Glattfelder Péter — Váczi Pál

# Egy algoritmus input-output sémák előrebecslésének korrekciójára

Az utóbbi néhány évben világszerte számos cikk, tanulmány jelent meg az input-output táblák, ezeken belül is alapvetően a koefficiensek előrejelzése tárgyában.[1]

A nagyfokú érdeklődést a közép- és hosszútávú tervezés matematikai módszereinek előtérbe kerülése indokolja, valamint az a körülmény, hogy az input-output táblákat ma már nemcsak elemzési célra használják, hanem azok alapköveivé váltak egy sor olyan (például optimalizálási) modellnek, melyekkel az előrejelzés illetve a tervezés tovább finomítható, újabb oldalakról közelíthető.

Az input-output analízissel kapcsolatban a leggyakoribb a bruttó és a nettó output-vektoroknak, valamint a technológiai matrix elemeinek a vizsgálata. A folyó tervezés egyik alapkérdése, hogy mekkora ágazati össztermelés (bruttó output) szükséges a nemtermelő fogyasztás, vagyis a nettó output kibocsátásához a közvetlen és a közvetett ráfordítások figyelembevételével, hogyha ismeretes (vagy előre meghatározott) a nettó output tervévi volumene és összetétele. A választ közismert módon a ráfordítási szerkezet, a technikai fejlődés addigi változása is befolyásolja és így a jól ismert

$$X = \mathbf{A}X + Y$$

összefüggésben az $Y$ vektort tekintjük adottnak, az $X$ vektort és az $\mathbf{A}$ matrixot pedig ismeretlennek. Az is előfordul, hogy az $Y$-ra nyert előrejelzéseinket éppoly pontatlannak tekintjük, mint az alapösszefüggés másik két összetevőjét, s így mindhárom tényezőt ismeretlenként kell kezelni. Dolgozatunk alapkérdését tehát az egyedi becslések konzisztenciájának biztosítása jelenti, vagyis egy olyan eljárás kidolgozása, amely ezeknek a becsléseknek egy, a Leontief-féle alapegyenletet is kielégítő korrekcióját szolgáltatja. Feltételezzük, hogy rendelkezésünkre állanak az előzőek során kapott $\mathbf{A}'$, $Y'$ és $X'$ előrebecslések, s keressük az ezekhez legközelebbi $\mathbf{A}$-t, $Y$-t és $X$-et, melyekre már fennáll az $X = \mathbf{A}X + Y$ összefüggés. A továbbiakban ennek a feladatnak a megoldására adunk egy numerikus algoritmust.

Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}_1(t), \mathbf{A}_2(t), \mathbf{A}_3(t) \ldots \mathbf{A}_r(t)$ kétindexes tenzor-skalár, $X_1(t), X_2(t), X_3(t) \ldots X_s(t)$ vektor-skalár függvényértékei $t = t_k$ $(k = 1, 2 \ldots m)$ pontokban ismert matrixok illetve vektorok és eleget tesznek az

[1] Lásd például [3], [5].

$$F_1[\mathbf{A}_1(t), \mathbf{A}_2(t), \ldots \mathbf{A}_r(t) ; X_1(t), X_2(t) \ldots X_s(t)] = 0$$
$$F_2[\mathbf{A}_1(t), \mathbf{A}_2(t), \ldots \mathbf{A}_r(t) ; X_1(t), X_2(t) \ldots X_s(t)] = 0$$
$$F_p[\mathbf{A}_1(t), \mathbf{A}_2(t), \ldots \mathbf{A}_r(t) ; X_1(t), X_2(t) \ldots X_s(t)] = 0$$
$$p > 0 , r \geq 0 , s \geq 0 , r + s \geq 1$$

feltételeknek. Meghatározandók e tenzor-skalár illetve vektor-skalár függvények extrapolált (interpolált) értékei a $t = t_q$ pontban.

Nevezzük az ilyen típusú feladatokat feltételes vektor illetve tenzor extrapolációs (interpolációs) feladatnak, vagy röviden feltételes extrapolációnak (interpolációnak). A dolgozat keretében a feltételes extrapoláció (interpoláció) általános elméletével nem foglalkozunk, csupán a dolgozatban felhasználásra kerülő extrapolációs feladat kapcsán mutatunk lehetséges megoldási módszereket.

