Glattfelder Péter

Extrapoláció rész-trendek átlagából

A hosszútávú tervezés, a közvetett irányítási formák előretörése szükségszerűen megkívánják az extrapolációs módszerek alkalmazását illetve továbbfejlesztését. Ezekkel az egyre kevésbé nélkülözhető eljárásokkal szemben az lenne a legfőbb igény, hogy a használatosaknál pontosabbak, a jövőben realizálódó eseményekhez jobban igazodók legyenek.

A bemutatásra kerülő extrapolációs algoritmus éppen e követelménynek szeretne megfelelni. Lényegét tekintve idősorok elemzésén, trendszámításon alapul, illetve annak összefüggéseit kombinálja más algebrai elemekkel. A módszer általános ismertetésénél — ahol a mélyebb matematikai részek tárgyalásától igyekszem eltekinteni — a következő ideiglenes absztrakciókkal élek:

a) Az extrapoláció bázisául szolgáló idősor viszonylag hosszú időszakra vonatkozik.

b) Az egész idősor és annak valamennyi rész-intervalluma vagy lineáris, vagy exponenciális vagy más — adott típusú — függvénnyel közelíthető. Másszóval: eleve kizárjuk a szakaszosságot illetve a különböző típusú trendvonalak keveredését.

c) Feltételezzük, hogy az egyes tagok autokorreláltak, azaz nem függetlenek egymástól. Ez más megfogalmazásban azt jelenti, hogy az n-edik időszak realizációjára hat az $(n-1)$-edik, $(n-2)$-edik, $(n-3)$-adik stb. realizáció, méghozzá vagy közvetlenül, vagy olyan áttétellel, hogy valamennyien egy másik — nem egyszer ismeretlen — idősor sztochasztikus függvényei.

Az előbbi feltételek a hagyományos trendszámításnál is megvoltak, különösen gazdasági változások elemzésénél. Ami az elsőt illeti: három-négy, vagy még kevesebb adatból köztudott, milyen hamis képet nyerhetünk az esetleg valóban meglevő tartós tendenciáról. Emiatt a viszonylag nagy időszakot átfogó adatsor igénye nem jelent újabb követelményt a régiekhez képest. A második, a szakaszosság kérdését eddig úgy oldották meg, hogy szétválasztották az alapvetően más függvénytípussal közelíthető időintervallumokat. (Azonos „típusú" alatt itt a csupán paramétereiben eltérő képlettel, felépítéssel bíró függvények értendők.) Kikötésünk emellett még azt a megszorítást is tartalmazza, hogy pl. exponenciális trend esetén ilyen görbe közelítsen akár két egymás melletti pontot is. (Úgy vélem, ez a pótlólagos igény kisebb hibát visz a számításokba, mint az eddigi gyakorlat azon hiányosságai, melyekre a későbbiekben még visszatérek). A harmadik feltétel, az autokorreláció — különösen az említett áttételes formában — ugyancsak megvan a legtöbb közgazdasági idősorban. Általában mindig ott találkozunk valamiféle határozott tendencia-hiánnyal, ahol hiányzik a tagok egymásközti korrelációja is. Az olyan esetekben azonban, mint a nemzeti jövedelem vagy a beruházások alakulása — vagyis ahol egy-egy eseményt, annak bekövetkezését döntően meghatározza az a szint, melyet az azelőtti időszakban elértünk — világosan kimutatható az „evolutív", a tendenciózus változás.

A trendszámításon, pontosabban a trendvonalak meghosszabbításán alapuló előrebecslési eljárások az utóbbi években ismét az érdeklődés középpontjába kerültek.[1] Ennek szükségességét — mint már említettük — elsősorban a gazdasági növekedés hosszútávú vizsgálata vetette fel. Azok a munkák, melyek e kérdéssel foglalkoznak, még jobban meggyőztek, hogy az extrapoláció azon módszerei, melyek egy-egy trendvonal puszta kivetítésével operálnak, pontatlanságuk és egyéb közgazdasági gyengeségeik miatt továbbfejlesztésre szorulnak. Az említett eljárások „félkész" volta két területen fedezhető fel:

a) Egyenlő súllyal értékelik a legfrissebb és a legrégibb időszakok realizációit, s így egy-egy, meglehet több évtizede végbement esemény éppúgy rányomja bélyegét az extrapolációs vonalra, mint a legutóbbi értékek bármelyike.

b) Az extrapoláció alapját képező időszak változásait mint egyetlen tendenciát fogják fel, nem pedig mint tendenciák szakadatlan egymásutánját.

Az első ellenvetés, mely az egyenlő súlyozást helyteleníti, könnyen igazolható. Gyakori, hogy a vizsgált sztochasztikus folyamat $(n+1)$-edik időpontra bekövetkező realizációja leginkább attól függ, hogy mekkora értékkel jelentkezett az előző, vagyis az n-edik időpont. Ez a legutolsó ismert érték az, melyhez a legreálisabban viszonyíthatunk, amitől a várható plusz—mínusz eltérést a legpontosabban előrebecsülhetjük. Igen nagy, bár az előzőnél valamivel kisebb hatással van az említett jövőbeli eseményekre az $(n-1)$-edik időponthoz tartozó érték, még kisebbel az $(n-2)$-edik és így tovább. Mindez az öröklődéstan egy jelenségéhez hasonlítható: az utód alkati és egyéb tulajdonságait döntően a szülők, kisebb mértékben a nagyszülők, majd a dédszülők, de végső soron egy több generációval korábbi „ős" is befolyásolja. Közgazdasági jellegű idősoroknál persze ez a genetika sokkal nehezebben vehető észre, illetve szemléltethető: különösen azért, mivel a „gyermek" alakulására nemegyszer tucatnyi „szülő", ezernyi „dédszülő" hat különböző súllyal és irányokban. (Nem is beszélve az olyan esetekről, amikor bizonyosfokú késést tapasztalhatunk, vagyis ahol a „gyermeket" nemegyszer négy-öt generációval korábbi „ősök" határozzák meg.) Mégis, a brutto termelés, a nemzeti jövedelem vagy éppen az állóalapok összvolumenének elemzésekor jogos, sőt kimondottan szükséges, hogy az előrebecslésnél a különböző „korú" értékeket más és más súllyal vegyük figyelembe. Arra, hogy ezek a súlyok mikor mekkorák legyenek, még visszatérünk.

