SIMONOVITS ANDRÁS

Pozitív matrixok domináns Rayleigh-hányadosáról

1. Elméletileg és gyakorlatilag egyaránt fontos a következő két kérdés: adott matrix sajátvektorának közelítő ismeretében hogyan számítható a sajátvektorhoz tartozó közelítő sajátérték? Adott számítási eljárás esetén hogyan becsüljük meg e sajátérték hibáját?

Az általam ismert irodalom e kérdéseket csak normális matrixok esetében tárgyalja. Kimutatják, hogy alkalmas (euklideszi) vektornormát használva, közelítő sajátérték relatív hibája a közelítő sajátvektor relatív hibájának négyzetével azonos nagyságrendű. Azonban a közgazdasági alkalmazásokban szereplő matrixok általában nem normálisak. Jellemző tulajdonságuk ezzel szemben az, hogy pozitívak. Az alkalmazásokban különösen a legnagyobb abszolút értékű, ún. domináns sajétérték és a megfelelő sajátvektor számítása szükséges. Az alábbiakban erre a domináns sajátértékre bizonyítom a hiba négyzetes jellegét.

2. Állapodjunk meg a következő jelölésekben: kis görög betűk skalárokat, kis latin betűk vektorokat, nagy latin betűk matrixokat jelölnek. Végig valós számokkal dolgozunk, a vektortér n-dimenziós, a matrixok $n \times n$-szeresek. A bal és a jobb oldali vektorok jelzése azonos, sor és oszlopvektorokat tehát nem különböztetünk meg. Két vektor skalárszorzatát egyszerű egymás mellé írással jelöljük.

Elméleti bevezetésül vetjük fel a következő problémát: Adott T és v esetén milyen λ mellett lesz λ a T valamilyen sajátértékének „legjobb" közelítése? Azaz $| Tc - \lambda v |$ milyen λ-ra minimális? (Vektor abszolút értéke a koordináták négyzet-összegének pozitív négyzetgyöke.) Felhasználva, hogy a $| v | = \sqrt{vv}$, $| Tv - \lambda v |^2$ pedig λ-ban másodfokú, egyszerűen adódik, hogy a minimum-hely $\tau = \tau(v) = \dfrac{vTv}{vv}$, $(v \neq 0)$; azaz itt τ a v függvénye ([1] 172. old.). Ez az észrevétel szemléletesen azt jelenti, hogy a λv egyenes Tv-hoz legközelebbi pontja Tv pont vetülete a λv egyenesre. Ez a $\tau(v)$ érték a T mátrix v vektorához tartozó ún. *Rayleigh-hányados*.

A Rayleigh-hányados számlálójában szereplő kvadratikus alak helyébe általánosabb bilineáris formát írhatunk, a nevezőbe pedig skalárszorzatot. Ez a formális általánosítás matematikailag nem ad újat, de közgazdasági értelmezése jól kiaknázható. Pl. a bal oldali vektor valamilyen árat, a jobb oldali vektor volument jelölhet. $\tau = \tau(u, v) = \dfrac{uTv}{uv}$, $(uv \neq 0)$ a T matrix u és v vektoraihoz tartozó Rayleigh-hányadost jelenti. ([1] 179. old.) Közgazdaságilag ez általában hatékonysági mutatóként értelmezhető.

3. Rátérünk a hibabecslésre. Legyen T pozitív (elemű) matrix, u_0 és v_0 a T domináns bal ill. jobb oldali sajátvektorai, τ_0 közös domináns sajátértékük. Ismert, hogy egy skalár faktortól eltekintve u_0 és v_0 egyértelműen adottak és pozitívak τ_0-val együtt ([2] 283. old.). Jól látható, hogy $\tau(u_0, v) = \tau_0$ és $\tau(u, v_0) = \tau_0$; természetesen $\tau(u_0, v_0) = \tau_0$ — ezért a nullaindexelés megfelelő.

Általánosságban a szorzat hibája a tényezők hibájának összege. Két szorzat hányadosának hibája még nagyobbá válhat. Itt azonban más a helyzet. Ha egyik tényező, pontos, az eredő is pontos. Az eredő hiba szorzat jellegét mutatja a következő elemi átalakítás:

$$\Delta u = u - u_0,\ \Delta v = v - v_0 \text{ jelöléssel } \frac{\tau - \tau_0}{\tau_0} = \frac{uTv}{\tau_0 uv} - 1 =$$

$$= \frac{(u_0 + \Delta u)T(v_0 + \Delta v) - \tau_0(u_0 + \Delta u)(v_0 + \Delta v)}{\tau_0(u_0 + \Delta u)(v_0 + \Delta v)}.$$

(Itt a zárójelek arimetikai jelölések.)

Felhasználva, hogy $u_0 T = \tau_0 u_0$ és $T v_0 = \tau_0 v_0$, összevonás után a $\frac{\tau - \tau_0}{\tau_0} =$

$$= \frac{\Delta u \left(\frac{1}{\tau_0} T - I\right) \Delta v}{uv} \text{ formulát kapjuk.}$$

Mivel a vektorok elemei a közgazdaságtanban gyakran összemérhetetlen mennyiségek (pl. a volumenvektor esetében), célszerű a relatív hibát elemenként venni. Vektorok közötti egyenlőtlenség is elemenként értendő, tehát az α hibakorlát $-\alpha u_0 \leq u \leq \alpha u_0$ képlettel értelmezendő. Természetesen $\alpha > 0$ és $u_0 > 0$, $v_0 > 0$.