A konkrét esetben $r = 1$, $s = 2$, $p = 1$.

Legyen

$$F_1 [\mathbf{A}_1(t), X_1(t), X_2(t)] = \mathbf{A}_1(t) X_1(t) - X_2(t) = 0$$

Alkalmazzuk az

$$\mathbf{A}_1(t) = \mathbf{A}(t)$$
$$X_1(t) = X(t)$$
$$X_2(t) = Y(t)$$

jelöléseket, s jelöljük a tenzor- illetve vektorkomponenseket a megfelelő kisbetűkkel.

Feladatunk az $\mathbf{A}(t_q)$, $X(t_q)$ és $Y(t_q)$ matrix illetve vektorok meghatározása úgy, hogy

(1.1) $$\mathbf{A}(t_q) X(t_q) = Y(t_q)$$

teljesüljön, ahol $t_q$ valamilyen, a $t_1, t_2, \ldots, t_m$ alappontoktól különböző (idő-)pont.

Egy lehetséges megoldás a következő. Határozzuk meg az $x_i(t_q)$ és $y_i(t_q)$ vektor- illetve az $a_{ij}(t_q)$ matrixelemeket legjobban közelítő $x_i'(t_q)$, $y_i'(t_q)$ és $a_{ij}'(t_q)$ vektor- illetve matrixelemeket az ismert $x_i(t_k)$, $y_i(t_k)$, $a_{ij}(t_k)$ ($k = 1, 2, \ldots m$) vektor- illetve matrixelemek segítségével valamilyen skalár extrapolációs módszerrel. Ha az így nyert $X'(t_q)$, $Y'(t_q)$ illetve $\mathbf{A}'(t_q)$ kielégítik (1.1)-et, akkor a feladatot megoldottnak tekinthetjük, egyébként olyan megoldást kell keresnünk, melyre (1.1) teljesül, de jól közelíti a vesszővel jelölt értékeket is. Gyakran előfordul, hogy az $X'(t_q)$, $Y'(t_q)$ vektorok illetve $\mathbf{A}'(t_q)$ matrix valamelyikét kötelezően el kell fogadni, ezért a gyakorlatban a feladat alábbi részfeladatainak megoldása válhat szükségessé:

a) az előrebecsült $X(t_q)$, $Y(t_q)$ és $\mathbf{A}(t_q)$ változók egyike sem rögzített.
b) $Y(t_q) = Y'(t_q)$; $Y'$ rögzített;
c) $X(t_q) = X'(t_q)$; $X'$ rögzített;
d) $\mathbf{A}(t_q) = \mathbf{A}'(t_q)$; $\mathbf{A}'$ rögzített.

A továbbiakban a vektorok és matrixok $t_q$ argumentumait elhagyjuk. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$H_1(\mathbf{A}, \mathbf{A}') = \sum_{ij} (a_{ij} - a'_{ij})^2$$
$$H_2(X, X') = \sum_{i} (x_i - x'_i)^2$$
$$H_3(Y, Y') = \sum_{i} (y_i - y'_i)^2$$

Vizsgáljuk ezután külön-külön az előzőekben jellemzett négy esetet.

a) Könnyen belátható, hogy az $X'$, $Y'$ és $\mathbf{A}'$ előrebecsléseket jól közelítő, (1.1)-nek eleget tevő komponensek meghatározása az alábbi szélsőérték számítási feladatra vezet:

$$H = H_1(\mathbf{A}, \mathbf{A}') + H_2(X, X') + H_3(\mathbf{A}X, Y') \rightarrow \text{minimum!}$$

A megoldhatóság szükséges és esetünkben elégséges feltétele is, hogy

$$\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial a_{kr}} = a_{kr} - a'_{kr} + \sum_i a_{kj} x_j x_r - y'_k x_r = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial x_k} = x_k - x'_k + \sum_i a_{ik} \sum_j a_{ij} x_j - \sum_i a_{ik} y'_i = 0$$

teljesüljön. Megoldandó tehát az

(1.a.1) $$\mathbf{A}(\mathbf{E} + X \bigcirc X) = \mathbf{A}' + Y' \bigcirc X$$

(1.a.2) $$(\mathbf{E} + \mathbf{A}^T\mathbf{A})\, X = X' + \mathbf{A}^T Y'$$

vektor-matrix egyenletrendszer, ahol $\mathbf{A}^T$-vel az $\mathbf{A}$ matrix transzponáltját jelöltük, a $\bigcirc$ pedig a vektorok diadikus szorzatának műveleti jele.

