MIHÁLYFFY LÁSZLÓ

Megjegyzés egy kvadratikus szélsőértékfeladathoz*

1. Bizonyos közgazdasági problémák (l. alább) a következő szélsőértékfeladatra vezetnek: határozzuk meg az

$$\frac{1}{2} x^* Cx - b^* x \tag{1.1}$$

kvadratikus függvény

$$E^* x = f \tag{1.2}$$

feltételt kielégítő minimumát, ahol

C adott $n \times n$-es szimmetrikus pozitív definit matrix,
b^* adott n-dimenziós (sor-) vektor,
E^* adott $m \times n$-es matrix, $m \leq n$,
f adott m-dimenziós (oszlop-) vektor és
x a változók n-dimenziós vektora[1]

$(\ )^*$-gal matrixok és vektorok transzponáltját jelöljük; oszlopvektorok transzponáltja sorvektor és viszont. A dolgozatban kizárólag valós skalárokkal, vektorokkal illetve matrixokkal foglalkozunk.

Az (1.1) kifejezéssel és az (1.2) egyenlőséggel meghatározott szélsőértékfeladat megoldható pl. a Lagrange-multiplikátorok klasszikus módszerével [1]; a megoldást — feltéve, hogy az E^* matrix rangja m — a következő formula szolgáltatja:

$$\begin{pmatrix} x \\ \hdashline \lambda \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c:c} C^{-1} - C^{-1} E(E^* C^{-1} E)^{-1} E^* C^{-1} & C^{-1} E(E^* C^{-1} E)^{-1} \\ \hdashline (E^* C^{-1} E)^{-1} E^* C^{-1} & -(E^* C^{-1} E)^{-1} \end{array}\right) \begin{pmatrix} b \\ \hdashline f \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

ahol λ az ún. Lagrange-féle multiplikátorok m-dimenziós (oszlop-) vektora.

Ebben a dolgozatban egy, a későbbiek során említett kivételtől eltekintve feltesszük, hogy (1.1) a következő alakba írható:

$$\sum_{i=1}^{n} s_i (x_i - \hat{x}_i)^2, \tag{1.1a}$$

* Az ebben a tanulmányban közölt eredményeket megalapozó kutatómunkát az Országos Anyag- és Árhivatal megbízásából az INFELOR Rendszertechnikai Vállalatnál az ártervezés ökonometriai modelljének előkészítése során végeztem. M. L.

[1] Hangsulyozzuk, hogy ebben a dolgozatban kvadratikus függvények lineáris egyenletrendszerrel korlátozott minimálásának problémáival foglalkozunk. és nem kvadratikus programozási feladatokkal. A korlátozó feltételek között nem szerepelhetnek tehát lineáris egyenlőtlenségek, beleértve ezekbe a nemnegativitási feltéte'eket is.

ahol az s_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ mennyiségek pozitív súlyok, $\hat{x}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ pedig az x vektorváltozó i-edik komponenséhez tartozó célkitűzés, az x_i komponensnek rendszerint valamilyen előrebecsült értéke. Ily módon az előzőekben ismertetett feladatnak egy fontos speciális esetéhez jutunk, amelynek például az ágazati kapcsolatok mérlegéből képzett technológiai együttható matrixok konzisztens előrebecslésével kapcsolatban van közgazdasági jelentősége. Ezeknek a konzisztens előrebecsléseknek az esetében az a feladatunk, hogy az egyes elemek jövőben várható alakulására vonatkozó, trendszámítással vagy más módszerrel kapott előrebecsléseket olyan konzisztens rendszerré fogjuk össze, amely rendelkezik az ilyen technológiai együttható matrixok közismert tulajdonságaival, és ugyanakkor a lehető legjobban megközelíti az eredeti, egymástól független előrebecslések eredményeképpen kapott értékeket. Ebben az esetben (1.1a) az eredeti, egymástól független előrebecslésekből álló rendszer közötti különbségek minimálásának követelményét írja fel, (1.2) pedig az együttható matrix közismert konzisztencia-feltételeinek rendszerével azonos.[2]

(1.1) és (1.1a) egybevetéséből világos, hogy esetünkben

$$C = 2\begin{pmatrix} s_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & s_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & & s_n \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

