Virág Ildikó

Egy sztochasztikus növekedési modell

A gazdasági élet leírására jelenleg használt matematikai modellek nagy része determinisztikus modell. Azonban jól ismert, hogy ha egy ilyen modellel például tervezni akarunk, akkor fel kell tételeznünk bizonyos gazdasági összefüggéseket, amelyek előre nem látott s a tendenciák bonyolultsága miatt nem is látható hatások miatt nem a feltevéseknek megfelelően fognak érvényesülni. Ezért egy ilyen modellel számított eredményeket egy jó tervező soha sem tekinti biztosan bekövetkező ténynek, hanem csak közelítésnek. Azonban az ilyen előre nem látott véletlen hatásokról a tervezés során soha nem tudjuk meg, hogy mennyire változtatják meg feltételeinket, és így azt sem, hogy a kapott eredmény a tervezetthez nagyon közel, kevésbé közel, vagy egyenesen távol lesz.

Létezik azonban olyan matematikai apparátus, amelynek segítségével előre nem látott véletlen események is figyelembe vehetők. Ezt nyújtja a valószínűségszámítás és a családjába tartozó tudományágak, a sztochasztikus folyamatok elmélete, a matematikai statisztika, az információelmélet stb.

A sztochasztikus folyamatok elmélete a ξ_t valószínűségi változók halmazának vizsgálatával foglalkozik, ahol t végigfut egy valós paraméterhalmazon, pl. egy időintervallumon. Ez az elmélet lehetővé teszi véletlen jelenségek időbeni lefutásának vizsgálatát. A gazdasági valóságot a nagyszámú számbavehetetlen véletlen hatás miatt hasznos éppen ilyen időben lefutó véletlen jelenségként kezelni.

A sztochasztikus folyamatok elméletének különösen a mikroökonomiában számos sikeres alkalmazása van, azonban kevesebb makroökonomiai alkalmazásáról tudunk.

Ebben a dolgozatban a sztochasztikus folyamatok elméletének egy makroökonomiai alkalmazását fogjuk bemutatni. Szeretnénk megmutatni azt a gondolatmenetet, ahogyan egy determinisztikus modellt általánosíthatunk.

Egy *Harrod—Domar típusú növekedési modellből* indulunk ki, amely Sz. Sztrumilintől származik [1], [2], [3]. Ezzel a modellel a szerző azt az optimális felhalmozási hányadot kívánja meghatározni, amely mellett egy meghatározott időszak alatti összes fogyasztás maximális. E modell alapvető feltevése az, hogy az $Y(t)$ nemzeti jövedelem csak a $K(t)$ tőkéből származik és a nemzeti jövedelem c konstansszorosa a t-edik időpillanat $K(t)$ tőkeállományának.

$$Y(t) = c\,K(t)\,.$$

Az általánosítási lehetőség az, hogy a c konstans értékét sztochasztikus folyamatnak fogjuk fel, tehát az általa felvett értéket minden időpillanatban valószínűségi változónak tekintjük.

Ebből a feltevésből következik, mint látni fogjuk, hogy az összes többi változót, tehát a $K(t)$ tőkét, $Y(t)$ nemzeti jövedelmet, $J(t)$ beruházást, $C(t)$ fogyasztást is sztochasztikus folyamatként kell kezelnünk.

A modellel, a determinisztikus modell analógiájára itt is az optimális felhalmozási hányadot határozzuk meg, miközben a T időszak alatti összes fogyasztás várható értékét maximálizáljuk.

A dolgozat két részből áll. Az egyik részben azt az esetet vizsgáljuk, amikor a $c(\omega, t)$ tőkehatékonyság sztochasztikus folyamatát, mint általános sztochasztikus folyamatot vizsgáljuk, a másik részben pedig feltesszük, hogy Gauss folyamat.

Az általános esetben a T idő alatti összes fogyasztás várható értékét végtelen sor alakjában kapjuk, Gauss folyamat esetén azonban zárt képletben, így ebben az esetben részletesebben vizsgálhatjuk az optimális felhalmozási hányad létezésének és unicitásának feltételeit.

A modell leírása

Legyen $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ egy valószínűségi mező és legyen az $[O, T]$ zárt intervallum egy paraméterhalmaz ([4] III. fejezet), ahol T éppen a horizontidő. Legyenek értelmezve $Y(\omega, t)$, $c(\omega, t)$, $K(\omega, t)$ és $J(\omega, t)$ sztochasztikus folyamatok az $\Omega x[O, T]$ téren, azaz minden $\omega_0 \in \Omega$-re és $t_0 \in [O, T]$ értékre vegyenek fel valamilyen valós értékeket, úgy, hogy rögzített $t_0 \in [O, T]$ esetén az $Y(\omega, t_0)$, $c(\omega, t_0)$, $K(\omega, t_0)$ és $J(\omega, t_0)$ egy-egy az $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változó és minden rögzített $\omega_0 \in \Omega$ esetén az $Y(\omega_0, t)$, $c(\omega_0, t)$, $K(\omega_0, t)$ és $J(\omega_0, t)$ egy-egy a $[O, T]$ intervallumon értelmezett közönséges függvény, amelyeket a sztochasztikus folyamat realizációinak nevezünk. ([4]. I. fejezet.)

