W. W. LEONTIEF*

A dinamikus inverz**

1. E tanulmány célja, hogy bevezesse a dinamikus inverz fogalmát, amely a gazdasági változások empirikus tanulmányozásában hasonló szerepet játszhatna, mint amit a statikus input-output elemzésben a folyó ráfordítások matrixának inverze játszik.

Először a nyílt dinamikus input-output rendszert írom le a lineáris egyenletek egyszerű csoportja segítségével. Azután bemutatom e rendszer általános megoldását, azaz strukturális matrixának inverzét. Ennek az inverznek mindegyik eleme a megfelelő sor iparának kombinált közvetlen és közvetett ráfordítását képviseli, amely ahhoz szükséges, hogy a megfelelő oszlop iparága pótlólagosan 1 millió dollárnyi terméket bocsáthasson ki. Míg a statikus inverz az ilyen szükségleteket egyetlen szám segítségével tudja leírni, a dinamikus analízis keretében ezeket egy idősor képében kell megadni. Mihelyt a kapacitásbővítést és a megfelelő beruházási folyamatokat beépítjük a rendszerbe, szükségessé válik az is, hogy keltezéssel lássuk el azokat a ráfordításokat, amelyek — közvetlenül vagy közvetve — hozzájárulnak egy adott végső kibocsátás létrejöttéhez. Ezeket a számítógép számsorozat képében adja meg, amely visszafelé nyúlik az időben. E tanulmány utolsó fejezetei a megfelelő dinamikus árrendszer rövid megvitatásának vannak szentelve.[1]

2. Képviselje az n számú szektor kibocsátását, amelyet a t évben termeltek meg, az $\mathbf{x}_t = ({}_tx_1, {}_tx_2, \ldots, {}_tx_n)$ oszlopvektor és legyen $\mathbf{c}_t = ({}_tc_1, {}_tc_2, \ldots, {}_tc_n)$ a végső kibocsátás megfelelő oszlopvektora. E végső kibocsátás *nem* tartalmazza az álló- és forgótőke (készletek) évi növelésére szánt termelést, amelyet a fenti n számú szektor felhasznál. A gazdaság strukturális jellegzetességeit írja le a folyó ráfordítások együtthatóinak $\mathbf{A}$ matrixa, amely négyzetes, n-edrendű és az egyes iparágak közvetlen folyó ráfordításait adja meg, valamint a tőkeráfordítási együtthatók megfelelő $\mathbf{B}$ matrixa. Feltesszük, hogy a t évben előállított tőkejavakat a következő, $t + 1$, évben használatba veszik.

* E tanulmány a IV. Nemzetközi Input-Output Konferencián (1968 Genf) került előadásra. Angol nyelven a CARTER—BRÓDY (ed): *Contributions to Input-Output Analysis* (North-Holland Publishing Co. Amsterdam, 1970) c. kötetben jelent meg. A közlési jogért itt mondunk köszönetet LEONTIEF professzornak és a kiadónak. A fordítást BRÓDY ANDRÁS végezte. (Szerk.)

** E tanulmány előkészítésében a szerzőt Brookes Byrd, Richard Berner és Peter Petri segítették.

[1] Az alapvető folyamatokat, szektorbontást és az adatok forrását a II., III. és IV. Függelék mutatja be.

Egy adott nemzeti gazdaság szektorainak kibocsátása közti közvetlen kölcsönviszonyt két egymásra következő évben az alábbi jól ismert mérlegegyenletben lehet leírni:

$$\mathbf{x}_t - \mathbf{A}_t \mathbf{x}_t - \mathbf{B}_{t+1} (\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{x}_t) = \mathbf{c}_t \,. \tag{1}$$

A bal oldal második tényezője az összes, n számú, iparág folyó ráfordításigényét képviseli a t évben; a harmadik a beruházásigényeket, azaz a termelőtőkének azt a kiegészítését, amely lehetővé teszi az összes iparág számára, hogy kapacitását a t évről a $t+1$ évre megnövelje, mégpedig $\mathbf{x}_t$-ről $\mathbf{x}_{t+1}$ nagyságúra. A strukturális matrixok idő-indexe módot ad arra, hogy a különböző években különböző folyó ráfordítási és tőkelekötési együtthatókkal számoljunk, és így dinamikus rendszerünkben felöleljük a technológiai változást is. Meg kell jegyezni, hogy a $\mathbf{B}_{t+1}$ matrix idő-indexe nem azt az évet mutatja, amelyben az illető tőkejószágot előállították, hanem azt az évet, amelyben először vették azt használatba.

Az (1) egyenletet átalakíthatjuk az alábbi módon:

$$\mathbf{G}_t \mathbf{x}_t - \mathbf{B}_{t+1} \mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{c}_t \tag{2}$$

ahol $\mathbf{G}_t = (1 - \mathbf{A}_t + \mathbf{B}_{t+1})$. Ármost az egymáshoz kapcsolódó mérlegegyenletek csoportja, amely az adott gazdaság fejlődését egy $m+1$ éves időszakasz során leírja, összekapcsolható $m+1$ számú lineáris egyenlet rendszerévé:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{-m} & -\mathbf{B}_{-m+1} & & & & \\ & \mathbf{G}_{-m+1} & -\mathbf{B}_{-m+2} & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \mathbf{G}_{-2} & -\mathbf{B}_{-1} & \\ & & & & \mathbf{G}_{-1} & -\mathbf{B}_0 \\ & & & & & \mathbf{G}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{-m} \\ \mathbf{x}_{-m+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{-2} \\ \mathbf{x}_{-1} \\ \mathbf{x}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{-m} \\ \mathbf{c}_{-m+1} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{-2} \\ \mathbf{c}_{-1} \\ \mathbf{c}_0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

3. E rendszer megoldása meghatározza az évi teljes szektorkibocsátások sorozatát, amely képessé tenné a gazdaságot arra, hogy előállítsa az évi végső kibocsátásoknak azt a sorozatát, amelyet a jobboldalon feltüntetett oszlopvektor sorozat ír le. Az utolsó egyenlettel kezdve, behelyettesítve ennek megoldását az utolsó előttibe és így lépésenkint haladva az elsőig, a (3) rendszer alábbi megoldását nyerjük az ismeretlen $\mathbf{x}$ értékekre az adott $\mathbf{c}$ vektorok függvényében:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_m \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{-2} \\ \mathbf{x}_{-1} \\ \mathbf{x}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{-m}^{-1} & \mathbf{R}_{-m} \ldots \mathbf{R}_{-2} \mathbf{G}_{-1}^{-1} & \mathbf{R}_{-m} \ldots \mathbf{R}_{-2} \mathbf{R}_{-1} \mathbf{G}_0^{-1} \\ & \vdots & \vdots \\ & \mathbf{R}_{-2} \mathbf{G}_{-1}^{-1} & \mathbf{R}_{-2} \mathbf{R}_{-1} \mathbf{G}_0^{-1} \\ & \mathbf{G}_{-1}^{-1} & \mathbf{R}_{-1} \mathbf{G}_0^{-1} \\ & & \mathbf{G}_0^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{-m} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{-2} \\ \mathbf{c}_{-1} \\ \mathbf{c}_0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

ahol $$\mathbf{R}_t = \mathbf{G}_t^{-1}\mathbf{B}_{t+1}(\mathbf{1} - \mathbf{A}_t + \mathbf{B}_{t+1})^{-1}\mathbf{B}_{t+1}$$

A (4) egyenlet jobb oldalán álló négyzetes matrix a (3) egyenlet bal oldalán megjelenő strukturális matrix inverze. Az inverz minden eleme maga is négyzetes matrix.

Az ék-alakú oszlop a jobboldalon azokat a közvetlen és közvetett ráfordítási szükségleteket írja le, amelyeket az n számú iparág bármelyikének zérus évi egységnyi (vagyis 1 millió dollár értékű) végső kibocsátása kelt. Ezek a szükségletek visszafelé oszlanak el az időben. A $\mathbf{G}_0^{-1}$ matrix mutatja azokat a ráfordítási szükségleteket, amelyeket a zérusadik évben kell kielégíteni, azaz ugyanabban az évben, amikor a végső kibocsátás történik. Mint a statikus inverzben is, $\mathbf{G}_0^{-1}$ egyes oszlopai arra az iparágra vonatkoznak, amelynek a végső kibocsátásáról szó van, egyes sorai azokra az iparágakra, amelyek az előbbieket a megfelelő ráfordításokkal ellátják. Az előző tag, $\mathbf{R}_{-1}\mathbf{G}_0^{-1}$, azokat a szükségleteket írja le, amelyeket az előző, -1, évben kell kielégíteni, $\mathbf{R}_{-2}\mathbf{R}_{-1}\mathbf{G}_0^{-1}$ azokat, amelyeket a -2 évben kell kielégíteni és így tovább. A leghosszabb tag, $\mathbf{R}_{-m} \ldots \mathbf{R}_{-2}\mathbf{R}_{-1}\mathbf{G}_0^{-1}$ a termelés növekedése az egyes iparágakban a $-m$ évben, azaz azok a ráfordítások, amelyekről m évvel korábban kell gondoskodni, mintsem a végső felhasználóknak leszállíthatnánk a pótlólagos jószághalmazt. A (4) egyenlet minden egyes, az átló feletti matrixát úgy számíthatjuk, hogy az alatta álló matrixot megszorozzuk a megfelelő $\mathbf{R}_{-t}$ transzformáló matrixszal.