és

$$b^* = 2(s_1\hat{x}_1, s_2\hat{x}_2, \ldots, s_n\hat{x}_n)\,. \tag{1.5}$$

Mivel az $\hat{x}_i$-k nagyságrendje általában — például technológiai együttható matrixok konzisztens előrebecslésének esetében is — különböző, az (1.3) képlet alkalmazása egymással egyenlő, például egységnyi súlyok esetén azt eredményezi, hogy bár az (1.1a) kifejezés értéke kielégítően kicsi lesz, egyes kis abszolút értékű $\hat{x}_i$-khez relatíve nagy $|x_i - \hat{x}_i|$ eltérés fog tartozni. Ezt a jelenséget oly módon igyekeznek elkerülni, hogy kis abszolút értékű $\hat{x}_i$ célkitűzéshez nagy abszolút értékű s_i súlyt rendelnek, és viszont. Természetesnek tűnik, hogy a súlyokat a következőképpen válasszuk:

$$s_i = \frac{1}{|\hat{x}_i|}, \tag{1.6}$$

feltéve, hogy $\hat{x}_i \neq 0$. Igy jutunk ahhoz a kérdéshez, hogy $\hat{x}_i = 0$ esetén választhatjuk-e az s_i súly értékét $+\infty$-nek? A következőkben látni fogjuk, hogy bizonyos feltételek mellett a válasz igenlő, és ilyen esetekben az $\hat{x}_i = 0$, $s_i = \infty$ egyenlőségek maguk után vonják az $x_i = 0$ egyenlőséget.

2. Tegyük fel, hogy $\hat{x}_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Akkor az s_i súlyokat választhatjuk az (1.6) képletnek megfelelően és így (1.4) figyelembevételével a C^{-1} matrixra a

[2] Megjegyezzük, hogy a dolgozatban ismertetett eljárás az E^* mátrixra és az f vektorra vonatkozó további feltevések nélkül nem biztosítja azt, hogy nemnegatív $\hat{x}_i$ célkitűzések esetén a számított x_i értékek feltétlenül nemnegatívok legyenek; ezzel a problémával azonban ebben a tanulmányban nem foglalkozunk.

$$C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} |\hat{x}_1| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |\hat{x}_2| & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & & |\hat{x}_n| \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

összefüggés adódik. Észrevéve, hogy (2.1) jobb oldala értelmes marad akkor is, ha egy vagy több i-re $\hat{x}_i = 0$, önként kínálkozik a gondolat, hogy a szélsőértékfeladat megoldását ebben az esetben is az (1.3) képlettel értelmezzük, hiszen (1.3) jobb oldala csak C^{-1}-től függ, C-től független. Ezzel az értelmezéssel kapcsolatban a következő két probléma vetődik fel:

1. Milyen függvény veszi át (1.1a) szerepét a minimálásnál? Célszerűtlen lenne ugyanis olyan „kvadratikus függvény" minimálásáról beszélnünk, amelynek együtthatói között a $+\infty$ is szerepel.

2. Milyen értelmet tulajdonítsunk az (1.3)-ban szereplő $(E^*C^{-1}E)^{-1}$ kifejezésnek, ha „C^{-1} szingularitása" (vö. (2.1)) maga után vonja az $E^*C^{-1}E$ matrix szingularitását?

A két kérdés közül a másodikra könnyebb feleletet adni. Reguláris matrixok inverzének közvetlen általánosítása tetszőleges (nem szükségképpen négyzetes) matrixok Moore—Penrose-féle általánosított inverze [2], [3], amely a közönséges inverzek sok tulajdonságát örökli, pl. lineáris egyenletrendszerek megoldására hasonlóképpen alkalmazható. Emlékeztetünk ennek a fogalomnak az értelmezésére.

Definíció. Tetszőleges $m \times n$-es A matrix Moore—Penrose-féle általánosított inverzén azt az egyetlen A^+ matrixot értjük, amely kielégíti az

$$AA^+A = A \tag{2.2a}$$

$$A^+AA^+ = A^+ \tag{2.2b}$$

$$(AA^+)^* = AA^+ \tag{2.2c}$$

$$(A^+A)^* = A^+A \tag{2.2d}$$

egyenleteket.

Az idézett forrásmunkákban megtalálható annak bizonyítása, hogy a (2.2) egyenleteknek tetszőleges, zérustól különböző A matrix esetén egy és csak egy megoldása van, azaz, tetszőleges, zérustól különböző matrixnak van M.—P.-féle általánosított inverze és az egyértelmű.

