Bródy András

Átlagos késleltetés a gazdaságban

Megjegyzés W. Leontief tanulmányához

W. Leontief tanulmányában[1] fontos módszert dolgozott ki az adott végső fogyasztáshoz szükséges elsődleges ráfordítások teljes idősorának kiszámítására. E módszer segítségével megválaszolhatjuk azt a kérdést is: átlagosan mennyivel korábban kellett e ráfordításokat eszközölni, mielőtt a kívánt hatást, a kibocsátást, kiválthatták volna. A ráfordítások bizonyos hányada ugyanabban az évben szükséges, amikor a kibocsátás is megtörténik, másik része egy évvel, harmadik része két évvel, három évvel stb. korábban. Ha e hányadok ismeretesek, akkor — súlyozott átlagként — kiszámíthatjuk azt, hogy átlagosan hány évvel előzi meg a ráfordítás a kibocsátást. Így például válaszolhatunk arra, hogy a ma exportált termék átlagosan hány évvel ezelőtt importált termékből készült, vagy hogy a ma fogyasztott létfenntartási cikkeket átlagosan hány évvel korábbi munkával termeltük meg s.i.t.
Nem más ez, mint a népgazdaságon belüli anyagcsere, termékáramlás átlagos átfutási idejének, a ráfordítások és a kibocsátás közti átlagos késleltetési időnek a kiszámítása. S valóban az említett tanulmányban szereplő (4) inverz alapján ez az érték meghatározható, ha az inverz általános oszlopának segítségével megfelelő módon súlyozott átlagot számítunk.

Az egyes években ráfordítandó mennyiség az idézett (4) képlet alapján táblázatba foglalva:

Ráfordítandó mennyiség	A kibocsátást megelőzve
G^{-1}	0 évvel
RG^{-1}	1 évvel
R^2G^{-1}	2 évvel
.	.
.	.
.	.
R^nG^{-1}	n évvel
.	.
.	.
.	.

Itt $G = 1 - A + B$ és $R = G^{-1}B$, ahol A a folyó ráfordítás, B a tőkelekötés matrixa.

[1] A dinamikus inverz. Szigma, 1969. 4. sz.

Feltéve, hogy a táblázatban szereplő sor konvergens,[2] az összes ráfordítás is és az egyes évek megfelelő ráfordításaival szorzott (súlyozott) átfutás képlete is kijelölhető, sőt — némi közbenső számítás árán — igen egyszerű alakot ölt.

1. Az összes ráfordítás, Ω, a táblázatban szereplő ráfordítások egyszerű összege:

$$(1)\qquad \Omega = (1 + R + R^2 + \ldots + R^n + \ldots)\, G^{-1} = (1 - R)^{-1}G^{-1} =$$
$$= [G(1 - R)]^{-1} = \{(1 - A + B)[1 - (1 - A + B)^{-1}B]\}^{-1} = (1 - A)^{-1} = Q$$

vagyis egyenlő a nyílt statikus Leontief-inverz értékével. Ez tisztán közgazdasági megfontolásokból is nyilvánvaló, hiszen a dinamikus inverz lényegében nem más, mint a statikus inverz időbeli dezaggregációja.

2. A ráfordításokkal szorzott átfutási idők összege:

$$\Sigma = (R + 2R^2 + \ldots + nR^n + \ldots)G^{-1} = R(1 - R)^{-2}G^{-1}.$$

A fenti összegképlet a hasonló skaláris sor összegképletének matrix-változata. Figyelembe véve azt, hogy (1) alapján $(1 - R)^{-1}G^{-1} = Q$ kapjuk, hogy

$$\Sigma = R(1 - R)^{-1}Q = (1 - A + B)^{-1}B[1 - (1 - A + B)^{-1}B]^{-1}Q.$$

Mindenünnen kiemelve $(1 - A)^{-1} = Q$ értékét, végülis

$$(2)\qquad \Sigma = (1 + QB)^{-1}QB[1 - (1 + QB)^{-1}QB]^{-1}Q = QBQ$$

ahol figyelembe vettük, hogy a QB matrix felcserélhető racionális függvényének $(1 + QB)^{-1}$-nek matrixával.