$Y(\omega, t)$-vel a nemzeti jövedelem sztochasztikus folyamatát jelöljük.

$c(\omega, t)$ a tőkehatékonyság sztochasztikus folyamata, amely a pillanatnyi tőkehatékonyságot mutatja.

$y(\omega, t)$ a pillanatonként eszközölt beruházás sztochasztikus folyamata.

$K(\omega, t)$ a t-edik időpillanat tőkeállományának sztochasztikus folyamata.

A modell feltevései

1. A $t = O$ időpillanatban $K(O) = K_0$ mennyiségű tőke áll rendelkezésre. Ezt nem tekintjük véletlentől függő mennyiségnek, hiszen a valóságban ismert mérhető mennyiség.

2. $Y(\omega, t) = c(\omega, t)$, $K(\omega, t)$, vagyis a t-edik pillanat nemzeti jövedelmét a t-edik pillanat tőkehatékonysága és az illető pillanat tőkeállományának szorzataként kapjuk. Ez véletlentől függő mennyiség, hiszen a véletlentől függ az is, hogy mennyi az illető pillanatban a tőkehatékonyság és az is, hogy mennyi az addig felgyülemlett tőkemennyiség.

3. $J(\omega, t) = s\ Y(\omega, t)$, ahol $O \leq s \leq 1$ valós szám. Szavakban kifejezve ez a feltevés azt jelenti, hogy a pillanatnyi nemzeti jövedelemnek valamilyen s konstansszorosát fordítjuk mindig beruházásra. Természetes, hogy a $y(\omega, t)$ pillanatnyi beruházás is véletlentől függő mennyiség, hiszen $Y(\omega, t)$ az.

4. $K'(\omega, t) = y(\omega, t)$, ahol a $K'(\omega, t)$ az a sztochasztikus folyamat, amelynek realizációi a $K(\omega, t)$ folyamat realizációinak közönséges analízisbeli értelemben

vett deriváltjai. Ez a feltevés itt is, mint a determinisztikus modellben azt fejezi ki, hogy a beruházás azonnal hatni kezd, azaz nincs időbeni késleltetés.

5. Tegyük fel továbbá, hogy a $c(\omega, t)$ sztochasztikus folyamat majdnem minden realizációja folytonos függvény, ahol a „majdnem minden" fogalom azt jelenti, hogy azon realizációk előfordulásának valószínűsége, amelyek mellett a $c(\omega, t)$ nem folytonos függvénye t-nek, nulla.

6. Legyen ezenkívül a $c(\omega, t)$ rögzített t mellett korlátos, azaz létezzen olyan $n(t)$ valós függvény, hogy

$$c(\omega, t) \leq n(t) .$$

Ez utóbbi két feltevésnek főleg technikai jellege van, azonban közgazdaságilag teljesen kézenfekvő követelmények, hiszen azt jelentik, hogy a folyamat minden realizációja olyan, hogy az időben változó tőkehatékonyság folytonos, másrészt pedig rögzített időpillanatban nem vehet fel akármilyen nagy értéket.

A 2, 3 és 4 feltételből $K(\omega, t)$-re a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$K'(\omega, t) = s \cdot c(\omega, t) \cdot K(\omega, t) .$$

Az 5. feltevés miatt a kapott sztochasztikus differenciálegyenlet megoldható, egy valószínűséggel bármilyen rögzített ω mellett.

A megoldást úgy kapjuk, hogy az egyes realizációk között fennálló függvényekre vonatkozó differenciálegyenleteket megoldjuk. A kapott megoldásfüggvények a megoldásfolyamat realizációi.

A megoldás tehát

$$K(\omega, t) = K_0 \exp \left[s \int_0^t c(\omega, t) dt\right]$$

ahol felhasználtuk az 1. alatti feltételt.

Ez az egyenlőség $K(\omega, t)$ majdnem minden realizációjára teljesül.

Célunk a T idő alatti összesfogyasztás várható értékek maximálása, ezt a következőképpen kapjuk:

Mivel felhalmozásra időpillanatonként a nemzeti jövedelem s-szeresét fordítjuk, fogyasztásra az $(1—s)$-szerese kerül.

Mivel $Y(\omega, t) = c(\omega, t)\, K(\omega, t)$, és $K(\omega, t) = K_0 \exp\left[s \int_0^t c(\omega, t)\, dt\right]$

a T idő alatti összes fogyasztás a következő:

$$K_0 \int_0^T (1 - s)\, c(\omega, t) \exp \left[s \int_0^t c(\omega, t)\, dt\right] dt$$

ennek a várható értékét a következő alakban kapjuk:

$$(1) \qquad \begin{cases} K_0 \left(\dfrac{1}{s} - 1\right)\left[\mathbf{M}\left(\exp \left\{s \int_0^T c(\omega, t)\, dt\right\}\right) - 1\right], & \text{ha } 0 < s \leq 1 \\ K_0 \int_0^T c(\omega, t)\, dt\,, & \text{ha } s = 0. \end{cases}$$

Ennek a kifejezésnek keressük a maximumát, miközben $0 \leq s \leq 1$. Megjegyzés:

Konkrét esetekben nagyon nehéz kimutatni, hogy egy sztochasztikus folyamat majdnem minden realizációja folytonos (azaz a folyamat egy valószínűséggel folytonos).

