját (1), megkapjuk, hogy $b_F \in (0,1]$, mivel

$$\sum_{i=1}^{N} x_i w_i b_i \leq \sum_{i=1}^{N} x_i w_i \leq \sum_{i=1}^{N} w_i = 1. \tag{6}$$

Továbbá, az (5) egyenlőtlenség bal oldalát nullára rendezve azt kapjuk, hogy

$$0 \leq \sum_{i=1}^{N} x_i (1 - b_i) Q_i, \tag{7}$$

ami a $b_F \in (0,1]$ feltétel egy ekvivalens alakja, hiszen mind a (6), mind pedig a (7) összefüggés az (5) egyenlőtlenség eredménye, ekvivalens átalakításokat követően.

Az LP-feladatot tehát az alábbi módon adjuk meg:

$$\begin{aligned} &\max_{\mathbf{x}} v(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad &\sum_{i=1}^{N} x_i K_i \leq K_F, \quad K_F \geq K_{\min}, \end{aligned} \tag{8}$$

ahol $K_{\min} = \min\{K_1, K_2, \ldots, K_N\}$. Az F termelő vállalat tehát a beszállítók várható megbízhatóságának összegét szeretné maximalizálni K_F költségvetési korlát figyelembe vételével. A második feltétel biztosítja, hogy F-nek legyen legalább egy beszállítója. Pontosan azok az i-k lesznek beszállítói, amelyekre az optimalizáció során az $x_i = 1$ eredményt kapjuk.

A megoldás megtalálásához az ilyenkor szokásos dinamikus programozás módszerét alkalmazzuk (lásd Vizvári 2006). Először indexeljük F beszállítóit úgy, hogy a $0 < K_1 < K_2 < \ldots < K_N$ rendezés teljesüljön. Legyen $v[i,z] =$

$v(\mathbf{x})$, feltéve, hogy az első i beszállító közül választottuk és $\sum_{i=1}^{N} x_i K_i \le z$, ahol $z \in \{0, 1, 2, \ldots, K_F\}$. Megjegyezzük, hogy $v[i, 0] = 0$, ami azt jelenti, hogy nincs olyan beszállító, aki költségmentesen szállítana.

A (8) LP-feladat megoldását a $v[N, K_F]$ értékhez (lásd 1. Algoritmus) tartozó $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^N$ vektor adja meg. Előbbi vektort a fenti algoritmus segítségével határozzuk meg. Az algoritmus segítségével tehát az F termelő vállalat el tudja dönteni, hogy mely vállalatokkal kössön szerződést, azaz kik legyenek a beszállítói. Megjegyezzük, hogy a költségvetési korláttól, azaz K_F értékétől függően legfeljebb összesen $(2^N - 1)$-féle ellátási lánc képezhető, ami azonban csak egy durva felső becslés a lehetséges ellátási láncok számának elméleti maximumára. A következő szakaszban a már kiválasztott beszállítók súlyait, valamint a tőlük rendelendő inputok mennyiségét optimalizáljuk.

```
input  : b = (b_1, b_2, ..., b_N)^T,  K = (K_1, K_2, ..., K_N)^T,  K_F
output : v[N, K_F]
begin
    for 1 ≤ i ≤ N do
        v[i, 0] = 0;
    for 0 ≤ z ≤ K_F do
        if K_1 > z then
            v[1, z] = 0;
        else
            v[1, z] = b_1;
    for 2 ≤ i ≤ N do
        for 2 ≤ z ≤ K_F do
            if K_1 > z then
                v[i, z] = v[i − 1, z];
            else
                v[i, z] = max{v[i − 1, z], b_i + v[i − 1, z − K_i]};
```

1. Algoritmus. Az LP-feladat megoldásának algoritmusa (dinamikus programozás)

4 A beszállítói súlyok és a rendelendő input-mennyiség meghatározása

Ebben az egységben és a továbbiakban módszertani szempontból Dostál (2009) könyvére támaszkodunk. Ezenkívül felhasználjuk Markowitz (1952, 1971) műveit is. Ha σ_F jelöli a β_F megbízhatóság szórását, $1 \le M \le N$ pedig a kiválasztott beszállítók számát, amelyeket az $\{1, 2, \ldots, M\}$ halmaz elemeivel indexelünk, akkor teljesül az alábbi összefüggés:

$$\sigma_F^2 = \sum_{i=1}^{M} w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{j-1} w_j w_k \operatorname{cov}(\beta_j, \beta_k), \tag{9}$$

és feltesszük, hogy az egyes β_i-k olyanok, hogy $\sigma_F^2 > 0$ tetszőleges $w_1, w_2, \ldots$, w_M esetén, azzal együtt, hogy (1) miatt $\sum_{i=1}^{M} w_i = 1$ is teljesül. Ez a helyzet például, ha $\operatorname{cov}(\beta_j, \beta_k) \ge 0$ minden j, k-ra.

A továbbiakban jelentős szerepet szánunk egy lényeges egyszerűsítésnek. Ugyanis a következő egységekben szereplő szélsőérték-feladatok közül az első esetén feltesszük, hogy β_i-k korrelálatlanok, ami azt eredményezi, hogy a fenti összefüggés a következőre redukálható:

$$\sigma_F^2 = \sum_{i=1}^{M} w_i^2 \sigma_i^2. \tag{10}$$

A megbízhatóság σ_i és σ_F szórását (vagy ezek négyzetét) a beszállító és F kockázatosságának mérőszámaként kezeljük.