Idősor, mint tendenciák átlaga

Az az észrevétel, hogy a trendvonal egyszerű kivetítése pontok (konkrét realizációk), nem pedig tendenciák alapján való extrapolációt jelent — s hogy az utóbbi helyesebb lenne — ugyancsak közgazdasági megfontolásból ered. Azok, akik gazdasági előrebecsléseiknél felhasználták a trendszámítás eredményeit, állandóan szembetalálhatták magukat azzal a problémával,

[1] E cikk keretében nem térünk ki Jánossy Ferenc legújabb könyvére, a körülötte kialakult vitára. Ennek ellenére tagadhatatlan az a hatás, melyet e dolgozat kérdésfelvetésére gyakorolt.

hogy vajon mi helyesebb: az utóbbi néhány (esetleg 5—6) vagy pedig a lehető legtöbb idő-adatot figyelembe vevő extrapoláció. Úgy tűnik, mindkét útnak megvan a logikája: az elsőnek annyiban, hogy várhatóan a legutóbbi időszakok tendenciája az, ami döntő hatással lesz a további (főként a közeljövőben végbemenő) fejlődésre. A második — s az előzővel némiképp ellentétes — koncepció azzal támasztható alá, hogy ezek a „legutóbbi" értékek nemegyszer véletlen, külső okoknál fogva a tényleges trendtől való szignifikáns eltérést jelentenek, s így az ezek alapján való előrebecslés teljesen hamis eredményt fog szolgáltatni.

Nem nehéz belátni, hogy mindkét érv megfordítható, s hogy ami az egyiknél hiba, a másiknál erény. A javasolt tendencia-előrebecslési eljárás éppen ezeket az ellentmondásokat igyekszik kiküszöbölni, méghozzá oly módon, hogy az extrapolációs görbét nem pontok (diszkrét realizációk) hanem trendek — méghozzá különböző hosszúságú trendvonalak — átlagaként írja fel.

Jelölje a továbbiakban $y_1, y_2, y_3, \dots y_n$ a rendelkezésünkre álló idősor elemeit. Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy ezek lineáris „evolúciót" mutatnak, vagyis az őket legjobban közelítő függvény

$$Y = a + b \cdot x \tag{1}$$

alakú.

Mint a kiindulásnál feltételeztük, az utolsó két, az utolsó három . . . stb. időpontok közti változás is hasonló — ezesetben lineáris — trendet mutat, s így ezek a visszamenőleg egyre több időpontot figyelembe vevő görbék egyenletei,

$$\begin{aligned} Y_2 &= a_2 + b_2 \cdot x \\ Y_3 &= a_3 + b_3 \cdot x \\ &\dots\dots\dots\dots \\ Y_j &= a_j + b_j \cdot x \\ &\dots\dots\dots\dots \\ Y_n &= a_n + b_n \cdot x \end{aligned} \tag{2}$$

ahol a j azt mutatja, hogy az alap-idősor hány elemét vettük figyelembe (a „legfrissebbtől" visszafelé számítva) az adott rész-trend felírásánál.

Az eddigi gyakorlat a legutolsó görbe meghosszabbítása alapján végezte az előrebecslést. Emiatt a b_n, a trend-egyenes iránytangense valamint az a_n már kijelölték az extrapolációs vonal irányát és nagyságrendjét. Ugyanakkor viszont, ha figyelembe kívánjuk venni azokat a tendenciákat is, melyek az utóbbi két, az utóbbi három . . . stb. éveket jellemezték, úgy az Y_e-vel jelölhető extrapolációs görbe felírásához az $Y_2, Y_3, \dots Y_n$ trendek paramétereire is szükségünk lesz. Másszóval: a javasolt eljárás az $Y_e = a_e + b_e \cdot x$ görbe együtthatóinak a többiek átlagát tekinti, vagyis:

$$a_e = \frac{\sum_{k=2}^{n} s_k \cdot a_k}{\sum_{k=2}^{n} s_k} \tag{3}$$

$$b_e = \frac{\sum_{k=2}^{n} s_k \cdot b_k}{\sum_{k=2}^{n} s_k}$$

ahol s_k az alkalmasan megválasztott súlyrendszer megfelelő eleme.

Sajnos a trendvonalak ilymódon értelmezett „súlyozott átlaga" csak bizonyos — mondhatni speciális — esetekben írható fel egy konkrét, folytonos függvény alakjában. Így van ez például akkor, amikor az eredeti trend képlete

$$Y = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + c_3 \cdot x^3 + \ldots + c_n \cdot x^n \tag{4}$$

(ahol $n = 1, 2, 3 \ldots$ stb.) alakú. Ez esetben ugyanis az $Y = f(x)$ időfüggvény egy, az x hatványaiból képzett n-ed fokú polinom, melynél a paraméterek átlagolása viszonylag egyszerű feladat. Ezért azután külön szerencse, ha függvényünk ilyen, vagy legalább is ilyen (véges) polinomba „fejthető".[2] Ez a helyzet — többek között — a lineáris vagy a parabolikus trend esetében, amikoris igaz az, hogy az Y_e valamely jövőbeli időponthoz tartozó értéke egyenlő az $Y_2, Y_3, \ldots Y_n$ „rész-trendek" meghosszabbításával kapott görbék adott időponthoz tartozó értékeinek súlyozott átlagával. Akkor azonban, amikor nincs mód a rész-trendek (4) vagy hasonló alakban való felírására, nem tudjuk az Y_e-t egyetlen összefüggő görbeként megadni, hanem meg kell elégednünk ennek az $(n + 1)$, $(n + 2)$, $\ldots$ $(n + m)$-edik jövőbeli időpontokra vonatkozó diszkrét értékeivel. Ez a helyzet a gazdasági előrebecslésnél oly gyakori exponenciális trend esetében, amikor az $Y_k = a_k \cdot b_k^x$ alakú résztrendekből — a szóbanforgó súlyozási elv mellett — nem tudunk egy $Y_e = a_e \cdot b_e^x$ alakú „átlagos" extrapolációs vonalat konstruálni. (Függetlenül attól, hogy a különböző x időpontokhoz tartozó előrebecsült értékek meghatározhatók, mint az Y_k görbék extrapolált értékeinek súlyozott átlagai.)

