

## HATÉKONYSÁG ÉS STABILITÁS NAGYFESZÜLTSGŰ ELEKTROMOS HÁLÓZATOKBAN: EGY JÁTEKELMÉLETI MEGKÖZELÍTÉS<sup>1</sup>

CSERCSEK DÁVID – KÓCZY Á. LÁSZLÓ  
*Pázmány Péter Katolikus Egyetem – MTA KRTRK*

A nagyfeszültségű elektromos hálózatokat használó piaci szereplők a fogyasztás-termelés szempontjából kiegyenlített, úgynevezett mérlegkörökbe tömörülnek. A rendszerirányító a fogyasztók/generátorok fogyasztási, illetve termelési igényei, a hálózat fizikai tulajdonságai és a mérlegkörök egyensúlyi feltételének figyelembevételével maximalizálja a hálózat összforgalmát. Az egyes csomópontok kapacitásának kihasználtsága jelentősen függhet attól, hogy milyen mérlegkörök jönnek létre. Dolgozatunkban egy idealizált egyenáramú teljesítményáramlási- és egy partíciós függvény alakú kooperatív játékelméleti modell segítségével vizsgáljuk a mérlegkörök létrejöttét, stabilitását és a kialakuló mérlegkör-rendszer hatékonyságát. Megmutatjuk, hogy a mérlegkörök alakulása kihat az egész hálózatra és az így fellépő externáliák lehetnek pozitívak, vagy negatívak is. A kialakult partíciók stabilitását a mag partíciós függvény alakú játékokra való kiterjesztése, a rekurzív mag segítségével vizsgáljuk. Bár a játék nyilvánvalóan kohézív, bemutatjuk, hogy nem szükségszerűen szuperadditív. A szuperadditivitás hiánya gátolhatja a hatékonyság szempontjából kívánatos teljeskörű együttműködés kialakulását.

*Kulcsszavak és -kifejezések:* Generátor áthangolás, kooperatív játékelmélet, partíciós függvény alakú játék, rekurzív mag

### 1 Bevezetés

A liberalizált villamosenergia-piacokat a szereplők, azaz a fogyasztók, termelők és a hálózatkezelők bonyolult kölcsönhatása jellemzi. A hálózat működése közben az általános hatékonyságot és a társadalmi jólét maximálását az egyes szereplők egyéni érdekei, így például a befektetők profitra való törekvése mellett kell megvalósítani [8,21]. A szereplők stratégiai kölcsönhatásának sokszínűsége mellett azonban nem szabad elfeledkeznünk hálózati áramokat meghatározó fizikai törvényekről sem.

Dolgozatunkban az elektromos hálózat fizikai és gazdasági jellemzőit összességükben, komplex rendszerként vizsgáljuk; vizsgálódásunk célja elsősorban a

---

<sup>1</sup>A szerzők köszönik Hangos Katalin, Raisz Dávid, Divényi Dániel és két anonim bíráló észrevételeit, a Magyar Tudományos Akadémia Lendület Programjának (LP-004/2010) illetve az OTKA (NF 104706) támogatását. Beérkezett: 2012. február 4. E-mail: [csercsik@itk.ppke.hu](mailto:csercsik@itk.ppke.hu), [koczy@krtrk.mta.hu](mailto:koczy@krtrk.mta.hu).

mérlegkörök létrehozására, illetve esetleges felbomlására, vagy átalakulására vonatkozó ösztönzők jobb megértése. A villamosenergia-piac általunk használt egyszerűsített modellje figyelembe veszi a hálózat és a résztvevők fizikai és gazdasági jellemzőit, de jelen formájában eltekint a hálózat használatának költségétől. Ez a modell megfogalmazható egy partíciós függvény alakú kooperatív játékként [30], ami alkalmas a koalíciók létrejöttében részt nem vevő, de közvetve érintett játékosokra ható externáliák explicit modellezésére is.

Bár dolgozatunk nem az első, amely a nagyfeszültségű elektromos hálózatok közgazdasági vonatkozásaival foglalkozik, a korábbi kutatások elsősorban a verseny, a piaci befolyás, illetve szabályozás témakörével foglalkoztak [4,16,25,6], és csak nagyon kevesek vizsgálták a piacot és az energia-átvitel kérdésében a komplex formában [21]. Ismereteink szerint csak [19] és [2] alkalmazott játékelméleti megközelítést a kérdések vizsgálatában.

[19] statikus kooperatív modellek segítségével kereste az átviteli játék rövid távú egyensúlyát, illetve a szállítási kapacitást választva döntési változónak nonkooperatív Stackelberg játékokkal vizsgálta a hosszútávú hatásokat. [2] szállítási veszteségekkel is számolva egy szabad hozzáférésű szállítási módszerrel maximálja a profitokat. Az áramlási viszonyok elemzésére egy Nash alkujátékot használnak, melyben az optimális árakat a felek egyéni érdekei határozzák meg. [27] a szállítás tervezését és üzemeltetését tárgyaló többváltozós probléma megoldásához használt játékelméleti megközelítést. Valószínűleg [15] alkalmazott először kooperatív játékelméleti eszközöket, nevezetesen a magot és a Shapley értéket, a villamos hálózati beruházások során minden fél számára elfogadható kifizetések meghatározásához. [14] a kernelt alkalmazta villamos hálózati bővítések költségeinek megfelelő elosztásához. Az utóbbi években egyre több szerző nyúl kooperatív játékelméleti eszközökhöz a hálózatbővítés témakörében, legyen szó akár központosított, akár decentralizált környezetről [7,9,8].

A mi megközelítésünk alapjaiban tér el a felsorolt munkáktól, hiszen a partíciós függvény alaknak köszönhetően mi explicit módon kezeljük az externáliákat.

A dolgozat további részében először leírjuk a hálózat fizikai tulajdonságait, majd kifejtjük azt az egyszerűsített modellt, amiből már levezethető a partíciós függvény alakú játék. Bemutatjuk a rekurzív magot, amit később a stabil kifizetés-konfigurációk azonosítására használunk. A cikk fő része 3. fejezet, melyben példák segítségével mutatjuk be, hogy a vizsgált hálózatok, illetve a belőlük levezetett partíciós függvény alakú játék milyen —időnként meglepő— tulajdonságokkal is rendelkezhet, melyek részben magyarázhatják, hogy egyes szereplők miért nem a szokásos várakozásaink szerint viselkednek. Végül röviden összefoglaljuk az eredményeket és bemutatjuk a problémakör nyitott kérdéseit.

## 2 Elméleti alapok

### 2.1 A nagyfeszültségű elektromos hálózat egyszerű modellje

Az elektromos hálózat egy  $n$  csomópontból és az azokat összekötő  $m$  élből, azaz vezetékből álló gráffal írható le.