Megjegyezzük, hogy a (9) egyenlet úgy is írható, hogy

$$\sigma_F^2 = \mathbf{w}^T \operatorname{cov}(\boldsymbol{\beta})\mathbf{w}, \tag{11}$$

ahol $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_M)^T$, $\operatorname{cov}(\boldsymbol{\beta})$ pedig a $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_M)^T$ vektorváltozó kovariancia-mátrixa. Ha $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_M$ jelöli $\operatorname{cov}(\boldsymbol{\beta})$ sajátértékeit, akkor a *spektrálfelbontás tételének* alkalmazása miatt:

$$\sigma_F^2 = \mathbf{w}^T \operatorname{cov}(\boldsymbol{\beta})\mathbf{w} = \widehat{\mathbf{w}}^T \mathbf{D}_\beta \widehat{\mathbf{w}} = \sum_{i=1}^{M} \varphi_i \widehat{w}_i^2, \tag{12}$$

ahol $\mathbf{D}_\beta$ egy olyan diagonális mátrix, amely főátlójában a sajátértékek vannak, $\widehat{\mathbf{w}}$ pedig egy, a megfelelő normalizált sajátvektorokból képzett $M \times M$-es (unitér) mátrix transzponáltja és $\mathbf{w}$ szorzata ($\widehat{\mathbf{w}}$ i-edik eleme $\widehat{w}_i$). Ezenkívül $\widehat{w}_i = \sum_{j=1}^{M} e_{ji} w_j$, ahol e_{ij} a φ_i sajátértékhez tartozó normalizált sajátvektor j-edik koordinátája. Mivel ismert, hogy a kovariancia-mátrix pozitív szemidefinit, ezért a sajátértékei nemnegatívak. Következésképpen minden $\varphi_i \widehat{w}_i^2$ konvex, és így ezeknek az összege is. Vagyis noha az első szélsőérték-feladat az egyszerűbb (10) egyenletet vizsgálja, azonban már most jelezzük, hogy β_i-k korrelálatlanságát feloldva vizsgálható σ_F^2 általános alakja is. Utóbbi persze nem egyszerűen a σ_i^2 varianciák súlyozott összege, hanem annak értékére az említett kockázati mérőszámok mellett a kovarianciáknak is hatása van.

A továbbiakban bemutatunk több lehetséges modellt (ha tetszik döntési szabályt), amely alapján F dönthet a beszállítói súlyokat és a rendelendő inputmennyiségeket illetően. A fókuszban elsődlegesen varianciák minimalizálása áll, amely mögött az a burkolt feltételezés húzódik meg, hogy a termelő a kiszámíthatóság jegyében elsősorban a volatilitás csökkentésére törekszik.

4.1 A megbízhatóság varianciájának minimalizálása korrelálatlanság esetén

Ebben az egységben feltételezzük, hogy $\operatorname{cov}(\beta_j, \beta_k) = 0$ minden $j \neq k$ esetén. Az egyes w_i súlyok nagyságának meghatározásához oldjuk meg az alábbi problémát:

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{w}} \ \mathbf{w}^T \operatorname{cov}(\boldsymbol{\beta})\mathbf{w} \\ \text{s.t.} \quad &\sum_{i=1}^{M} w_i = 1, w_i \geq 0 \text{ minden } i\text{-re.} \end{aligned} \tag{13}$$

A feladat célfüggvénye a megadott feltételek mellett minimalizálható, hiszen σ_F^2 folytonos, konvex (ugyanis konvex függvények nemnegatív együtthatókkal vett lineáris kombinációja – kúpkombinációja – is konvex), a feltételi halmaz pedig kompakt.[2] Megjegyezzük, hogy a feltételi halmaz szerkezete biztosítja a regularitási követelmény teljesülését, így (13) megoldása biztosan stacionárius pontja a Lagrange-függvénynek.

A (13) megoldásainak megtalálásához felírjuk a feladathoz tartozó Lagrange-függvényt:

$$\mathcal{L}_1(\mathbf{w}, \lambda_1, \boldsymbol{\mu}) = \sum_{i=1}^{M} w_i^2 \sigma_i^2 - \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^{M} w_i - 1 \right) - \sum_{i=1}^{M} \mu_i w_i, \tag{14}$$

ahol λ_1 a feladathoz tartozó Lagrange-szorzó, $\mu_i \geq 0$ pedig a KKT-szorzó minden i-re, $\boldsymbol{\mu}$ pedig ezeknek a vektora. Ekkor a w_i szerinti parciális deriválással adódó elsőrendű szükséges feltétel minden i-re a következő:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial w_i} = 2 w_i \sigma_i^2 - \lambda_1 - \mu_i = 0. \tag{15}$$

Az egyenlet mindkét oldalát w_i-vel szorozva, felhasználva, hogy $\mu_i w_i = 0$ és összegezve az egyenleteket minden i-re:

$$2 \sum_{i=1}^{M} w_i^2 \sigma_i^2 - \lambda_1 \sum_{i=1}^{M} w_i = 0, \tag{16}$$

tehát $\lambda_1 = 2 \sum_{i=1}^{M} w_i^2 \sigma_i^2 > 0$. Ha $w_i = 0$ lenne valamely i-re, akkor az elsőrendű feltételből az jönne ki, hogy $\lambda_1 = -\mu_i \leq 0$, tehát $\mu_i = 0$ minden i-re. Vagyis $w_i > 0$ minden i-re.