4. Ha nincs semmilyen technológiai változás, akkor az idő-index elhagyható az összes strukturális együtthatóról. Bármelyik oszlop elemei ilyenkor leírhatók visszafelé ugyanazzal az egyszerű mértani sorral:

$$\mathbf{G}^{-1},\ \mathbf{R}\mathbf{G}^{-1},\ \mathbf{R}^2\mathbf{G}^{-1},\ \ldots,\ \mathbf{R}^m\mathbf{G}^{-1}. \tag{5}$$

Ismeretes, hogy ha a kitevő, t, eléggé naggyá válik, akkor $\mathbf{R}_t$ és $\mathbf{R}^{t+1}$ azonos helyen álló elemeinek aránya aszimptotikusan közeledik egyazon konstanshoz, amely egyenlő $\mathbf{R}$ domináló sajátértékének valós részével. Ha μ a domináló sajátérték, akkor $\mathbf{R}^{t+1} = \mathrm{re}(\mu)\mathbf{R}^t$, ha $t \to \infty$, ahol $\mathrm{re}(\mu)$ a μ sajátérték valós része. Ha μ valós, pozitív és kisebb mint 1, akkor a zérus évi végső kibocsátás bármilyen kombinációjához szükséges pótlólagos kibocsátások — elégségesen hosszú időszakaszt tekintve visszafelé — egyre kisebbé és kisebbé válnak, és végül végtelenül kicsik lesznek.[2]

Tehát, gyakorlatilag a ráfordítási láncolat, amely visszafelé húzódik attól az évtől kezdve, amikor a végső felhasználókat valóban kielégítik, az ilyen konvergencia esetében úgy kezelhető, mintha véges hossza volna. Ez igaz marad akkor is, ha a gazdaság technikai struktúrája évről-évre változik, azaz, ha az $\mathbf{R}$ matrixok megtartják idő-indexeiket. A szükséges ráfordítások sorozata visszafelé akkor is konvergál, habár nem szükségképp oly simán mint technikai változások hiányában. Az ilyen szükséges ráfordítások időbeli eloszlása azonban erősen különbözik az egyes iparágak tekintetében. Egyes ráfordítási sorozatok még a zérus vonal alá is merülnek elülső végükön. Ez jól ismert következménye az úgynevezett akcelerátor-elvnek. Mihelyt a végső felhasználók által közvetlenül vagy közvetve igényelt pótlólagos termékeket előállí-

[2] A dinamikus inverz konvergencia-tulajdonságainak matematikai elemzését az I. Függelék adja meg.

tották, azok a lekötött tőkejavak, amelyeket előállításukban foglalkoztattak, most fölössé válnak. Az (1) mérleg-egyenletet úgy állítottuk fel, hogy negatív beruházást, azaz leépítést mutat, ha $\mathbf{x}_{t+1} < \mathbf{x}_t$. Ténylegesen az ilyen potenciálisan fölös kapacitást lefoglalják azok a közvetlen vagy közvetett ráfordítási igények, amelyeket a további és rákövetkező években jelentkező végső kibocsátás növekedése kelt. Mint ahogy alább bemutatjuk, ezeket a dinamikus input-output számvitelbe mint külön-külön, de egymást mégis átfedő láncolatokat kell bevezetni. Amíg egy adott évben a pozitív pótlólagos kibocsátási igények összege meghaladja a negatív összegeket, addig e szektor kibocsátásának növekednie kell.

A nyílt input-output rendszer egyik leghasznosabb tulajdonsága az elemzés és számítás szempontjából a megoldások összegezhetősége a végső kereslet bármely változása tekintetében. A végső kibocsátás mindegyik eleme a közvetlen és közvetett ráfordítási szükséglet külön láncolatát hívja létre. A végső kereslet bármely adott vektora által keltett teljes szükségletet így az egyes ilyen láncolatok összege adja meg, miközben mindegyik láncolat megfelel a vektor egy-egy elemének.

Ez igaz marad akkor is, ha az egyes szétválasztható csoportok közül némelyikben negatív elemek fordulnak elő, hacsak a többi elég nagy pozitív elemeket tartalmaz ahhoz, hogy pozitív vagy legalábbis nem-negatív végösszeget biztosítson. Például a statikus input-output elemzésben a kompetitív importot úgy kezelik, mint ami negatív (közvetlen és közvetett) ráfordítási szükségleteket kelt, ezeket levonják azokból a megfelelő ráfordítási szükségletekből, amelyeket a hazai végső kereslet pozitív vektora kelt, s így egy kisebb, habár még mindig pozitív (vagy legalábbis nem-negatív) végösszeg jön létre. Szigorúan véve ez már letérés a valódi szétválaszthatóság útjáról: ha a végösszeg valamelyik ráfordítás tekintetében negatív, ez vitássá teszi az egész eredményt. Új számításba kell kezdeni, ahol a korábban kompetitívnek kezelt importot most át kell helyezni a nem-kompetitív kategóriába. A végső kereslet egy részének közvetlen és közvetett hatását attól függően kell kezelni ebben az esetben, hogy mekkora az a — bevallottan elkülönítetten kiszámított — szükséglet, amelyet a vektor többi eleme kelt. Ez az elemzési összképbe kereszt-összefüggéseket vezet be, amelyek a nem-lineáris rendszerekre jellemzőek.

A dinamikus inverz használata az elkülöníthetőség és összegezhetőség nyilvánvaló előnyeit kölcsönzi a gazdasági változások tapasztalati elemzése számára. Negatív elemek jelenléte több ilyen külön ráfordítási láncolatban (amelyek leírják a közvetlen — bár főként közvetett — ráfordítási szükségleteknek azt az idősorát, amit az adott és keltezett végső kibocsátás egy-egy külön eleme kelt) nyilvánvalóan korlátozza az összegezési feltevés szigorú értelemben vett érvényességét. Konzisztens, azaz lehetséges teljes ráfordítási szükségletek idősorait egy adott dinamikus inverz alapján csak olyan keltezett végső kibocsátás számára lehet meghatározni, amely nagyobb pozitív mint negatív kibocsátási szükségletet kelt minden egyes iparágban és minden egyes időszakban.

A végső kereslet keltezett vektorát megszorozva az adott dinamikus inverzzel számszerűen negatív teljes közvetlen és közvetett kibocsátási szükségleteket eredményezhet egyes termékek és egyes időszakaszok tekintetében. Ha így van, akkor legalábbis egyes mérlegegyenletek a (3) rendszerben nem a valóságos világot képviselik. Mindenki, aki foglalkozott ilyen típusú rendszerekkel tudja, e probléma abból fakad, hogy a (3) rendszer felteszi: az összes szektorokban és mindenkor teljesen kihasználják a kapacitást. A lineáris programozás szimplex-módszerének rutinszerű alkalmazásával például egy sor lehetséges termelési programot találhatnánk, ezek alkalmasak egy ilyen keltezett végső felhasználás előállítására. Mindegyikük a termelőkapacitások szabatosan időzített ki- és bekapcsolásaival járna és esetleg a folyó kibocsátások tervszerű felhalmozásával.

Az ilyen szakaszos jellegű gazdasági folyamat működésének megértése és magyarázata sokkalta bonyolultabb volna, mint egy olyan rendszeré, amelynek változását folytonos és összegezhető komponensekkel lehet leírni. Más szavakkal: a divergens dinamikus inverzű rendszer negatív elemeket tartalmaz, amelyek növekszenek ahogy az időben hátrafelé haladunk. Az ilyen rendszert programozni lehetne, azonban nagyon bonyolult elképzelni egy ilyen gazdaság tényleges létezését. Az amerikai gazdaság ténylegesen megfigyelt dinamikus inverze, amelyet az alábbiakban mutatok be, valószínűleg azért konvergál, mivel az új oszlopok fokozatosan helyettesítik a régieket az **A** és **B** együttható matrixokban, jellemezve ezzel a hosszútávú technikai változásokat.

5. Egy nyílt dinamikus input-output rendszert alkottunk és kiszámítottuk az inverzét mégpedig kétfajta **A** és **B** matrixszal, az egyik az amerikai gazdaság 1947. évi, a másik az 1958. évi strukturális sajátságait tükrözte. Egy harmadik rendszert azon feltevés alapján alkottunk meg és invertáltunk, hogy az 1947 és 1958 közötti technológiai eltolódás fokozatosan történt a közbenső években. Mindhárom esetben a dinamikus inverz jó viselkedést mutatott. Minden alkotó idősora visszafelé zérushoz konvergált.

1. ábra. A dinamikus inverz elemei, amelyek a 3. iparág, a gépgyártási termékek végső keresletében a zérus évben bekövetkező 1 millió dollárnyi növekedés közvetlen és követett hatásait mutatják be a 4., 6., 21. és 28. iparágakra, ebben és a megelőző években

járművek és fogyasztói berendezések (4)
fémek (6)
fa és faáru, kivéve göngyölegek (21)
gumi- és műanyagtermékek (28)

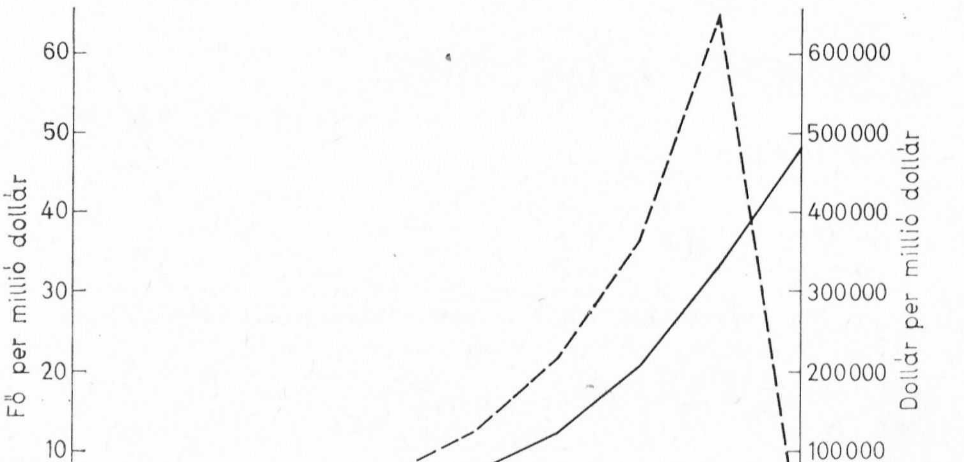
Mindkét évben ugyanazt a szektorbontást alkalmaztuk. 52 iparágból áll, és a végső kibocsátást felosztottuk háztartási (tartós és nem tartós) fogyasztásra és állami felhasználásra. A magánfogyasztás egy alternatív kezelése szétválasztja a végső háztartási szállításokat a nem-tartós fogyasztási cikkekre és a tartós fogyasztási cikkek becsült pótlási igényeire. Az utóbbi maradványát egy speciális háztartási beruházási számla terhére írjuk, ezt a tőkelekötési együtthatók megfelelő vektora szabályozza.

A munkaerőszükségletet szektoronkénti munkaráfordítási együtthatók alapján számoltuk és az egyes szektorok teljes tőkeszükségletét úgy határoztuk meg, hogy összegeztük a **B** matrix megfelelő oszlopának összes elemét.