Az (1.a.1), (1.a.2) egyenletek iteratív eljárással oldhatók meg. Az iterációra az előzőnél alkalmasabb alak:

(1.a.3) $$X = (\mathbf{E} + \mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}(X' + \mathbf{A}^T\, Y')$$

(1.a.4) $$\mathbf{A} = (\mathbf{A}' + Y' \bigcirc X)\left(\mathbf{E} - \frac{1}{1 + XX}\, X \bigcirc X\right)$$

Az utóbbi egyenlet levezetésénél felhasználtuk azt a mátrix-elméleti azonosságot, amely szerint az invertálandó

$$\mathbf{R} = \mathbf{S} + V \bigcirc W$$

matrix inverze

(1.a.5) $$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{S}^{-1} - \frac{1}{1 + (W\, \mathbf{S}^{-1}\, V)}\, \mathbf{S}^{-1} V \bigcirc W \mathbf{S}^{-1}$$

alakba írható, feltéve, hogy az $\mathbf{S}$ matrix is invertálható; (L. pl. [**1**].)

Az (1.a.3)—(1.a.4) egyenletekkel definiált iterációs eljárás a kísérleti számítások során gyors konvergenciát eredményezett.

b) Ebben az esetben, vagyis amikor az $Y$ rögzített, a szélsőértékszámítási feladatot $\mathbf{A}^{-1}$-re célszerű felírni, mivel, mint látni fogjuk, $\mathbf{A}$ kiszámítása így különösen egyszerűvé válik. Keressük tehát a

$$H = H_1(\mathbf{A}^{-1}, \mathbf{A}'^{-1}) + H_2(\mathbf{A}^{-1}\, Y', X') \rightarrow \text{minimum!}$$

szélsőérték számítási feladat megoldását. Képezve a parciális deriváltakat,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial a_{kr}^{-1}} = a_{kr}^{-1} - a'^{-1}_{kr} + \sum_j a_{kj}^{-1}\, y'_j\, y'_r - x'_k\, y'_r = 0$$

adódik, ami átrendezve illetve matrix-szimbólumokkal felírva azt jelenti, hogy az

$$\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}'^{-1} + \mathbf{A}^{-1}Y' \bigcirc Y' - X' \bigcirc Y' = 0 \tag{1.b.1}$$

egyenletet kell megoldanunk. Szorozzuk (1.b.1)-et balról $\mathbf{A}$-val és rendezzük az egyenletet, aminek eredményeként az

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}'^{-1} + X' \bigcirc Y') = \mathbf{E} + Y' \bigcirc Y'$$

összefüggéshez jutunk. Ebből (1.a.5) felhasználásával kapjuk a keresett eredményt, a korrigált $\mathbf{A}$ matrixot:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{E} + Y' \bigcirc Y')\,\mathbf{A}'\left(\mathbf{E} - \frac{1}{1 + Y'\mathbf{A}'X'}\,X' \bigcirc Y'\mathbf{A}'\right) \tag{1.b.2}$$

Ezután az $X$ vektor meghatározása az (1.1) alapján már egyszerű feladat.

c) Most az $X$ előrebecsült értékét tekintjük konstans vektornak és olyan $\mathbf{A}$ matrixot illetve $Y$ vektort akarunk meghatározni, amelyek kielégítik (1.1)-et és ugyanakkor $\mathbf{A}'$-től illetve $Y'$-től való eltérésük minimális. Vagyis a

$$H = H_1(\mathbf{A}, \mathbf{A}') + H_3(\mathbf{A}\,X', Y') \to \text{minimum!}$$

feladatot kell megoldanunk. Ebből a megfelelő deriválás után az

$$\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial a_{kr}} = a_{kr} - a'_{kr} + \sum_j a_{kj}\, x'_j x'_r - y'_k x'_r = 0$$

azaz

$$\mathbf{A} - \mathbf{A}' + \mathbf{A}\,X' \bigcirc X' - Y' \bigcirc X' = 0$$

formulához jutunk, melyből (1.a.5) felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}' + Y' \bigcirc X')\left(\mathbf{E} - \frac{1}{1 + XX}\,X' \bigcirc X'\right) = \tag{1.c.1}$$

$$= \mathbf{A}' + \frac{1}{1 + X'X'}\,(Y' - \mathbf{A}'X') \bigcirc X'$$

ami már a keresett megoldás. Az $Y$ vektor meghatározása ugyancsak az (1.1) alapján történik.