Mielőtt rátérnénk a modell bemutatására, fontos tisztázni a hálózattal kapcsolatos feltételezéseket és megkötéseket. A villamos energia-átviteli hálózat viselkedése meghatározott szabályokat követ. Kirchhoff törvényei<sup>2</sup> többek közt kimondják, hogy egy csomópontban a be- és kimenő áram azonos nagyságú. Váltóáramú rendszerekben, mint például a nagyfeszültségű elektromos hálózatok [31], a törvények a komplex test felett írhatók fel, ezért mi egyenáramú terhelési modellt (DC load flow model) használunk, ami a gyakorlatban azt jelenti, hogy a hálózati teljesítményáramok viselkedését leíró törvények hasonlóak az egyenáramú hálózatok villamos áramait leíró Kirchhoff törvényekhez. Azon tulajdonság, hogy a betáplálási és energiafelhasználási értékeknek a teljes hálózatra nézve egyensúlyban kell lenniük, a fenti törvényekből következik. Amíg a legtöbb útválasztási (routing) problémában ezek megszokott tulajdonságok, az elektromos energia-átviteli hálózatoknak még egy fontos tulajdonsága van: az elektromos energiát nem lehet meghatározott útvonalon küldeni, áramlását a hálózat tulajdonságai valamint a betáplálási és felhasználási értékek egyértelműen meghatározzák.

Egy vezetéken megvalósuló energiaáram a vonal „admittanciájával” arányos. Mivel a hálózati modellünk idealizált, veszteségmentes, az ellenállás, más szóval az impedancia valós része feltételezéseink szerint nulla, a vezetékek reaktanciája határozza meg a vonalakon megvalósuló energiaáramokat. A matematikai képletekben a szuszceptanciát használjuk, ami az admittancia képzetes része, ez azt kvantifikálja, milyen könnyen folyik az áram egy adott vonalon. Ahogy korábban szóba került, az admittancia (ami esetünkben azonos a szuszceptanciával) értékek, valamint a betáplálási és felhasználási mennyiségek ismeretében az elektromos hálózatot leíró gráf éleinek teljesítményárama meghatározható.

A szuszceptancia mellett minden vonal energiaátviteli kapacitása adott: A teljesítményáram az adott vonalon sosem haladhatja meg ezt az értéket.

A jelölések és a matematikai formalizmus [26] és [7] mintáját követi, részletesen lásd [11]. A hálózat generátorait az aktuálisan termelt és maximálisan termelhető energiamennyiségekkel jellemezzük, a fogyasztókat pedig az aktuális és ideális (maximális) esetben fogyasztott energiával.

$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  jelöli a hálózat gráfjának csomópont-él incidenciamátrixát. Az élek irányítatlanok, a teljesítményáram bármely irányban folyhat. Az energiaátviteli kapacitásvektor  $Q \in \mathbb{R}^m$  határozza meg az  $m$  darab él maximális energiaátviteli kapacitását. A  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  szuszceptancia mátrix  $B_{ij}$  az  $ij$  vonal szuszceptanciáját adja meg, míg  $B^D \in \mathbb{R}^{m \times m}$  mátrix a főatlóban tartalmazza a szuszceptancia értékeket.

<sup>2</sup>Egy játékelméleti értelmezésért l. [24]!

Ezen jelölésekkel az energia átviteli rendszer a következő egyenletekkel írható le [7]:

$$AQ = P, \quad (1)$$

ahol  $Q \in \mathbb{R}^m$  jelöli a (hatásos) teljesítményáram vektort, és  $P \in \mathbb{R}^n$  a teljesítmény betáplálási vektor. Hogy meghatározzuk a hálózat azon konfigurációját, ahol a teljes átvitt teljesítmény maximális, a következő LP problémát kell megoldanunk:

$$\min_P s_P^T P, \quad \text{ahol } |B^D A^T B^+ P| \leq \bar{Q}, \quad \mathbf{1}P = 0 \quad (2)$$

ahol  $B^+$  a  $B$  mátrix Moore-Penrose pszeudóinverze,  $s_P$  a csomópontokhoz tartozó előjelek vektora, ami  $-1$  fogyasztókra és  $+1$  generátorokra, valamint  $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^n$  egy egyesekből álló vektort jelöl. Az egyenlőtlenség típusú korlátozások a vonalak maximális terhelését írják le, míg az egyenlőség típusú korlátozás teljes hálózatra felírt energia egyensúly. Az abszolút értékek egyszerű megfontolásokkal eltávolíthatóak az LP problémából [20]. Ahogy később látni fogjuk, a játékosok koalíciói további egyenlőség típusú korlátozásokat definiálnak majd.

## 2.2 Az energiaátviteli hálózaton játszott kooperatív játék

Jelölje  $N$  a játékosok halmazát amely generátorokból és fogyasztókból áll.  $N$  részhalmazai a koalíciók. Egy partíció a játékosok halmazának diszjunkt koalíciókra való felbontása. Jelölje  $\Pi(S)$   $S \subseteq N$  partícióinak halmazát.

Egy partíciós függvény formában adott játék [30] egy  $(N, V)$  pár, ahol  $V : \Pi \rightarrow (2^N \rightarrow \mathbb{R})$  a partíciós függvény, mely karakterisztikus függvényeket  $(v : 2^N \rightarrow \mathbb{R})$  rendel minden  $\mathcal{P} \in \Pi(N)$  partícióhoz.

Piaci szempontból az energiaátviteli hálózatok úgynevezett mérlegkörökből épülnek fel, melyek termelők és fogyasztók olyan halmazai, melyekre a betáplált és fogyasztott energia egyensúlyban van. Ezek a mérlegkörök lesznek a koalícióink. Ez azt jelenti továbbá, hogy a termelésnek és a fogyasztásnak egyenlőnek kell lennie egy koalíción belül. A nemtriviális koalíciók legalább egy generátort és egy fogyasztót tartalmaznak.

A generátorok az energiatermelésben, a fogyasztók a fogyasztásban érdekeltek a termelési/fogyasztási kapacitásuk határáig. Így egy koalíció értéke a termelt és fogyasztott energia összegével arányos, ami a teljes eladásra került energiamennyiség kétszerese.

Az aktuális fogyasztási és termelési értékeket egy hálózatkezelő határozza meg, aki a hálózat által átvitt teljes energiát maximalizálja a termelési/fogyasztási és átviteli kapacitási korlátok alapján. Ha a koalíciós struktúra (partíció) megváltozik, az új optimum más termelési/fogyasztási értékeket engedélyez, és a generátorok termelését át kell hangolni. A mérlegkörbe történő szerveződés lehet exogén hatások eredménye, de egy liberalizált piacon feltételezhető, hogy a csomópontoknak megfelelő termelők/fogyasztók szabadon dönthetnek mérlegkörük elhagyásáról, más mérlegkörökhöz történő

csatlakozásról, illetve más játékosokkal új mérlegkör létrehozásáról. Jegyezzük meg, hogy a mérlegkörök átalakulása az elektromos hálózatra magára nincs hatással!