Ennek alapján az átlagos átfutási időket a Σ és az Ω matrixok megfelelő elemeinek hányadosaként kapjuk, az i. szektorból a k. szektorba való átlagos átmenet idejét, R_{ik} értékét tehát a

$$(3)\qquad T_{ik} = \frac{\Sigma_{ik}}{\Omega_{ik}} = \frac{(QBQ)_{ik}}{Q_{ik}} = \frac{Q_{i\cdot}\, BQ_{\cdot k}}{Q_{ik}}$$

hányados adja, ahol $Q_{i\cdot}$ az inverz i.-edik sora, $Q_{\cdot k}$ pedig k.-adik oszlopa.

*

Ugyanennek a (3) képletnek a felépítését egy — látszólag eltérő — szemléletnek alapján is elvégezhetjük.

Ismeretes, hogy a B tőkelekötési matrix b_{ik} elemei felfoghatók úgy is, mint az A folyó ráfordítási matrix a_{ik} elemeinek és a t_{ik} megtérülési időnek szorzatai:

$$(4)\qquad B = \{b_{ik}\} = A \otimes T = \{a_{ik}\, t_{ik}\}.$$

Kézenfekvő mármost, hogy e megtérülési idők összegezésével kíséreljük meg kiszámítani az átlagos lekötési időt, amelyet akkor szenved el a termék, amikor

[2] Leontief csak azt bizonyítja, hogy az időegység megváltoztatásával a sor mindig konvergenssé tehető. Számításai, valamint az azóta megjelent magyar számítás is (KSH: Kísérlet az első magyar dinamikus ÁKM összeállítására, Bp. 1969.) konvergensek voltak.

az i. szektorból a k. szektorba áramlik át — részben közvetlenül, részben pedig közvetve, több $(1, 2, \ldots, n, \ldots)$ más szektor közvetítésével.

Közvetlenül csak a_{ik} mennyiség áramlik át, s ez persze megtörténik t_{ik} idő alatt. Az a_{ik} mennyiséggel súlyozott idő itt tehát $a_{ik}\, t_{ik}$, s ez megegyezik a B matrix elemeivel. Hátra van azonban a több vertikumon keresztül áramló termékek időszükséglete, amelyeket természetesen ismét a megfelelő mennyiségekkel beszorozva kell figyelembe venni.

Ha az egy közvetítő szektoron keresztül történő átáramlásokat vesszük figyelembe, akkor ezek mennyiségét a $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{jk}$ nagyság adja meg — az A^2 matrix i.-edik sorában és k.-adik oszlopában álló elem. Azonban ezeknek az áramlatoknak az időszükséglete már két részből összegeződik: míg eljut k-ből j-be, azaz t_{ij}, majd míg átjut j-ből k-ba, azaz t_{jk}. A súlyozott időszükséglet tehát

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{jk} (t_{ij} + t_{jk}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} t_{ij} a_{jk} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{jk} t_{jk} = (BA)_{ik} + (AB)_{ik},$$

ahol az utóbbi jelölésnél már figyelembe vettük a (4) képlet adta összefüggést.

Ugyanígy a két közvetítő szektoron történő átáramlás mennyisége

$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{jl} a_{lk} = (A^3)_{ik}\,.$$

Az időszükséglet itt három részből tevődik össze: a $t_{ij} + t_{jl} + t_{lk}$ időkből. Az összidőszükséglet ez esetben, megfelelően súlyozva

$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{jl} a_{lk} (t_{ij} + t_{jl} + t_{lk}) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} t_{ij} a_{jl} a_{lk} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{jl} t_{jl} a_{lk} + \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{jl} a_{lk} t_{lk} = (BA^2)_{ik} + (ABA)_{ik} + (A^2B)_{ik}\,.$$