d) Abban az esetben, ha az $\mathbf{A}$-ra vonatkozó előrejelzést rögzítjük, akkor az $X$ meghatározására szolgáló szélsőértékfeladat

$$H = H_2(X, X') + H_3(\mathbf{A}'\,X, Y') \to \text{minimum!}$$

amelynek megoldásához az

$$\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial x_k} = x_k - x'_k - \sum_i a'_{ik} \sum_j a'_{ij}\, x_j - \sum_i a'_{ik}\, y'_i = 0$$

egyenlet, azaz

$$X - X' + \mathbf{A}'^T \mathbf{A}'X - \mathbf{A}'^T Y' = 0$$

kell hogy teljesüljön. Ebből

(1.d.1) $$X = (\mathbf{E} + \mathbf{A}'^T \mathbf{A}')^{-1} (X' + \mathbf{A}'^T Y')$$

Az $Y$ vektor meghatározása itt is az (1.1) felhasználásával történhet.

Ha a fenti eredményeket input-output számításokban akarjuk alkalmazni, az **A** matrix szerepét értelemszerűen az **E** — **A** matrix veszi át.

Megemlítendő, hogy az input-output analízis egyik alapkikötése a technológiai koefficiens-matrix nem negativitása. Ezzel a kérdéssel az algoritmus kidolgozásánál nem foglalkoztunk, lévén, hogy az ágazati kapcsolati mérlegek előrebecslésére való alkalmazást amúgy is csak mint speciális esetet tekintettük. Az egyes fajlagos mutatók időbeli monoton csökkenése közismert jelenség, s a trendszámítás eszközei mellett egy idő múlva ezek az értékek feltétlenül nem-pozitívvá kell hogy váljanak. A közgazdasági gyakorlat ez esetben negatív koefficiensek helyett zéróval szokott operálni.

## *Egy numerikus alkalmazás*

Példánk realitása érdekében a KSH illetve az OÁH 1959—1966 évekre készült 15 szektoros változatlan áras (1965) nettósított és azonos szerkezetre hozott ágazati kapcsolati mérlegeiből indultunk ki.[2]

Ezt a mérlegsort vontuk össze 5×5-ös méretűvé (ipar, építőipar, mezőgazdaság, közlekedés, kereskedelem) s az így nyert bruttó és nettó outputokat, valamint technológiai matrixokat extrapoláltuk. Az előrebecslés „ex post'' jellegű volt, vagyis az 1959—65-ös adatok alapján történt 1966-ra. (Mely évre tehát tényadatunk is volt.) Az alapadatok prognózisa lineáris és exponenciális trendek alapján történt, s lévén, hogy mind az előrejelzések, mind pedig azok konzisztenciájának biztosítása vonatkozásában egymáshoz igen közel álló eredményt kaptunk, itt csupán a lineáris előrejelzés eredményét ismertetjük.

Bruttó termelés ($X$) 1966-ban (1965-ös áron)

m Ft

| Ágazat | Tényadat | Lineárisan extrapolált | Feltételesen extrapolált | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | iterált | rögzített $Y$ | rögzített **A** |
| Ipar | 296 418 | 297 233 | 296 844 | 295 353 | 296 817 |
| Építőipar | 44 964 | 42 371 | 42 431 | 41 862 | 42 431 |
| Mezőgazdaság | 78 346 | 74 495 | 74 337 | 74 156 | 74 324 |
| Közlekedés | 23 497 | 23 767 | 23 929 | 23 856 | 23 934 |
| Kereskedelem | 21 173 | 21 598 | 21 521 | 21 201 | 21 517 |

[2] Az alapadatok ebben a formában megtalálhatók [7]-ben. A szóban forgó ökonometriai modell koefficienseinek előrebecslési, pontosabban konzisztencia-keresési módszertana nem azonos az itt ismertetésre kerülő eljárással.