Minden kibocsátást és ráfordítást mind 1947-ben, mind 1958-ban az 1958. évi árakon számoltunk. Más szavakkal, azokat az egységeket, amelyekkel végrehajtottuk a számításokat és amelyekben az eredményeket bemutatjuk, úgy kell értelmezni, mint az egy dollárért 1958-as árakon vásárolható áruk és szolgáltatások megfelelő tömegét.

Az egész számítás mintegy egy órányi időt igényelt az IBM 7094 számítógépen. A program tartalmazta az eredményül kapott idősorok automatikus gépi kirajzolását. E rajzokból választottuk az alábbi nyolc ábrát, amelyet itt bemutatok.

Az 1. ábra bemutatja az idősorokban található tipikus alakzatokat. Ezek mindegyike a dinamikus inverz egy-egy eleme, a négy görbe mindegyike a négy különböző iparág egyike termelésének időzített mennyiségeit képviseli, amely — közvetve vagy közvetlenül — hozzájárult a végső fogyasztónak a gépgyártási termék egy pótlólagos egységével való ellátásához (a zérus évben). A ráfordítások közül kettő — a fémek, valamint a gumi- és műanyagtermékek — főképpen anyagok, ráfordítási görbéik fokozatosan, de állandóan emel-



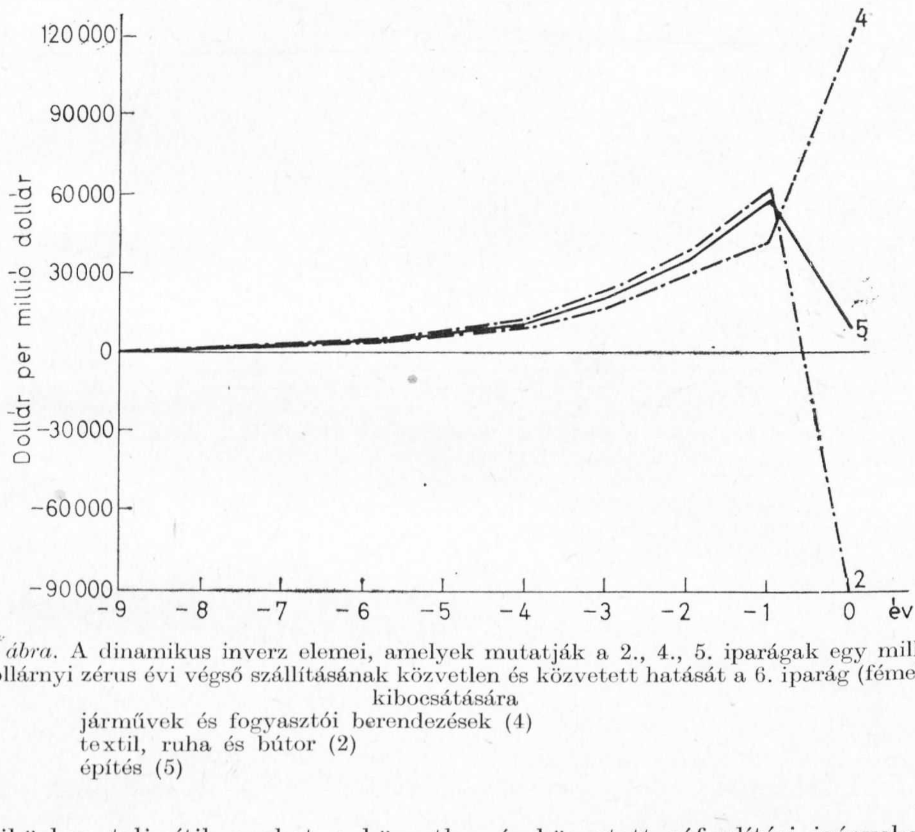
2. *ábra.* A teljes (közvetlen és közvetett) munka- és tőkeráfordítási igények, amelyek 1 millió dollárnyi gépgyártási termék zérus évi leszállításához szükségesek a 3. iparágban.
A bal oldali skála a munkára, a jobb oldali a tőkére vonatkozik

——— munka

— — — — tőke

kednek kezdettől fogva végig. Az elsődleges fém iránti kereslet sokkal nagyobb, és a végső szállítást jelentős tömegekben mintegy 8 évvel korábban előzi meg. A gumi- és műanyagtermékek iránti első jelentős keresletet a —3 évben találjuk. A megfelelő ráfordítási igények a járművek és fa iránt, másrészt, a zérus vonal alá merülnek a végső szállítást megelőző évben. Mint ahogy fent kifejtettük, ez jellemzi azokat a javakat, amelyek fontos szerepet játszanak a tőkefelhalmozásban.

A 2. ábra kiegészíti az 1. ábrát, bemutatva a munkának és tőkének, azaz a beruházási javaknak azt a tömegét, amelyet az *összes* iparágban elnyelnek,



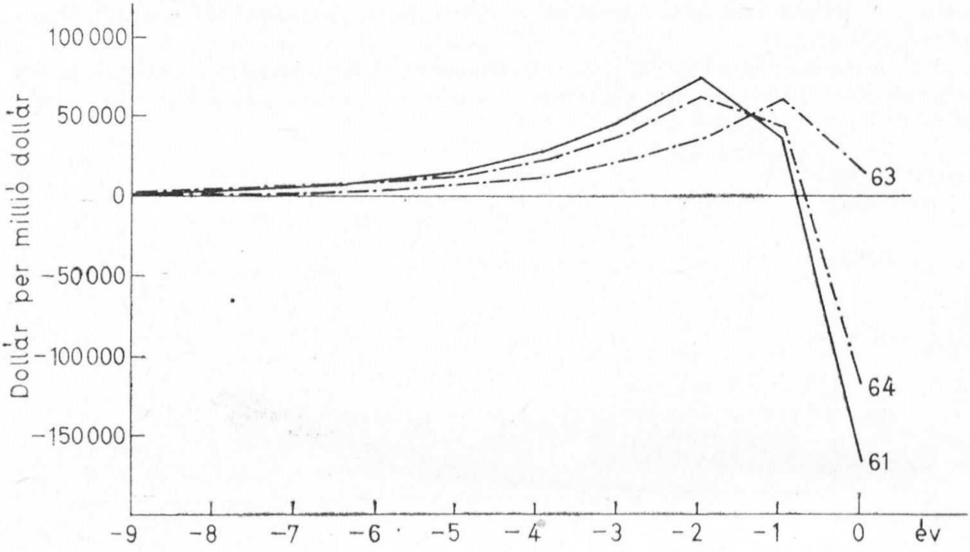
3. *ábra.* A dinamikus inverz elemei, amelyek mutatják a 2., 4., 5. iparágak egy millió dollárnyi zérus évi végső szállításának közvetlen és közvetett hatását a 6. iparág (fémek) kibocsátására

járművek és fogyasztói berendezések (4)
textil, ruha és bútor (2)
építés (5)

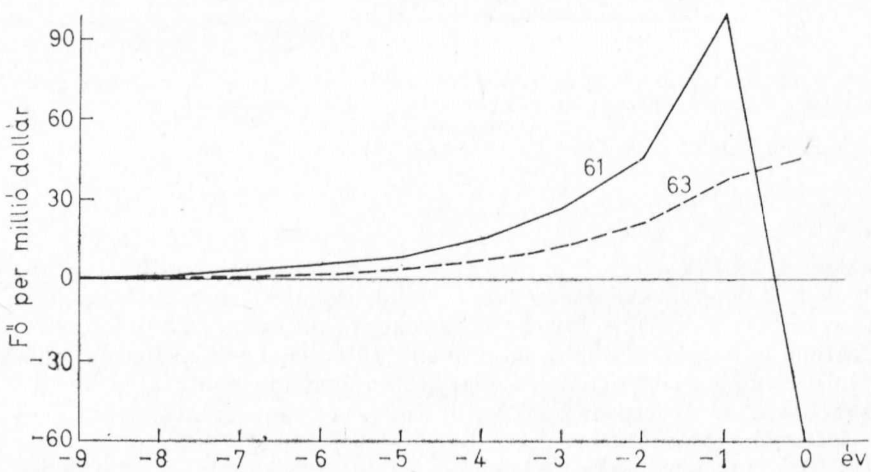
miközben teljesítik azokat a közvetlen és közvetett ráfordítási igényeket, amelyeket a gépgyártási termékek 1 millió dollárnyi mennyiségű zérus évi végső szállítása keltett. A fokozatos növekedés simasága természetesen mindkét esetben annak köszönhető, hogy a sok különböző egyéni iparág foglalkoztatási és beruházási igényeinek szabálytalanságai kiegyenlítik egymást e két végösszegben. Az új kapacitások beállítása és a végső szállítás közötti egyéves késleltetés magyarázza a beruházási görbe utolsó évi esését.

A 3. ábra egyazon iparág reakcióinak különbségeit mutatja különböző fajta végső szállítások következtében. A fémek tipikus nyersanyagként viselkednek a járművek — tehát főként autók — termelésében való közreműködésükben. Tipikus beruházási jószágként reagálnak azonban a textil végső keresletének növekedésére. Közbenső viselkedési alakzat jellemzi a fém-szektor hozzájárulását az építőipar végső kibocsátásának kielégítéséhez.