A következő tétel ([4] IV. fejezet 5. §.) ad egy elégséges feltételt egy sztochasztikus folyamat egy valószínűséggel való folytonosságára.

Tétel: Ha léteznek olyan C, r és β pozitív konstansok, hogy

$$\mathbf{M}\left[\,|\,c(\omega,t_2)-c(\omega,t_1)\,|^{\beta}\right] \leq C\,|\,t_2-t_1\,|^{1+r}$$

és a $c(t,\omega)$ szeparábilis, akkor a $c(t,\omega)$ egy valószínűséggel folytonos.

Ha a folyamatról még azt is feltesszük, hogy Gauss-folyamat, akkor a következő még könnyebben ellenőrizhető feltételek teljesülését kell megvizsgálnunk. Ezek a folyamat korreláció függvényére vonatkoznak, amely egy jól kezelhető valós függvény.

A tétel ([4] IV. fejezet 5. §.) a következő:

Ha léteznek $C > O$, $\alpha > O$ konstansok úgy, hogy teljesül az

$$|\,R(t_2,t_2)-2\,R(t_2,t_1)+R(t_1,t_1)\,| \leq C(t_2-t_1)^{\alpha},$$

minden $(t_1,t_2)\in[O\ T]$, és $m(t)$ a $c(\omega,t)$ Gauss-folyamat várható értéke folytonos, akkor a szeparábilis Gauss-folyamat egy valószínűséggel folytonos.

Ezek a tételek szeparábilis sztochasztikus folyamatokra vonatkoznak. Közgazdaságilag a szeparábilitás nem jelent erős megkötést. Ha folyamataink nem szeparábilisak, dolgozhatunk a velük sztochasztikusan ekvivalens szeparábilis folyamatokkal ([4] IV. fejezet 2. §.).

Az általános eset

Az (1) alatti kifejezést fogjuk maximalizálni, miközben $0 \leq s \leq 1$. Problémát csak az

$$\mathbf{M}[\exp\,(\int_0^T s(c\omega,t)\,dt)] \tag{1}$$

kiszámítása jelent.

Készítsük el az $\exp[s\int_0^T c(\omega,t)dt]$ hatványsorát.

$$\exp\left[s\int_0^T c(\omega,t)\,dt\right]=1+\frac{s\int_0^T c(\omega,t)\,dt}{1!}+\ldots+\frac{s^n\left(\int_0^T c(\omega,t)dt\right)^n}{n!}+\ldots \tag{2}$$

Ha képezzük mindkét oldal várható értékét, akkor azt kapjuk, hogy

(3)

$$\mathbf{M}\left[\exp\left(s\int_0^T c(\omega,t)\,dt\right)\right]=1+M\left[\frac{s\int_0^T c(\omega,t)\,dt}{1!}\right]+\ldots+M\left[\frac{s^n\left(\int_0^T c(\omega,t)dt\right)^n}{n!}\right]+\ldots$$

ahol

$$\mathbf{M}\left[\frac{s^n\left(\int_0^T c(\omega,t)\,dt\right)^n}{n!}\right]=\frac{s^n}{n!}\int_{\Omega}\left(\int_0^T\int_0^T\ldots\int_0^T c(\omega,t_1)\,c(\omega,t_2)\ldots\right. \tag{4}$$

$$\ldots c(\omega, t_n)\,\mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_n\Big)\,dP$$

(2) jobb oldalán tagonként képezhetjük a várható értéket, mivel a 6. pont alatti feltétel miatt a (2) jobb oldalának részletösszegeiből képezhető függvénysorozatra teljesülnek a Lebesgue-tétel ([4] II. fejezet 5. §.) feltételei. A Fubini-tétel ([4] II. fejezet 3. §.) n-szeres alkalmazásával felcseréljük az integrálások sorrendjét és így (4)-től a következő összefüggést kapjuk:

$$(5)\quad \mathbf{M}\left[\frac{s^n\left(\int_0^T c(\omega,t)\,\mathrm{d}t\right)^n}{n!}\right] = \frac{s^n}{n!}\int_0^T\int_0^T\ldots\int_0^T \mathbf{M}\big[c(\omega,t_1)\cdot c(\omega,t_2)\ldots c(\omega,t_n)\big]\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2\ldots\mathrm{d}t_n$$

(3)-ból és (5)-ből kapjuk

$$\mathbf{M}\ \Big[\exp\Big(s\int_0^T c(\omega,t)\,\mathrm{d}t\Big)\Big] = 1 + s\int_0^T \mathbf{M}\big[c(\omega,t)\big]\ \mathrm{d}t +$$

$$+\frac{s^2}{2}\int_0^T\int_0^T \mathbf{M}\big[c(\omega,t_1)\cdot c(\omega,t_2)\big]\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2 + \ldots$$

$$+\frac{s^n}{n!}\int_0^T\int_0^T\ldots\int_0^T \mathbf{M}\ \big[c(\omega,t_1)\,c(\omega,t_2)\ldots\ c(\omega,t_n)\big]\,\mathrm{d}t_1\ \mathrm{d}t_2\ldots\mathrm{d}t_n + \ldots$$