Nettó outputok ($Y$) 1966-ban (1965-ös áron)

m Ft

| Ágazat | Tényadat | Lineárisan extrapolált | Feltételesen extrapolált | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | iterált | rögzített $X$ | rögzített **A** |
| Ipar | 154 763 | 160 936 | 161 574 | 161 845 | 161 619 |
| Építőipar | 37 625 | 33 864 | 34 061 | 34 010 | 34 080 |
| Mezőgazdaság | 28 816 | 26 250 | 26 607 | 26 680 | 26 635 |
| Közlekedés | 7 195 | 7 991 | 7 974 | 7 809 | 7 984 |
| Kereskedelem | 15 011 | 15 294 | 15 463 | 15 529 | 15 476 |

Ipar fajlagos (hazai) anyagfelhasználása (A) 1966-ban (1965. évi áron)

| Ágazat | Tényadat | Extrapolált | Feltételesen extrapolált | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | iterált | rögzített $X$ | rögzített $Y$ |
| Ipar | 0,3489 | 0,3324 | 0,3326 | 0,3327 | 0,3367 |
| Építőipar | 0,0106 | 0,0142 | 0,0143 | 0,0142 | 0,0137 |
| Mezőgazdaság | 0,0870 | 0,0885 | 0,0887 | 0,0887 | 0,0911 |
| Közlekedés | 0,0203 | 0,0195 | 0,0195 | 0,0195 | 0,0204 |
| Kereskedelem | 0,0123 | 0,0129 | 0,0130 | 0,0130 | 0,0129 |

Építőipar fajlagos (hazai) anyagfelhasználása (A) 1966-ban (1965. évi áron)

| Ágazat | Tényadat | Extrapolált | Feltételesen extrapolált | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | iterált | rögzített $X$ | rögzített $Y$ |
| Ipar | 0,3900 | 0,3869 | 0,3865 | 0,3869 | 0,3725 |
| Építőipar | 0,0217 | 0,0178 | 0,0178 | 0,0178 | 0,0160 |
| Mezőgazdaság | 0,0070 | 0,0000 | 0,0011 | 0,0000 | 0,0000 |
| Közlekedés | 0,0859 | 0,0856 | 0,0856 | 0,0856 | 0,0843 |
| Kereskedelem | 0,0176 | 0,0144 | 0,0141 | 0,0144 | 0,0135 |

Mezőgazdaság fajlagos (hazai) anyagfelhasználása (A) 1966-ban (1965-ös áron)

| Ágazat | Tényadat | Extrapolált | Feltételesen extrapolált | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | iterált | rögzített $X$ | rögzített $Y$ |
| Ipar | 0,1483 | 0,1459 | 0,1460 | 0,1460 | 0,1414 |
| Építőipar | 0,0109 | 0,0117 | 0,0117 | 0,0117 | 0,0111 |
| Mezőgazdaság | 0,2953 | 0,2827 | 0,2827 | 0,2827 | 0,2815 |
| Közlekedés | 0,0020 | 0,0021 | 0,0021 | 0,0021 | 0,0018 |
| Kereskedelem | 0,0158 | 0,0156 | 0,0157 | 0,0157 | 0,0153 |

Közlekedés fajlagos (hazai) anyagfelhasználása (A) 1966-ban (1965-ös áron)

| Ágazat | Tényadat | Extrapolált | Feltételesen extrapolált | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | iterált | rögzített $X$ | rögzített $Y$ |
| Ipar | 0,2810 | 0,2853 | 0,2853 | 0,2854 | 0,2723 |
| Építőipar | 0,0710 | 0,0797 | 0,0797 | 0,0797 | 0,0783 |
| Mezőgazdaság | 0,0079 | 0,0111 | 0,0112 | 0,0112 | 0,0073 |
| Közlekedés | 0,0135 | 0,0264 | 0,0264 | 0,0264 | 0,0251 |
| Kereskedelem | 0,0125 | 0,0108 | 0,0108 | 0,0108 | 0,0100 |