Átrendezéssel kifejezhető w_i:

$$w_i = \frac{\lambda_1}{2\sigma_i^2}. \tag{17}$$

Utóbbit a $\sum_{i=1}^{M} w_i = 1$ feltételbe beírva λ_1-re az alábbi összefüggés adódik:

$$\lambda_1 = \frac{2}{\sum_{i=1}^{M} \frac{1}{\sigma_i^2}}. \tag{18}$$

[2] A Weierstrass-tétel miatt egy folytonos, többváltozós valós függvénynek van legkisebb és legnagyobb értéke egy kompakt halmazon.

Mivel $\lambda_1 > 0$, így $w_i > 0$, azaz a feladat második egyenlőtlenség feltétele is fennáll. Innen behelyettesítés után megkapjuk a szélsőérték-feladat általános megoldását:

$$w_i = \frac{2}{2\sigma_i^2 \sum_{j=1}^{M} \frac{1}{\sigma_j^2}} = \frac{1}{1 + \sigma_i^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M} \frac{1}{\sigma_j^2}} \geq 0. \tag{19}$$

Megállapíthatjuk, hogy σ_i növekedése csökkenti w_i-t, azonban σ_j növekedése w_i növekedését eredményezi. Utóbbit másként megfogalmazva, ha egy i-től különböző j beszállító megbízhatóságának varianciája növekszik, akkor F relatíve preferálni fogja i-t j-hez képest, hiszen w_i növekszik. Ezenkívül, ha σ_i-k megegyeznek, akkor $w_i = 1/M$, vagyis a beszállítókhoz rendelt súlyok is azonosak.

Végül a (19) egyenlet alapján és az (1) definíció segítségével Q_i kifejezhető, tehát meghatározható F-nek a i-edik beszállító termékével szembeni keresleti függvénye:

$$Q_i = \frac{Q_F}{1 + \sigma_i^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M} \frac{1}{\sigma_j^2}}. \tag{20}$$

A beszállítóktól rendelendő mennyiségek birtokában pedig az S_F várható kínálati nagyságot az alábbi módon definiáljuk:

$$S_F = \sum_{i=1}^{M} b_i Q_i. \tag{21}$$

Utóbbi egyenlet az (1) felhasználásával egyszerűbb alakban is felírható:

$$S_F = \sum_{i=1}^{M} b_i Q_F \frac{Q_i}{Q_F} = Q_F \sum_{i=1}^{M} w_i b_i = b_F Q_F. \tag{22}$$

Következésképpen, ha S_F ismert, akkor b_F ismeretében Q_F kiszámolható. Azonban b_F-et a súlyok ismeretében meghatározhatjuk.

4.2 A megbízhatóság varianciájának minimalizálása korreláltság esetén

Ebben az egységben feltételezzük, hogy $\mathrm{cov}(\beta_j, \beta_k)$ nem feltétlenül zérus, ha $j \neq k$. A w_i súlyokat az alábbi probléma megoldásával határozzuk meg:

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{w}} \ \mathbf{w}^T \mathrm{cov}(\boldsymbol{\beta})\mathbf{w} \\ \text{s.t.} \quad &\sum_{i=1}^{M} w_i = 1, w_i \geq 0 \text{ minden } i\text{-re.} \end{aligned} \tag{23}$$

A feladat célfüggvénye most is minimalizálható a megadott feltételek mellett, hiszen σ_F^2 folytonos, konvex (konvex függvények nemnegatív együtthatókkal vett lineáris kombinációja), a feltételi halmaz pedig kompakt. A feltételi halmaz szerkezete biztosítja a regularitási követelmény teljesülését, így (23) megoldása biztosan stacionárius pontja a Lagrange-függvénynek.

A (23) megoldásainak megtalálásához felírjuk a feladathoz tartozó Lagrange-függvényt:

$$\mathcal{L}_2(\mathbf{w}, \lambda_2, \boldsymbol{\nu}) = \sum_{i=1}^{M} \varphi_i \widehat{w}_i^2 - \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^{M} w_i - 1 \right) - \sum_{i=1}^{M} \nu_i w_i, \tag{24}$$

ahol λ_2 a feladathoz tartozó Lagrange-szorzó, $\nu_i \geq 0$ pedig a KKT-szorzó minden i-re, $\boldsymbol{\nu}$ pedig ezeknek a vektora. Ekkor a w_i szerinti parciális deriválással adódó elsőrendű szükséges feltétel minden i-re a következő:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial w_i} = 2 \sum_{j=1}^{M} \varphi_j \widehat{w}_j e_{ij} - \lambda_2 - \nu_i = 0. \tag{25}$$

Az egyenlet mindkét oldalát w_i-vel szorozva, felhasználva, hogy $\nu_i w_i = 0$ és összegezve az egyenleteket minden i-re:

$$2 \sum_{j=1}^{M} \varphi_j \widehat{w}_j \underbrace{\sum_{i=1}^{M} e_{ij} w_i}_{\widehat{w}_j} - \lambda_2 \sum_{i=1}^{M} w_i = 0, \tag{26}$$

tehát $\lambda_2 = 2 \sum_{i=1}^{M} \varphi_i \widehat{w}_i^2 > 0$. Azaz egy M ismeretlenből és legfeljebb M egyenletből álló egyenletrendszert kapunk.