Az elmondottak alapján nyilvánvaló, hogy esetünkben az $(E^*C^{-1}E)^{-1}$ kifejezés helyén egy általánosított inverz fog szerepelni.

Másrészt, az 1. problémával kapcsolatban vegyük észre, hogy (1.3) szerint x_i zérusnak adódik, ha C^{-1} helyébe egy olyan diagonális matrixot helyettesítünk, amelynek i-edik fődiagonáleleme 0. Ez a körülmény azt mutatja, hogy valamely $\hat{x}_i = 0$ célkitűzés esetén az x_i változó értéke a célkitűzéssel, tehát zérussal lesz egyenlő, ha az s_i súly értékét plusz végtelennek választjuk; vö. (2.1). Más szóval, ha $\hat{x}_{i_1} = \hat{x}_{i_2} = \ldots = \hat{x}_{i_r} = 0$, és az összes többi célkitűzés 0-tól különböző, akkor az $s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_r}$ súlyok alábbi választása

$$s_{i_1} = s_{i_2} = \ldots = s_{i_r} = +\infty$$

annyit jelent, hogy az $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$ változókat 0 értékkel rögzítettük. Magától értetődő tehát, hogy (1.1a) helyett a következő célfüggvényt fogjuk tekinteni:

$$\sum_{\hat{x}_i \neq 0} s_i(x_i - \hat{x}_i)^2 = \sum_{\hat{x}_i \neq 0} \frac{1}{|\hat{x}_i|}(x_i - \hat{x}_i)^2 \tag{2.3}$$

ahol az összegzést mindazokra az i indexekre kell elvégezni, amelyekre $\hat{x}_i \neq 0$.

Felvetődik ármost az a további probléma, hogy a változóknak milyen részrendszereihez lehet zérusértékű célkitűzést, és ezekhez végtelen értékű súlyt rendelni úgy, hogy az (1.3) módosításával nyert képletből számított x vektor az (1.2) egyenletnek megoldása legyen. Világos, hogy $f \neq 0$ esetén egyidejűleg valamennyi s_i nem lehet egyenlő plusz végtelennel, mert ekkor az x megoldás is zérusvektornak adódnék.

3. Az előzőekben felvetett kérdésekre a 4. pont 2. tételével fogjuk megadni a választ. Ennek a tételnek a bizonyítása egy olyan újabb problémát vet fel, amelynek megoldása önmagában véve is érdekes és hasznos. Tekintsük ismét az

$$\frac{1}{2} x^* C x - b^* x \tag{1.1}$$

kvadratikus függvény és az

$$E^* x = f \tag{1.2}$$

lineáris egyenletrendszer által meghatározott feltételes szélsőértékfeladatot; ebben a pontban C *tetszőleges* szimmetrikus pozitív definit matrix lehet. Az (1.3) formula alkalmazhatóságának szükséges és elegendő feltétele, hogy a C matrix pozitív definit, E^* rangja maximális, E^* sorainak száma pedig oszlopai számánál nem nagyobb legyen. Gyakorlati szempontból is feltehető a kérdés: mit állíthatunk akkor, ha az E^* matrixra vonatkozó feltevéseket elejtjük, illetve azzal a gyengébb feltevéssel pótoljuk, hogy az (1.2) egyenletnek van megoldása? A válasz a következő.

1. tétel. Legyen C pozitív definit matrix, és legyen az (1.2) egyenletrendszer megoldható. Akkor az (1.1) kvadratikus függvény az (1.2) feltételt kielégítő egyértelmű minimumát az

$$x_0 = C^{-1}b - C^{-1}E(E^*C^{-1}E)^+(E^*C^{-1}b - f) \tag{3.1}$$

pontban veszi fel.

A (3.1) formula (1.3)-tól csak abban különbözik, hogy az $E^*C^{-1}E$ matrixnál közönséges inverz helyett Moore—Penrose-féle általánosított inverz szerepel.