Kitüntetett figyelmet érdemelnek azon partíciók, ahol semmi sem motiválja az efféle átstrukturálódást, ahol a játékosok egy koalíciója sem érdekelt más koalíció létrehozásában. A mag [17] egy karakterisztikus formában adott játék azon kifizetéseit tartalmazza, ahol egy koalíció sem profitál az elhajlásból. Más szóval a mag tartalmaz minden olyan  $x$  kifizetést, hogy minden  $S \subseteq N$ -re  $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$ .

Egy partíciós függvény formában megadott játékban az, hogy egy koalíció profitál-e az elhajlásból, a kialakuló partíciótól függ. Az  $\alpha$ -mag [1] azt feltételezi, hogy egy koalíció csak akkor hajlik el, ha a többiek viselkedésétől függetlenül magasabb kifizetésre számíthat. A mag stabilitás [29] engedélyesebb: egy koalíció akkor hajlik el, ha az indukált partíciók valamelyike magasabb kifizetést biztosít számára. A  $\gamma$ -mag esetén [5] a koalíció az egyénileg legjobb válaszokkal szembesül. Jelen esetben a *rekurzív mag* [22,23] koncepcióját használjuk, ami megengedi a megmaradó reziduális játékosoknak, hogy a (reziduális játék) mag-stabil formációját alkossák, mielőtt a kifizetések kiértékelésre kerülnek. A következőben felidézünk a definíciót.

Először definiáljuk a *maradékjátékot* a  $R \subset N$ ,  $R \neq N$  halmaz felett. Jelölje  $\Pi(S)$  az  $S$  halmaz partícióit. Tegyük fel hogy  $\overline{R} = N \setminus R$  létrehozta  $\overline{\mathcal{P}}_R \in \Pi(\overline{R})$ -t. Ekkor a  $(R, V_{\overline{\mathcal{P}}_R})$  maradékjáték az  $R$  játékos halmaz felett adott partíciós függvény formában adott játék, melynek partíciós függvénye  $V_{\overline{\mathcal{P}}_R}(C, \mathcal{P}_R) = V(C, \mathcal{P}_R \cup \overline{\mathcal{P}}_R)$ .

**1. Definíció** (Rekurzív mag, Kóczy [22].) *Egy játékos esetén a rekurzív mag triviális. Most tegyük fel hogy definiáltuk a  $C(N, V)$  rekurzív magot minden  $|N| < k$  játékos esetén. Egy kifizetés vektorból és egy  $\mathcal{P} \in \Pi(N)$  partícióból álló párt  $\omega = (x, \mathcal{P})$  kimenetelnek hívunk. Jelöljük az  $(N, V)$  kimeneteleinek halmazát  $\Omega(N, V)$ -vel. Ekkor  $|N|$  játékos esetén egy  $(x, \mathcal{P})$  kimenetel dominált, ha létezik egy  $Q$  koalíció, mely a  $\mathcal{P}_Q$  partíciót és  $(y, \mathcal{P}_Q \cup \overline{\mathcal{P}}_Q) \in \Omega(N, V)$  kimenetelt hozza létre, úgy, hogy  $y_Q > x_Q$  és ha  $C(\overline{Q}, V_{\overline{\mathcal{P}}_Q}) \neq \emptyset$ , akkor  $(y_{\overline{Q}}, \overline{\mathcal{P}}_{\overline{Q}}) \in C(\overline{Q}, V_{\overline{\mathcal{P}}_Q})$ .  $(N, V)$   $C(N, V)$  rekurzív magja a dominálatlan kimenetelek halmaza.*

A rekurzív mag jól definiált, de lehet üres.

## 3 Eredmények

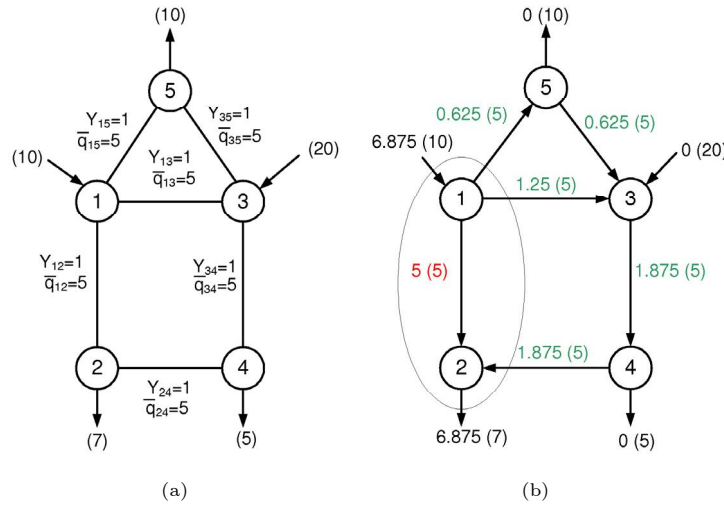
### 3.1 Az externáliák természetéről

A mérlegkörök formálódása okozta externáliákat tanulmányozzuk a hálózaton. Partíciós függvény formájú játékokban az externáliák teljesen természetesek, pontosan azért használjuk ezt a játékformát, hogy az externáliák, amiket a karakterisztikus függvény típusú játékok nem tudnak leírni, kezelhetőek legyenek.

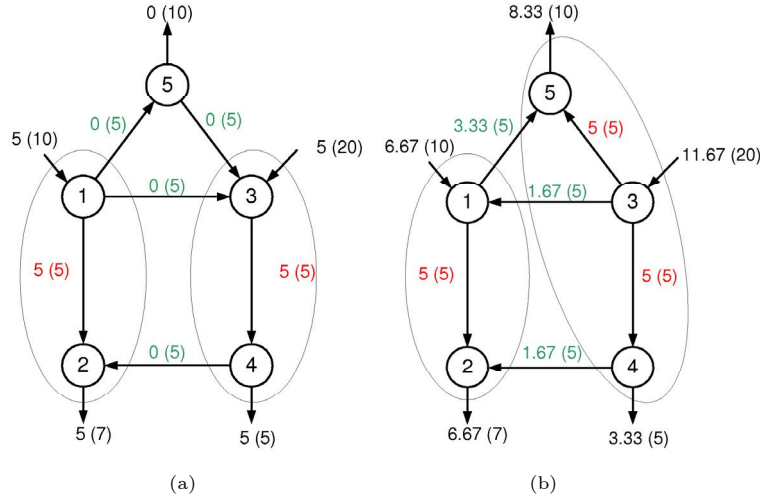
Azt mondjuk, hogy egy koalícióalkotás *pozitív externáliákat* indukál, ha  $V(S_i, \mathcal{P}^+) \geq V(S_i, \mathcal{P})$  minden  $S_i$  koalícióra és  $\mathcal{P} = \{S_1, \dots, S_k, T_1, T_2\}$  és  $\mathcal{P}^+ = \{S_1, \dots, S_k, T\}$  partíciókra, ahol  $T = T_1 \cup T_2$ . Hasonlóan: Az externáliák negatívak, ha a fordított irányú egyenlőtlenség teljesül. Más szóval, egy externália pozitív, ha két koalíció összeolvadása növeli a többi kifizetését, és negatív, ha csökkenti. Természetesen lehetnek partícióink, ahol a fentiek egyike sem teljesül; a koalícióalkotás kétirányú hatással rendelkezik.

