Faragó Kálmán — Gyulai András

Információs rendszer szervezésének egy matematikai modellje

Sok időt és költséget vesztenek el az iparban azzal, hogy az információtovábbítás nem kielégítő gyorsasággal, nagy kerülőutakkal történik. Az alább ismertetendő módszer ezen a tényen úgy kíván segíteni, hogy az egyes informálandó egységek között optimalizálja az információtovábbító-csatornák számát. Ezzel az információ útját és meghibásodásának valószínűségét minimálisra csökkentjük. Tudomásunk szerint az alábbi módszert még nem használták ilyenfajta problémák megoldására.

Definíciók

Jelöljük az informálandó egységeket a_i-vel ($i = 1, 2, \ldots, n$). A rendszerben futó információk (ezek nem feltétlenül különbözőek) száma legyen r. Jelük legyen K_j ($j = 1, 2, \ldots, r$). Legyen $\mathbf{b}^i$ a következő vektor:

$$\mathbf{b}^i = (b_1^i, b_2^i, \ldots, b_j^i, \ldots, b_r^i),$$

ahol
$$b_j^i = \begin{cases} 1, \text{ ha a } K_j \text{ információt } a_i\text{-be továbbítjuk,} \\ 0 \text{ egyébként.} \end{cases}$$

Jelöljük S_i-vel $\mathbf{b}^i$ komponenseinek összegét, azaz

$$S_i = \sum_{j=1}^{r} b_j^i.$$

S_i nyilvánvalóan azt adja meg, a_i-be hány különböző információ érkezik és $\mathbf{b}^i$-ben az egyesek sorszáma egyben a befutó információ sorszámát is jelenti.

1. Definíció

Két a_i-t összekötő információtovábbító-vonalat (pl. telefonkábel) *csatornának* nevezzük.

2. Definíció

Az információk kiinduló helyét *forrás*-nak nevezzük és a továbbiakban A_j-vel ($j = 1, 2, \ldots r$) jelöljük.

3. Definíció

Azt mondjuk, hogy $\mathbf{b}^i$ *megelőzi* $\mathbf{b}^k$-t, ha

$$S_i < S_k.$$

Pl.: $\mathbf{b}^i = (1, 0, 0)$ és $\mathbf{b}^k = (0, 1, 1)$ esetén

$S_i = 1$ és $S_k = 2$, tehát $\mathbf{b}^i$ megelőzi $\mathbf{b}^k$-t.

4. *Definíció*

$\mathbf{b}^i$ *összehasonlítható* $\mathbf{b}^k$ -val, ha

$$S_i = S_k.$$

5. *Definíció*

Legyen $\mathbf{b}^i$ *következménye* $\mathbf{b}^k$, ha $\mathbf{b}^i$ megelőzi $\mathbf{b}^k$-t és

$$b_j^k - b_j^i \geq 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, r.$$

Jelöljük ezt:
$$\mathbf{b}^i \Rightarrow \mathbf{b}^k.$$

Pl. ha $\mathbf{b}^i = (0, 1, 1, 0, 0)$ és

$\mathbf{b}^k = (1, 1, 1, 0, 1)$

akkor $\mathbf{b}^i \Rightarrow \mathbf{b}^k$

Ha nincs olyan p index, hogy $\mathbf{b}^i \Rightarrow \mathbf{b}^p$ és $\mathbf{b}^p \Rightarrow \mathbf{b}^k$, akkor $\mathbf{b}^k$-t $\mathbf{b}^i$ *közvetlen következményének* nevezzük.

6. *Definíció*

Azon $\mathbf{b}^{it}$ ($t = 1, 2, \ldots$), vektorok halmazát, melyek a $\mathbf{b}^{io}$ vektor következményei; *fának* nevezzük és $\mathbf{b}^{io}$ a fa kezdőeleme.

Célunk most már annak meghatározása, hogy mely a_i–k között kell csatornát létesíteni úgy, hogy a csatornák számát minimalizáljuk. Megadjuk azt is, hogy egy- vagy kétoldalú összeköttetést létesítünk-e az egyes helyek között. Egyoldalúnak nevezzük az összeköttetést, ha csak az egyik irányban, kétoldalúnak, ha mindkét irányban folyhat információ a csatornában.