Rövid és hosszútávú előrebecslés — a súlyrendszerről

Mint már említettem, az extrapolációs görbét úgy kívánjuk megszerkeszteni, hogy abban az utolsó két időpont közötti tendencia más súlyt kapjon, mint az, amely az utolsó három realizációt jellemzi: mást, mint ami az utolsó négyet — és így tovább. Ha elfogadjuk azt a feltételezést, miszerint a legutóbbi évek eredményei valamivel erősebben befolyásolják a jövőbeli változást, mint a nemegyszer 30—40 éve végbement események; valamint, hogy a résztrendek átlagolása jobb közelítést ad, mint egy-egy trendvonal puszta kivetítése, úgy a következő súlyozási lehetőségeink vannak:

1. Egyszerű átlagolás
2. Direkt súlyozás

Az első esetben, amikor az alap- illetve résztrendeket egyenlő súllyal értékeljük, valójában igen differenciált súlyozás történik. Az átlagolás miatt ugyanis az előrebecsült értékeket az n elemű trend $n-1$ résztrendje befolyásolja, s így az utolsó két trend-érték hatása $(n-1)$-szeres, az $(n-2)$-edike

[2] A függvények sorbafejtésével a megfelelő szakirodalom, így pl. SZÉP JENŐ: Analízis c. könyve is foglalkozik.

$(n-2)$-szeres, s végül az első, a legrégibb érték már csak egyszeres „nyomatékot" kap, lévén, hogy ezt csak az alaptrend szerepelteti. Persze itt a „súly" kifejezést inkább a közvetett hatásra, mintsem a szó lineáris, pontosabban numerikus értelmében használom — hiszen köztudott, hogy a pontsort legjobban közelítő görbére csak bonyolult áttétellel hat egy-egy realizáció kisebb-nagyobb „kilógása" az esetleg valóban meglevő tartós tendenciából.

Látható tehát, hogy az egyszerű átlagolás önmagában is egy igen erős súlyozást jelent. Ezzel szemben a másik, a direkt eljárás éppen arra törekszik, hogy olyan súlyrendszert találjon, mely az előbbi durvaságát némiképp finomítani tudja. Erre a következő meggondolások adnak lehetőséget:

a) Nem az egyes trend-értékeket súlyozzuk, hanem a résztrendeket (illetve, ha átlagolásukra egyetlen Y_e nyerésére nincs lehetőség, ezek előrebecsült értékeit);

b) A legnagyobb súlyt a teljes idősort magába foglaló rész- (pontosabban: alap-) trendnek adjuk;

c) A súlyokban érvényre juttatjuk azt az elvet, hogy minél rövidebb a szóbanforgó résztrend, annál kisebb a valószínűség, hogy a további fejlődés tényleges irányát mutatja;

d) A súlyoknak érzékeltetniök kell azt a feltételezést, miszerint az utóbbi évek realizációi inkább a közeli, mint a messze jövőbeli tendenciák hordozói.

A fenti elvek helyességét, közgazdasági megalapozottságát Román Zoltán egy találó hasonlatával szeretném alátámasztani: „Repülőről lepillantva, az út kisebb kanyarai nem látszanak, irányát nagyszerűen beláthatjuk; de földön haladva ilyen kisebb kanyarokban is fának ütközhetünk. A tartós tendenciák és a rövidtávú változások tehát egyaránt figyelmet érdemelnek."[3]

A kitűnő példa önmagáért beszél, mégis folytassuk a szemléltető képet. Felmerül a kérdés: mi legyen a továbbhaladás iránya (mondjuk a földön), ha zeg-zugos útunk egy ponton véget ér? Nagyon valószínű, hogy az építőket már eddig is az a törekvés vezette, hogy a kitűzött végpontot a lehető legrövidebb úttal közelítsék. Így feltehetőleg már az eddigi útszakasz is ezt „célozta", méghozzá a különböző természeti akadályok miatt több-kevesebb eltéréssel. Ebből viszont az következik, hogy a végcélt legjobban az eddigi haladás fő-irányvonalának előrevetítésével lehet megbecsülni. (Legalábbis: azáltal, hogy ennek adjuk a legnagyobb valószínűséget.)

Gazdasági növekedésnél persze hiba lenne valamiféle „végpontról" beszélni — mint ahogy ezt Román Zoltán sem teszi — s így e képet is csak bizonyos megszorítással lehet a közgazdaság nyelvére transzformálni. Ettől függetlenül igen erős a csábítás, hogy még tovább vezessük, újabb aspektusból szemléljük a fenti hasonlatot. Tételezzük fel ugyanis, hogy már a féligkész út végpontján állunk, mögöttünk távolba vesznek a kilométerkövek, s mi folytatni akarjuk az utazást. Az előttünk lévő ismeretlen terepen valahol már kitűzték az irányjelző póznát, de hogy pontosan hová, nem tudjuk. Hogy megtaláljuk, legokosabb, ha az utolsó (legalábbis: egy viszonylag rövidebb) útszakasz vonalát követjük, hiszen semmi okunk feltételezni, hogy ott, ahol az út végetért, törés volt „beütemezve", vagy hogy éppen ott készültek beállni az alapirányzatra. Persze ekkor is figyelembe kell venni az eddigi fő-tendeciát (meglehet, hogy az utolsó szakasz mégiscsak egy nagy „sziklát" került ki), de lényegesen kisebb súllyal, mint az előbb. (Még valósághűbbnek látszik a fenti

[3] Román Zoltán: A trendvonalak csodája? — Közgazdasági Szemle 1967/3.

hasonlat, ha azt is figyelembe vesszük, hogy a gazdasági folyamatok „országútjait" nemigen szoktuk ismételten bejárni, s így a régebbi adatok „elévülése" reális feltételezés.)