Két mérlegkör összeolvadása annyiban változtatja meg a (2) egyenletben felírt LP problémát, hogy a két individuális mérlegkörre vonatkozó egyensúly helyett egy egyenlőség típusú korlátozás adódik az összeolvadt mérlegkörre. Nyilvánvalóan az összeolvadás előtti optimum még mindig lehetséges, de az új LP problémának általánosságban nem optimuma. Általában az összeolvadt mérlegkörök növelni tudják a rájuk nézve eredő teljes energiaforgalmat, tovább terhelve a hálózatot. A többi játékost, akik a megmaradó átviteli kapacitást használják, a hálózatkezelő esetenként a globális átviteli optimum érdekében fogyasztásuk és termelésük visszafogására utasíthatja. Ez csökkenti ezen koalíciók kifizetését, ezért ebben az esetben negatív externáliáról beszélünk.

A következőben viszont arra láthatunk egy (általános) példát, hogy bizonyos koalíciók összeolvadása hasznos is lehet a többi játékos számára.



1. ábra. (a) A  $\Gamma^5$  játék alapstruktúrája és vonalparaméterei, és (b) teljesítményáramai az  $\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$  koalícióstruktúra esetén. A csomópontokhoz tartozó zárójelben lévő számok a maximális termelési kapacitást (befelé mutató nyíl) illetve az optimális (maximális) fogyasztási értékeket (kifelé mutató nyíl) jelölik. Az élekhez tartozó számok jelölik az aktuális áramlási értékeket, míg a zárójelben található számok a vonalak teljesítményátviteli kapacitásait.



2. ábra. Optimális teljesítményáramok az  $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5\}$  és  $\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}$  koalíciós struktúrák esetében

**1. Példa.** Tekintsük az 5 csomópontból és az 1. ábrán látható hálózatból álló  $\Gamma^5$  játékot. 3 koalíciós struktúrát vizsgálunk.

**Teljesítményáramok az  $\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$  koalíciós struktúra esetén.** A teljes átvitt energia maximumához tartozó áramok az 1(b). ábrán láthatók. Ezt az esetet referenciának tekintjük, ahol a 3-as, 4-es és 5-ös játékosok triviális egytagú koalíciókat formálnak. A  $v$  karakterisztikus függvény könnyedén meghatározható:

$$v(\{1, 2\}) = 13.75 \quad v(\{3\}) = v(\{4\}) = v(\{5\}) = 0. \quad (3)$$

**Teljesítményáramok az  $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5\}$  koalíciós struktúra esetén.** 2(a). ábra mutatja az áramlási viszonyokat abban az esetben, ha a 3-as és 4-es játékos koalícióba olvad. Figyeljük meg hogy az  $\{1, 2\}$  koalíció negatív externáliát „élvezhet”: a kifizetése alacsonyabb, mint előző esetben. Ahogy látható, ebben az esetben a hálózat horizontálisan kiegyensúlyozott, nincs teljesítményáramlás, kivéve az 1, 2 és 3, 4 csomópontokat összekötő vonalakat. A  $v$  értékek ebben az esetben a következőképpen alakulnak:

$$v(\{1, 2\}) = 10 \quad v(\{3, 4\}) = 10 \quad v(\{5\}) = 0. \quad (4)$$

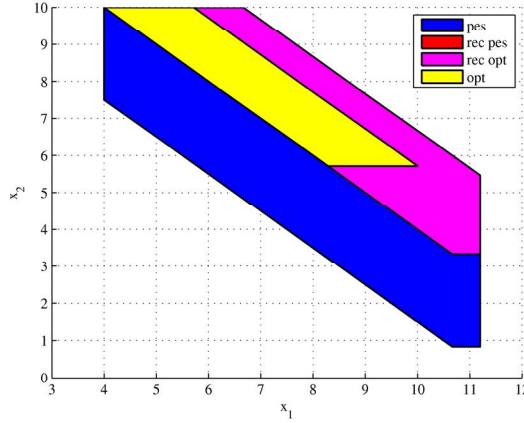
**Teljesítményáramok az  $\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}$  koalíciós struktúra esetén.** Ha a  $\{3, 4\}$  koalíció összeolvad az 5-ös játékosal, az eredő konfiguráció a 2(b). ábrán látható átviteli viszonyokat eredményezi. Ez az eset az  $\{1, 2\}$  koalícióra ható pozitív externáliaként szolgál. Ebben az esetben a hálózat horizontális élei is kihasználásra kerülnek, ami magasabb transzmissziós értéket enged meg az  $\{1, 2\}$  koalíciónak is, amellet hogy az egész hálózat teljes átvitelét növeli. A  $v$  értékek ebben az esetben a következők lesznek

$$v(\{1, 2\}) = 13.33 \quad v(\{3, 4, 5\}) = 23.33. \quad (5)$$

A teljes partíciós függvény a függelékben található.

### 3.2 Stabilitás

Hogy megvizsgáljuk az első ábrán szereplő  $\Gamma^5$  játék tulajdonságait, meghatározzuk a magot.



3. ábra. A  $\Gamma^5$  játék magjainak vetülete az  $x_3 = x_4 = x_5 = 0$  síkra. A mag-stabil kimeneteket tartalmazó rekurzív magok egybeesnek és az  $\alpha$ -mag belsejében találhatóak.

A mag meghatározásához mindenképp először kiszámítjuk, milyen kifizetésre számíthatnak az egyes koalíciók az elhajlás után, majd a kapott értékeket összevetjük a játékosok egyéni kifizetéseivel minden lehetséges kifizetés-konfigurációban. Drámaian különböző eredményt kapunk attól függően, hogy a szélsőségesen optimista mag-stabilitást [29] vagy a szélsőségesen pesszimista  $\alpha$ -magot [1] használjuk. Az  $\alpha$ -mag négydimenziós, míg a mag-stabil kimenetek halmaza sík, ráadásul az  $\alpha$ -mag kétdimenziós vetületénél is jóval kisebb. Ez a különbség jelentősen csökkenthető a rekurzív mag használatával. Az alábbiakban a pesszimista rekurzív mag kiszámítását mutatjuk be lépésről-lépésre, de az optimista rekurzív mag [22] hasonló számítása —ebben a játékban— pontosan ugyanezt az eredményt hozza. Az, hogy a két megközelítés ebben az esetben egybeesik, egyben azt is jelenti, hogy a kapott halmaz független a viselkedési feltételezésektől és a rekurzív mag pontosan meghatározza a (magi értelemben) stabil kimenetek halmazát. A 3. ábra mutatja a különböző mag-fogalmakra kapott halmazok kétdimenziós vetületét.