Folytathatnánk a gondolatot három, négy, . . ., n s. i. t. szektoron keresztül követve az egyre növekvő időszükségletet s az egyre csökkenő mennyiségi súlyokat. Úgy vélem azonban a képzési szabály már világos. S ha megfelelő formában írjuk fel a $QBQ = (1 - A)^{-1} B (1 - A)^{-1}$ kifejezés hatványsorát, szabatosan megkapjuk az egymás után álló oszlopokban a fenti 1, 2, három és n. lépcsős átmenetek súlyozott időszükségletét. QBQ ugyanis így írható fel:

$$\begin{array}{llllllll}
B + & BA + & BA^2 & + BA^3 & + \ldots + & BA^{n-1} & + BA^{n} & + \ldots \\
 & AB + & ABA & + ABA^2 & + \ldots + & ABA^{n-2} & + ABA^{n-1} & + \ldots \\
 & & A^2B & + A^2BA & + \ldots + & A^2BA^{n-3} & + A^2BA^{n-2} & + \ldots \\
 & & & A^3B & + \ldots + & A^3BA^{n-4} & + A^3BA^{n-3} & + \ldots \\
 & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & & & & & A^{n-2}BA & + A^{n-2}BA^2 & + \ldots \\
 & & & & & A^{n-1}B & + A^{n-1}BA & + \ldots \\
 & & & & & & A^{n}B & + \ldots \\
 & & & & & & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Itt az első három oszlop sorra a közvetlen, egylépcsős, kétlépcsős átmenet súlyozott időszükségletét adja az előbb számítottal egybehangzóan. Feltüntettük még a három lépcsős, $n-1$ lépcsős és n lépcsős átmeneteket is. E szerkesztési módból világos, hogy az összes súlyozott időszükségletet a QBQ matrix elemei adják meg, a súlyok összegét, az összes átáramló mennyiséget pedig a Q matrix, a teljes ráfordítási matrix elemei. Az átlagos átfutási idő tehát e két matrix megfelelő helyen álló elemeinek hányadosa, mint ahogy azt már a dinamikus inverz képleteiből is azonosan levezettük.

Megjegyzendő azonban, hogy a második levezetés nem kívánt meg újabb feltételezést a benne szereplő sor konvergenciájával kapcsolatban. A $Q = (1-A)^{-1} = 1 + A + A^2 + \ldots A^n + \ldots$ sor konvergenciája és pozitív volta régóta bizonyított, ebből közvetlen folyik QBQ véges pozitív volta. Érdekes az is, hogy két eléggé eltérő szemlélet — a B matrixnak a megtérülési idők alapján történő, lényegében a marxi elméletre visszanyúló s először O. Lange-nál megtalálható értelmezése egyrészt, másrészt W. Leontief növekedési differenciaegyenlete, amely ugyanezt a matrixot csak a bővítés tőkelekötési szükségleteként értelmezi — szabatosan azonos eredményre vezet.

*

Néhány befejező szó helyénvaló az átlagos átfutási idők, a népgazdaság e strukturális késleltetési idői, a nyugati irodalom műszavával „lag"-jai konkrét nagyságrendjét illetően.

Ha zárt modellel dolgozunk (ahol tehát a munkaerő, külkereskedelem, amortizáció, állami szektor stb.is szerepel az A és így a Q és B matrixokban), meglehetősen nagy átfutási időket fogunk kapni. Átlagosan — mivel a (3) képletnek megfelelően számolunk — a QB matrix legnagyobb pozitív sajátértékének megfelelő számot kapunk: ennyi év az átlagos késés. Mivel e sajátérték az átlagos növekedési ráta (átlagprofitráta) reciprokra, ezért pl. az évi 5—6%-kal növekvő Magyarország esetében átlagosan 16—20 éves késleltetésekre készülhetünk fel. Példaképpen álljon itt az 1961. évi adatokból számított 5 szektoros modell késleltetési éveinek száma:[3]