Hasonló eltéréseket találhatunk a 4. ábrában a két idősor alakjában, mindkettő a fém-szektor termék eiiránti igényeket rajzolja ki, az egyik egy millió



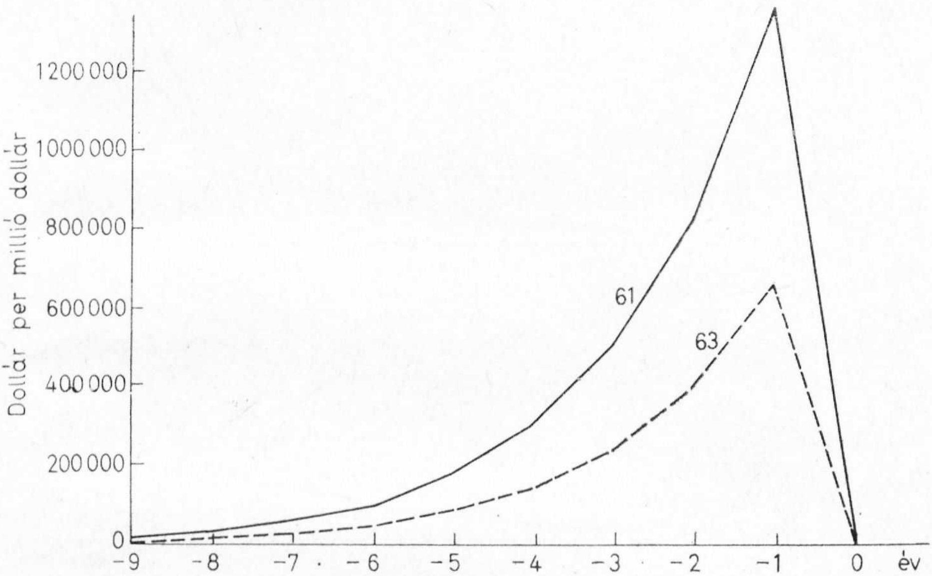
4. ábra. A dinamikus inverz elemei, amlyek nemtatják a háztartási, állami és teljes végső kereslet 1 millió dollárnyi zérus évi növekedésének különböző közvetlen és közvetett hatását a 6. fémek iparág kibocsátására
háztartási végső kereslet (61)
állami végső kereslet (63)
teljes végső kereslet (64)



5. ábra. Az alternatív közvetlen és közvetett munkaráfordítás idősorai, amelyek az állami és háztartási végső keresleti vektorok zérus évi 1 millió dollárnyi növekedését szolgálják
——— háztartási végső kereslet (61)
— — — állami végső kereslet (63)

dollárnyi pótlólagos állami keresletet tükröz, a másik a háztartások javak és szolgáltatások iránti egy millió dollár értékű keresletét anticipálja. Az első görbe egy évvel azelőtt éri el tetőpontját, mintsem a végső szállítás ténylegesen megtörténhetne és a zérus vonal felett marad az utolsó évben, a második egy évvel korábban kezd esésbe és végül a zérus vonal alá merül. Ahogy várhattuk is, a kombinált teljes kereslet közbenső idő-profilja a háztartások javára üt ki.

A teljes munkaráfordítások idősora, amely a végső kereslet két fő összetevőjét szolgálja, mint ahogy azt az 5. ábra mutatja, hasonlóan alakul, mint a 4. ábrán látható görbék. Ugyanez áll a megfelelő teljes tőkeigényekre, amelyek a 6. ábrán láthatók.

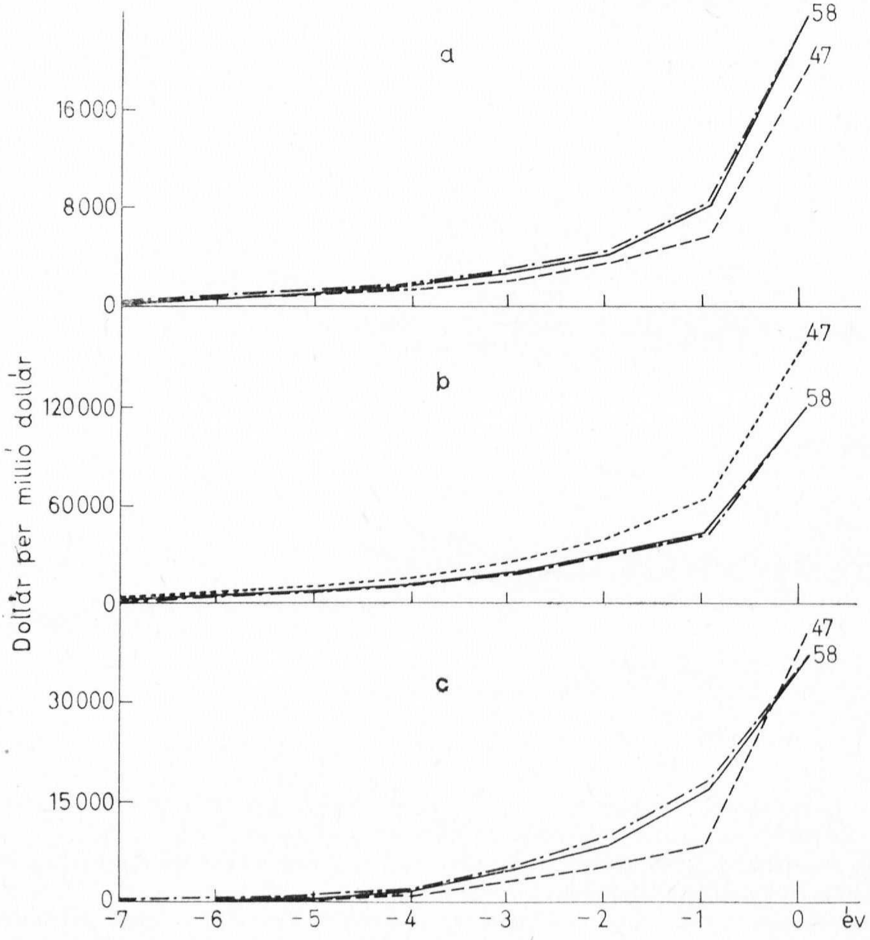


6. ábra. Az alternatív közvetlen és közvetett tőkeráfordítás idősorai, amelyek az állami és háztartási végső keresleti vektorok zérus évi 1 millió dollárnyi növekedését szolgálják
háztartási végső kereslet (61)
állami végső kereslet (63)

A 7. ábra három görbeserege mutatja hogyan tárhatja fel a dinamikus inverz meghatározott technikai változás hatását egy adott gazdasági rendszer dinamikus tulajdonságaira. Az ábra minden egyes része a dinamikus inverz egy-egy elemének három alternatíváját mutatja.

A felső ábra mindhárom görbéje a vegyszerek keltezett termelésnövekedését képviseli, amely — közvetve és közvetlenül — egy millió dollárnyi élelmiszer és gyógyszer zérus évi végső keresletének leszállításához járul hozzá. Az elsőt $\mathbf{A}_{1947}$ és $\mathbf{B}_{1947}$ alapján számítottuk, azaz azon folyó- és tőkeráfordítási együtthatók alapján, amelyek az amerikai gazdaság 52 termelő szektorának ráfordítási struktúráját az 1947. évben jellemezték. A másodikat $\mathbf{A}_{1958}$ és $\mathbf{B}_{1958}$ alapján számítottuk, azaz az 1958. évi technológiával. A harmadik inverzet — a (4) egyenletnek megfelelően — 11 különböző pár keltezett **A** és **B** matrix alapján számítottuk, ezek az 1947. évi technológia fokozatos eltolódását követték az 1958. évi technológia felé. Baloldalt ez a görbe egybeesik az első görbével, de az utolsó évben eléri a másodikat.

A három görbesereg bizonyítja milyen különböző módon hathat ugyanaz az általános változás ugyanazon dinamikus inverz különböző elemeire. Az amerikai gazdaság 52 szektorának ráfordítási struktúráját 1947-ben és 1958-ban leíró folyó- és tőkeráfordítási együtthatók nagyságkülönbsége igen sok technikai változás kombinált hatását tükrözi. Ezek felfelé való eltolódást okoztak azon vegyipari ráfordítások idősorában, amelyek 1 millió dollárnyi élelmiszer



7. ábra. A technológiai változás hatása a dinamikus inverz elemeire. a) A vegyipar (8) iránti közvetlen és közvetett szükséglet idősora 1 millió dollár értékű élelmiszer és gyógyszer (1) szállítására a zérus évben. *b)* A fémek (6) iránti közvetlen és közvetett szükséglet idősora 1 millió dollár értékű jármű (4) szállítására a zérus évben. *c)* A vegyipar (8) iránti közvetlen és közvetett szükséglet idősora 1 millió dollár értékű nem-vas fémbányászati termék (16) szállítására a zérus évben

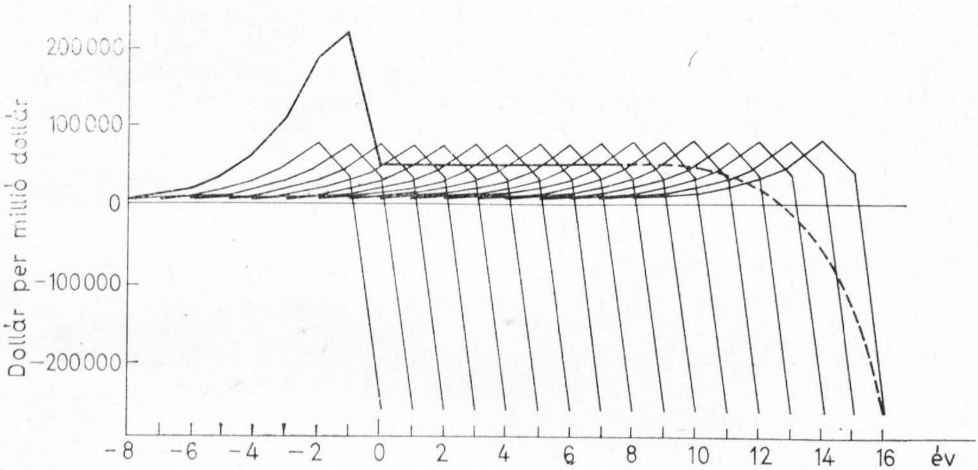
— — — 1947. évi technológia

—.—.— 1958. évi technológia

——— 1947-től 1958-ig évente változó technológia alapján számolva és gyógyszer végső szállításához szükségesek. A középső rész három görbéje arra mutat, hogy a struktúraváltozásoknak ugyanez a kombinációja csökkentette a fogyasztói berendezések végső szállításához hozzájáruló fémek ráfordítását.

A vegyszerek nem-vas fémbányászathoz történő hozzájárulását mutató alsó ábrán ugyanezek a strukturális változások bonyolultabb hatást okoznak: a ráfordítási szükségletek a sor utolsó évében, azaz a végső szállítás évében csökkentek, azonban az összes előző évben növekedtek.