Ha a hányadost felülről becsüljük, akkor a számlálót is felülről, a nevezőt alulról becsülhetjük. Az elemenkénti írásmódból látszik, hogy $-\alpha u_0 v_0 \leq$ $\leq (\Delta u) v_0 \leq \alpha u_0 v_0$; $-\beta u_0 v_0 \leq u(\Delta v) \leq \beta u_0 v_0$; $\tau_0 \beta v_0 \leq T\Delta v \leq \tau_0 \beta v_0$; $-\alpha \tau_0 \beta u_0 v_0 \leq \Delta u T \Delta v \leq \alpha \tau_0 \beta u_0 v_0$;

Összegezve:

$$\left| \Delta u \left(\frac{1}{\tau_0} T - I\right) \Delta v \right| \leq \left| \Delta u \frac{1}{\tau_0} \cdot \tau \Delta v \right| + | \Delta u \Delta v | \leq 2\alpha\beta u_0 v_0$$

$$\text{és } | u\, v | \geq u_0 v_0 - u_0 \Delta v - (\Delta u) v_0 - \Delta u \Delta v \geq u_0 v_0 (1 - \alpha - \beta - \alpha\beta)$$

$$\text{azaz } \frac{-\tau_0|}{\tau_0} \leq \frac{2\alpha\beta}{1 - \alpha - \beta - \alpha\beta}, \text{ ha } \alpha + \beta + \alpha\beta < 1.$$

Ezzel bizonyításunk végére jutottunk. Nyilvánvaló, hogy kicsi α és β hibákra a jobb oldal $2\alpha\beta$ nagyságrendű.

Megjegyzések:

4. Konkrét közgazdasági elemzésnél jól látható az egész kérdés szemléletes tartalma. Vegyük példának Leontief dinamikus lineáris modelljét, ahol A a

folyó-, B az eszközlekötési ráfordítások matrixa. $Q = (I - A)^{-1}$ az ún. Leontief-inverz, a teljes ráfordítások matrixa. Vezessük be $T = BQ$ matrixot, amely v nettó termékhez szükséges Tv bruttó eszközlekötést mutatja. Ha u a termelési ár vektora, ekkor $\tau = \tau(u, v) = \frac{uTv}{uv}$ az u árakon és v nettó termelés mellett számított ún. időtényező, az átlagos növekedési ütem = átlagprofitráta) reciproka ([2], 175. old. 223—225. old.) Példánkban τ nemcsak a Rayleigh-hányadost jelenti, hanem egy centrális gazdasági-hatékonysági mutatóként is értelmezhető. A becslés szerint az időtényező relatív hibája nem nagyobb, mint a termelési ár és a nettó termék relatív hibáinak kétszeres szorzata. Ez egyben igazolja az aggregálás jogosságát is az ilyen típusú modellek esetében.

5. Érdekesség kedvéért megemlítem a következő eredményeket ([1] 172—173. old.): Megfelelően értelmezve vektorok és matrixok normáját, általános esetben a következő becslés igaz:

$$\frac{|\tau - \tau_0|}{\tau_0} \leq \frac{\| \Delta u \| \left\| \frac{1}{\tau_0} T - I \right\| \| \Delta v \|}{\Delta u \, \Delta v} \qquad \text{([1] 179. old.)}$$

Normális matrixnál a domináns sajátértékre euklideszi normával a $\frac{2\alpha\beta}{1 - \alpha - \beta - \alpha\beta}$ eredő hibakorlátot kapjuk, amely azonos 3.-beli eredményeinkkel, csak más normával!

6. Pozitív matrixok helyett lehet nem-negatív primitív matrixokat is vizsgálni. A-ról és B-ről úgyis csak az utóbbit tehetjük fel. Q viszont pozitív, ezért példánkban T is pozitív.

(Beérkezett: 1968. XI. 28.)

IRODALOM

1. Wilkinson, J. H.: The Algebraic Eigenvalue Problem. Clarendon Press. Oxford 1965.
2. Bródy, A.: Érték és újratermelés. MTA Közgazdaságtudományi Intézet 1968.

ON THE DOMINANT RAYLEIGH QUOTIENT OF POSITIVE MATRICES

The Rayleigh quotient serves for the computation of eigenvalues of matrices. The estimation of errors in this computation method, when applied to normal matrices, is well known from the literature. These results are extended in the paper to the case of positive (not necessarily normal) matrices occuring in mathematical economics.

О ДОМИНАНТНОМ КРАТНОМ РАЙЛЕЙГА ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ

Кратное Райлейга служит для исчисления собственных значений матриц. Из литературы известно определение погрешности этого метода исчисления в случае нормальных матриц. В статье эти общеизвестные результаты распространяются на встречающиеся в математической экономии положительные (и не обязательно нормальные) матрицы.