Bizonyítás. Az (1.2) egyenletre vonatkozó feltevésünk azt jelenti, hogy — a sorok esetleges felcserélésével — az E^* matrix és az f vektor következőképpen particionálható:

$$E^* = \begin{pmatrix} E_1^* \\ \cdots \\ H^* E_1^* \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \cdots \\ H^* f_1 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

ahol E_1^* $m_1 \times n$-es ($m_1 \leq m$) matrix, amelynek a rangja m_1, f_1 m_1-dimenziós oszlopvektor, H^* pedig egy olyan $(m - m_1) \times n$-es matrix, amely (1.2) utolsó $m - m_1$ egyenletének az első m_1 egyenlettől való függésmódját adja meg. Az (1.1) kvadratikus függvény az

$$(1.2') \qquad E_1^* x = f_1$$

egyenletrendszerrel együtt már egy olyan kvadratikus szélsőértékfeladatot határoz meg, amelyre (1.3) alkalmazható. Bizonyítani fogjuk, hogy a (3.1) képlettel definiált x_0 vektor azonos ennek az utóbbi feladatnak az egyértelműen meghatározott megoldásával; ebből a tétel állítása már következik.

Felhasználva E^* (3.2) alatti előállítását, egyszerű számítással belátható, hogy az

$$A = E^* C^{-1} E = \begin{pmatrix} E_1^* \\ \cdots \\ H^* E_1^* \end{pmatrix} C^{-1}(E_1, E_1 H)$$

és az

$$A^+ = \begin{pmatrix} I \\ \cdots \\ H^* \end{pmatrix} (I + HH^*)^{-1} (E_1^* C^{-1} E_1)^{-1} (I + HH^*)^{-1} (I, H)$$

matrixok, ahol I m_1-dimenziós egységmatrix, teljesítik a (2.2) egyenleteket, tehát A^+ az $E^* C^{-1} E$ matrix általánosított inverze. Ennek a részeredménynek és f (3.3) alatti előállításának alkalmazásával egyszerű számítás útján belátható, hogy (3.1) jobb oldala egyenlő a

$$C^{-1} b - C^{-1} E_1 (E_1^* C^{-1} E_1)^{-1} (E_1^* C^{-1} b - f_1)$$

vektorral, amely (1.3) szerint azonos az (1.1)—(1.2') feladat (egyértelmű) megoldásával. Tételünk bizonyítását ezzel befejeztük.

Az 1. tétel mellet a következőkben szükségünk lesz még az alábbi segédtételre is:

LEMMA (Penrose [3]). Legyen U $k \times m$-es, V pedig $m \times n$-es mátrix, és legyen

$$U^* U V = 0;$$

akkor szükségképpen

$$UV = 0.$$

Bizonyitás. Feltevésünk értelmében tetszőleges n-dimenziós x vektorra

$$U^* U V x = 0,$$

tehát

$$x^* V^* U^* U V x = 0,$$

más szóval, a k-dimenziós UVx vektor hossza egyenlő zérussal. Ebből x tetszőlegessége folytán a lemma állítása közvetlenül kovetkezik.

4. Térjünk vissza a kiindulópontként szolgáló problémához. Evvel kapcsolatban a következő eredményt mondhatjuk ki:

2. tétel. Legyen

$$(4.1) \qquad \bar{C} = \begin{pmatrix} |\hat{x}_1| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |\hat{x}_2| & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & & |\hat{x}_n| \end{pmatrix}$$

$$b^* = (\operatorname{sign}(\hat{x}_1), \operatorname{sign}(\hat{x}_2), \dots, \operatorname{sign}(\hat{x}_n)).$$

Akkor az

$$E^*\bar{C}E(E^*\bar{C}E)^+f = f \tag{4.2}$$

egyenlőség szükséges és elegendő ahhoz, hogy a

$$\sum_{\hat{x}_i\neq 0} \frac{1}{|\hat{x}_i|}(x_i - \hat{x}_i)^2 \tag{2.3}$$

kvadratikus függvény

$$E^*x = f \tag{1.2}$$

feltételt kielégítő minimumát az

$$x_0 = \bar{C}b - \bar{C}E(E^*\bar{C}E)^+(E^*\bar{C}b - f) \tag{4.3}$$

pontban vegye fel.

(2.3)-ban az összegzést azokra az i indexekre kell elvégezni, amelyekre $\hat{x}_i \neq 0$.

Bizonyítás. A tétel bizonyítását két lépésben végezzük: az elsőben kimutatjuk, hogy (4.2) szükséges és elégséges ahhoz, hogy a (4.3) képlettel definiált x_0 (1.2)-nek megoldása legyen, a másodikban pedig az x_0 vektor minimumtulajdonságát igazoljuk.