Ha most ezt (2)-be behelyettesítjük, azt kapjuk, hogy

$$(6)\quad \begin{cases} K_0\Big[(1-s)\int_0^T \mathbf{M}\big[c(\omega,t)\big]\,\mathrm{d}t + \dfrac{(1-s)\,s}{2}\int_0^T\int_0^T \mathbf{M}\big[c(\omega,t_1)\ c(\omega,t_2)\big]\ \mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2 + \ldots + \\ + \dfrac{(1-s)\,s^{n-1}}{n!}\int_0^T\int_0^T\ldots\int_0^T \mathbf{M}\big[c(\omega,t_1)\,c(\omega,t_2)\ldots c(\omega,t_n)\big]\ \mathrm{d}t_1\ \mathrm{d}t_2\ldots\mathrm{d}t_n + \ldots\Big], \\ \hfill \text{ha } 0 < s \leq 1 \\ K_0\int_0^T c(\omega,t)\ \mathrm{d}t, \hfill \text{, ha } s = 0 \end{cases}$$

(2) helyett most egy meglehetősen komplikált formulát kaptunk, azonban az $\mathbf{M}\left[\exp(s\int_0^T c(\omega,t)\,\mathrm{d}t)\right]$ helyett ebben az esetben elegendő ismerni vagy kiszámítani az $\mathbf{M}\big[c(\omega,t_1)\,c(\omega,t_2)\ldots c(\omega,t_n)\big]$ várható értéket.

Közelítő számítást végezhetünk a képlet segítségével $s_{\max}$ $(0 < s \leq 1)$ meghatározására. Válasszunk egy nagy N számot (amelyet a kívánt pontossághoz határoztunk meg), és vizsgáljuk (6) első N tagját. Az így kapott polinom maximumhelyével, amelyet ismert numerikus módszerekkel számolhatunk, approximálhatjuk $[O, T]$-ben $s_{\max}$-t.

c $(\omega$, t) Gauss-folyamat

Az itt következő részben azt az esetet tárgyaljuk, amikor a $c(\omega, t)$ Gauss-folyamat, melynek várható értéke $m(t) = \mathbf{M}[c(\omega, t)]$ és kovariancia-függvénye $B(u, v) = \mathbf{M}[c(\omega, u)\ c(\omega, v) - m(u)\ m(v)]$.

Hogy $c(\omega, t)$ milyen folyamatnak tekinthető, azt pontos statisztikai vizsgálattal lehetne megállapítani. Egy hozzávetőleges vizsgálat nem mond ellent ennek a feltevésnek. Egyrészt ezért tesszük fel, másrészt pedig azért, mert mint a továbbiakból látható lesz, lényegesen egyszerűbben lehet számolni Gauss-folyamat esetén. (6) típusú végtelen sor helyett zárt kifejezés lesz a maximálandó függvény, azonkívül pedig Gauss-folyamat esetén a (4) típusú mennyiségek helyett elegendő ismerni az $m(t)$ és $B(u, v)$ paramétereket.

Gauss-folyamatnak nevezünk egy $c(t, \omega)$ sztochasztikus folyamatot, ha tetszőleges n természetes egész szám és $[O\,T]$-beli $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ szám n-es esetén a $[c(\omega, t_1), c(\omega, t_2), \ldots, c(\omega, t_n)]$ valószínűségi változó vektor együttes eloszlás függvényének karakterisztikus függvénye [5] a következő alakú:

$$\varphi_{t_1 t_2, \ldots, t_n}(y_1, y_2, \ldots y_n) = \exp\left\{ i \left[\sum_{j=1}^{n} m(t_j)\, y_j \right] - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} B(t_l, t_k)\, y_l\, y_k \right\} \tag{7}$$

ahol $m(t)$ egy tetszőleges függvény (a folyamat várható értéke) és $B(u, v)$ pozitív definit függvény (a folyamat kovariancia-függvénye).

A valószínűségszámításból ismert [5], hogy (7) alatti karakterisztikus függvényhez tartozó valószínűség-sűrűségfüggvény a következő:

$$g(x_1 x_2 \ldots x_n) = \frac{\sqrt{\det A}}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{lk}(x_l - m_l)(x_k - m_k) \right] \tag{8}$$

ahol $A = | a_{lk} |$ mátrix a $B = | B(x_l, x_k) |$ kovarianciamátrix inverze.

A továbbiakban használni fogjuk a következő tételt, amelyet, mivel nem tudjuk idézni, vázlatosan itt bebizonyítunk.

Tétel: Ha $c(\omega, t)$ egy Gauss-folyamat a $[O\,T]$-ben $m(t) = \mathbf{M}[c(\omega, t)]$ várható értékkel és $B(u, v) = \mathbf{M}[c(\omega, u)\, c(\omega, v)] - m(u)\, m(v)]$ kovarianciafüggvénynyel, akkor az $\int_0^T c(\omega, t)\, dt$, normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke $m_T = \int_0^T m(t) dt$ és szórásnégyzete $\sigma_T^2 = \int_0^T \int_0^T B(u, v) du\, dv$.

Bizonyítás: Az $\int_0^T c(\omega, t) dt$ integrál létezését az 5. pontban foglalt feltétel biztosítja (a $c(\omega, t)$ folyamat egy valószínűséggel folytonos).

Először megmutatjuk, hogy az $\int_0^T c(\omega, t) dt$ normális eloszlású valószínűségi változó.