Az eddigiek alapján azt mondanám: rövidebb időszakra vonatkozó előrebecslésnél a legfrissebb periódusok tendenciáit viszonylag nagyobb súllyal kell értékelni, s minél jobban előremegyünk az időben, relatíve úgy kell növekedniök a hosszabb résztrendek súlyainak. Vagyis: ha kiindulási alapul két év „tendenciáját" vesszük, akkor ez és általában a rövidebb résztrendek annál kisebb — s az alaptrend relative annál nagyobb — súlyokat kell hogy kapjanak, minél távolabbi az extrapolációs időpont. Mindezt — a fenti úthasonlat mellett — számításaink is alátámasztani látszanak; függetlenül attól, hogy távolról sem merném a javasolt súlyrendszert tökéletesnek nevezni.

De mekkorák is legyenek a résztrendek súlyai? Az említett négy feltétel közül az első kettővel már részletesen foglalkoztunk, illetve a másodikra még visszatérünk. Ezeknek, valamint a két utolsónak eleget tevő súlyrendszert az

$$s_{ij} = \exp\left(-\frac{A+E_i}{R_j}\right) \tag{5}$$

formulával véltük megtalálni, ahol

s_{ij} = a j-edik résztrend súlya az i-edik extrapolációs időpontra
A = a rendelkezésre álló idősor hossza
R_j = a j-edik résztrend alapjául szolgáló idősor hossza
E_i = az extrapolációs időpont távolsága.

Az (5) képlet szolgáltatta súlyok oly módon felelnek meg az *a)*–*d)* feltételeknek, hogy egyenes arányt mutatnak a rész-intervallum relatív hosszával (R_j/A), miközben a jövőbeli időpont viszonylagos távolságával (E_i/R_j) fordított arányban vannak. Azt, hogy mindezt egy exponenciális függvénnyel fejezzük ki, a bekövetkezés, a konkrét realizáció valószínűségi jellegével, az exponenciális eloszlással való szoros kapcsolattal magyarázhatjuk. (Könnyen belátható, hogy a fenti arányok lineáris formában való érvényre juttatása az esetek zömében még erősebb súlyozást jelentene, mint amit az egyszerű átlagolásnál láttunk.) Az, hogy alap-idősorunk egyes értékei ($y_1, y_2, \ldots y_n$) tompítottabb súlyokat kapnak, ott derül ki, amikor az (5) képlet alapján nem a rész-trendek, hanem az azokat meghatározó (y_n, y_{n-1}), (y_n, y_{n-1}, y_{n-2}) ... stb. részidősorok összetevőinek egyedi (közvetett) súlyát nézzük az Y_e „átlagos" trendben. Ekkor ugyanis az első, (legrégibb érték — mely csak az alaptrendet befolyásolja —)

$$s_{in} = \exp\left(-\frac{A+E_i}{R_n}\right)$$

a második (y_2) már

$$s_{in} + s_{i,n-1} = \exp\left(-\frac{A+E_i}{R_n}\right) + \exp\left(-\frac{A+E_i}{R_{n-1}}\right)$$

míg a legfrissebb érték (y_n)

$$\sum_{j=2}^{n} s_{ij} = \sum_{j=2}^{n} \exp\left(-\frac{A+E_i}{R_j}\right)$$

súlyt kap, s ezek egymásközti arányai — éppen az s_{ij}-k exponenciális volta miatt — lényegesen „valósághűbbek" az egyszerű átlagolás lineáris súlyainál. (Mindez a későbbiekben közölt számszerű feladatból is kiderül.)

Az eddigiek, vagyis a javasolt extrapolációs algoritmus, az egyszerű és a súlyozott trend-átlagolás konkrét, numerikus példával történő bemutatása előtt néhány — nem elhanyagolható — körülményre szeretnék rámutatni.

a) Nehéz a fenti metódusok viszonylagos „jóságát" egzakt közgazdasági-matematikai érvekkel bizonyítani. Ez különösen a „direkt" eljárásra vonatkozik, ahol az a feltételezés, hogy a legjobb súlyrendszer kizárólag az idő, pontosabban bizonyos periódusok relatív hosszának lenne a függvénye, már maga is egy nagyfokú absztrakció. (A vizsgáltat tárgyát képező közgazdasági idősorok alakulására a már említett külső tényezők lényegesen nagyobb hatással lehetnek, mint amit az idő változása, a „természetes evolúció" okoz. Ennek még az sem mond ellent, hogy a trendszámításnál mindig feltételezzük, hogy az egyes realizációk kizárólag az idő függvényei.) Éppen ezért egy alkalmasabb súlyrendszer keresése jelenthetné a továbbfejlesztés egyik irányát.

b) Nem szabad elfelejteni, hogy az extrapoláció kiinduló pontja ez esetben a legutolsó időszak. Ez tágabb megfogalmazásban azt jelenti, hogy nincs semmiféle közgazdasági tartalma az Y_e görbe $(n-1)$-edik, $(n-2)$-edik stb. időpontokhoz tartozó, vagyis a „múltra" visszavetített értékeinek. Azt az eljárást tehát, melyet a trendvonalak meghosszabbításával való előrebecslés jelent, itt nem lehet megfordítani, s interpolációra használni az extrapolációs görbét. (Az utolsó két, három stb. időpont realizációi ugyanis nem hatnak vissza az első, második . . . stb. időpontban már bekövetkezett eseményekre.)