A (4.3) egyenlőség mindkét oldalát balról E^*-gal szorozva

$$E^*x_0 = E^*\bar{C}b - E^*\bar{C}E(E^*\bar{C}E)^+(E^*\bar{C}b - f) \tag{4.4}$$

adódik. Kimutatjuk, hogy a jobb oldal első két tagjának összege 0. Jelöljük Q-val azt a diagonális matrixot, amelyben a főátló i-edik eleme $\sqrt{|\hat{x}_i|}$; nyilvánvaló, hogy $Q^*Q = Q^2 = \bar{C}$. Akkor (2.2a) szerint

$$E^*Q^*QE = E^*\bar{C}E(E^*\bar{C}E)^+E^*Q^*QE.$$

A Penrose-féle lemma szerint $(U = QE,\ V = [I - E^*CE(E^*CE)^+]^*)$ ez az egyenlőség maga után vonja az

$$E^*Q^* = E^*\bar{C}E(E^*\bar{C}E)^+E^*Q^*$$

egyenlőséget is. Ebből, jobbról Q-val szorozva és (4.4)-be téve, kapjuk, hogy

$$E^*x_0 = E^*\bar{C}E(E^*\bar{C}E)^+f,$$

tehát (1.2) akkor és csak akkor áll fenn, ha (4.2) teljesül.

A második résszel kapcsolatban az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\bar{C}$ főátlójának első $r \leq n$ eleme zérustól különböző, $n - r$ eleme pedig 0, más szóval, $\bar{C}$ következőképpen particionálható:

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} \bar{C}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ahol $\bar{C}_1$ r-dimenziós nemszinguláris diagonális matrix. Legyen b^*, E^* és x_0 megfelelő particionálása rendre

$$b^* = (b_1^*, 0),$$

$$E^* = (E_1^*, E_2^*),$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix},$$

ahol b_1^* és u r-dimenziós sor- illetve oszlopvektor, E_1^* és E_2^* pedig $m\times r$-es, illetve $m\times(n-r)$-es matrixok. Ezeknek a jelöléseknek a felhasználásával (4.3) a következő alakba írható:

$$x_0 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{C}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} -$$

$$\begin{pmatrix} \bar{C}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \left((E_1^*, E_2^*) \begin{pmatrix} \bar{C}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \right)^+ \left((E_1^*, E_2^*) \begin{pmatrix} \bar{C}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} - f \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{C}_1 b_1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{C}_1 E_1 \\ 0 \end{pmatrix} (E_1^* \bar{C}_1 E_1)^+ (E_1^* \bar{C}_1 b_1 - f),$$

és ez az összefüggés az 1. tétel alapján azt mutatja, hogy az r-dimenziós u vektor a

$$\sum_{\hat{x}_i \neq 0} \frac{1}{|\hat{x}_i|} (u_i - \hat{x}_i)^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{|\hat{x}_i|} (u_i - \hat{x}_i)^2 \tag{4.5}$$

kvadratikus függvény és az

$$E_1^* u = f \tag{4.6}$$

feltételrendszer által meghatározott szélsőértékfeladat megoldása. A 2. tétel bizonyítását ezzel befejeztük.

Megjegyzések. I. Az általánosított inverzek (2.2a) és (2.2c) tulajdonsága szerint $E^*\bar{C}E\,(E^*\bar{C}E)^+$ az $E^*\bar{C}E$ mátrix oszlopvektorainak terére vonatkozó Hermitikus projekció. Másrészt, a Penrose-féle lemma alkalmazásával belátható, hogy $E^*\bar{C}E$ oszlopvektorainak tere megegyezik azzal az altérrel, amelyet az E^* mátrixnak olyan oszlopai feszítenek ki, amely oszlopoknak megfelelő változókhoz zérustól különböző célkitüzés tartozik. Ezek szerint (4.2) pontosan azt jelenti, hogy az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változók tetszőleges olyan $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-r}}$ részrendszeréhez rendelhetünk zérusértékű célkitűzést és ezekhez $+\infty$ értékű súlyokat, amely részrendszer mellett az f vektor előállítható az E^* matrix nem törölt (azaz. zérustól különböző $\hat{x}_i$ célkitűzésekhez tartozó) oszlopainak lineáris kombinációjaként.