Közelítsük az integrált a következő téglányösszeggel (elegendő a felső összeg, hiszen tudjuk, hogy az integrál létezik):

$$\int_0^T c(\omega, t)\, dt = \lim_{n \to \infty} S_n(\omega).$$

ahol

$$S_n(\omega) = \sum_{j=1}^{n} (t_{j+1} - t_j)\, c(\omega, t_{j+1}).$$

A $t_1, t_2, \ldots t_j, \ldots t_n$ pontok ekvidisztans pontok $[O\,T]$-ben, $t_1 = 0$, $t_n = T$. Természetesen mivel $c(\omega, t)$ Gauss-folyamat, $c(\omega, t_{j+1})$ normális eloszlású valószínűségi változó $(j = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

A valószínűségszámításból tudjuk, hogy normális eloszlások konstansszorosa is normális eloszlás, az alábbiakban pedig röviden vázoljuk annak bizonyítását, hogy együttesen normális eloszlású valószínűségi változók összege is normális eloszlású, amellyel beláttuk, hogy normális eloszlású valószínűségi változók lineáris kombinációja is normális eloszlású.

Lemma: Együttesen normális eloszlású valószínűségi változók összege is normális eloszlású.

A lemma bizonyítása: Tudjuk, hogy független normális eloszlású valószínűségi változók összege normális eloszlású. ([5] 184. old.) Ezenkívül tudjuk ([5] 178. old.), hogy ha $c(\omega\, t_1)$, $c(\omega, t_2) \ldots c(\omega, t_n)$ tetszőleges normális eloszlású valószínűségi változók, akkor megadható olyan $D = | d_{ij} |$ ortogonális mátrix, hogy a

$$c'(\omega, t_k) = \sum_{j=1}^{n} d_{jk}[c(\omega, t_j) - m(t_j)] \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

és a $c'(\omega, t_1)$ $c'(\omega, t_2) \ldots c'(\omega, t_n)$-ek független normális eloszlású valószínűségi változók.

A $D = | d_{j,k} |$ mátrix ortogonalitásából következik, hogy

$$c(\omega, t_j) = \sum_{k=1}^{n} d_{jk}\, c'(\omega, t_k) + m(t_j) \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

Innen pedig következik az állítás, hiszen

$$\sum_{j=1}^{n} c(\omega, t_j) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}_{jk}\, c'(\omega, t_k) + m(t_j)\Big),$$

és a jobb oldalon független, normális eloszlású valószínűségi változók összege áll.

Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

A fentiek miatt $S_n(\omega)$ normális eloszlású valószínűségi változó tetszőleges n-re.

Nem kívánjuk itt részletezni, de könnyen bebizonyítható, hogy normális eloszlású valószinűségi változók határértéke is — ha létezik — normális eloszlású.

Így, mivel a felosztás minden határon túli finomításával nyert téglányösszegek, az $S_n(\omega)$-k, mind normális eloszlásúak, a

$$\lim_{n\to\infty} S_n(\omega) = \int_0^T c(\omega, t)\, \mathrm{d}t \quad \text{is az.}$$

Ezzel állításunk első részét bebizonyítottuk.

Nem kívánjuk részletesen bizonyítani, mivel könnyen belátható, hogy

$$m_T = \int_0^T m(t)\mathrm{d}t\,.$$

Ezek után már csak azt kell megmutatnunk, hogy

$$\sigma_T^2 = \int_0^T \int_0^T B(u, v)\mathrm{d}u\, \mathrm{d}v.$$

Mivel

$$\sigma_T^2 = \mathbf{D}^2[\int_0^T c(\omega, t)\mathrm{d}t] = \mathbf{M}[\int_0^T c(\omega, t)\mathrm{d}t]^2 - \mathbf{M}^2[\int_0^T c(\omega, t)\mathrm{d}t],$$

ahol

$$\mathbf{M}[\int_0^T c(\omega, t)\mathrm{d}t] = m_T$$

a

$$\sigma_T^2 = \int_0^T \int_0^T \mathbf{M}[c(\omega, u)\, c(\omega, v)]\mathrm{d}u\, \mathrm{d}v - m_T^2 .$$

(Itt az általános esetnél már ismertetett integrálfelcserélést hajtottunk végre.)

Behelyettesítve az $\mathbf{M}[c(\omega, u)\, c(\omega, v)]$ helyére az $\int_0^T \int_0^T (B(u, v) + m(u)\, m(v))\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$-t, azt kapjuk, hogy

$$\sigma_T^2 = \int_0^T \int_0^T B(u, v) + m(u)\, m(v)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v - m_T^2$$

ahonnan, mivel

$$\int_0^T \int_0^T m(u)\, m(v)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = \int_0^T m(u)\mathrm{d}u \int_0^T m(v)\mathrm{d}v = m_T\, m_T = m_T^2,$$

az állítás már következik.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

A továbbiakban az általános esethez hasonlóan kiszámítjuk

$\mathbf{M}[\exp(s \int_0^T c(\omega, t)\, \mathrm{d}t)]$-t, amelyet most zárt képletben kapunk.

A továbbiakban jelöljük ξ-vel a $\int_0^T c(\omega, t)\, \mathrm{d}t$ valószínűségi változót.