Az egység hátralévő részében az eddigiek egy speciális esetét vizsgáljuk. Megnézzük, hogy milyen eredményre jutunk akkor, ha $\nu_i = 0$ minden i-re, tehát $w_i > 0$. Megjegyezzük, hogy ez az eset megvalósulhat, ezt világosan mutatja az előző modellváltozat.

Az elsőrendű feltételt átrendezve, majd $\widehat{w}_j$-be helyettesítve

$$\begin{gathered} 2 \sum_{j=1}^{M} \varphi_j e_{ij} \sum_{k=1}^{M} e_{jk} w_k = \lambda_2 \\ \Updownarrow \\ 2 \sum_{k=1}^{M} \left(\sum_{j=1}^{M} \varphi_j e_{ij} e_{jk} \right) w_k = \lambda_2 \,. \end{gathered} \tag{27}$$

Ha $\mathbf{U}$ jelöli azt a mátrixot, amelynek az i-edik oszlopa a φ_i-hez tartozó normalizált sajátvektor, valamint $\widehat{\mathbf{U}}$ egy olyan mátrix, amelynek i-edik sorvektora $(\varphi_1 e_{i1}, \varphi_2 e_{i2}, \ldots, \varphi_M e_{iM})$, akkor az elsőrendű feltételekből álló egyenletrendszer fenti, átrendezett alakja a következő mátrixegyenlet alakját ölti:

$$2\widehat{\mathbf{U}}\mathbf{U}\mathbf{w} = \lambda_2 \mathbf{1}_M, \tag{28}$$

ahol $\mathbf{1}_M$ a csupa 1-esekből álló $M \times 1$-es vektor.

Ahhoz, hogy az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása legyen, szükséges és elégséges, hogy az $\widehat{\mathbf{U}}\mathbf{U}$ mátrixnak létezzen inverze. Ezért számoljuk ki ennek a mátrixnak a determinánsát:

$$\det(\widehat{\mathbf{U}}\mathbf{U}) = \det(\widehat{\mathbf{U}})\det(\mathbf{U}) = \prod_{j=1}^{M} \varphi_j \underbrace{\det(\mathbf{U}^T)\det(\mathbf{U})}_{1} = \prod_{j=1}^{M} \varphi_j, \tag{29}$$

használva azt a lineáris algebrai tényt, hogy $\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^{-1}$. Vagyis kimondhatjuk a következőt:

1. Tétel. *A (28) mátrixegyenletnek akkor és csak akkor létezik megoldása, ha a kovariancia-mátrix φ_i sajátértékeire teljesül, hogy $\varphi_i > 0$.*

Felvethető a kérdés, hogy melyek azok a mátrixok, amelyek biztosan teljesítik, hogy $\varphi_i > 0$ minden i-re. Erre jelen cikkünkben a jól ismert *Gerschgorin-tétel* (Gerschgorin 1931) egy következményének segítségével adunk választ. Ha teljesül, hogy

$$\sigma_i^2 > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{M} \left|\operatorname{cov}(\beta_i, \beta_j)\right| \tag{30}$$

fennáll minden lehetséges i-re, akkor a sajátértékek mindegyike pozitív.

Folytatva a megoldás keresését célzó gondolatmenetet, ha $\varphi_i > 0$ minden i-re, akkor

$$\mathbf{w} = \frac{\lambda_2}{2}(\widehat{\mathbf{U}}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{1}_M. \tag{31}$$

Mivel $\sum_{i=1}^{M} w_i = 1$, ezért a $\mathbf{w}^T\mathbf{1}_M$ szorzat értéke 1. Azaz

$$1 = \frac{\lambda_2\gamma}{2}, \tag{32}$$

ahol $\gamma = \mathbf{1}_M^T(\widehat{\mathbf{U}}^T)^{-1}\mathbf{U}\mathbf{1}_M$. A Lagrange-szorzót kifejezve

$$\lambda_2 = \frac{2}{\gamma}. \tag{33}$$

Tehát a súlyvektor úgy adható meg, mint

$$\mathbf{w} = \frac{1}{\gamma}(\widehat{\mathbf{U}}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{1}_M. \tag{34}$$