Az algoritmus

1. Tegyük fel, hogy a K_j információt $a_{j1}, a_{j2}, \ldots a_{jm}$-be kell eljuttatnunk. Írjuk fel a $\mathbf{b}^i$ vektorokat úgy, hogy ha a_i-be a $K_{j_1}, K_{j_2}, \ldots, K_{j_v}$ információkat juttatjuk el, akkor a $\mathbf{b}^i$ vektor $j_1, j_2, \ldots, j_v$-ik komponense egyes, a többi zérus. Rendezzük $\mathbf{b}^i$-ket S_i-k növekvő sorrendjében.
2. Tekintsük az összehasonlítható $\mathbf{b}^{it}$ ($t = 1, \ldots, p$) vektorokat. Ha létezik olyan $\mathbf{b}^{iw}$, $w \in \{t\} \subset \{1, 2, \ldots p\}$ vektorhalmaz, melyre $\mathbf{b}^{iw} = \mathbf{b}^{iu}$ (minden $u, w \in \{t\}$), a megfelelő a_{iw} helyeket egyetlen csatornalánccal kötjük össze.
3. Tekintsük azon $\mathbf{b}^{it}$-ket, melyre $S_{it} = 1$, ekkor a megfelelő a_{it}-ket közvetlenül a forrásokkal kötjük össze és a további vizsgálatból kizárjuk.
4. Legyen $\mathbf{b}^{uo}$ az első olyan $\mathbf{b}$, hogy $S_{uo} \geq 2$.
   Írjuk fel a $\mathbf{b}^{uo}$-hoz tartozó fát a következő módon:
   Tekintsünk egy $\mathbf{b}^{u1}$-t, melyre $\mathbf{b}^{u1} \Rightarrow \mathbf{b}^{uo}$. Legyen $\mathbf{b}^{u2} \Rightarrow \mathbf{b}^{uo}$ és vizsgáljuk meg, $\mathbf{b}^{u1} \Rightarrow \mathbf{b}^{u2}$?

Ha ez fennáll, ábrázoljuk ezt a következő módon:

$$\mathbf{b}^{u0} \Rightarrow \mathbf{b}^{u1} \Rightarrow \mathbf{b}^{u2}.$$

Ha $\mathbf{b}^{u2} \not\Leftarrow \mathbf{b}^{u1}$, akkor $\mathbf{b}^{u0} \begin{matrix} \Rightarrow \mathbf{b}^{u1} \\ \Rightarrow \mathbf{b}^{u2} \end{matrix}$.

Végezzük ezt az eljárást mindaddig, amíg találunk olyan $\mathbf{b}$-t, amely $\mathbf{b}^{u0}$ következménye.

5. Ha ilyen $\mathbf{b}$ már nincs, vegyünk egy olyan vektort, amely nem szerepel az eddigi fákban és legyen ez a vektor a következő fa kezdőeleme. Ha egy fa a kezdőelemen kívül más vektort nem tartalmaz, közvetlenül a forrásokkal kötjük össze.
6. Írjuk fel az így definiált összes fát. A fáknak természetesen lesznek közös elemei, csak a kezdőelemek különbözőek.
7. Tekintsük a rendezésben legutolsónak álló elemet (legyen ez $\mathbf{b}^z$). S_z tehát maximális az S-k között. (az a_z-be futó információk száma maximális) Vizsgáljuk meg, mely fákban létezik oly elem, melynek $\mathbf{b}^z$ a közvetlen következménye, és erre a $\mathbf{b}^q$ elemre

$$S_z - S_q = 1$$

a) $\mathbf{b}^q$ létezése esetén a_z-t a_q-val és azzal a forrással kössük össze, mely nem szerepel a_q információforrásai között. Töröljük $\mathbf{b}^z$-t az összes fából és a rendezett vektorhalmazból is. Ismételjük a 7. pontot.

b) Ha ilyen $\mathbf{b}^q$ nem létezik, tekintsük azokat a közvetlen következményeket az egyes fákban, melyekre

$$S_z - S_{zd} \geq 2. \qquad d = 1, 2, \ldots$$

Számítsuk ki $\Delta = \min\limits_{d=1,2,\ldots} (S_z - S_{zd})$-t.

Tehát a_z-re nézve ez $\Delta + 1$ csatornát jelent. Ezt a számot úgy csökkenthetjük, hogy a $\mathbf{b}^z$ vektort előállítjuk Δ-nál nem több vektor szuperpozíciójaként.