6. A fent leírt dinamikus input-output rendszer — ugyanúgy mint a statikus input-output rendszer — kevéssé lehet segítségünkre a gazdasági növeke-



8. ábra. A háztartási végső keresleti vektor (61) évi egy millió dollárnyi növekedésének, amely 17 éven keresztül tart (0-tól +16 évig) közvetlen és közvetett hatása a 6. fémipar kibocsátására

——— egy év keresletnövekedésének hatása

——— az éves keresletek összességének kombinált hatása

dés aranyszabályainak kifejtésében, vagy bármilyen más, tisztán elméleti általánosítás megformulázásában. Túlságosan lazán összekapcsolt, túlságosan hajlékony ahhoz, hogy ilyen magas célkitűzést szolgálhasson. A dinamikus inverz elsősorban a rendszerbe szervezett valóságos információk tárháza. Ezt az információt olyan formába önti, amely különösen alkalmassá teszi időbeli összefüggések elemző leírására. Az inverz egyéni elemeit hosszabb fonatokba foghatjuk, mindegyükük a végső szállítások egy-egy adott idősorához tartozik. E fonatok a szektorközi és időbeli összefüggések dús szőnyegévé szőhetők, amely a gazdasági növekedés elemző képét adja ki.

A 8. ábra egy ilyen egyszerű fonadék struktúráját ábrázolja, leírva — vagy ha úgy tetszik, megmagyarázva — az elsődleges fémek kibocsátásának növekedését, amelyet a végső fogyasztók évi egy millió dollárnyi nem-tartós fogyasztási cikk (és a tartós fogyasztási cikkek arányosan megnövelt szolgáltatásai) iránti igénye vált ki egy 17 éves időszakaszban. A végső fogyasztóknak az első szállítás a 0 évben, az utolsó a +16 évben történik.

A részben egymásra rajzolt görbék mindegyike azt a ráfordítási idősort ábrázolja, amelyet 1 millió dollárnyi pótlólagos fogyasztási cikk szállítása igényel. A végső szállítás időpontját az egyes görbék utolsó pontjának helyzete mutatja. Míg az első szállítás a 0 évben esedékes, az első el nem hanyagolható ráfordításnövekmény szükségessége a -8 évben merül fel. Ettől kezdve új ráfordítás-sorozatot kell indítani minden évben, 17 éven keresztül; a szükséges teljes évi ráfordítások egész sora — amelyet az ábrán a vastag fekete vonal ábrázol — egy 25 éves időszakaszt fog át. A tipikus púp az elején a szükséges pótlólagos tőke lekötését tükrözi; a végén mutatkozó csökkenés mutatja, másrészt, e tőkék csökkenését, a fokozatos tőkeelvonást, amely sok évvel az előtt megindul, hogy az utolsó pótlólagos 1 millió dollárnyi fogyasztási cikket leszállították volna.

A görbe lapos része jellemzi azt, amit a stacionárius újratermelésnek lehet nevezni, amelynek folyamán csupán évi ráfordítási szükségleteket kell fedezni, beleértve a tőke pótlását. Ha az **A** és **B** matrixok változatlanok és a végső szállítás **c** vektora elégségesen hosszú időszak folyamán konstans, akkor a kibocsátások megfelelő keltezett **x** vektorát — az (5) egyenlet alapján — a következőképpen lehet meghatározni:

$$\mathbf{x} = (1 + \mathbf{R} + \mathbf{R}^2 + \ldots + \mathbf{R}^m)\,\mathbf{G}^{-1}\mathbf{c}\,.$$

Ha a jobb oldalon álló sor konvergens, akkor, ha $m \to \infty$:

$$\mathbf{x} \to (1 - \mathbf{R})^{-1}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{c} = [\mathbf{G}(1 - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{B})]^{-1}\mathbf{c} = (\mathbf{G} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{c} = (1 - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{c}$$

Stacionárius körülmények között, amelyek a halmozott görbe lapos részét szabályozzák a 8. ábrán, a szektorkibocsátások a végső kereslettel a statikus inverz, $(\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}$, alapján függenek össze.

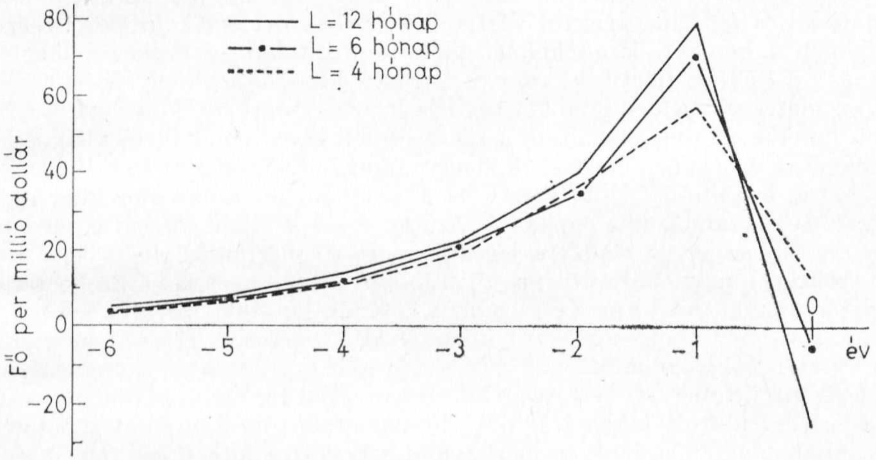
A mostantól nyolc évre bekövetkező végső keresletet anticipáló információ ebben az esetben elégséges volna a közvetlen és közvetett ráfordítási igények gyakorlatilag szabatos felbecsüléséhez. Az előrelátás szükséges foka természetesen függ az inverz azon elemeinek idő-profiljától, amelyekből a teljes ráfordítás görbéjét kell összeállítani. Amíg a teljes végső kereslet évről évre növekedőben van, nem valószínű, hogy termelő tőke elvonására legyen szükség. A végső szállítás egymásra következő változásainak megfelelő átlapolódó közvetlen és közvetett hatás-sorok összegezésekor a dinamikus inverz pozitív elemei dominálni fogják a néhány negatív elemet.

A gazdasági növekedés absztrakt elméletének újabb kutatásaiban sok figyelmet szenteltek az úgynevezett „végfeltételek" problémájának. A fent bemutatott tények alapján annak az időhorizontnak, amelyre terveinket építhetjük, szektorról szektorra változnia kellene. A dinamikus inverz elemeinek időalakzata, amely egy-egy iparág termékeinek közvetlen és közvetett keresletét szabályozza, olyan lehet, hogy egy adott évi kibocsátás elsősorban az ugyanazon évi végső keresleti vektor összetételétől és színvonalától függ. Egy másik iparág esetében ez az alakzat olyan lehet, hogy adott évi kibocsátásának szintje mondjuk négy vagy öt év múlva bekövetkező végső szállításokat tükröz.

7. Az (1) mérleg-egyenlet, és ennek megfelelően azok a formulák, amelyek a belőle származtatott dinamikus inverzet írják le az általános egyöntetű egy periódusú (egyéves) késleltetés feltevésére épülnek. Ez az az idő, amely eltelik a pótlólagos tőkejavak beállítása és a kibocsátási áramlat azon növekedése közt, amely használatuk révén bekövetkezik. Ugyanez az időegység szerepel a **B**

tőkeráfordítási együttható matrix összes elemének meghatározásakor (tőkelekötés az *évi* kibocsátás egységére számítva). Valóban a késleltetés a pótlólagos kapacitások beállítása és első teljes kihasználása közt az amerikai gazdaság különböző termelő szektoraiban — az ebben a tanulmányban használt összevonás fokának megfelelő bontásban — úgy tűnik egy év körül van, vagy tán valamivel rövidebb.

A valóságos gazdasági rendszer leírására használt időegység abszolút nagyságának megváltoztatása az (1) egyenlet értelmében valamennyi késleltetés időtartamának megfelelő valóságos megváltozását jelentené. Ha e változtatás ellenére, az összes szektor valóságos tőkeszükséglete azonos marad, akkor a **B** matrixban foglalt tőke-együtthatókat át kell váltani az új időegységre. Így, ha a késleltetés egy évről fél évre csökken, a **B** matrix minden elemét 2-vel kell szorozni.



9. ábra. Egy millió dollárnyi zérus évi végső kereslet szállításához szükséges közvetlen és közvetett munkaráfordítás változása, ha a beruházás késleltetése 12 hónap, 6 hónap és 4 hónap

Az ilyen eltolódásnak a rendszer domináló sajátértékére, és következésképp a konvergenciára gyakorolt hatását az I. Függelék elemzi, a késleltetés változásai és **B** együtthatóinak nagyságváltozásai egymás ellen hatnak.

A 9. ábrában feltüntetett három görbe mutatja, hogyan változik a végső kereslet 1 millió dollárnyi növeléséhez szükséges munkaráfordítások idősora, ha az alapvető strukturális beruházási késleltetést egy évről 6 vagy 4 hónapra rövidítjük, a grafikon vízszintes tengelye természetes években van megadva.

8. A statikus input-output elemzésben egy adott gazdaság strukturális matrixának inverzét beszorozva a végső kereslet oszlopvektorával, megkapjuk a megfelelő teljes szektorkibocsátások vektorát. Ugyanennek az inverznek transzponáltja beszorozva a hozzáadott érték vektorával (bér, profit, adó és más végső kifizetések, amelyek az egyes iparágakban a teljes fizikai kibocsátás egységére esnek) az egyensúlyi árak megfelelő vektorát adja, azaz olyan árakat, amelyek mellett a teljes kiadás (beleértve a hozzáadott értéket) minden szektorban megegyezik az összes bevétellel. A dinamikus input-output

elemzésben a dinamikus inverz transzponáltja meghatározza a termelő szektorok mindegyikében a hozzáadott értékek idősora, és azon egyensúlyi ár-sorozat közti viszonyt, amely egyenlővé tenné a teljes kiadást és a teljes bevételt, minden termelő szektorban az egész idő folyamán.

Legyen a $\mathbf{p}_t = ({}_t\mathbf{p}_1, {}_t\mathbf{p}_2, \ldots, {}_t\mathbf{p}_n)$ oszlopvektor a t évben különböző szektorok által vásárolt és eladott jószágok és szolgáltatások ára és a $\mathbf{v}_t = ({}_t\mathbf{v}_1, {}_t\mathbf{v}_2, \ldots, {}_t\mathbf{v}_n)$ oszlopvektor az egyes szektorokban a t évben hozzáadott érték. A hozzáadott értéket a legjobban mint maradékot határozhatjuk meg, mint a termelő szektor mindazon folyó kiadásait, amely nem más vagy azonos szektortól való ráfordítások vásárlásának ellenértéke.