Átlagos átfutási idő

	Ipar	Mező-gazdaság	Egyéb	Külkeres-kedelem	Munkaerő
Ipar	14	23	29	18	24
Mezőgazdaság	18	6	27	18	20
Egyéb	17	18	6	18	19
Külkereskedelem	19	24	32	7	27
Munkaerő	21	20	26	22	17

[3] Az alapadatokért *Horváth Józsefnek, Madarász Aladárnak* és *Spitzer Györgynek* kell köszönetet mondani, a számítás *Székely Béla* és *Spitzer György* munkája. Felesleges említeni, hogy mivel lényegében kísérleti számítás történt, felelősséget csak a módszerért és nagyságrendekért vállalhatunk, nem az — egyelőre igen durvának érzett — konkrét számadatokért.

Valószínűleg az erős aggregáció következménye, hogy az adatok szórása igen csekély. Figyelemreméltó és elgondolkoztató azonban, hogy milyen hosszúak az átfutási idők: a népgazdaság hatásmechanizmusa sokkalta lassúbb, mint azt véltük, vagy hinni szeretnénk. Átlagosan is 20 évnyi kihatása van minden gazdasági cselekedetünknek, amikor terveink egyelőre csak az 1—5 éves távot fogják át, s azt sem mindig kielégítően.

Persze, ha a modell nem zárt – ha tehát a számított adatok nem ölelik fel a munkaerő szektorában elszenvedett igen jelentős késleltetéseket – akkor jóval rövidebbek az átlagos átfutási idők. Utóbbi rövidebb tartamok közelebb állanak a közgazdászok hagyományos és szokásos nagyságrendi becsléseihez. Az átlagos átfutási idő azonban még így – csonkítottan számbavéve — sem mondható rövidnek. Mivel az ismert nyílt, statikus Q Leontief-inverzek oszlopösszegei 2 körül mozognak, s a tőke/termelés hányados, azaz a B matrix átlagos oszlopösszege 3 körüli, ezért az átlagos késleltetés mintegy 2x3=6 év lesz. Azoknak a tervezési és elemzési feladatoknak tehát, amelyek eltekintenek a munkaerő (és a külkereskedelem) szektorában keletkező visszahatásoktól, s csupán a szorosan vett termelés területén elszenvedett késleltetéseket veszik számba, a 16—20 éves átfutási idő helyett 3—7 éves késleltetésekkel kell számolniuk. A számítás teljesen azonos képletek segítségével történik, csak a B és Q (illetőleg A) matrixok által felölelt szféra lesz kisebb, kevésbé „zárt" és teljes.

(Beérkezett: 1970. III. 18.)

AVERAGE LAG IN THE ECONOMY

The average lag can be calculated from the dynamic Leontief inverse, as the weighted mean value of the components in an (infinite) column of the inverse. So we have the value $\frac{(Q\,B\,Q)_{ik}}{Q_{ik}}$, where Q is the Leontief inverse and B is the investment matrix.

The same value can be calculated otherwise, too, starting with the $b_{ik} = t_{ik}a_{ik}$ representation of B, where a_{ik} is an entry of the technology matrix and t_{ik} its turnover time. This approach avoids a convergence condition which was necessary when using the dynamic inverse.

СРЕДНЕЕ ЗАПАДЫВАНИЕ В ЭКОНОМИКЕ

Среднее время запаздывания можно вычислить по динамической обратной матрице Леонтьева, как взвешенная средняя элементов одного (безконечного) столбца обратной матрицы. Получается величина $\frac{(Q\,B\,Q)_{ik}}{Q_{ik}}$, где Q-обратная матрица Леонтьева, а B-матрица капитальных вложений.

Тоже самую величину можно получить другим путём, исходя из представлении матрицы в виде $b_{ik} = t_{ik}a_{ik}$, где a_{ik} — элемент технической матрицы, и t_{ik} — соответствующие сроки окупаемости. При такой приближении, можно пропустить одно условие сходимости, которое было необходимое при непосредственной использовании динамической обратной мат рицы.