Kereskedelem fajlagos (hazai) anyagfelhasználása (A) 1966-ban (1965-ös áron)

| Ágazat | Tényadat | Extrapolált | Feltételesen extrapolált | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | iterált | rögzített $X$ | rögzített $Y$ |
| Ipar | 0,1167 | 0,1132 | 0,1132 | 0,1132 | 0,1124 |
| Építőipar | 0,0324 | 0,0282 | 0,0282 | 0,0282 | 0,0281 |
| Mezőgazdaság | 0,0042 | 0,0055 | 0,0055 | 0,0055 | 0,0053 |
| Közlekedés | 0,2802 | 0,2663 | 0,2663 | 0,2663 | 0,2662 |
| Kereskedelem | 0,0082 | 0,0079 | 0,0079 | 0,0079 | 0,0078 |

Mint látható, a feltételesen extrapolált értékek, vagyis melyek az $X = \mathbf{A}X + Y$ egyenletnek is eleget tesznek, igen közel állnak az egyedileg becsült értékekhez. Tapasztalatunk szerint a legjobb közelítést általában az iterált, a legrosszabbat pedig a rögzített $Y$-nal történő számítás adja. A tényadatoktól való eltérés, a szórás nagyságrendje a feltételesen extrapolált értékekre általában nem rosszabb, mint az egyszerű becslés esetében.

*(Beérkezett: 1970. május 15.)*

## IRODALOM


1. Fenyő, I.—Frey, T.: Matematika villamosmérnököknek. Budapest, 1964—65. Műszaki Könyvkiadó.
2. Glattfelder, P.: Extrapoláció rész-trendek átlagából. Szigma, 1968. I. sz. 29—41 o.
3. Glattfelder, P.: A Nehézipari Minisztérium ágazati kapcsolati modelljének előrebecslése. Statisztikai Szemle, 1969. 3. sz. 282—297. o.
4. Rácz, A.: Az ágazati kapcsolati mérlegek technológiai koefficiensei. Statisztikai Szemle, 1967. 6. sz. 507—528. o.
5. Stone—Bates—Bacharach: A Programme for Growth. Input-output Relationships 1954—66. University of Cambridge, 1963. 70 p.
6. Szakolczai, Gy.—Vásárhelyi, P.: Az ágazati kapcsolatok mérlege technológiai koefficienseinek előrebecsült mátrixai. Közgazdasági Szemle, 1967. 12. sz. 1444—1461. o.
7. Az ártervezés ökonometriai modelljének eredményei. II/1. Budapest, 1969. OÁH-INFELOR.

## AN ALGORITHM FOR THE CORRECTION OF THE FORECAST OF INPUT-OUTPUT SCHEMES

In this paper the authors try to find a solution to the following problem.

Let us assume the vectors $X'$ and $Y'$ (originating mainly from estimates), as well as the matrix $\mathbf{A}'$ given and let us determine the vectors $X$, $Y$, and the matrix $\mathbf{A}$ in a way hat the equation

$$\mathbf{A}X = Y$$

should be satisfied and that the sum of the component's square in the differences $\mathbf{A}' - \mathbf{A}$, $X' - X$ and $Y' - Y$ should be minimum. The main result of the paper is an iterative procedure, solving the non-linear simultaneous equations equivalent to the above-mentioned extremum problem. Although there is no theoretical convergence proof in the paper, the procedure proved convergent when applied to practical numerical problems. The authors deal also with a special case of the problem, i.e. with the applicability in the input-output analysis, for which the solution can be written down explicitly.

## АЛГОРИТМ ДЛЯ КОРРЕКЦИИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫХ ОЦЕНОК INPUT–OUTPUT СХЕМ

В настоящей работе авторы ищут решение следующей проблемы: Пусть даны (обычно получаются из оценок) векторы $X'$ и $Y'$, матрица $\mathbf{A}'$, и определим векторы $X$, $Y$ и матрицу $\mathbf{A}$ таким образом, чтобы выполнялось уравнение

$$\mathbf{A}X = Y$$

и чтобы сумма квадратов компонентов разниц $\mathbf{A}' - \mathbf{A}$, $X' - X$ и $Y' - Y$ была минимальная Главным результатом работы является итеративный метод, с помощью которого авторы решают нелинейную систему уравнений, эквивалентную упомянутой экстремальной задачей. Хотя в работе не поставлена принципиальная критерия конвергенции в случае практических нумерических задач метод казалось сходимым. Авторы занимаются особенным случаем проблемы, возможностью употребления в input—output анализе, решение которого можно написать в явном виде.