c) Az az elv, hogy az extrapolációs görbét a legfrissebb adatok beérkezésével állandóan módosítani kell (tehát pl. évről évre) itt hatványozottan érvényesül. Ez azzal magyarázható, hogy míg az „alap-trend" előrevetítésénél egy-egy új érték csak egy idősor módosítását igényelte, addig itt megváltozik mind a súlyok, mind a rész-trendek egész rendszere. (Ez esetben ugyanis a számítások legfőbb bázisa a legutóbbi időpont realizációja.)

d) A legnagyobb problémát az okozza, hogy az előrejelzés különböző módszereinek helyességét — vagyis hogy melyik ad pontosabb becslést a jövőre vonatkozólag — nemigen lehet kimutatni.[4] Elvileg ugyanis — az $(n+m)$-edik időpontra becsült értéket y'_{n+m}-mel jelölve — a

$$\delta_{n+m} = (y'_{n+m} - y_{n+m}) \tag{6}$$

eltérés minimumát szeretnénk biztosítani minden jövőbeli realizációra. (Ahol is y_{n+m} a ténylegesen bekövetkező, jelenleg még ismeretlen nagyságú kimenetel.) Ha ismernénk ezeket az y_{n+i}-ket, úgy a

$$\sum_{i=1}^{m} (\delta_{n+i})^2 \rightarrow \text{minimum!} \tag{7}$$

célkitűzés biztosításával — vagyis a közismert „legkisebb négyzetek módszerével" — már megállapíthatnánk, hogy melyik az az y'_{n+i} sorozat, mely a legjobban közelíti őket.[5]

Mivel azonban éppen ezek az ismeretlenek, így a (6) differencia egyik tagjáról sincs konkrét információnk, s be kell érnünk az általunk legjobbnak vélt

[4] M. Ezekiel amerikai kutatónak tulajdonítják azt a megjegyzést, miszerint a jó görbe-illesztés „nem tudomány, hanem művészet" lenne.

[5] Megjegyzendő, hogy a legkisebb négyzetek elve ugyancsak konvenció: „szabálytalan" pontsor „legjobb" közelítésének nincs abszolút matematikai kritériuma.

közgazdasági-matematikai hipotézis elfogadásával. Megítélésem szerint a tendencia-átlagolás elve — mely nagyjában-egészében hipotéziseken alapul — hatékonyabb eljárás, mint az alaptendencia puszta kivetítése. Mindez távolról sem jelenti azt, hogy a valószínűségszámítás, a matematikai analízis módszerei bizonyos esetekben ne tennék lehetővé az összehasonlítást, vagy éppen az előrebecslés pontosabbá tételét. Úgy tűnik azonban, hogy a matematikai apparátus további előretörése sem nélkülözheti a vizsgált folyamat nem-matematikai — jelen esetben közgazdasági — tulajdonságainak mélyebb elemzését. E kérdésre — talán egy másik cikk keretében — még szeretnék visszatérni.)

e) Igen gyakran megesik, hogy bizonyos szakaszosságot észlelünk az idősoron belül. Előfordulhat, hogy az első i érték lineáris, a következő $(n-i)$ pedig parabolikus trendre enged következtetni — hogy csak egy egyszerű példát említsek. Különösen így van ez a szóbanforgó eljárásnál, amikor az utolsó két adat feltétlenül lineáris, az utolsó három már lehet, hogy exponenciális trendet határoz meg, s a többi „részhalmaz" még vagy hat-nyolc félét. (Annak megállapítására, hogy mikor milyen típusú görbét célszerű az adott idősorra fektetni, megvannak a matematikai statisztika egyszerű kritériumai.) Az, hogy a kiindulásnál teljesen figyelmen kívül hagytuk ezt a lehetőséget, még nem jelenti azt, hogy ne lenne itt is megoldás; jóllehet egyetlen (folytonos) Y_e-t itt sem adhatunk. Maga az előrebecslés ugyanúgy történhet, mint az exponenciális esetben: meghatározzuk az egyes (tetszőleges függvénytípusú) rész-trendeket, ezeket előrevetítjük a megfelelő jövőbeli időpontra s a kapott értékekből — súlyozva vagy anélkül — meghatározzuk az ismeretlen Y_e keresett realizációját.

Az előzőekben vázolt extrapolációs algoritmust egy közismert idősoron: nemzeti jövedelmünk 1950—1967 közötti alakulásán fogjuk bemutatni. Az eljárás sarkalatos elve a következő: ismertnek tekintjük a szóbanforgó idősor 1950—1959-es értékeit, majd ezek alapján „ex post" előrebecslést végzünk az 1960—1967-es évekre. Az alaptrendet tehát az 1950—59-es, a rész-trendeket pedig az 1951—59, 1952—59 . . . 1958—59-es periódusok értékeiből képezzük. A számítások során valamennyire kétféle görbét fektettem: egy lineárist és egy exponenciálist. Azt, hogy mikor melyiket fogadtam el jobbnak, mindig a korrelációs együttható nagysága döntötte el; feltételezvén, hogy a jövőbeli alakulást a múltbeli adatokhoz legjobban simuló görbe közelíti helyesen. (Ez — mint ismeretes — nem mindig igaz, mégis úgy vélem, a jelen esetben ez a legszerencsésebb megoldás).

Az ex post előrejelzés lehetővé tette a hagyományos, valamint az általam javasolt extrapolációs módszerek numerikus összevetését. (Az előrebecsült értékek ugyanis az idősor tényleges „folytatásával" kerültek szembeállításra.) Még a számítások ismertetése előtt be kell vallanom, hogy nem okozott volna különösebb nehézséget olyan — ugyancsak tényadatokra épülő — számpéldát találni, mely akár az egyik, akár a másik eljárás „tökéletességét" bizonyítaná. Éppen ezért választottam azt a — kevésbé látványos, de talán becsületesebb — megoldást, hogy olyan numerikus feladatot ismertessek, mely nem az általam inkább favorizált „direkt" súlyozásos eljárást, hanem az egyszerű átlagolást hozza ki előnyösebbnek. (Hogy ez miként lehetett, arra még külön kitérek.)