Az alábbi (7) egyenlet azt mondja ki, hogy bármely t évben valamennyi jószág árának, amelyet a bal oldalon álló vektor képvisel, egyenlőnek kell lennie egységköltségével, amelyet a jobb oldalon álló tagok képviselnek. A folyó ráfordítási együtthatók transzponált $\mathbf{A}'$ matrixának és a $\mathbf{p}$ árvektornak szorzata adja a folyó ráfordítások költségét, amelyeket minden termelő szektor önmagától és más iparágaktól vásárol. A hozzáadott érték (oszlop) vektora, $\mathbf{v}_t$, felöleli a béreket, járadékokat, adókat, profitokat — ezeket a megfelelő iparágak a t évben fizetik ki vagy terhelik rá kibocsátásuk egységére.

A szögletes zárójelben levő két tag írja le az egységre eső költséget és nyereséget, amelyet konvencionálisan a tőkeszámlán könyvelnek el. A világos költségszámítás érdekében feltesszük, hogy minden szektor egy évvel a termelt kibocsátás leszállítása előtt szerzi be a technológiai szükségletekkel egybehangzó tőkejavainak állományát és azután ezzel a kibocsátással együtt el is adja; valójában ez az eladás a legtöbb esetben pusztán névleges lesz, mivel az a szektor, amely eladja tőkejavait, újból és újból vissza is vásárolja azokat. Mindkét tranzakciót természetesen azokon az árakon bonyolítja le feltevésünk szerint, amelyek lebonyolódásuk időszakában érvényesek. A $t - 1$ időszakaszban vásárolt tőkeállomány értékét $1 + r_{t-1}$-gyel szorozzuk; r_{t-1} az évi kamatrátát képviseli, amely ez évben van hatályban. Mint már fentebb megjegyeztük, a t évben leszállított kibocsátás után felszabaduló tőkeállományt azonnal felhasználják olyan jószágok termelésére, amelyeket a következő, $t + 1$ évben fognak leszállítani. Az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ matrixoknak a jobb oldalon idő-indexük van, hogy tükrözzék a technikai változást.

$$(7) \qquad \mathbf{p}_t = \mathbf{A}'_t\, \mathbf{p}_t + [(1 + r_{t-1})\, \mathbf{B}'_t\, \mathbf{p}_{t-1} - \mathbf{B}'_{t+1}\, \mathbf{p}_t] + \mathbf{v}_t.$$

A (7) egyenlet átírható

$$(8) \qquad \mathbf{G}'_t\, \mathbf{p}_t - \alpha_{t-1}\, \mathbf{B}'_t\, \mathbf{p}_{t-1} = \mathbf{v}_t$$

alakra, ahol

$$\mathbf{G}'_t = (1 - \mathbf{A}'_t + \mathbf{B}'_{t+1}) \text{ és } \alpha_t = 1 + r_t.$$

Ha az idő-indexnek a $-m$, $-m + 1$, $-m + 2$, $\ldots$, -2, -1, 0 értékeket adjuk, akkor a láncolódó egyenletek (3)-hoz hasonló rendszerét építhetjük fel. Az új rendszer bal oldalának strukturális matrixa hasonlítana a (3) egyenletben megjelenő strukturális matrix transzponáltjához, azzal a különbséggel, hogy minden egyes $\mathbf{B}_t$ szorozva van a megfelelő α_{t-1} skalárral.

E rendszer megoldása az ismeretlen $\mathbf{p}_0$ árvektorral az ugyanazon és előző évi hozzáadott-érték vektorok, $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_{-1}$, $\mathbf{v}_{-2}$, ... és a megfelelő kamatteher tényezők, α_0, α_{-1}, α_{-2}, ... függvényében a

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_0 &= (\mathbf{G}_0^{-1})'\mathbf{v}_0 + (\mathbf{R}_{-1}\mathbf{G}_0^{-1})'\alpha_{-1}\mathbf{v}_{-1} + (\mathbf{R}_{-2}\mathbf{R}_{-1}\mathbf{G}_0^{-1})'\alpha_{-2}\alpha_{-1}\mathbf{v}_{-2} + \\ &+,\ldots,+(\mathbf{R}_{-m}\ldots\mathbf{R}_{-2}\mathbf{R}_{-1}\mathbf{G}_0^{-t})'\alpha_{-m}\ldots\alpha_{-2}\alpha_{-1}\mathbf{v}_{-m} + \\ &+(\mathbf{R}_{-m}\ldots\mathbf{R}_{-2}\mathbf{R}_{-1}\mathbf{G}_0^{-t})'\alpha_{-m}\ldots\alpha_{-2}\alpha_{-1}\mathbf{B}'_{-m}\mathbf{p}_{-(m+1)}\end{aligned} \tag{9}$$

formát ölti.

Az első sor jobb oldalán megjelenő zárójeles matrix-szorzatok azonosak a (4) egyenlet jobb oldalán levő dinamikus inverz utolsó oszlopának elemeivel. Ezek az együtthatók azonban a (9) egyenletben transzponált formában jelennek meg. Mivel az $\mathbf{R}_{-1}$, $\mathbf{R}_{-2}\mathbf{R}_{-1}$, $\mathbf{R}_{-3}\mathbf{R}_{-2}\mathbf{R}_{-1}$, ... sorozat zérushoz konvergál, a jobb oldal utolsó elemét — amely a $\mathbf{p}_{-(m+1)}$ árvektort tartalmazza — el lehet hanyagolni, feltéve, hogy a sort elégséges számú éven keresztül folytattuk visszafelé.

Bármely év árvektora tehát függ az egyazon és az összes megelőző év hozzáadott értékvektoraitól. Ezt a függést a dinamikus inverz transzponáltja szabályozza, ez meghatározza a ráfordítások keltezett idősorát, amelyet a megfelelő fizikai rendszerben a végső kereslet adott idősora kelt. Például technikai változás híján és feltéve, hogy mind a kamatráta, mind a hozzáadott érték vektora konstans marad az idő folyamán, a (9) egyenlet visszavezetődik a

$$\mathbf{p}_0 \rightarrow [\mathbf{G}^{-1}]'[1 + \mathbf{R}'\alpha + (\mathbf{R}')^2\alpha^2 + (\mathbf{R}')^3\alpha^3 \ldots (\mathbf{R}')^t\alpha^t]\,\mathbf{v} \tag{10}$$

egyenletre, ha $t \rightarrow \infty$.

Ha t megfelelően naggyá vált, a jobb oldal mértani sorának két egymásra következő tagja közti arány $\mu_1\alpha$ felé tart, ahol μ_1 az $\mathbf{R}'$domináló sajátértéke. A sor csak akkor konvergál és csak akkor ad véges $\mathbf{p}$ árvektort, ha $\mu_1\alpha < 1$, vagy — mivel $\alpha = 1 + r$ — ha

$$r < \frac{1-\mu_1}{\mu_1}.$$

Ezt a következtetést, hogy bizonyos körülmények közt egy nyílt dinamikus input-output rendszer sajátértéke felső korlátot kényszerít a kamatrátára, sok évvel ezelőtt levonta már Michio Morishima.[3]

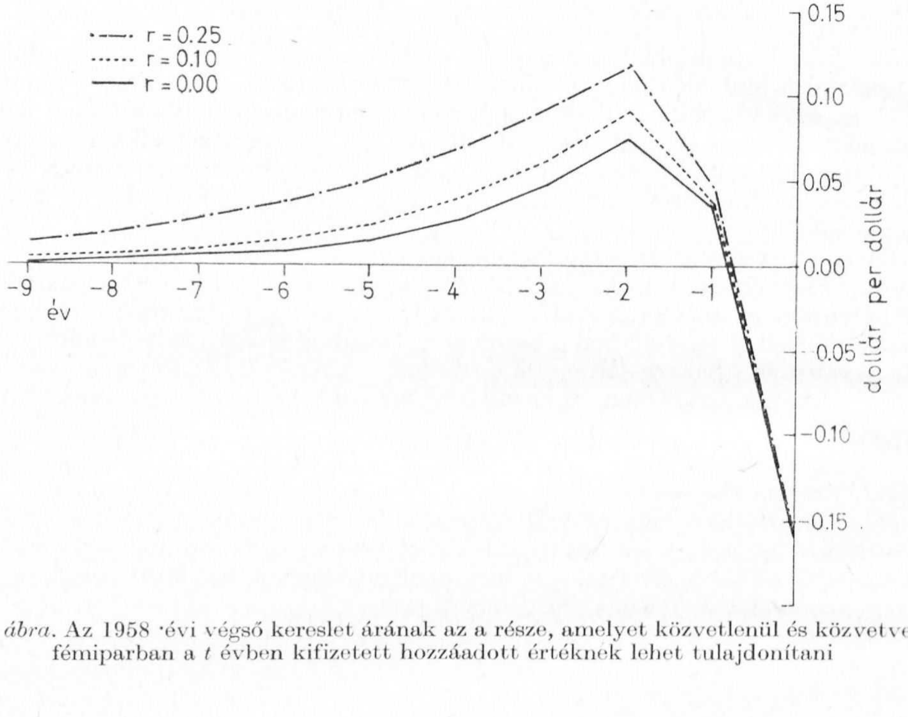
A 10. ábra mutatja, hogyan függ az 1958-ban a végső felhasználónak leszállított fogyasztási cikkek[4] ára a fémipar kibocsátásának egységére eső évi hozzáadott értéktől. A folytonos görbe, amely azon a nem reális feltevésen alapul, hogy a kamatráta az egész 11 éves periódusban zérus volt, (tehát $\alpha = 1$) megfelel a 4. ábra folytonos görbéjének. A zérusvonal alá esés az utolsó évben negatív költséget jelent, azaz azt a jövedelmet, amelyet a korábbi években vásárolt tőkeállomány likvidálása biztosított volna. A tőkejavak vásárlására fordított pozitív kiadások, amelyeket ugyanazon görbe más pontjai mutatnak, a legtöbb esetben ellensúlyozzák ezt a negatív összeget.