Ehhez értelmezzük a következő vektor-összeadást:

$$\mathbf{u}(u_1, u_2, \ldots, u_e) \oplus \mathbf{u}(v_1, v_2, \ldots, v_e) = w(w_1, w_2, \ldots, w_e),$$

u_i és $v_j = 0$ vagy 1,

$$w_k = \begin{cases} 1, & \text{ha } u_k \text{ és } v_k \text{ közül legalább az egyik } 1 \\ 0, & \text{ha } u_k = v_k = 0. \end{cases}$$

Állítsuk elő $\mathbf{b}^z$-t Δ-nál nem több diszjunkt vektor egyesítéseként. Vegyük ebből a minimális darabszámú egyesítést. Ha

$$\mathbf{b}^{z1} \oplus \mathbf{b}^{z2} \oplus \ldots \oplus \mathbf{b}^{z\Delta} = \mathbf{b}^z,$$

akkor a_z-be a_{z1}-ből, a_{z2}-ből, . . ., $a_{z\Delta}$-ből építünk ki csatornákat. $\mathbf{b}^z$-t töröljük a fákból és a rendezett vektor-halmazból, ezután a 7. pontnál folytatjuk az eljárást.

c) Az eljárás akkor ér véget, amikor $\mathbf{b}^z$ a vektor-halmaz első eleme.

A modell számítógépi megvalósítása rendkívül egyszerű, hiszen egy **b** vektor tárolása egy 0—1 bitű rekeszben történhet, ami kis memória esetén is gyorsan és kényelmesen programozható.

Példa

Adott 20 különböző helyen levő informálandó egység és 10 különböző információ.

Milyen jellegű csatornákat létesítünk az egyes a_i-k között? Mi a csatornák minimális száma?

K_1 információt: a_6, a_7, a_9 a_{11}, a_{15}, a_{19}-be
K_2 : a_2, a_3, a_5, a_8, a_{12}, a_{15}, a_{18}-ba
K_3 : a_2, a_3, a_5, a_8, a_9, a_{12}, a_{14}, a_{15}, a_{20}-ba
K_4 : a_4, a_7, a_{10}, a_{13}, a_{16}, a_{17}, a_{18}, a_{19}, a_{20}-ba
K_5 : a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{16}, a_{20}-ba
K_6 : a_2, a_3, a_5, a_8, a_9, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{17}, a_{20}-ba
K_7 : a_1, a_2, a_3, a_4, a_8, a_{12}, a_{16}, a_{19}-be
K_8 : a_2, a_3, a_5, a_8, a_9, a_{12}, a_{14}, a_{15}, a_{17}, a_{20}-ba
K_9 : a_2, a_3, a_5, a_8, a_9, a_{12}, a_{14}, a_{15}, a_{16}, a_{20}-ba
K_{10} : a_2, a_3, a_5, a_8, a_9, a_{12}, a_{16}, a_{17}, a_{20}-ba

kell eljuttatnunk.

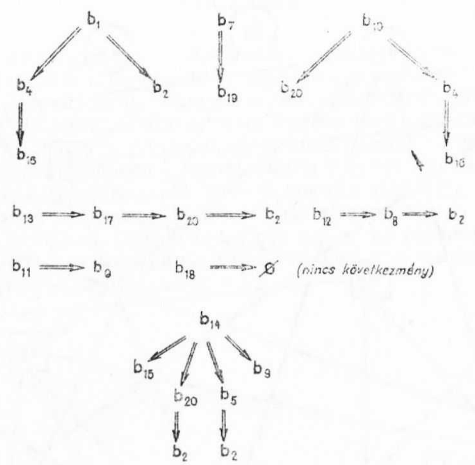
Az algoritmus egyes lépései:

1. $\mathbf{b}^1 = (0000101000)$, $S_1 = 2$ $\quad$ $\mathbf{b}^{11} = (1000100000)$, $S_{11} = 2$
$\mathbf{b}^2 = (0110111111)$, $S_2 = 8$ $\quad$ $\mathbf{b}^{12} = (0110001111)$, $S_{12} = 6$
$\mathbf{b}^3 = (0110111111)$, $S_3 = 8$ $\quad$ $\mathbf{b}^{13} = (0001010001)$, $S_{13} = 3$
$\mathbf{b}^4 = (0001101000)$, $S_4 = 3$ $\quad$ $\mathbf{b}^{14} = (0010010110)$, $S_{14} = 4$
$\mathbf{b}^5 = (0110110111)$, $S_5 = 7$ $\quad$ $\mathbf{b}^{15} = (1110010110)$, $S_{15} = 6$
$\mathbf{b}^6 = (1000000000)$, $S_6 = 1$ $\quad$ $\mathbf{b}^{16} = (0001101011)$, $S_{16} = 5$
$\mathbf{b}^7 = (1001000000)$, $S_7 = 2$ $\quad$ $\mathbf{b}^{17} = (0001010101)$, $S_{17} = 4$
$\mathbf{b}^8 = (0110011111)$, $S_8 = 7$ $\quad$ $\mathbf{b}^{18} = (0101000000)$, $S_{18} = 2$
$\mathbf{b}^9 = (1010110111)$, $S_9 = 7$ $\quad$ $\mathbf{b}^{19} = (1001001000)$, $S_{19} = 3$
$\mathbf{b}^{10} = (0001100000)$, $S_{10} = 2$ $\quad$ $\mathbf{b}^{20} = (0011110111)$, $S_{20} = 7$