II. A 2. tétel állítása bizonyos szempontból triviálisnak tűnhet. Hogy ez nincs így, azt következőképpen láthatjuk be. Tegyük fel, hogy az (1.1a) kvadratikus függvénynek az (1.2) feltétel melletti minimumát keressük, ahol

$\hat{x}_i \neq 0$ és $s_i = \dfrac{1}{|\hat{x}_i|}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Rögzítsük az utolsó $n-r$ változót következőképpen:

$$x_{r+1} = \hat{x}_{r+1},\ x_{r+2} = \hat{x}_{r+2},\ \ldots, x_n = \hat{x}_n,$$

és jelöljük E^* utolsó $n-r$ oszlopát — mint az előzőkben is — E_2^*-gal, a rögzített komponensekből álló oszlopvektort pedig v-vel. Tegyük fel továbbá, hogy az $f - E_2^* v$ vektor előállítható E^* első r oszlopának lineáris kombinációjaként. Akkor a (4.5) kvadratikus függvénynek az

$$E_1^* u = f - E_2^* v \tag{4.6a}$$

feltétel melletti minimuma általában nagyobb lesz, mint az eredeti feladaté. A két feladat minimuma közötti eltérés annál kisebb, minél kisebb a rögzített $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ változók abszolút értéke.

5. Befejezésül az előzőekben mondottakat néhány numerikus példával illusztráljuk. A korábbiakban bevezetett jelölésekkel élve, legyen

$$E^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^*$$

és

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

és tekintsük az

$$E^* x = f \tag{5.1}$$

egyenletrendszert. Ennek olyan megoldását akarjuk meghatározni, amelynek bizonyos előre adott $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4, \hat{x}_5)^*$ célkitűzéstől való eltérése a lehető legkisebb abban az értelemben, hogy egy

$$\sum_i \frac{1}{|\hat{x}_i|}(x_i - \hat{x}_i)^2$$

alakú négyzetösszeget minimál.

Megfigyelve, hogy az f vektor előállítható E^* első három oszlopának lineáris kombinációjaként — például a 0, 0,5 és 0,5 együtthatók segítségével — az $\hat{x}_1$ és $\hat{x}_5$ célkitűzések értékét választhatjuk zérusnak, a megfelelő súlyok értékét pedig $+\infty$-nek.

Tekintsük például az

$$(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4, \hat{x}_5)^* = (2, 1, 1, 0, 0)^*$$

célkitűzések rendszerét, és legyen

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b^* = (1, 1, 1, 0, 0).$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$(E^* \bar{C} E)^+ = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 12 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}^+ = \frac{1}{20.11^2}\begin{pmatrix} 335 & -50 & 95 \\ -50 & 170 & 40 \\ 95 & 40 & 45 \end{pmatrix}$$

továbbá

$$E^*\bar{C}E(E^*\bar{C}E)^+f = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 10 & -1 & 3 \\ -1 & 10 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = f.$$

A 2. tétel alapján az

$$x_0 = \bar{C}b - \bar{C}E(E^*\bar{C}E)^+(E^*\bar{C}b - f) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vektor a

$$(5.2) \qquad \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{|\hat{x}_i|}(x_i - \hat{x}_i)^2 = \frac{1}{2}(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2$$

kvadratikus függvény (5.1) feltételt kielégítő minimumának helye; a minimum értéke 1,5.

Tekintsük most a célkitűzéseknek egy olyan rendszerét, amelyben mindegyik célkitűzés zérustól különböző. Legyen például

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5)^* = \left(2, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^*.$$

Akkor a

$$(5.3) \qquad \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{|\bar{x}_i|}(x_i - \bar{x}_i)^2 = \frac{1}{2}(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 +$$
$$2(x_4 - 0{,}5)^2 + 2(x_5 - 0{,}5)^2$$

kvadratikus függvény az (5.1) feltétellel együtt egy olyan feltételes szélsőértékfeladatot alkot, amelyre az (1.3) képlet alkalmazható. A részletek mellőzésével közöljük, hogy a minimum helyéül az

$$x_0^* = \left(1, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

vektor adódik, a hozzátartozó minimum értéke pedig 2. Most vizsgáljuk meg, hogy mi történik akkor, ha ebben a feladatban egy vagy több, alkalmasan választott változó értékét rögzítjük, és a minimálást a nem rögzített változókra vonatkozóan próbáljuk elvégezni. Rögzítsük például az x_4 és x_5 változókat