A karakterisztikus függvény segítségével [5] könnyen kiszámíthatjuk $\mathbf{M}[e^{s\xi}]$-t.

$$\mathbf{M}[e^{s\xi}] = \mathbf{M}[e^{-i(si)\xi}] = \varphi_\xi \quad (-is) .$$

A ξ mint tudj uk, normális eloszlású valószínűségi változó, így

$$\varphi_\xi(-is) = \exp\left[i\, m_T(-is) - \frac{\sigma_T^2(-is)^2}{2}\right]$$

azaz

$$\mathbf{M}(e^{s\xi}) = \varphi_\xi(-is) = \exp\left(m_T\, s + \frac{\sigma_T^2\, s^2}{2}\right) .$$

A kapott kifejezést (1)-be behelyettesítve kapjuk, hogy maximalizálandó az

$$(9) \quad F(s) = \begin{cases} K_0\left(\frac{1}{s} - 1\right)\left[\exp\left(m_T s + \frac{\delta_T^2\, s^2}{2}\right) - 1\right], & \text{ha } 0 < s \leq 1 \\ K_0\, m_T, & \text{ha } s = 0 \end{cases}$$

Az F(s) függvény vizsgálata

A továbbiakban azt fogjuk megvizsgálni, hogy az $F(s)$ függvény szélső értékei hogyan helyezkednek el. Meg fogjuk mutatni, hogy ha az m_T várható értékre és a σ_T szórásra a (10) és (11) feltételt kötjük ki, akkor az $F(s)$ függvény a $0 < s \leq 1$ intervallumban csupán egy helyen veszi fel a maximumát, így az optimalizálási feladatunknak egyértelmű megoldása van.

(10) $$m_T \geq \sigma_T \sqrt{3 - \sqrt{6}}$$

(11) $$m_T^2 > 2\, m_T - \sigma_T^2 \qquad m_T > 0;\ \sigma_T \geq 0\,.$$

A továbbiakban foglalkozzunk az

(12) $$f(s) = \left(\frac{1}{s} - 1\right)\left[\exp\left(m_T\, s + \frac{\sigma_T^2\, s^2}{2}\right) - 1\right] \text{ függvénnyel}$$

ha $0 < s \leq 1$, hiszen ennek maximumhelyei megegyeznek a $F(s)$ függvényével.

Képezzük az $f'(s)$ deriváltat:

(13) $$f'(s) = \frac{1}{s^2} + \exp\left[m_T\, s + \frac{\sigma_T^2\, s}{2}\right] \frac{-1 + s(m_T + \sigma_T^2\, s) - s^2(m_T + \sigma_T^2\, s)}{s^2}\,.$$

Az $f(s)$ függvénynek szélső értéke nyilván csak ott lehet, ahol az $f'(s) = 0$, az $f'(s)$ pedig akkor és csak akkor egyenlő 0-val, ha

(14) $$\exp\left[-m_T\, s - \frac{\sigma_T^2\, s^2}{2}\right] = \sigma_T^2\, s^3 + (m_T - \sigma_T^2)\, s^2 - m_T\, s + 1\,.$$

A továbbiakban a (14) alatti egyenlet gyökeit vizsgáljuk. Ennek során többször felhasználjuk a következő lemmát, melyet itt nem szükséges bizonyítani.

Lemma: Ha a $g(s)$ és $h(s)$ folytonosan deriválható egy intervallumban, akkor a $g(s) = h(s)$ egyenletnek legfeljebb eggyel több gyöke lehet az adott intervallumban, mint $g'(s) = h'(s)$-nek.

Készítsük el most a (14) egyenlet első négy deriváltját. Ezek rendre a következők:

(15) $$3\,\sigma_T^2\, s^2 + 2(m_T - \sigma_T^2)\, s - m_T = -(m_T + \sigma_T^2\, s)\exp\left(-m_T\, s - \frac{\sigma_T^2\, s^2}{2}\right)$$

(16) $$6\,\sigma_T^2\, s + 2(m_T - \sigma_T^2) = \left[(m_T + \sigma_T^2\, s)^2 - \sigma_T^2\right]\exp\left(-m_T\, s - \frac{\sigma_T^2\, s^2}{2}\right)$$

(17) $$\sigma_T^2 = -(m_T + \sigma_T^2\, s)\left[(m_T + \sigma_T^2\, s) - 3\,\sigma_T^2\right]\exp\left(-m_T\, s - \frac{\sigma_T^2\, s^2}{2}\right)$$

(18) $$0 = \left[(m_T + \sigma_T^2\, s)^4 - 6\,\sigma_T^2(m_T + \sigma_T^2\, s)^2 + 3\,\sigma_T^4\right]\exp\left(-m_T\, s - \frac{\sigma_T^2\, s^2}{2}\right).$$

Vizsgáljuk most tehát (14) gyökeit.