Tudjuk, hogy korrelálatlanság esetén $\widehat{\mathbf{U}}\mathbf{U} = \mathbf{I}_M$, ahol $\mathbf{I}_M$ az $M \times M$-es egységmátrix. Ekkor persze $(\widehat{\mathbf{U}}\mathbf{U})^{-1} = \mathbf{I}_M$. Ha most $\mathbf{w}^*$ jelöli a korrelálatlanság esetének megoldásvektorát, $\mathbf{w}$ pedig az általánosabb modell megoldásvektorát (ha $\nu_i = 0$ minden i-re), akkor

$$\|\mathbf{w} - \mathbf{w}^*\|_\infty \leq \kappa\left\|(\widehat{\mathbf{U}}\mathbf{U})^{-1} - \mathbf{I}_M\right\|_\infty\left\|\mathbf{1}_M\right\|_\infty = \kappa\left\|\left(\widehat{\mathbf{U}}\mathbf{U}\right)^{-1} - \mathbf{I}_M\right\|_\infty, \tag{35}$$

ahol $\kappa > 0$ alkalmas konstans. Következésképpen teljesül, hogy

$$\left\|(\widehat{\mathbf{U}}\mathbf{U})^{-1} - \mathbf{I}_M\right\|_\infty < \varepsilon \Rightarrow \|\mathbf{w} - \mathbf{w}^*\|_\infty < \kappa\varepsilon, \tag{36}$$

ahol $\varepsilon > 0$. Így, ha az általánosított modell kovariancia-mátrixa olyan, hogy $(\widehat{\mathbf{U}}\mathbf{U})^{-1}$ mátrixnak az egységmátrixtól való végtelen-norma szerinti eltérése ,,kicsi", akkor $\mathbf{w}$ és $\mathbf{w}^*$ eltérése is ,,kicsi".

Mivel ismert azonosságok miatt igaz, hogy

$$\left\|(\widehat{\mathbf{U}}\mathbf{U})^{-1}\right\|_\infty \leq \left\|(\widehat{\mathbf{U}}\mathbf{U})^{-1} - \mathbf{I}_M\right\|_\infty + 1 < \varepsilon + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon + 1} \leq \left\|(\widehat{\mathbf{U}}\mathbf{U})^{-1}\right\|_\infty^{-1} \leq \left\|\widehat{\mathbf{U}}\mathbf{U}\right\|_\infty, \tag{37}$$

ezért $\left\|\widehat{\mathbf{U}}\mathbf{U}\right\|_\infty \leq \left\|\widehat{\mathbf{U}}\right\|_\infty \|\mathbf{U}\|_\infty$ következtében $\left\|\widehat{\mathbf{U}}\right\|_\infty^{-1} \|\mathbf{U}\|_\infty^{-1} - 1 \leq \varepsilon$ teljesül. Könnyen mutatható olyan példa, amikor a kovariancia-mátrix nem diagonális és $\left\|\widehat{\mathbf{U}}\right\|_\infty^{-1} \|\mathbf{U}\|_\infty^{-1} \leq 1$.

Ha a Q_i-k vektorát $\mathbf{Q}$ jelöli, akkor

$$\mathbf{Q} = \frac{Q_F}{\gamma}(\widehat{\mathbf{U}}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{1}_M. \tag{38}$$

A súlyok birtokában és az S_F várható kínálati szint ismeretében (22) alapján Q_F kiszámolható. Így már a rendelendő input mennyiségeket is kalkulálhatjuk.

5 Numerikus illusztráció

Ebben a fejezetben eddigi megállapításaink egy részét numerikus példák segítségével illusztráljuk. Célunk a korábbiakban bemutatott elméleti vizsgálódás mélyebb megértése. A szemléltetéshez érzékenység-vizsgálatot végzünk, amelyet néhány számpélda bemutatása követ.

5.1 Érzékenység-vizsgálat

Az előző egységekben, a (19) egyenletben szereplő beszállítói súlyok alapján megvizsgáljuk, hogy a súlyok mennyire érzékenyek a megbízhatóságok szórásainak (egyes beszállítók kockázata) változására. Ehhez rugalmasságokat definiálunk, amelyek megmutatják, hogy a szórás százalékos változása hány százalékos változást idéz elő az adott változó értékében.

Nézzük meg elsőként a (19) összefüggéssel megadott w_i súly elaszticitásait $(i \neq k)$:

$$\mathcal{E}_{w_i}^{(i)} = \frac{\partial w_i}{\partial \sigma_i} \times \frac{\sigma_i}{w_i} = -2w_i\sigma_i^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{M} \frac{1}{\sigma_j^2} \tag{39a}$$

$$\mathcal{E}_{w_i}^{(k)} = \frac{\partial w_i}{\partial \sigma_k} \times \frac{\sigma_k}{w_i} = 2w_i\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_k}\right)^2. \tag{39b}$$

Látható, hogy az első képletben σ_i növekedése a kapcsolódó rugalmasság csökkenését idézi elő. Azaz minél nagyobb az i-edik beszállító kockázata, annál kevésbé reagál érzékenyen annak változására az F által i-hez rendelt súly. A második képletben σ_k növekedése esetén a megfelelő rugalmasság szintén csökken. Ezért az első képlet tekintetében leírtakhoz hasonlóan minél nagyobb a k-adik beszállító kockázata, annál kevésbé reagál érzékenyen annak változására az F által i-hez rendelt súly. Másképp fogalmazva, az első rugalmasság negativitása azt jelenti, hogy ha nő az adott beszállító kockázata, akkor csökken a súlya. A második elaszticitás pozitivitása pedig azt jelenti, hogy ha egy másik, a k-adik beszállító megbízhatóságának szórása nő, akkor az i vállalat súlya is növekszik.