A számítások* a következő eredményt adták: (Lásd a táblázatot a 37. oldalon.)

* A számítások gépi futtatása, a gépi program elkészítése Bíró András, illetve Vásárhelyi Péter munkája.

A nemzeti jövedelem alakulása és „ex post" előrebecslése
(1959-es árakon, md Ft-ban)*

Bázisértékek: (1950—59) — 78,8; 91,8; 89,6; 100,7; 96,2; 104,2; 92,4; 113,4; 119,6; 127,3

Extrapolált értékek (valamint tényleges realizációk)

Év	Tényadat	Periódus	1958—59	1957—59	1956—59	1955—59	1954—59	1953—59	1952—59	1951—59	1950—59	Sima átlag	Súlyozott átlag
		Trend típusa	lin.	lin.	lin.	expon.	expon.	expon.	expon.	expon.	expon.		
1960	139,5		135,0	134,0	140,9	134,9	132,3	127,5	127,6	125,7	127,5	131,7	128,9
1961	148,1		142,7	140,9	152,0	144,0	140,2	133,2	133,3	130,8	133,2	138,9	135,1
1962	155,1		150,4	147,9	163,1	153,8	148,5	139,1	139,3	136,0	139,1	146,3	141,4
1963	163,9		158,1	154,8	174,2	164,3	157,3	145,3	145,5	141,5	145,3	154,0	147,9
1964	171,7		165,8	161,8	185,3	175,5	166,7	151,8	152,1	147,2	151,7	161,9	154,6
1965	173,7		173,5	168,7	196,4	187,4	176,5	158,6	158,9	153,2	158,5	170,1	161,6
1966	188,3		181,2	175,7	207,5	200,2	187,0	165,7	166,1	159,3	165,5	178,6	170,3
1967	199,4**		188,9	182,6	218,6	213,8	198,1	173,1	173,5	165,8	172,8	187,4	176,3

Bázis év = 10 év = A

A felhasznált súlyok $s_{ij} = \exp\left(-\frac{A + E_i}{R_j}\right)$

Extrapolációs idő (év) $-E_i$									
1	0,0041	0,0256	0,0639	0,1108	0,1599	0,2077	0,2528	0,2946	0,3329
2	0,0025	0,0183	0,0498	0,0907	0,1353	0,1801	0,2231	0,2636	0,3012
3	0,0015	0,0131	0,0388	0,0743	0,1146	0,1561	0,1969	0,2359	0,2725
4	0,0009	0,0094	0,0302	0,0608	0,0970	0,1353	0,1738	0,2111	0,2466
5	0,0006	0,0067	0,0235	0,0498	0,0821	0,1173	0,1534	0,1889	0,2231
6	0,0003	0,0048	0,0183	0,0408	0,0695	0,1017	0,1353	0,1690	0,2019
7	0,0002	0,0035	0,0143	0,0334	0,0588	0,0882	0,1194	0,1512	0,1827
8	0,0001	0,0025	0,0111	0,0273	0,0498	0,0764	0,1054	0,1353	0,1653

* **Forrás:** Idősorok a népgazdaság 1950—1967 közötti időszakának tanulmányozásához. Gazdaságkutató Intézet — 1968.
** KSH becsült értéke.

Mint látható, itt sem lehetett egyetlen Y_e görbét konstruálni, s ezért az egyes rész-trendek „ideális" típusát — vagyis hogy melyik alapján számoltunk, melyiknek volt szorosabb az illeszkedése — ugyancsak feltüntettük. Nem nehéz azt sem észrevenni, hogy a „tisztán" és a súlyozva átlagolt értékek jelentősen eltérnek a ténylegesen bekövetkezett realizációktól. Jóllehet a tökéletes előrebecslés igénye — sztochasztikus folyamatoknál — nyilvánvalóan ábránd, mégis felmerül a kérdés, vajon melyik eljárás adott pontosabb közelítést. A választ a (7)-ből képzett szórás-mutató, a

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} (\sigma_{n+i})^2}{m}} \tag{8}$$

mindenkori nagysága adja meg. Esetünkben — kizárólag a módszer szemléltetése céljából — ismertnek vettük a jövőbeli y_i-ket, s így a fenti, speciálisan értelmezett szórásokat egyszerűen kiszámíthattuk:

Az extrapoláció bázisául szolgáló periodus	A tényleges és a számított értékek átlagos eltérése (σ_j)	Sorrend*
1950—59	18,02	8.
1951—59	23,30	11.
1952—59	18,42	9.
1953—59	18,68	10.
1954—59	5,44	1.
1955—59	8,59	3.
1956—59	13,82	6.
1957—59	9,21	5.
1958—59	6,13	2.
Direkt súlyozásos	15,89	7.
Egyszerűen átlagolt	9,13	4.

* Legkedvezőbbnek értelemszerűen a legkisebb szórású résztrendet vettük.

Jóllehet igyekszem ellenállni annak a csábításnak, hogy mélyebb közgazdasági értékelését adjam a fenti eredményeknek, a következőket kell megjegyeznem. Minden esetben — a már említett okoknál fogva — el kell vetni azt a lehetőséget, hogy csupán az utolsó két-három évet tekintjük az előrejelzés bázisának. (Még akkor is, ha nemegyszer — mint példánkban is — oly megdöbbentően pontos a rövid-távú közelítés.) Ezért — az adott esetben — a kétféleképp nyert „átlagos" trenddel csak az 1954—59-es és az 1955—59-es konkurrálhat. Ráadásul ha még azt is figyelembe vesszük, hogy általában nem tudjuk mekkorák lesznek a jövőbeli értékek — vagyis semmiféle információnk sincs arra vonatkozóan, hogy az egyes rész-trendek kivetítése önmagában milyen extrapolációt biztosít — úgy csakis az első, a teljes idősor trendjével lehet reális az összevetés. Az pedig — esetünkben — a nyolcadik helyre rangsorolódik, s rosszabb közelítést ad, mint bármelyik a szóbanforgó két eljárás közül.