[3] Michio Morishima: Equilibrium, Stability and Growth. Oxford University Press. London 1964.

[4] A végső keresletet alkotó jószágok 1958-as 1 $ értékű kosara, amelyet az 1958. évi fogyasztási szerkezet szerint alakítottunk ki.

A másik két görbét azon feltevés alapján rajzoltuk meg, hogy az egész időszakban 10%, illetve 25% volt a kamatráta. Ezek megmutatják, hogyan erősíti a kamatráta növekedése a jelenlegi árak függését a múltbeli hozzáadott értékektől (következésképpen a múltbeli áraktól is).

Abból, amit itt elmondtam, sok dolognak jól ismerten kell visszhangzania. Francois Quesnay „termelő előlegei”, Karl Marx „bővített újratermelési



10. ábra. Az 1958 -évi végső kereslet árának az a része, amelyet közvetlenül és közvetve a fémiparban a t évben kifizetett hozzáadott értéknek lehet tulajdonítani

folyamata” és Bőhm—Bawerk „körkörös termelési útjai” mind tartalmazzák azokat az alapvető elméleti eszméket, amelyek beépültek a dinamikus inverz levezetésébe. De míg e nagy közgazdászoknak meg kellett elégedniök szóbeli leírásokkal és deduktív okoskodással, mi mérni tudunk és számolni tudunk. Ebben rejlik az igazi különbség a közgazdaságtan múltbeli és jelen helyzete között.

(Beérkezett: 1969. IX. 15.)

I. Függelék

Az

$$\text{(A1)}\qquad \mathbf{R}_{-1},\ \mathbf{R}_{-2}\,\mathbf{R}_{-1},\ \mathbf{R}_{-3}\,\mathbf{R}_{-2}\,\mathbf{R}_{-1},\ \ldots,\ \mathbf{R}_{-t}\ldots\mathbf{R}_{-3}\,\mathbf{R}_{-2}\,\mathbf{R}_{-1}$$

$$\mathbf{R}_t = (1 - \mathbf{A}_t + \mathbf{B}_{t+1})^{-1}\,\mathbf{B}_{t+1}$$

sorozat konvergencia-tulajdonságainak vizsgálatakor előbb azt az esetet tekinthetjük, amikor $\mathbf{A}_t = \mathbf{A}$ és $\mathbf{B}_t = \mathbf{B}$ minden t-re, következésképpen $\mathbf{R}_t = \mathbf{R}$ minden t-re.

Ez esetben az (A1) sor átalakul mértani sorrá

(A2) $$\mathbf{R}, \mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3, \ldots, \mathbf{R}^t.$$

(A3) $$\mathbf{R} = (1 - \mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\,\mathbf{B}$$

(A4) $$(1 - \mathbf{A} + \mathbf{B}) = (1 - \mathbf{A})\,[1 + (1 - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B}]$$

(A5) $$(1 - \mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\,\mathbf{B} = [1 + (1 - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B}]^{-1}(1 - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B} = (1 + \mathbf{U})^{-1}\,\mathbf{U}$$

ahol $\mathbf{U} = (1 - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$.

Mivel $(1 - \mathbf{A})^{-1} > 0$ és $\mathbf{B} \geq 0$ és irreducibilis, ezért $\mathbf{U} > 0$.

(A6) $$[(1 + \mathbf{U})^{-1}\,\mathbf{U}]^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\,(1 + \mathbf{U}) = (1 + \mathbf{U}^{-1})\,;$$

következésképpen

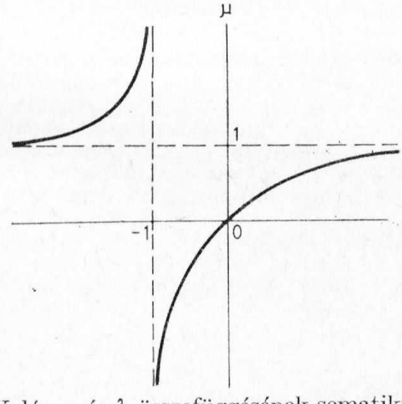
(A7) $$\mathbf{R} = (1 + \mathbf{U}^{-1})^{-1}\,.$$

Legyenek most a négyzetes, reguláris és irreducibilis $\mathbf{U}$ matrix sajátértékei $\lambda_i (i = 1, 2, \ldots, n)$. Mivel $\mathbf{U} > 0$, ezért Frobenius ismert tétele értelmében van egy domináns pozitív egyszerű sajátértéke. Sőt ehhez és csak ehhez a sajátértékhez tartozik pozitív sajátvektor. Legyen ez a sajátérték λ_i.

Valós λ_i esetében $\mathbf{U}^{-1}$ és $1 + \mathbf{U}^{-1}$ megfelelő sajátértékei $1/\lambda i$, illetve $1 + 1/\lambda_i$. Tehát az (A7) egyenletnek megfelelően $\mathbf{R}$ sajátértékei $\mu_i = \dfrac{\lambda_i}{1 + \lambda_i}$ alakúak, és különösképpen

(A8) $$\mu_1 = \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1}\,.$$

Mármost $\lambda_i > 0$ következményeképpen $0 < \mu_1 < 1$, ami azt jelenti, hogy $\mathbf{R}$-nek mindig van egy egyszerű egynél kisebb pozitív sajátértéke, amelyhez pozitív sajátvektor tartozik.



11. ábra. Valós μ_i és λ_i összefüggésének sematikus ábrája

A 11. ábra mutatja μ_i és λ_i viszonyát valós λ_i esetére. Ha e nem-domináló sajátértékek valamelyike kisebb mint $-0{,}5$, a megfelelő μ_i nagyobb lesz 1-nél, abszolút értékben. A hozzá tartozó sajátvektor elemei különböző előjelekkel fognak bírni.[4]

[4] Ez az elemzés komplex sajátértékek esetére a következő módosítással érvényes: legyen $\lambda_i = a + b_i$. Akkor a megfelelő μ_i valós része $re(\mu_i) = \dfrac{a(a+1) + b^2}{(a+1)^2 + b^2}$. Hogy biztosítsuk a konvergenciát szükséges, hogy $a^2 + 1{,}5\,a > -(b^2 + 0{,}5)$ legyen. Ha $b = 0$, akkor e formulák visszavezetődnek a szövegben tárgyalt egyszerűbb alakra.

Ez azt jelenti, hogy az $\mathbf{R}^1$, $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$, ... sor divergenssé válhat. Attól függően, hogy domináló sajátértéke valós vagy komplex és a valós része pozitív vagy negatív, a dinamikus inverz elemei divergálnának, ahogy visszafelé haladunk az időben — vagy korlát nélkül növekednének pozitív, illetve negatív irányban, vagy növekvő kilengésekkel ingadoznának pozitív és negatív irányban.

Ha $\mathbf{R}^t$ változik ugyan t változásával, de ezt véges alsó és felső korlátok, mondjuk $\underline{\mathbf{R}}$ és $\overline{\mathbf{R}}$ közt teszi, akkor elemei a megfelelő $\underline{\mathbf{R}}^1$, $\underline{\mathbf{R}}^2$, ... és $\overline{\mathbf{R}}^1$, $\overline{\mathbf{R}}^2$, ... sorok elemei közt maradnak.

A dinamikus inverz konvergencia-tulajdonságai függenek attól az időegységtől, amelyek révén a **B** matrixban bekerülő tőkelekötési együtthatókat meghatározzuk. Az alapvető (1) mérleg-egyenletben ez az egység azt a késleltetést is képviseli, amely eltelik a pótlólagos tőkejavak vagy folyó készletek felhalmozása és használatba vétele közt.

Legyen t egy adott időszakasz az eredeti egységekben és legyen t^* ugyanez az időszakasz, más egységekben mérve. Ha α az aránya az első és a második egység hosszának, akkor

$$t^* = \alpha t \tag{A9}$$

Ha például t egy adott időszakaszt években mér és t^* hónapokban méri, akkor $\alpha = 12$.

A technikai folyó együtthatóknak nincs idődimenziójuk, ezért az **A** matrix elemei változatlanok maradnak, ha az időegységet — és ennek megfelelően az (A1) egyenletben szereplő késleltetést — megváltoztatjuk, mondjuk 1 évről 1 hónapra. De az összes tőkelekötési együttható, azaz a **B** matrix összes eleme 12-szeresére növekszik. Ha továbbra is csillagot használunk a matrixok és sajátértékeik jelölésére az időegység megváltoztatása után, akkor

$$\mathbf{B}^* = \alpha \mathbf{B}\,.$$

$$\mathbf{U}^* = \alpha \mathbf{U} \text{ és } 1 + \mathbf{U}^{*-1} = 1 + 1/\alpha\, \mathbf{U}^{-1}\,. \tag{A10}$$

Ebből következik, hogy

$\lambda_i^* = \alpha\lambda_i$ és az (A8) összefüggésnek megfelelően

$$\mu_i^* = \frac{\lambda_i/\alpha}{1 + \lambda_i/\alpha}\,. \tag{A11}$$

Az összefüggés μ_i^* és λ_i/α között tehát azonos, mint amit μ_i és λ_i között fent kifejtettünk. Megvizsgálva ezt, azt találjuk, hogy ha a μ_1 sajátérték a domináló, akkor domináló voltát nem érinti az időegység és a késleltetés bármilyen változtatása. Ha azonban más részről, valamilyen más μ_i sajátérték volna domináló, és ezért a rendszer divergálna, akkor α növelése — azaz a késleltetés csökkentése — ha ez elégséges nagyságú, áttolhat bármely λ_i/α negatív értéket a $-0{,}5$ és 0 közti intervallumba és így dominálóvá teheti μ_1^*-et. A késleltetés növelése természetesen ellenkező hatással járna.

II. Függelék

Fogalmak

I. *Az* **A** *matrix*

Az **A** matrix folyó ráfordítási és pótlási együtthatókat tartalmaz. Hazai kibocsátás alapján számítottuk.

II. *A* **B** *matrix*

A **B** matrix az összes iparág tőkelekötési együtthatóiból áll. A lakásépítést a telek- és bérleti iparban tüntettük fel. A tőkeegyütthatókat a kapacitások alapján számítottuk.

III. *Munka sor*

A munka sor a kibocsátás ezer dollárjára eső „emberévekből" áll.