$$x_4 = \bar{x}_4 = 0{,}5$$

illetve

$$x_5 = \bar{x}_5 = 0{,}5$$

értékkel. Ezt megtehetjük, mert ekkor (5.1) az

$$x_1 + 2x_2 = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$$

$$(5.1a) \qquad -x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 - 2.\,0{,}5 = 1$$

$$x_2 + x_3 = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$$

egyenletrendszerre redukálódik, amely megoldható: egy megoldása például $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0{,}5$. Vegyük észre, hogy (5.1a) jobb oldala azonos $\frac{1}{2}f$-fel, továbbá $x_4 = \bar{x}_4$ és $x_5 = \bar{x}_5$ miatt (5.3) egybeesik (5.2)-vel, és hogy ily módon feladatunk visszavezethető az előző feladatra, amelyet a 2. tétel alapján oldottunk meg. Felhasználva az ott kiszámított $(E^*\bar{C}E)^+$ matrixot, azt az eredményt találjuk, hogy az

$$x' = \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}25 \\ 0{,}75 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$$

vektor az (5.1) egyenletrendszernek olyan megoldása, amelyre vonatkozóan $x_4' = \bar{x}_4$, $x_5' = \bar{x}_5$, és az (5.2) kvadratikus függvény értéke minimális. Azonban — összhangban az előző pont II. megjegyzésével — ennek a minimumnak az értéke

$$\frac{1}{2}(1-2)^2 + (-0{,}25-1)^2 + (0{,}75-1)^2 = 2{,}125\,,$$

tehát nagyobb, mint 2, mely érték a szokványos (1.3) eljárás alkalmazásával adódott.

(Beérkezett: 1970. április 28.)

IRODALOM

1. Boot, John C. G.: Quadratic Programming. Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1964. XI + 207 p.
2. Egerváry, J.: Az inverz mátrix általánosításáról. Az MTA Matematikai Kutató Intézetének Közleményei. 1956. 3. sz. 315—324. p.
3. Penrose, R.: A generalized inverse for matrices. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1955. 406—413.

COMMENT ON A QUADRATIC EXTREME VALUE PROBLEM

The paper extends the problem of minimizing the weighted sum of squares of the form

$$\sum_{i=1}^{n} s_i(x_i - \hat{x}_i)^2$$

subject to linear equality constraints, so that certain s_i weights are allowed to take the value $+\infty$. Then it gives also an explicit solution to the generalized problem with the aid of the Moore—Penrose generalized inverse of matrices. A weight $s_i = \infty$ cannot be assigned but to such x_i variables, to which a 0-valued $\hat{x}_i$ (called target) belongs in which case this assignement entails also the relations $x_i = 0$. In other words, assignement of an infinitely large s_i weight to an x_i variable means to fix the variable in question auto-

matically at the value 0. The paper gives the necessary and sufficient conditions as to which sub-systems of the x_i variables may be fixed at 0 value. The formula (4.3) yielding the explicit solution of the problem contains, as a special case, the formula which results from the Lagrange multiplier method in the case of finite s_i weights.

The theoretical results are illustrated by numerical examples. The paper indicates also the possibility of economic application.

ЗАМЕЧАНИЕ В СВЯЗИ С КВАДРАТИЧЕСКОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕЙ

Работа распространяет проблему минимализации взвешенных сумм квадратов

$$\sum_{i=1}^{n} s_i(x_i - \hat{x}_i)^2$$

при линейной системы ограничений, таким образом, чтобы для некоторых весов s_i было допустимо значение $+\infty$, дальше с помощью обобщённой обратной матрицы типа Мор-Пенрос, даёт явное решение для обобщённой проблемы. Только к той переменной x_i можно придавать весы $s_i = \infty$, которой соответствует так называемая целевая установка $\hat{x}_i = 0$, и тогда это придание влечёт за собой связь $x_i = 0$, другими словами, придавать какой-то переменной x_i бесконечно большой вес s_i, значит заранее закрепить данную переменную равным нулю. Работа даёт необходимое и достаточное условие того, что какиеподсистемы переменных x_i можно закрепить со значением 0. Формула (4.3), дающая явное решение проблемы, включает в себе, как особенный случай, формулу, которая получается из метода мультипликаторов Лагранжа в случае конечных весов s_i.

Теоретические результаты иллюстрированы нумерическим значением.

Работа показывает возможность экономического применения проблемы.