És itt mindjárt felmerül a kérdés: a „sima" átlagolás miért adott lényegesen jobb előrebecslést, mint a súlyozásos? Általános-e ez a kép s vajon mivel magyarázható? — A válasz igen egyszerű. Az alap-idősor: nemzeti jövedelmünk 1950—59-es alakulása rendkívüli ingadozást, tendencia-hullámzást mutat. Lényegében csak 1957—59-cel indult be az a nivellálódás, az a viszonylag kisebb amplitúdójú fejlődés, mely a hatvanas éveket közismerten jellemzi. Éppen ezért történhetett meg az, hogy az utolsó éveket lényegesen nagyobb súllyal értékelő egyszerű átlagolás hozta meg a valósághűbb előrejelzést, s nem az alaptrendre nagyobb súlyt fektető direkt eljárás. Számításaim — melyeket több, az előzőhöz hasonló „globális" mutatóra is elvégeztem (ipari termelés, kiskereskedelmi forgalom, stb.) alátámasztani látszanak azt az egyre gyakrabban hallható véleményt, miszerint 1957—59 között lenne egy olyan gazdasági határkő, melyet a népgazdaság főbb mutatóinak elemzésénél mindig figyelembe kell venni. Ez pedig azt jelenti, hogy a magam részéről az 1970-es évekre történő előrejelzés kiinduló pontjának a fenti évek valamelyikét venném.

Végezetül még a következőket szeretném megjegyezni. Egyáltalán nem állítható, hogy minden idősorra, bármely esetben a tendencia-átlagolás módszere adja a legjobb előrejelzést. (Szabad legyen itt még egyszer e módszerek nem összehasonlítható, hipotetikus jellegére hivatkoznom.) Mindezek ellenére a számítások minden esetben igen jó, szinte meggyőző eredménnyel szolgáltak. Ettől függetlenül már most szándékomban áll a továbbfejlesztés azon útjait keresni, melyek az „egyéb" hatótényezők bekapcsolásával, vagyis több változó egyidejű figyelembevételével pontosabbá, használhatóbbá teszik az eljárást.

(Beérkezett: 1968. aug. 10.)

EXTRAPOLATION ON THE AVERAGE OF SECTIONAL TRENDS

This thesis reviews a special method of prediction based on trend calculations. The author refers to the fact that long range planning, and different territories of economic prediction have already made use of the method of trend calculation. Nevertheless, he feels that there are possibilities for development of its use. There are two fields in which he finds that extrapolation based on trend calculation is "semi-finished".

a) It evaluates the most recent and the oldest events with equal weight, and because of this it happens that a realization decades old may leave the same stamp on the extrapolation line, as any of the most recent values.

b) Changes in the time period on which the extrapolation is based are handled as a single tendency, and not as an unbroken sequence of tendencies.

His first observation is in connection with a question which has still not been decided: whether it would be more suitable to base extrapolation on the most recent time data (perhaps a period selected on the basis of certain economic ideas), or on the longest possible time period.

It would seem that both directions are logical. The first is so insofar as it would be expected that the tendency of the most recent time period is the one which has a decisive effect on further (particularly regarding the near future) development. The second conception, and this is to an extend in contradiction with the first, can be supported by the fact that these "most recent" values are sometimes accidental. They represent a significant deviation from the actual trend, due to objective circumstances, and because of this, predictions based on them may be totally inaccurate. It's not difficult to see that both reasonings can be inverted, and what is a drawback in one can be an advantage in the other.

The proposed tendency prediction system attempts to remove these contradictions, using a method in which the extrapolation curve is not expressed is the average of points but as that of trends, or rather of trend lines of different length. He achieves this by handling fluctuation between the two most recent points of time as an independent "tendency",

as well as we experience between the most recent 3, 4, 5 . . . etc. time periods, and this way, taking an n-element time series, and constructing a $(n-1)$ sectional time series, he determines, and with certain weights, averages their trends. The derivation of the extrapolation curve — in a linear case — can be done on the basis of (2) or (3), when the curve can be characterized by a straight line using the equation $Y_e = a_e + b_e \cdot x$. The author stresses that averaging the part-trends can not be solved with the averaging of parameters, but in case when,

a) the basic time series shows exactly the same tendencies as each of the part-series (in other words, if all can be approached through linear, exponencial or other functions, which are indentical in structure, and only differ in their parameters).

b) the approximating function is such that each point in the extrapolation curve achieved through averaging the suitable parameters is indentical with the value of the part-trends for the same point of time averaged in the same way. This does not always hold, not even in the exponential case which is so frequent in economic prediction. In cases like this, and when the uniformity mentioned in point *a)* is missing, a continuous Y_e curve cannot be constructed, so we must be satisfied with an averaging of the individual part-trends "projected" to the future.

Then the author discusses the question of applied weights. This is necessary in order that realizations from different time periods be validated with different weight in predicting future events. He proposes two solutions: the "simple" and the "direct" methods. In the first case we take the simple average of the part-trends' predicted values and in this way the freshest values receive increasing weight, so that the most recent value is included in all the time series thus in all the part trends as well, while the oldest value is included in only one trend. For this reason in an n-element basic time series, the first value effects future events only simply, while the two most recent have a $(n-1)$ "weight", and in this way it turns out that simple average in reality has a very strong weight. The direct system calculates the weight on the basis of a formula, in which we can include factors such as the relative length of the time series, or the future distance of the extrapolational time. The numerical example shown demonstrates the weights gained on the basis of formula (5), in which the two algorithms are exhibited, based on the statistical figures of Hungary's national income between 1950 and 1967. Here, in fact, an ,,ex-post" extrapolation takes place: the individual part trends' predicted values for the years 1960—1967 and their "averages" are compared with the 1960—1967 actual data, and this way the different results can be compared numerically.