IV. *Teljes tőke sor*

Ez a sor egyszerűen a **B** matrix oszlopösszege.

V. *Alternatív végső kibocsátás*

A. Háztartási nem-tartós cikkek, beleértve a tartós cikkek pótlását.

A végső kereslet e vektora tartalmazza a nem-tartós cikkek folyó vásárlását és a tartós cikkek háztartási pótlását. Tartalmaz egy tőkelekötési együttható oszlopot is, amely a tartós fogyasztási cikkek készletéből áll. (A lakásalap a telek és bérleti oszlopba került.) A munkaráfordítás ebben a vektorban a háztartási segítség.

B. Háztartási tartós és nem-tartós javak.
A végső kereslet e vektora a háztartások folyó tartós és nem-tartós cikkvásárlásait tartalmazza.

C. Állam.
A végső kereslet állami vektora a helyi és szövetségi kormányzatok vásárlásaiból áll.

D. Teljes végső kereslet.
A teljes végső kereslet vektora tartalmazza a (tartós és nem-tartós) háztartást, exportot, kompetitív importot és a helyi és szövetségi kormányzatot. Nem szerepel benne a bruttó magán tőkeképződés és a nettó készletváltozás vektora,

az összes tétel 1958-as árakon.

Adatok 1947-*től* 1958-*ig*

A tőke- és folyó együtthatókra vonatkozó információ általában hozzáférhetetlen évenkénti részletességben. Mivel a technológia változásait felölelő dinamikus modell mondjuk egy tucat egymásra következő évre igényel ilyen adatokat, és mivel adatokat esetleg csak három évre találunk ebben az időszakaszban, az információ oroszlánrészét interpolációval kell előállítani. A legtöbb együttható esetében exponenciális interpolációt alkalmaztunk, hogy közelítsük a konstans rátájú növekedést. Ha az utolsó évi együtthatók valamelyike zérus, akkor az exponenciális közelítés nem használható és a program lineáris közelítést alkalmaz. Legyen a (47) és az (58) a két végső év matrixának megfelelő eleme, akkor, ha

a $(47) > 0$ és a $(58) > 0$	exponenciális interpolációt használtunk
a $(47) = 0$ és a $(58) > 0$	lineáris interpolációt használtunk
a $(47) > 0$ és a $(58) = 0$	lineáris interpolációt használtunk
a $(47) = 0$ és a $(58) = 0$	lineáris interpolációt használtunk.

III. Függelék

59 szektoros bontás

Szám	Név	Megfelelő 83 szektoros bontás
1	Élelmiszer és gyógyszer	14, 15, 29
2	Textil, ruházat, bútor	16, 17, 18, 19, 22, 23, 34
3	Gép (csak végső)	44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 63
4	Jármű és fogyasztói berendezés	52, 54, 56, 59, 60, 61, 62,
5	Építés	11, 12
6	Fémek	37, 38
7	Energia	7, 31, 68
8	Vegyszer	27
9	—	—
10	—	—
11	Állattenyésztés	1
12	Növénytermesztés	2
13	Erdészet	3
14	Mezőgazdasági szolgáltatás	4
15	Vasércbányászat	5
16	Nem-vas fémbányászat	6
17	Olajbányászat	8
18	Kő- és agyagbányászat	9
19	Ásványbányászat	10

	Szám	Név	Megfelelő 83 szektoros bontás
	20	—	—
	21	Fa és faáru, kivéve göngyöleg	20
	22	Fagöngyöleg	21
	23	Papíripar és göngyöleg	24, 25
	24	—	—
	25	Nyomda és kiadó	26
	26	Szerves vegytermék	28
	27	Festék és rokonipar	30
	28	Gumi és műanyag	32
	29	Bőrcserzés	33
	30	Üveg és üvegáru	35
	31	Kő- és agyagáru	36
	32	Fémtartály	39
	33	Fűtés- és vízcsővezeték, szerkezeti fém	40
	34	Fémtömegcikk	41
	35	Cső, drót, szerszám	42
	36	Gép és turbina	43
	37	Elektromos motor és apparátus	53
	38	Elektromos világítás és vezeték	55
	39	Elektronikus komponensek	57
	40	Akkumulátor, szárazelem, röntgen	58
	41	Egyéb feldolgozóipar	64
	42	Szállítás és raktározás	65
	43	Hírközlés, rádió és tv nélkül	66
	44	Rádió és televízió	67
	45	Kereskedelem	69
	46	Pénzügy és biztosítás	70
	47	Telek és bérlet	71
	48	Szálloda és javítószolgálat	72
	49	Üzleti szolgáltatások	73
	50	Kutatás és fejlesztés	74
	51	Autójavítás	75
	52	Szórakozás és üdülés	76
	53	Egészségügyi és oktatási intézmények	77
	54	—	—
	55	—	—
	56	Nem-kompetitív import	80
	57	Vendéglátási és üzleti kiadások	81
	58	—	—
	59	Hulladék és melléktermék	83
	60	Teljes munka sor	
Alternatív végső kibocsátás	61	Háztartási nem-tartós, beleértve a tartós pótlások	
	62	Háztartási tartós és nem tartós	
	63	Állami végső kereslet	
	64	Teljes végső kereslet, kivéve a bruttó magán tőkeképződést és a nettó készletváltozást	
	65	Teljes tőke sor	

IV. Függelék

Az adatok forrása

1958. **A** matrix, folyó ráfordítási együtthatók.

Ez a matrix az 1958. évi input-output táblán alapul, amelyet az Office of Business Economics, Department of Commerce tett közzé. Lásd A. Carter: „Changes in the Structure of the American Economy, 1947 to/1958 and 1962" Review of Economics and Statistics. XLIX. (1967 május).

1958. **A** matrix, pótlási együtthatók.
Ezt a matrixot a Harvard Economic Research Project készítette az 1958. évi tőkelekötési matrix és a „Depreciation Guidelines and Rules" (Leírási irányvonalak és szabályok) U. S. Treasury Department. Internal Revenue Service. Revised August 1964. kiadvány alapján.

1958. **B** matrix, tőkelekötési együtthatók.
A feldolgozó ipar tőkelekötési együtthatóit a Waddell—Ritz—Norton—DeWitt—Wood: „Capital Expansion Planning Factors, Manufacturing Industries" National Planning Association. Washington D. C. (April 1966) c. kiadványból merítettük. A nem feldolgozó ipari együtthatókat a Harvard Economic Research Project-ben S. A. Rea Jr. és mások állították össze.

1958. Munka együtthatók.
A munka együtthatók Jack Altermann: „Interindustry Employment Requirements" Monthly Labor Review 88. No. 7. (1965 Július) c. tanulmányán alapulnak.

1958. Végső keresleti vektorok.
A végső keresleti vektorok az 1958. évi input-output táblán alapulnak, amelyet az Office of Business Economics, Department of Commerce tett közzé, valamint R. W. Goldsmith: „The National Wealth of the United States in the Postwar Period" National Bureau of Economic Research. Princeton 1962. c. könyvén.

1947. **A** matrix, folyó ráfordítási együtthatók.
Ez a matrix a Bureau of Labor Statistics 450 szektoros 1947. évi input-output tábláján alapul, amelyet a Harvard Economic Research Project néhány évvel ezelőtt kártyákra lyukasztva megkapott („Deck A") a Bureau of Labor Statistics jóvoltából, az egyes szektorokra vonatkozó sokszorosított dokumentáció kíséretében. 50 szektoros bontásban került nyilvánosságra W. D. Evans és M. Hoffenberg: „The Inter-Industry Relations Study for 1947" The Review of Economics and Statistics XXXIV (1952 Május) c. tanulmányában. Az 1947. évi matrixot módosítani kellett, hogy összehasonlíthatóvá váljék az 1958. évivel. Lásd A. P. Carter: idézett művét. További munkát végeznek e téren B. Vaccara és mások az Office of Business Economics és a Harvard Economic Research Project keretében.

1947. **A** matrix, pótlási együtthatók.
E matrixot a Harvard Economic Research Project készítette az 1947. évi tőkelekötési matrix és az idézett értékcsökkenési kiadvány (U. S. Treasury Department) alapján.

1947. **B** matrix, tőkelekötési együtthatók.
E matrix együtthatói James M. Henderson és mások: „Estimates of the Capital Structure of American Industries, 1947" Harvard Economic Research Project c. sokszorosított tanulmányán és Robert N. Grosse: „Capital Requirements for the Expansion of Industrial Capacity" Vol. I. Part. I. Executive Office of the President. Bureau of the Budget, Office of Statistical Standards (1953. November) c. művén alapulnak. További módosításokat eszközöltek az együtthatókon Alan Strout és mások 1958 és 1962 között. Samuel A. Rea Jr. tette összehasonlíthatóvá az 1947. évi együtthatókat 1966—7-ben a Harvard Economic Research Project keretében.

1947. Munka együtthatók.
Ugyanaz a forrás, mint az 1958. évi munka együtthatók tekintetében.

1947. Végső keresleti vektorok.
A végső kereslet vektorai a Bureau of Labor Statistics 450 szektoros input-output tábláján és Raymond W. Goldsmith idézett művén alapulnak.

THE DYNAMIC INVERSE

The English original of the paper can be found in the volume:
Carter, A. P.—Bródy, A. (ed.) *Contributions to Input-Output Analysis* (North-Holland Publ. Co. Amsterdam, 1970).

ДИНАМИЧЕСКАЯ ОБРАТНАЯ

Общее решение открытой динамической системы «затраты-выпуск» представляет собой обратную, содержащую периодические ряды полных затрат. Периодические ряды обратной, таким образом, показывают затраты, требующиеся для обеспечения данного конечного потребления, причем привязывая затраты к срокам возникновения потребности в них.

При помощи транспонации системы могут быть исчислены соответствующие цены посредством установления взаимосвязи между периодическими рядами прибавленных стоимостей и цен равновесия.

Наряду с анализом математической специфики обратной, представляются некоторые характерные периодические ряды двух динамических обратных, исчисленных при помощи технологических коэффициентов США за 1947 и 1958 гг., а также несколько периодических рядов, составленных с предположением постоянно изменяющейся техники и показывающих влияние структурных изменений.

В приложениях анализируются математические вопросы егзистенции и конвергенции обратной, а также излагаются источники и группировка исходных данных и метод экстраполяции технологического изменения.