(18)-nak pontosan négy gyöke van hiszen (14) jobb oldala akkor és csak akkor lehet 0-val egyenlő, ha

$$(19) \qquad (m_T + \sigma_T^2 s)^4 - 6\,\sigma_T^2(m_T + \sigma_T^2 s)^2 + 3\,\sigma = 0$$

Mivel ez s-ben negyedfokú egyenlet, pontosan négy gyöke van. Keressük meg ezeket.
(19)-ből adódik, hogy

$$(m_T + \sigma_T s)^2 = \sigma_T^2(3 \pm \sqrt{6})$$

ahonnan

$$m_T + \sigma_T^2 s = \pm\,\sigma_T \sqrt{3 \pm \sqrt{6}})$$

amelyből s-et kifejezve megkapjuk (18) gyökeit:

$$s_1 = -\frac{m_T - \sigma_T\sqrt{3+\sqrt{6}}}{\sigma_T^2}, \quad s_2 = -\frac{m_T - \sigma_T\sqrt{3-\sqrt{6}}}{\sigma_T^2},$$

$$s_3 = -\frac{m_T + \sigma_T\sqrt{3-\sqrt{6}}}{\sigma_T^2}, \quad s_4 = -\frac{m_T + \sigma_T\sqrt{3+\sqrt{6}}}{\sigma_T^2}.$$

Most megmutatjuk, hogy (15)-nek legfeljebb négy olyan gyöke van, amely nagyobb mint s_2.

Vizsgáljuk (17)-et.

(17)-nek s_3 és s_4 között legfeljebb egy gyöke lehet, (17) jobb oldala ugyanis s_4-től jobbra negatív értékeken keresztül tart 0-hoz, a ∞-ben, s_4-ben tehát csak lokális minimuma lehet. (17)-nek s_3-nál lokális maximuma van. s_3 és s_4 között (17) jobb oldalának van egy monoton pozitív szakasza. (17)-nek ezen a szakaszon lehet csak gyöke, hiszen (17) bal oldala egy pozitív konstans, és egy monoton függvény csak egyetlen helyen lehet egyenlő egy konstanssal.

A fenti lemma alapján így s_3-tól jobbra (16)-nak legfeljebb két gyöke lehet. Tegyük fel ugyanis, hogy (16)-nak legalább három gyöke van s_3-tól jobbra. Ekkor az elemi analízisben jól ismert Cauchy-féle középértéktétel szerint (17) legalább két közbülső helyen lenne 0, ami lehetetlen, hiszen (17)-nek s_3-nál nagyobb gyöke csak s_4.

Az egész gondolatmenetet megismételve (15) és (16)-ra kimondhatjuk, hogy (15)-nek s_3-tól jobbra legfeljebb három gyöke van. Hasonló meggondolások alapján (14)-nek s_3-tól jobbra legfeljebb négy gyöke lehet.

A (10)-es feltevés miatt $s_3 \leq 0$, így fenti okoskodásunkkal tulajdonképpen azt mutattuk meg, hogy (14)-nek legfeljebb négy nullánál nagyobb gyöke lehet.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy (14)-nek a $[0, 1]$ intervallum belsejében csupán egyetlen gyöke van.

Tegyük fel, hogy (14)-nek két nullánál nagyobb gyöke van és ezek mindegyike egyszeres gyök.

A (11)-es feltevésből kapjuk, hogy mivel $m_T^2 > 2\,m_T - \sigma_T^2$

$$2(m_T - \sigma_T^2) < m_T^2 - \sigma_T^2\,.$$

Ez éppen a (16) egyenlet két oldala az $s = 0$ helyen. Ez azt jelenti, hogy az $s = 0$ helytől jobbra a (14)-es egyenlet jobb oldalán álló függvény a bal oldalán álló felett indul. Ezért a két gyök után, amely (14) jobb és bal oldalán álló függvények két átmetszésénél van, ismét (14) jobb oldala van felül. Mivel azonban (14) jobb oldala $-\infty$-hez tart, ha $s \to +\infty$-hez, a bal oldala pedig nullához, kell, hogy még egyszer messék egymást. Így tehát (14)-nek a nullát is beleértve 4 gyöke van. Közöttük a Cauchy-féle középértéktétel szerint a derivált három közbülső helyen nulla. Fent megjegyeztük, hogy (15)-nek az $s = 0$ helyen is gyöke van. Indirekt feltételünkből kiindulva azt kapjuk, hogy (15)-nek négy nem negatív gyöke van, ez pedig mint fent láttuk, lehetetlen.

Meg kell még vizsgálnunk azt az esetet, amikor indirekt feltételként azt tesszük fel, hogy a (14)-es egyenletnek két nullánál nagyobb gyöke van és az egyik kétszeres multiplicitású. Ekkor az előző esethez hasonló meggondolások alapján két közbülső helyen nulla a derivált is, ezenkívül az $s = 0$-ban és a kétszeres gyöknél is nulla, tehát (15)-nek ebben az esetben is legalább négy gyöke van, ami lehetetlen.

Így tehát bebizonyítottuk, hogy a (14)-es egyenletnek a (10) és (11) feltételek mellett legfeljebb egy $0 < s_0 \leq 1$ gyöke lehet.

(9)-nek így az idézett feltételek mellett valóban egyetlen szélső értéke van $0 < s \leq 1$-ben, és ez maximum, mivel az $s = 0$-ban a függvény növekvő.