In conclusion the author refers to the incomparability of extrapolation methods, and to the fact that the algorithm he proposes is nothing else than a hypothetic system based on certain theoretical and practical ideas. Nevertheless, his calculations lead one to assume that the system and its further development can be successfully applied in iconomic predictions.

ЭКСТРАПОЛЯЦИИ НА ОСНОВАНИИ УСРЕДНЕНИЯ ЧАСТНЫХ ТРЕНДОВ

В данном труде представляется специальный метод прогнозирования, основывающегося на исчислении трендов. Автор, ссылаясь на то обстоятельство, что в различных областях перспективного планирования, экономического прогнозирования уже и ранее употреблялись методы исчисления трендов, все же полагает, что возможно их дальнейшее усовершенствование. По его мнению, основанная на исчислении трендов экстраполяция имеет «полуготовый» характер в двух областях:

а) события наиболее близких и самых отдаленных периодов оцениваются ею с одинаковым удельным весом, и, таким образом, та или иная, возможно, проистекавшая десятилетиями назад реализация накладывает свою печать на экстраполяционную линию, в такой же мере, как и любое из последних значений;

б) изменения, происшедшие за представляющий основу экстраполяции период, рассматриваются как единственная тенденция, а не как непрерывная последовательность тенденций.

Первое замечание связано с вопросом, нерешенным до сегодняшнего дня и заключающимся в том, что правильнее: производить экстраполяцию с учетом данных нескольких последних сроков (возможно, избранных на основании определенных экономических соображений) или же на основании как можно более длительного периода.

Представляется, что оба пути имеют свою логику. Логичность первого заключается в том, что предположительно тенденция последних периодов должна оказать решающее влияние на дальнейшее (предусматриваемое в ближайшем будущем) развитие. Вторая — несколько противоречащая первой — концепция подтверждается тем, что такие «последние» значения по случайным, внешним причинам не раз означают значительные отклонения от действительного тренда, и поэтому производимое на их основании прогнозирование может дать совершенно ложные результаты. Не трудно заметить, что оба довода могут быть повернуты, и то, что в одном случае является недостатком, в другом случае значает положительную черту.

Предлагаемый способ прогнозирования тенденций старается исключить как раз эти противоречия, изображая экстраполяционную кривую не посредством усреднения точек (дискретных реляций), а трендов, вернее: отрезков трендов различной длины. Это достигается посредством того, что динамика между последними двумя сроками, как и динамика между последними 3-им, 4-ым, 5-ым и т. д. сроками рассматриваются как самостоятельные «тенденции»; и на основании $(n-1)$ рядов, полученных из содержащего n элементов ряда, определяются, а затем при определенном взвешивании усредняются их тренды. Получаемая таким образом экстраполяционная кривая — в случае линейности — может быть образована на основании (2) и (3), причем эта кривая представляет собой прямую, характеризуемую формулой $Ye = a_e + b_e$. Автор особо подчеркивает, что усреднение частных трендов может производиться путем усреднения параметров лишь в тех случаях, когда

а) исходный ряд показывает ту же тенденцию, что и каждый из частных рядов (то есть, когда каждый из них может быть приближен линейными, показательными или прочими функциями тождественного построения, различающимися только по своим параметрам);

б) приближающая функция выбрана таким образом, что все точки экстраполяционной кривой, полученной путем усреднения соответствующих параметров, совпадают с усредненными по тем же принципам значениями отдельных частных трендов, относящимися к тем же срокам. Это не всегда наблюдается, как например, и в столь часто встречающемся при экономическом прогнозировании случае показательной функции. В таких случаях, а также если не имеется упомянутой в пункте а) однородности, нет возможности для построения непрерывной кривой Ye, а приходится довольствоваться усреднением «проектируемых» на будущее значений отдельных частных трендов.

В дальнейшем автор затрагивает вопрос применяемых при взвешивании соотношений. Это необходимо для того, чтобы при прогнозировании будущих событий реализации различного «возраста» фигурировали с различным удельным весом. Он предлагает два метода: «простой» и «прямой». В первом случае берутся обыкновенные средние величины прогнозируемых значений трендов, и в этом случае все более поздние значения приобретают все больший удельный вес посредством того, что последняя реляция фигурирует во всех частных рядах (а таким образом, и в частных трендах), в то время как, самое старое значение фигурирует лишь в одном единственном тренде. Из-за этого в случае n-элементного исходного ряда первое значение влияет на будущие события лишь с однократной «силой», в то время как два самых последних с $(n-1)$-ной «силой», и, таким образом, оказывается, что простое усреднение производится с весьма сильным взвешиванием. При прямом способе употребляемые при взвешивании соотношения исчисляются на основании формулы, в которой могут быть учтены такие факторы, как относительная длина частного ряда или относительная будущая отдаленность экстраполяционного срока. Эти полученные на основании формулы (5) соотношения взвешивания представлены и в сообщаемом далее нумерическом примере, в котором два типа алгоритмов показаны на основании данных национального дохода Венгрии в период между 1950—67 гг. Здесь, по существу, производится экстраполяция (ex post»: прогнозированные на период 1960—67 гг. значения отдельных частных трендов и их «средние» сопоставляются с фактическими данными этого же периода, и, таким образом, можно нумерически сравнить различные результаты.

В заключительной части своего труда автор ссылается на несопоставимость экстраполяционных методов, указывая на то, что и предлагаемый им алгоритм является ничем иным, как гипотетическим способом, строящимся на определенных принципиальных и практических соображениях. Все же его расчеты позволяют заключять, что этот метод, его усовершенствованные варианты могут быть полезно применены при экономическом прогнозировании.