A rendezett vektorhalmaz:

$\mathbf{b}^6, \mathbf{b}^1, \mathbf{b}^7, \mathbf{b}^{10}, \mathbf{b}^{11}, \mathbf{b}^{18}, \mathbf{b}^4, \mathbf{b}^{13}, \mathbf{b}^{19}, \mathbf{b}^{14}, \mathbf{b}^{17}, \mathbf{b}^{16}, \mathbf{b}^{12}, \mathbf{b}^{15}, \mathbf{b}^5, \mathbf{b}^8, \mathbf{b}^9, \mathbf{b}^{20}, \mathbf{b}^2, \mathbf{b}^3.$

2. Mivel $\mathbf{b}^2 = \mathbf{b}^3$, a_2 és a_3 között létesítünk kapcsolatot és $\mathbf{b}^3$-t töröljük.
3. $S_6 = 1$, ezért a_6-ot csak A_1-gyel kötjük össze. ($\mathbf{b}^6$-nak az első komponense **1**, ezért A_1-gyel).
4. Elkészítjük az összes fát:



Vizsgáljuk meg, a_2-t mely forrásokkal, ill. telephelyekkel kössük össze.

$\mathfrak{b}^2$ közvetlen következménye $\mathfrak{b}^5$-nek és $\mathfrak{b}^{20}$-nak. Válasszuk a_5 és a_{20} közül azt, amelyet a_2-vel összekötve kisebb a költség. (Pl. kisebb távolság, jobb talajviszonyok). Ilyen legyen pl. a_{20}, ide három csatorna fut össze, a_{10}, a_{14}, és A_{10}-ből.

Ugyanis legyen $\mathfrak{b}^E$ a következő vektor:

$$\mathfrak{b}^E = \mathfrak{b}^{10} \oplus \mathfrak{b}^{14}.$$

Mivel $\mathfrak{b}^{10}$ és $\mathfrak{b}^{14}$ diszjunktak, $S^E = S_{10} + S_{14} = 2 + 4 = 6$.

Tehát a minimális csatornaszám; mivel $\Delta E = 2$;

$$S_{20} - S_E + \Delta E = 3.$$

Jól látható, hogy ha a_{17}-t kapcsolnánk össze a_{20}-szal, a befutó vonalak száma

$$S_{20} - S_{17} + 1 = 4$$

lenne.