Rátérve a pesszimista rekurzív mag számítására elmondhatjuk, hogy míg a mag kiszámítása általában egy igen összetett feladat, ez a konkrét példa viszonylag egyszerű számítást tesz lehetővé.

Mindenképp először vegyük észre, hogy a játék szuperadditív, azaz két koalíció összeolvadása —feltéve, hogy a többi koalíció változatlan marad— az összeolvadó koalíciók összértékének növekedésével jár (1. 2. táblázatot, illetve a definíciók részleteit a 3.3. fejezetben).

A szuperadditivitás nem általános érvényű, mint ezt később látni fogjuk, de ha igaz, lényegesen leegyszerűsíti a rekurzív mag kiszámítását. Így például



elgendő az egykoalíciós elhajlásokat vizsgálni, hiszen ennek semelyik partíciója nem érhet el magasabb kifizetést. További megkötésként csak a legalább egy generátort és legalább egy fogyasztót tartalmazó koalíciók érdekesek. Nem szükséges tehát egyszemélyes koalíciók elhajlását vizsgálni. A négy-személyes koalíciók értéke egyértelmű, hiszen a maradék, ötödik játékos csak egyféle partíciót tud létrehozni. A háromfős koalíciók esete még mindig egyszerű, bár kevésbé triviális: a megmaradó két játékos vagy létrehoz egy koalíciót, vagy külön marad. A már említett szuperadditivitásnak köszönhetően minden nemtriviális esetben koalíciót fognak létrehozni. Triviális esetben mindkét megmaradt játékos generátor, vagy fogyasztó és elvileg ilyenkor mindkét partícióval számolni kell, azaz a partíciós függvényben máshova kell nyúlni, de a gyakorlatban ennek nincs jelentősége, hiszen a koalíció nem terheli a hálózatot.

Természetesen az elhajló párok esete a legérdekesebb, hiszen a maradék-játékosok öt különböző partíciót is létrehozhatnak. Ha a maradékmag nem üres, a már említett szuperadditivitás miatt a maradékjátékosok mind koalíciót alkotnak, azaz a partíciójuk egyértelmű. Az, hogy a maradékmagok nem üresek, esetünkben nem nyilvánvaló, de a kiegyensúlyozottsági feltétel ellenőrzésével megállapítható [3,28].

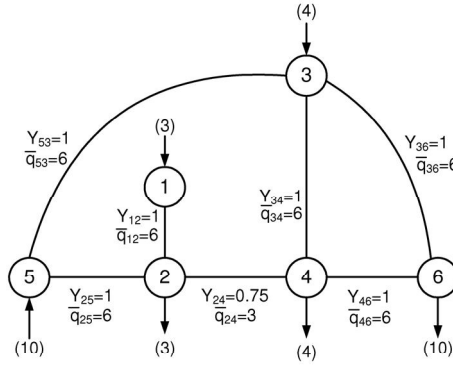
$S$	$v(S)$	$S$	$v(S)$
$\emptyset$	0	{1, 2, 3, 4, 5}	40
{1}	0	{2, 3, 4, 5}	28.8
{2}	0	{1, 3, 4, 5}	30
{3}	0	{1, 2, 4, 5}	20
{4}	0	{1, 2, 3, 5}	34
{5}	0	{1, 2, 3, 4}	20
{1, 2}	13.33	{3, 4, 5}	23.33
{1, 3}	0	{2, 4, 5}	0
{1, 4}	10	{2, 3, 5}	23.33
{1, 5}	20	{2, 3, 4}	20
{2, 3}	14	{1, 4, 5}	20
{2, 4}	0	{1, 3, 5}	20
{2, 5}	0	{1, 3, 4}	10
{3, 4}	10	{1, 2, 5}	20
{3, 5}	20	{1, 2, 4}	20
{4, 5}	0	{1, 2, 3}	14

1. táblázat. Karakterisztikus függvény a  $\Gamma^5$  játék alapján

Az 1. táblában megadott karakterisztikus függvény alapján kiszámíthatjuk a magot. Az egyenlőtlenség-rendszer egyszerűsítése után megállapítjuk, hogy a mag az alábbi pontok halmaza: A  $x_3 = x_4 = x_5 = 0$  síkra való vetülete a (4; 10), (6.67; 10), (10.67; 3.33), (11.2; 3.33), (11.2; 5.47) csúcsok által közrefogott politóp, illetve  $x_3 = x_1$ ,  $x_4 = 20 - x_1 - x_2$  és  $x_5 = 40 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4$ .

A magot megvizsgálva láthatjuk, hogy az egyensúlyi kifizetések elég tág határok között mozognak. A játékban egy profitábilis koalíciónak szüksége van generátorokra és fogyasztókra, hiszen a koalíció értékét közösen állítják elő. Az energia átviteli korlátok és a hálózat egyéb fizikai jellemzői megakadályozzák, hogy az egyik, vagy másik fél kizsákmányolja a másikat. Ez

egyben azt is jelenti, a termelők és fogyasztók közötti profitmegosztás esetleges szabályozása mellett is megmaradhat a mérlegkörök stabilitása.



4. ábra. A  $\Gamma^6$  játék alapvető struktúrája, él- és csúcsparaméterei

### 3.3 Szuperadditivitás

Ha  $\mathcal{P}$  és  $\mathcal{Q}$  partíciók és a  $\mathcal{P}$  minden  $P$  eleme részhalmaza a  $\mathcal{Q}$  valamely  $Q$  elemének, akkor azt mondjuk, hogy  $\mathcal{P}$  finomítása  $\mathcal{Q}$ -nak. Ebben az esetben szuperadditivitás alatt azt értjük, hogy  $v(P_1, \mathcal{P}) + \dots + v(P_k, \mathcal{P}) \leq v(Q, \mathcal{Q})$ .

A szuperadditivitás itt egy természetes tulajdonság, mivel két vagy több koalíció egyesülése felold néhány korlátozást a (2)-ben felvázolt LP problémában, így növeli a teljes energiaátvitelt. A következőkben viszont meg fogjuk mutatni hogy az így keletkező előnyök nem feltétlenül maradnak az összeolvadt koalíciókon belül, sőt az összeolvadók akár rosszabbul is járhatnak.