5.1.1 Numerikus példa

A most következőkben egy numerikus példa segítségével próbáljuk megvilágítani az előbb elmondottakat. A példa a (39a) összefüggéshez kapcsolódik. A feladatban $N = 3$, vagyis F-nek három beszállítója van. A példa három esetet tartalmaz, amit összesen három táblázat segítségével adunk meg *(2–4. táblázat)*. Az első táblázat az egyes változók kiindulási értékeit, az ezt követő kettő pedig egy-egy változó módosítását, valamint ezekből a módosításokból fakadó új eredményváltozókat tartalmazza. Első esetben σ_2, a másodikban pedig σ_1 értékét változtatjuk meg. A példához kis szórásokat választottunk. Abszolút értelemben kis, relatív értelemben nagy különbségekkel. A megengedhető tűréshatárok iparáganként, a termék jellegétől, de a vállalat stratégiájától függően is változhatnak.

A kiindulási helyzetben az 1-es vállalat megbízhatóságának szórása a legalacsonyabb, így ő is kapta a legnagyobb súlyt, azaz tőle rendel a legtöbbet a termelő vállalat. A 2-eshez tartozó szórás a legmagasabb, így az ő súlya a legalacsonyabb. A táblázatban feltüntettük továbbá a 2-es beszállítóhoz tartozó rugalmasságokat. A kiindulási helyzethez képest az első módosításban csökkentettük a 2-es beszállító megbízhatóságának szórását, így értelemszerűen súlya növekedett, és mindkét rugalmassági szint közelebb került 0-hoz, azaz javult. A második módosításban a kiinduláshoz képest az 1-es beszállítóhoz magasabb kockázati szintet rendeltünk, ezzel súlya csökkent. Mivel még így is ő a legkevésbé kockázatos beszállító, ezért arányaiban továbbra is tőle rendel a legtöbbet a vállalat. A 2-es beszállító súlya és rugalmassági értékei a kiindulási helyzethez képest most is javultak, hiszen annak ellenére, hogy nála nem következett be változás, összességében mégis csökkent a hátránya.

Változó	*Érték/eredmény*
σ_1	$0,001$
σ_2	$0,005$
σ_3	$0,004$
w_1	$90,70\%$
w_2	$3,63\%$
w_3	$5,67\%$
$\mathcal{E}_{w_2}^{(2)}$	$-1,9274$
$\mathcal{E}_{w_2}^{(1)}$	$1,8141$

2. táblázat. Kiindulási táblázat

Változó	*Érték/eredmény*
σ_1	$0,001$
σ_2	$0,001$
σ_3	$0,004$
w_1	$48,48\%$
w_2	$48,48\%$
w_3	$3,03\%$
$\mathcal{E}_{w_2}^{(2)}$	$-1,0303$
$\mathcal{E}_{w_2}^{(1)}$	$0,9697$

3. táblázat. Első változómódosítás

Változó	*Érték/eredmény*
σ_1	$0,002$
σ_2	$0,005$
σ_3	$0,004$
w_1	$70,92\%$
w_2	$11,35\%$
w_3	$17,73\%$
$\mathcal{E}_{w_2}^{(2)}$	$-1,7730$
$\mathcal{E}_{w_2}^{(1)}$	$1,4184$

4. táblázat. Második változómódosítás

A modell, illetve a számpélda nemcsak a termelő vállalat, hanem az egyes beszállítók számára is tanulságos. Megmutatja ugyanis, hogy ceteris paribus milyen mértékű javulást kell elérnie adott beszállítónak, hogy az általa preferált mértékben növekedjenek az irányába intézett megrendelések.

6 Összegzés és következtetések

Jelen tanulmányban annak támogatására dolgoztunk ki módszereket, hogy adott termelő meg tudja találni a számára legmegfelelőbb beszállítókat és azoktól az optimális mennyiségű inputokat rendelje. A modell és bemutatott változatai leginkább standard termékeket nagy volumenben előállító termelő vállalatok problémájára alkalmazhatók. A volumen mellett figyelembe vettük a minőség, a költség és az idő tényezőket is mint versenyprioritások. A termelő ugyanis nem használ fel selejt inputokat és nem ad el selejt outputokat. Figyelemmel kíséri az ehhez kapcsolódó költségeket. Továbbá a beszállítók megbízhatóságának meghatározásakor a selejtarány mellett az időre történő szállítást is figyelembe veszi. A határidőn túl leszállított újabb mennyiség csökkenti a beszállítóhoz rendelt várható megbízhatósági szintet.

A modell elsőként egy hátizsák feladat megoldásával határozza meg a beszállítók optimális kombinációját. A termelő célja a minőséget és az időt definíció szerint magában foglaló várható megbízhatóság maximalizálása egy adott költségvetési korlát mellett. Bemutattunk egy algoritmust, amely az LP-feladat optimális megoldását számolja ki.

A már kiválasztott beszállítók súlyozását és a tőlük rendelendő inputmennyiséget két különböző modellváltozatban is meghatároztuk. Mindkét változatban a termelő vállalat célja a megbízhatóság szórásának, azaz a megbízhatósági kockázat minimalizálása. Azonban első esetben a beszállítók megbízhatóságát korrelálatlannak tekintjük, míg a másodikban nem élünk ezzel az egyszerűsítéssel.