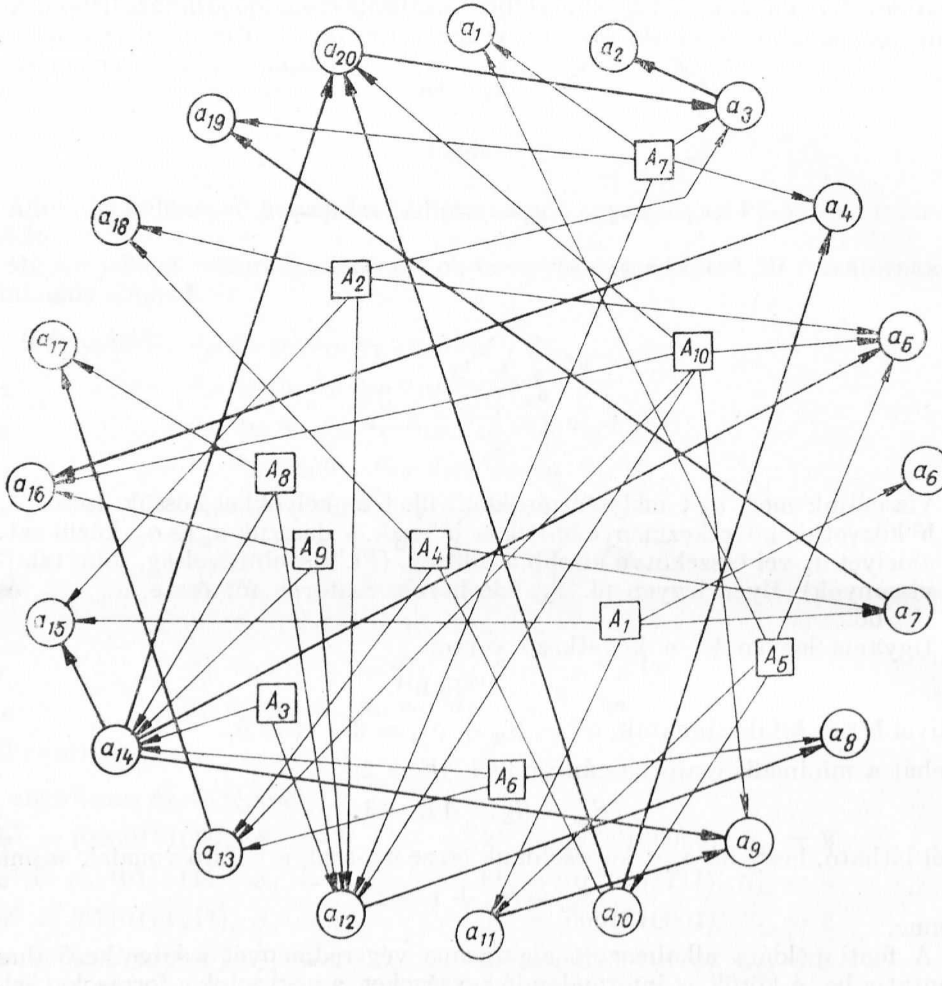
A fenti példára alkalmazott algoritmus végeredményét a következő ábra mutatja be. A körök az informálandó egységeket, a négyzetek a forrásokat jelzik. A nyilak a csatornákat és az információáramlás irányát mutatják.

Végezetül az algoritmus egyéb helyeken való felhasználhatóságával kapcsolatban még két alkalmazási területet említünk.

1. Víztároló rendszerek kiépítésénél a forráshelyek és a tárolómedencék közötti csatornahálózatot oly módon adja meg az algoritmus, hogy minimalizálja az egyirányú áramlást biztosító berendezések (zsilipek) számát.

2. Az elektrotechnikában tekintsük a következő problémát. A stadionokban felszerelt eredményjelző táblák kapcsolását eddig relékkel valósították meg. Az algoritmus olyan kapcsolást szolgáltat, mely megadja, hogy két égőt huzallal vagy diódával kell összekötni, avagy nem kell semmilyen kapcsolatot sem létesíteni közöttük. Az algoritmus nagy előnye, hogy a felhasznált diódák számát minimalizálja, amellyel egyúttal az előállítási költséget is minimalizáljuk. Ezzel elérjük, hogy a kapcsolás minimális térfogatot igényel, és ezt esztétikai szempontból sem hagyhatjuk figyelmen kívül.

(Beérkezett: 1970. május 20.)



A MATHEMATICAL MODEL FOR THE ORGANIZATION OF INFORMATION SYSTEMS

The algorithm described in the article solves the following problem:

There are r sources and n receiving places. The sources and the receiving places are connected with channels. The problem to be solved is how to form the channels so that their number should be minimum, furthermore the number of the channels establishing one-way contact should be minimum as well (latter being significant at the 2. application described at the end of the article).

When establishing the channels another essential standpoint is that only the envisaged plants shall receive information from a given source, the others shall not.

The algorithm described here is the authors' own creation but similar algorithms can be found in the book by László Béla Kovács: A diszkrét programozás kombinatorikus módszerei (Combinatorial Methods of Discrete Programming).

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОРГАНИЗАЦИИ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Описанный в статье алгоритм разрешает следующую проблему:

Существуют r источников и n приемочных пунктов. Источники и приемочный пункты связываются каналами. Проблемой, которую нужно разрешить, является то, как нужно создать каналы таким образом, чтобы их количество было минимальным, далее, чтобы было минимальным и количество каналов, создающих связь в одном направлении. (Это последнее важно при использовании 2, изложенном в конце статьи.)

При создании каналов существенной точкой зрения является и то, чтобы из одного источника получили лишь те пункты, для которых предписано, а остальные нет.

Изложенный здесь алгоритм является собственным творением авторов, но похожие алгоритмы можно найти в книге Ласло Бела Ковача под названием: «Комбинаторные методы дискретного программирования.»