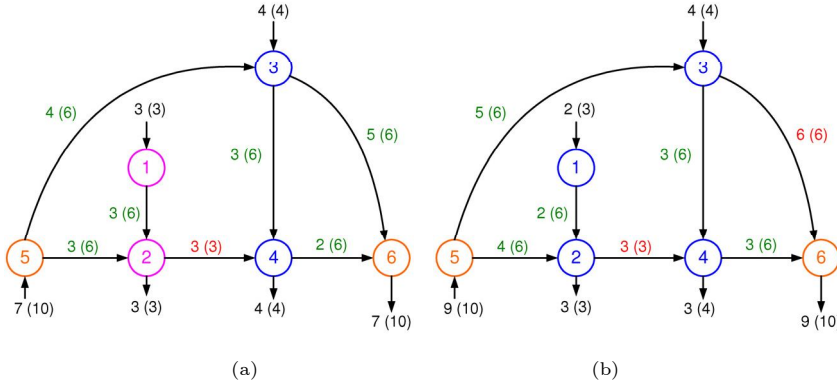
Egy 6 csomópontból álló hálózaton demonstráljuk, hogy a játék nem feltétlenül szuperadditív, és lehetséges, hogy ha két koalíció összeolvad, pozitív externáliát generálnak, miközben az ő eredő átvitelük csökken.

**2. Példa.** Tekintsük a  $\Gamma^6$  partíciós függvény formájú játékot a 4. ábrán vázolt hálózaton.

**Teljesítményáramok az  $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}$  partícióra.** Az 5(a). ábra szemlélteti a teljesítményáramlási viszonyokat az  $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}$  koalíciós struktúra esetén

$$v(\{1, 2\}) = 6 \quad v(\{3, 4\}) = 8 \quad v(\{5, 6\}) = 15.5 .$$

Figyeljük meg hogy a különféle koalíciók különféle módon használják a hálózatot! Az  $\{1, 2\}$  és  $\{3, 4\}$  "vertikális" koalíciók, ezért csak függőleges irányban terhelik a hálózatot. A horizontális átvitel az  $\{5, 6\}$  koalícióhoz kapcsolódik.



5. ábra. Energiabetáplálási és fogyasztási értékek az  $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}$  (a) alábra) és  $\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\}$  (b) alábra) partíciók esetén

**Teljesítményáramok az  $\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\}$  partícióra.** Az  $\{1, 2\}$  illetve  $\{3, 4\}$  koalíciók összeolvadása után kialakuló áramlási viszonyok az 5(b). ábrán láthatóak.

$$v(\{1, 2, 3, 4\}) = 13 \quad v(\{5, 6\}) = 17.5 .$$

Ahogy említettük, két koalíció összeolvadása csökkenti az LP problémában szereplő korlátozások számát, ezzel növelve a teljes eladott energiamennyiséget. Ebben a példában viszont a növekedést az  $\{5, 6\}$  koalíció élvez, melynek a kifizetése 2-vel növekszik. Ezzel egy időben az összeolvadásban szereplő  $\{1, 2\}$  és  $\{3, 4\}$  koalíciók elveszítik teljes kifizetésük egy részét, szubadditív esetet mutatva.

Mi ennek a szubadditivitási példának a háttere? Ha két koalíció összeolvad, az indukált korlátozások száma csökken. Az új konfigurációban viszont képesé válhatnak olyan vonalakat terhelni, amiket eddig nem. Ebben az esetben a kritikus vonal a 2-es és a 4-es csomópont között található.

A koalíciók rekonfigurációjáig csak a harmadik generátor-fogyasztó pár ( $\{5, 6\}$ ) használta ezt a vonalat vízszintes irányú átvitelre. Emellett viszont ez a koalíció az 5-3-5 vonalat is használja párhuzamosan az 5-2-4-6-tal az átvitelre, ahol a szűk keresztmetszet a 2-4-es vonal.

Ahogy a korlátozások feloldódnak, az  $\{1, 2, 3, 4\}$  koalíciót „rákényszerítheti” a független hálózati operátor, hogy terheljék a 2-4 vonalat jobbról balra irányuló átvitelrel (ami a 2-4 vonal tehermentesítését eredményezi az  $\{5, 6\}$  koalíció szempontjából, aki ezt a vonalat ellentétes irányú átvitelre használja). Továbbá, mivel az  $\{5, 6\}$  koalíció átvitt energiájának csak egy része folyik a 2-4 vonalon, az  $\{5, 6\}$  koalíció a teljes átvitelét tovább növelheti, nagyobb mértékben, mint ahogy az  $\{1, 2, 3, 4\}$  koalíciónak vissza kellett fognia a teljes forgalmát a 2-4 vonal megfelelő kiegyensúlyozásának érdekében.

Ezen módon a hálózat által átvitt teljes energiamennyiség növekszik, amíg az  $\{1, 2, 3, 4\}$  csomópontok forgalma csökken.

Ha kiszámítjuk ezen példa esetén a rekurzív magot, azt tapasztaljuk, hogy nincsenek stabil partíciók, ami azt mutatja, hogy a szubadditivitás a teljes együttműködés elérésének korlátja lehet.

## 4 Következtetések

### 4.1 Összefoglalás

Kifejlesztettünk egy modellt, mely leírja a játékosok csoportba szerveződését egy elektromos energiaátviteli hálózat esetén. Az elektromos energia átvitelével kapcsolatban több gyakorlati probléma merül fel: nem lehet a teljesítményt tetszőleges úton szállítani a rendelkezésre álló távvezetékeken, így előfordulhat, hogy míg az egyik vonalon kapacitás felesleg mutatkozik, a másik párhuzamos vonal túlterhelődik. Ennek leírására egy nagyon egyszerű DC load flow modellt használunk.

Minden csomópontnak jellemzője a kereslet vagy kínálat, és a független hálózatkezelő a hálózat fizikai tulajdonságai, valamint a mérlegkörök alapján határozza meg a termelési és fogyasztási értékeket annak érdekében hogy a hálózatra nézve a teljes átvitt energia maximális legyen. Mivel a mérlegkörök keletkezése többféle externáliát okoz ilyen hálózatokban, a modellt partíciós függvény alakú játékkal írjuk le.

Először az externáliákat vizsgáltuk meg. Kiderült, hogy a természetes negatív externáliák mellett az egyesülés pozitív externáliát is eredményezhet. Ezen kívül 6 játékos esetén (5(b). ábra) példát mutattunk arra, hogy a pozitív externália akár meg is haladhatja a teljes növekményt, így az egyesülő felek rosszul is járhatnak az egyesüléssel. Ennek tükrében a szubadditivitást súlyos problémának tekintjük, ami alááshatja a hálózati kooperációt.

Végül a rekurzív magot használva tanulmányoztuk a stabilitást. Amíg megmutattuk, hogy a fenti energiaátviteli játék magja nem szükségszerűen nemüres, az 5 játékost tartalmazó példa megmutatja, hogy ez a fogalom milyen jól meg tudja jósolni a játékosok viselkedését: amíg az —optimista— mag stabilitás és a —pesszimista—  $\alpha$ -mag között alapvető különbség van, a rekurzív mag nem függ efféle viselkedési feltételezésektől.