A (10) és (11) feltevés problémánk szempontjából nem jelent túl erős megkötést, (11) már $m_T > 2$ és $\sigma_T \geq 0$ esetén is teljesül, és ezt minden gyakorlatilag szóba jövő esetben feltehetjük. (10) pedig azt követeli meg, hogy az $m(t)$ várható érték viszonylag nagy legyen $\sigma(t)$-hez képest. Ez a feltevés szintén kézenfekvő a gyakorlatban előforduló feladatoknál, hiszen ha nem teljesülne minden t időpillanatban, akkor a $c\,(\omega, t)$ folyamat nagy valószínűséggel vehetne fel negatív értékeket is. Márpedig a tőkehatékonyság a valóságban csak igen kis valószínűséggel lehet negatív.

Ha a most ismertetett modellt összevetjük a kiindulási modellel [2], akkor láthatjuk, hogy ott a $c\,(\omega, t)$ Gauss-folyamat helyett egyszerűen c-azonosan konstans függvény szerepelt. Ebben az esetben $m(t) = c$ és $B\,(u, v) = 0$, így az $m_T = \int_0^T m(t) = cT$, $\sigma_T = 0$.

Összefoglalás

Dolgozatunkban egy Harrod—Domar típusú sztochasztikus növekedési modellben meghatároztuk az optimális felhalmozási hányad várható értékét.

Két esetet vizsgáltunk. Meghatároztuk a felhalmozási hányad várható értékét, egyrészt bizonyos általános feltételek mellett, másrészt abban a speciális esetben, amikor a tőkehatékonyság Gauss-folyamat.

Eredményül mindkét esetben az s felhalmozási hányad bizonyos függvényét kaptuk (6), (9), amelyekben ismert, illetve számítható paraméterekként szerepelnek a tőkehatékonyság sztochasztikus folyamatának olyan jellemzői, mint a folyamat n-edik momentuma, illetve a Gauss-folyamat esetében a folyamat integráljának m_T várható értéke és σ_T^2 szórásnégyzete.

Az optimális felhalmozási hányad várható értékét mindkét esetben e függvények maximumhelyei adják. Konkrét adatokat behelyettesítve e maximumhelyek meghatározása közismert numerikus feladat.

A dolgozatunkkal tehát egy *konkrét számítási eljárást* adtunk meg a modellből számolható optimális felhalmozási hányad várható értékére. Megjegyezzük azonban, hogy modellünknek inkább elméleti jelentősége lehet, hiszen közismert, hogy a kiindulási modell sem alkalmas gyakorlati számításokra elvont egyszerűsége és egyéb hibái miatt. Ezekhez a sztochasztikus modell esetében még statisztikai nehézségek is adódnak, hiszen ilyen jellegű statisztikai adatok legfeljebb csak becsülhetők.

A szerző dolgozatát inkább kísérletnek tekinti, amely elvezethet a gyakorlati tervezés számára is hasznosítható és a véletlent is figyelembe vevő aggregált modell kidolgozásához.

(Beérkezett: 1968. XI. 14.)

IRODALOMJEGYZÉK

1. Sztrumilin, Sz.: Az optimális arányok problémája. Statisztikai Szemle. 1962. 12. sz. 1191–1205. old.
2. Virág, I.: A felhalmozási hányad és az időhorizont. Statisztikai Szemle, 1966. 11. sz. 1120–1128. old.
3. Kenndert, Th. és Klock, J. J.: A note on Strumilin's model of optimal saving. (Csak kézirat.)
4. Гихман, И. И., Скороход, А. В.: Введение в теорию случайных процессов Москва, 1965. Издательство «Наука» Физико-математической литературы. 656 п.
5. Rényi, A.: Valószínűségszámítás. Budapest, 1966. Tankönyvkiadó, 510 p.

A STOCHASTIC GROWTH MODEL

The paper constitutes an attempt at working out a highly aggregate model which takes also into consideration the random fluctuations in the economic processes.

The starting point is a Harrod–Domar type growth model which serves to determine the optimum rate of accumulation while total consumption within a finite period is maximal. The output-capital coefficient which is constant in the case of a deterministic model, is a stochastic process here, and so are, consequently, all other variables – capital stock $K(t)$, national income $Y(t)$, investment $J(t)$ and consumption $C(t)$.

With the aid of the model it is possible to determine the optimum rate of accumulation with which the expected value of consumption within the finite period will assume a maximum value.

In one part of the paper the stochastic process of capital efficiency $c(\omega, t)$ is a general stochastic process, in the other part a Gauss process. In both cases the expected value of the optimum rate of accumulation is given in the form of a numerically computable formula.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РОСТА

Данная статья представляет собой попытку разработки сильно агрегированной модели, учитывающей в частности случайные колебания экономических процессов.

Исходной служит модель роста типа Гаррода–Домара, при помощи которой можно определить оптимальную долю накопления, когда общее потребление в течение определенного конечного периода является максимальным. В представленной модели в случае её определенности постоянный фактор эффективности капитала является стохастическим процессом, вследствие чего и все остальные переменные: объем капитала – K(t), национальный доход –Y(t), капитальные вложения – J(t) и потребление – C(t) также являются стохастическими процессами.

При помощи модели можно определить оптимальную долю накопления, при которой ожидаемое значение общего потребления конечного периода будет максимальным.

В одной части статьи стохастический процесс эффективности капитала с (ω, t) является общим стохастическим процессом, а в другой её части – процессом Гаусса.

Для обоих случаев ожидаемое значение оптимальной доли накопления дается в форме нумерически исчисляемой формулы.