Az explicit formák meghatározásán túl bemutattunk néhány numerikus példát is, eredményeink illusztrálása céljából. Az érzékenység-vizsgálatban arra mutattunk be példákat, hogy bizonyos beszállítóhoz tartozó kockázat változása hogyan befolyásolja a beszállítói súlyokat. Amennyiben a beszállítók tisztában vannak kockázati értékeik javításának költségeivel, úgy az érzékenység-vizsgálat segítségével el tudják dönteni, hogy a javítással járó magasabb súly elég többletprofitot eredményez-e számukra a fejlesztés rentábilis meglépéséhez.

A dolgozatban igyekeztünk – valamilyen értelemben – minél egyszerűbb problémákat modellezni, így meglehetősen szerteágazó a továbbfejlesztési lehetőségek köre. Bevonható a vizsgálódási keretbe az újságárus probléma, amelyben a túl- és az alulkészletezés is szerepet játszik. Érdemes lenne megvizsgálni, hogy a modell alapkoncepcióját megtartva milyen modellek írhatók fel heterogén inputok esetére. Valamint a második modellváltozat kapcsán foglalkozni lehet azzal a kérdéssel is, hogy melyek az optimális súlyok, ha nem minden KKT-szorzó zérus.

Irodalom

1. Aissaoui, N., Haouari, M., Hassini, E., 2007. Supplier selection and order lot sizing modeling: A review. *Computers & Operations Research* 34(12), 3516–3540.
2. Chai, J., Liu, J. N. K., Ngai, E. W. T., 2013. Application of decision-making techniques in supplier selection: A systematic review of literature. *Expert Systems with Applications* 40(10), 3872–3885.
3. Chen, Y.-J., 2011. Structured methodology for supplier selection and evaluation in a supply chain. *Information Sciences* 181(9), 1651–1670.
4. Dickson, G. W., 1966. An Analysis of Vendor Selection Systems and Decisions. *Journal of Purchasing* 2(1), 5–17.
5. Dobos, I., Vörösmarty, G., 2014. Green supplier selection and evaluation using DEA-type composite indicators. *International Journal of Production Economics* 157(1), 273–278.
6. Dobos, I., Vörösmarty, G., 2019. Inventory-related costs in green supplier selection problems with Data Envelopment Analysis (DEA). *International Journal of Production Economics* 209(1), 374–380.
7. Dostál, Z., 2009. *Optimal Quadratic Programming Algorithms. With Applications to Variational Inequalities.* Springer Science+Business Media, LLC, New York, NY.
8. Fisher, M. L., 1997. What is the right supply chain for your product? *Harvard Business Review* 75(2), 105–117.
9. Gerschgorin, S., 1931. Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix. *Izv. Akad. Nauk.* USSR Otd. Fiz.-Mat. Nauk(6), 749–754.
10. Heizer, J., Render, B., Munson, C., 2017. *Operations Management: Sustainability and Supply Chain Management*, 12. kiad. Pearson Education Limited, England, UK.

11. Hosseininasab, A., Ahmadi, A., 2015. Selecting a supplier portfolio with value, development, and risk consideration. *European Journal of Operational Research* 245(1), 146–156.
12. Kellner, F., Liendland, B., Utz, S., 2019. An a posteriori decision support methodology for solving the multi-criteria supplier selection problem. *European Journal of Operational Research* 272(2), 505–522.
13. Kellner, F., Utz, S., 2019. Sustainability in supplier selection and order allocation: combining integer variables with Markowitz portfolio theory. *Journal of Cleaner Production* 214, 462–474.
14. Kim, D. Y., Wagner, S. M., 2012. Supplier selection problem revisited from the perspective of product configuration. *International Journal of Production Research* 50(11), 2864–2876.
15. Krajewski, L. J., Ritzman, L. P., Malhotra, M. K., 2019. *Operations Management. Processes and Supply Chains*, 11. kiad. Pearson Education Limited, England, UK.
16. Lee, C. Y., Chien, C. F., 2014. Stochastic programming for vendor portfolio selection and order allocation under delivery uncertainty. *OR Spectrum* 37(3), 761–797.
17. Levary, R. R., 2008. Using the analytic hierarchy process to rank foreign suppliers based on supply risks. *Computers & Industrial Engineering* 55(2), 535–542.
18. Markowitz, H., 1952. Portfolio Selection. *The Journal of Finance* 7(1), 77–91.
19. Markowitz, H. M., 1971. *Portfolio Selection. Efficient Diversification of Investments.* Yale University Press, New Haven, CT.
20. Porter, M. E., 1979. How competitive forces shape strategy. *Harvard Business Review* 57(3), 137–145.
21. Slack, N., Brandon-Jones, A., Johnston, R., Betts, A., 2015. *Operations and Process Management: Principles and Practice for Strategic Impact,* 4. kiad. Pearson Education Limited, Harlow, UK.
22. Su, C.-J., Chen, Y.-A., 2018. Risk assessment for global supplier selection using text mining. *Computers & Electrical Engineering* 68, 140–155.
23. Thornton, L. M., Autry, C. W., Gligor, D. M., Brik, A. B., 2013. Does Socially Responsible Supplier Selection Pay Off for Customer Firms? A Cross-Cultural Comparison. *Journal of Supply Chain Management* 49(3), 66–89.
24. Vizvári, B., 2006. *Egészértékű programozás.* Typotex Kiadó, Budapest.
25. Vörös, J., 2018. *Termelés- és szolgáltatásmenedzsment.* Akadémiai Kiadó, Budapest (e-book).
26. Wetzstein, A., Hartmann, E., Benton Jr, W. C., Hohenstein, N.-O., 2016. A systematic assessment of supplier selection literature – State-of-the-art and future scope. *International Journal of Production Economics* 182, 304–323.