### 4.2 A hálózat hazánkban

Hazánkban a nagyfeszültségű villamos hálózatot a MAVIR (Magyar Villamosenergia-ipari Átviteli Rendszerirányító ZRt.) üzemelteti, szerepe a modellünkben a rendszerirányítóéna felel meg. Modellünkhöz hasonlóan a MAVIR célja a valóságban is a legnagyobb forgalom bonyolítása. A valóságban a fogyasztók számára a használt villamos energia ára is fontos döntési szempont; mi az árkülönbségektől, illetve közvetve a termelés eltérő költségeitől eltekintünk. Az irányítás egyszerűsítése végett a valóságban is mérlegkörökbe szerveződik a termelés és a fogyasztás. Természetesen nem az egyes háztartások, hanem közüzemi szolgáltatók, jelentős ipari fogyasztók alkotják a mérlegköröket, ők a játék tulajdonképpeni játékosai.

### 4.3 További kérdések

A bemutatott energiapiaci modell felállításakor elsősorban az egyszerűségegre törekedtünk, de ahhoz, hogy a modell könnyen kezelhető maradjon, bizonyos

kompromisszumokra kényszerültünk. Az alábbiakban kitérünk három olyan általánosításra, melyek révén közelebb kerülhetünk a valós hálózatokhoz, viszont könnyen előfordulhat, hogy a komplexebb matematikai apparátus elfedi az egyszerű intuíciót. Az összetettebb modellek várhatóan nem módosítják cikkünk főbb eredményeit, de kézenfekvő a további munkánk során ezek vizsgálatára is kitérni.

Az első a kereslet napi és szezonális változása. Ha egy mérlegkör létrejön, hosszú távon is jól kell teljesítenie, változó fogyasztási profilok mellett. Még ha a generátorok áthangolásának —szubsztanciális— költségeit, és a játékot, amit a mérlegkörök ezzel kapcsolatosan játszanának, nem vesszük is figyelembe, a probléma nem triviális.

A második probléma ehhez kapcsolódik. Egy hálózatnak megbízhatóan kell működnie. Ha egy vonal túlterhelődik, hibája láncreakció-szerűen továbbterjedhet a hálózaton. Konzervatív tervezési módszerek segíthetnek megoldani ezen problémát, és az ehhez kapcsolódó bizonytalanságot figyelembe vehetjük explicit módon *kockázati mértékek* használatával (l. [12,22,23] és hivatkozásait!), vagy, ha a játékot eleve TUU játékként (átruházható hasznosságú játékok bizonytalansággal, [18]) adjuk meg.

Végül a fizikai hálózat is változhat különféle stratégiai megfontolások függvényében. Más szóval, megengedhetjük a játékosoknak, hogy vonalakat építsenek vagy bontsanak le. A hálózat stabilitás nem új témakör és [9,8] már használt kooperatív játékelméleti eszközöket energiaátviteli hálózatok tanulmányozására. A mi modellünk viszont meglehetősen különbözik az említett szerzők műveiben használttól, így reméljük, hogy új eredményeket hozhat ezen a területen is.

Az elektromos energia igényének állandó növekedése és a megújuló energiaforrások felé fordulás az energiaátvitelt az elsődlegesen aktuális kérdések között tartja. A nemzeti energiaátviteli hálózatok növekvő mértékben kapcsolódnak egymáshoz. Játékelméleti modellünk segíthet kiértékelni a bővítés, használat és üzemeltetés stratégiai aspektusait.

## Függelék. Az 1(a). ábrán vázolt hálózaton játszott játék partíciós függvénye

$\mathcal{P}$	$V$	$\mathcal{P}$	$V$
1,2,3,4,5	40	1,4 + 2,3,5	10 , 23.33
1,2,3,4 + 5	20 , 0	1,4 + 2,3 + 5	10 , 10 , 0
1,2,3,5 + 4	34 , 0	1,5 + 2,3,4	20 , 20
1,2,3 + 4,5	14 , 0	1 + 2,3,4,5	0 , 28.8
1,2,3 + 4 + 5	14 , 0 , 0	1 + 2,3,4 + 5	0 , 19 , 0
1,2,4,5 + 3	20 , 0	1,5 + 2,3 + 4	19.71 , 14 , 0
1,2,4 + 3,5	20 , 20	1 + 2,3,5 + 4	0 , 25.71 , 0
1,2,4 + 3 + 5	17.5 , 0 , 0	1 + 2,3 + 4,5	0 , 14 , 0
1,2,5 + 3,4	20 , 10	1 + 2,3 + 4 + 5	0 , 14 , 0 , 0
1,2 + 3,4,5	13.33 , 23.33	1,4,5 + 2 + 3	20 , 0 , 0
1,2 + 3,4 + 5	10 , 10 , 0	1,4 + 2,5 + 3	10 , 0 , 0
1,2,5 + 3 + 4	20 , 0 , 0	1,4 + 2 + 3,5	10 , 0 , 18.57
1,2 + 3,5 + 4	14 , 17.71 , 0	1,4 + 2 + 3 + 5	10 , 0 , 0 , 0
1,2 + 3 + 4,5	13.75 , 0 , 0	1,5 + 2,4 + 3	15.7143 , 0 , 0
1,2 + 3 + 4 + 5	13.75 , 0 , 0 , 0	1 + 2,4,5 + 3	0 , 0 , 0
1,3,4,5 + 2	30 , 0	1 + 2,4 + 3,5	0 , 0 , 15.71
1,3,4 + 2,5	10 , 0	1 + 2,4 + 3 + 5	0 , 0 , 0 , 0
1,3,4 + 2 + 5	10 , 0 , 0	1,5 + 2 + 3,4	17.14 , 0 , 10
1,3,5 + 2,4	20 , 0	1 + 2,5 + 3,4	0 , 0 , 10
1,3 + 2,4,5	0 , 0	1 + 2 + 3,4,5	0 , 0 , 24.29
1,3 + 2,4 + 5	0 , 0 , 0	1 + 2 + 3,4 + 5	0 , 0 , 10 , 0
1,3,5 + 2 + 4	20 , 0 , 0	1,5 + 2 + 3 + 4	15.71 , 0 , 0 , 0
1,3 + 2,5 + 4	0 , 0 , 0	1 + 2,5 + 3 + 4	0 , 0 , 0 , 0
1,3 + 2 + 4,5	0 , 0 , 0	1 + 2 + 3,5 + 4	0 , 0 , 15.71 , 0
1,3 + 2 + 4 + 5	0 , 0 , 0 , 0	1 + 2 + 3 + 4,5	0 , 0 , 0 , 0
1,4,5 + 2,3	20 , 14	1 + 2 + 3 + 4 + 5	0 , 0 , 0 , 0 , 0