OPTIMISATION METHODS TO SUPPORT SUPPLIER SELECTION DECISIONS

In this paper, a quite common supply chain management decision making problem is being taken into consideration, namely, the selection of suppliers. The companies

that are the most often facing this challenge are producing high amounts of goods. The aim of these firms is to meet a considerable demand at the highest possible level of expected reliability. Hence, they have to purchase all predetermined necessary and – as we assume – homogeneous inputs (raw materials, semi-finished products, parts, other components). The decision has to be made based on a firm's unfailing awareness of its own production capabilities and all pieces of information about the reliability and costs of the potential suppliers.

Our goal is to elaborate a new decision making mechanism which creates an optimal supplier portfolio for the producer (denoted later on by F). The biggest methodological novelty of our paper is the application of the well-known Markowitzian portfolio approach (Markowitz 1952). The idea stems from the fact that during the decision making process, one needs to take into consideration the impact of the risky behaviour of suppliers, which accounts for the use of the mentioned methodology.

A multi-stage model is proposed as the decision mechanism which is not rare in the supply chain literature. A systematic review is provided by Aissaoui et al. (2007). Our model consists of two stages. First, we determine the optimal set of suppliers based on a algorithm starting off from the methodology of the knapsack problem. The selection criterion here is the reliability of the potential suppliers. In the next step the weights are calculated and the purchase decision concerning input quantity is carried out by minimizing the riskiness of the firm, i.e. by using a well-known method also used in portfolio analysis. We illustrate our results with numerical examples as well.

In the first stage we formulate an LP problem and an algorithm which contains reliability as a decision variable. Reliability denotes the ratio proper performance, i.e. appropriate quality inputs received in due time. Therefore, the use of such a variable has a strong practical side.

Notation	*Explanation*
N	Possible number of suppliers (positive constant)
M	Suppliers chosen by producer F (positive integer)
x_i	Binary variable, which takes the value 1, if i is a supplier of the producer, otherwise it is 0 (decision variable)
β_F	Random variable describing F's reliability
b_F	Expected reliability of producer F
σ_F	Standard deviation of β_F
β_i	Reliability of supplier i (positive valued random variable in percentage)
b_i	Expected reliability of supplier i (finite number)
σ_i	Standard deviation of β_i (finite number)
Q_F	Total purchasable input by producer F
Q_i	F's purchasable input amount from supplier i (decision variable)
w_i	Weight of supplier i in F's supplier portfolio (decision variable)
S_F	Expected supply of the producer, i.e. its expected output
K_i	Shipping and other additional costs in case purchased from supplier i (positive constant)
K_F	Maximum of all shipping and other additional costs concerning producer F, i.e. the one of F's budget constraint (positive constant)
$v(\cdot)$	Sum of the expected reliabilities of F's suppliers

Applied notations

By applying the symbols introduced in Applied notations, the following LP needs to be solved:

$$\max_{\mathbf{x}} v(\mathbf{x})$$
$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{N} x_i K_i \le K_F, \quad K_F \ge K_{\min},$$

After the first stage we determine the appropriate weights and the puchasable amount of inputs by applying the tools of portfolio analysis. Supplier risk is measured by reliability variance, and the aim of the producer is to minimize its own riskiness. This approach has already been introduced into the anlysis of supply chains (see Hosseininasab & Ahmadi 2015).

Again using the above notations, our attempt is to solve the

$$\min_{\mathbf{w}} \ \mathbf{w}^T \operatorname{cov}(\beta)\mathbf{w}$$
$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{M} w_i = 1, w_i \ge 0 \text{ for each } i.$$

problem under different assumptions, where $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_M)^T$.

In the next step, the composition of suppliers is to be determined. In other papers of literature, typically a ranking selection process takes place, however, in our model in the second step we calculate the weights and the amounts to be purchased. The portfolio approach appeared in the literature in the past few years, which proposes a supplier portfolio using risk minimization. Lee & Chien (2014), Kellner et al. (2019) and Kellner & Utz (2019) recommends a supplier portfolio based on risk minimization.

Beside the theoretical results, we have also shown some numerical examples regarding sensitivity analysis in our paper. We attempted to demonstrate how risk affects the assigned weights. This provides an opportunity for suppliers to determine whether it is worth improving their performance or not.

In our paper, we were motivated to model relatively simple problems in some sense. Therefore, the possible extensions are quite diverse. In our framework, the newsvendor's problem might be introduced, or heterogeneous inputs might be taken into account as further research.

Key words: supplier selection, reliability, optimization, Markowitzian portfolio logic. *JEL:* C6, D8, G1