2. táblázat. Az 1(a). ábrán vázolt hálózaton játszott játék partíciós függvénye

## Irodalom

1. Aumann, R. J. és B. Peleg (1960): „Von Neumann-Morgenstern Solutions to Cooperative Games Without Side Payments,” *Bulletin of the American Mathematical Society*, 66, 173–179.
2. Bai, X., S. Shahidehpour és V. Ramesh (1997): „Transmission Analysis by Nash Game Method,” *IEEE Transactions on Power Systems*, 12, 1046–1052.
3. Bondareva, O. N. (1963): „Some Applications of Linear Programming Methods to the Theory of Cooperative Games,” (oroszul) *Problemy Kybernetiki*, 10, 119–139.
4. Cardell, J. B., C. C. Hitt és W. W. Hogan (1997): „Market power and strategic interaction in electricity networks,” *Resource and Energy Economics*, 19(1-2), 109–137.
5. Chander, P., és H. Tulkens (1997): „The core of an economy with multilateral environmental externalities,” *International Journal of Game Theory*, 26(3), 379–401.
6. Chen, Y., B. Hobbs, S. Leyffer és T. S. Munson (2006): „Leader-follower equilibria for electric power and NO<sub>x</sub> allowances markets,” *Computational Management Science*, 3, 307–330.

7. Contreras, J. (1997): „A Cooperative Game Theory Approach to Transmission Planning in Power Systems,” Ph.D. thesis, University of California, Berkeley.
8. Contreras, J., G. Gross, J. M. Arroyo és J. I. Muñoz (2009): „An incentive-based mechanism for transmission asset investment,” *Decision Support Systems*, 47, 22–31.
9. Contreras, J. és F. Wu (1999): „Coalition formation in transmission expansion planning,” *IEEE Transactions on Power Systems*, 14, 1144–52.
10. Contreras, J. és F. Wu (2000): „A kernel-oriented algorithm for transmission expansion planning,” *IEEE Transactions on Power Systems*, 15, 1434–40.
11. Csercsik, D. és L. Á. Kóczy (2012): „Inefficiencies in a transmission game model of congested power networks,” Kézirat.
12. Csóka, P., P. J.-J. Herings és L. Á. Kóczy (2007): „Measures of Risk from a General Equilibrium Perspective,” *Journal of Banking and Finance*, 31(8), 2517–2534.
13. Csóka, P., P. J.-J. Herings és L. Á. Kóczy (2009): “Stable Allocations of Risk,” *Games and Economic Behavior*, 67(1), 266–276.
14. Evans, F., J. Zolezzi és H. Rudnick (2003): „Cost assignment model for electrical transmission system expansion: an approach through the Kernel theory,” *IEEE Transactions on Power Systems*, 18, 625–632.
15. Gately, D. (1974): „Sharing the Gains from Regional Cooperation: A Game Theoretic Application to Planning Investment in Electric Power,” *International Economic Review*, 15, 195–208.
16. Gilbert, R., K. Neuhoff és D. Newbery (2004): „Allocating Transmission to Mitigate Market Power in Electricity Networks,” *RAND Journal of Economics*, 35(4), 691–709.
17. Gillies, D. B. (1959): „Solutions to general non-zero-sum games,” in *Contributions to the Theory of Games IV*, ed. by A. W. Tucker és R. D. Luce, no. 40 in Annals of Mathematics Studies, pp. 47–85. Princeton University Press, Princeton.
18. Habis, H. és P. J. Herings (2011): „Transferable utility games with uncertainty,” *Journal of Economic Theory*, 146, 2126–39.
19. Hobbs, B. (1992): „Using game theory to analyze electric transmission pricing policies in the United States,” *European Journal of Operational Research*, 56, 154–171.
20. Kaltenbach, J. és L. Hajdu (1971): „Optimal Corrective Rescheduling For Power System Security,” *IEEE Transactions on power Apparatus and Systems*, 90, 843–851.
21. Kirschen, D. és G. Strbac (2004): *Fundamentals of Power System Economics*. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, UK.
22. Kóczy, L. Á. (2007): „A recursive core for partition function form games,” *Theory and Decision*, 63(1), 41–51.
23. Kóczy, L. Á. (2009): „Sequential Coalition Formation and the Core in the Presence of Externalities,” *Games and Economic Behavior*, 66(1), 559–565.
24. Lange, F. és M. Grabisch (2009): „Values on regular games under Kirchhoff’s laws,” *Mathematical Social Sciences*, 58(3), 322–340.

25. Neuhoff, K., J. Barquin, M. Boots, A. Ehrenmann, B. Hobbs, F. Rijkers és M. Vázquez (2005): „Network-constrained Cournot models of liberalized electricity markets: the devil is in the details,” *Energy Economics*, 27, 495–525.
26. Oren, S., P. Spiller, P. Varaiya és F. Wu (1995): „Folk Theorems on Transmission Access: Proofs and Counter Examples,” Working papers series of the Program on Workable Energy Regulation (POWER) PWP-023, University of California Energy Institute 2539 Channing Way Berkeley, California 94720-5180, [www.ucei.berkeley.edu/ucei](http://www.ucei.berkeley.edu/ucei).
27. Orths, A., A. Schmidtt, Z. Styczynski és J. Verstege (2001): „Multi-Criteria optimization methods for planning and operation of electrical energy systems,” *Electrical Engineering*, 83, 251–258.
28. Shapley, L. S. (1967): „On Balanced Sets and Cores,” *Naval Research Logistics Quarterly*, 14(4), 453–460.
29. Shenoy, P. P. (1979): „On Coalition Formation: A Game-Theoretical Approach,” *International Journal of Game Theory*, 8(3), 133–164.
30. Thrall, R. és W. Lucas (1963): „ $n$ -person games in partition function form,” *Naval Research Logistics Quarterly*, 10, 281–298.
31. Van Cutsem, T. és C. Vournas (1998): *Voltage Stability of Electric Power Systems*. Kluwer Academic Publishers.

#### EFFICIENCY AND STABILITY IN POWER TRANSMISSION NETWORKS: A GAME-THEORETIC APPROACH

Members of power transmission networks are organised into so-called balancing groups where the production and consumption is balanced. Taking the nodes' production/consumption capacities, the physical properties of the network and the equilibrium conditions for balancing groups into account the operator assigns production and consumptions rights to the nodes to maximise the total traffic. How well the nodes' capacities are used crucially depends on the partition into balancing groups. We study the formation, stability and efficiency of balancing groups in an idealised DC load model using a partition function form game approach. We show that the formation of balancing groups creates widespread externalities and these may be positive or negatives. We study the stability of the formed payoff configuration using the recursive core, a generalisation of the coalition structure core to partition function form games. While the game is naturally cohesive we show that superadditivity is not guaranteed. The absence of superadditivity may inhibit the formation of the grand coalition that would otherwise be desirable from an efficiency point of view.