Székely Béla

Mátrixok egy speciális diadikus felbontása és ennek néhány alkalmazása az összehasonlító elemzésben

A cikkben a matrixok diadikus felbontásáról szóló általános ismertetés után először bemutatjuk egy **A** matrix olyan speciális felbontását, ahol a keletkező diádok sor, illetőleg oszloptényezői az **AA**′ illetőleg az **A**′**A** matrixok saját vektorai. A második részben megpróbáljuk magyarázni ezen felbontásból keletkezett diádok, mint segítőeszközök, használhatóságát az összehasonlító elemzésben.

Bevezetés

Röviden ismertetjük a matrixok diadikus felbontását és a későbbi bizonyításokban használatos jelöléseket, fogalmakat, tételeket.

A bevezetésben mindvégig Egerváry Jenő [2], illetőleg [6] munkáira támaszkodunk, ezért az egyes tételek, bizonyítások forrását külön nem adjuk meg.

Diadikus szorzaton értjük azt a **D** matrixot, amely úgy áll elő, hogy egy sorvektort szorzunk balról egy oszloppal a következő szabály szerint:

$$\mathbf{D} = [\mathrm{d}_{ij}] = uv' \quad \text{esetén} \quad \mathrm{d}_{ij} = v_i u_j, \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, m. \end{matrix}$$

Egy **A** matrix diadikus felbontásán értjük az **A** matrix

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{k} u_i v_i' \tag{1}$$

alakú előállítását, ahol **A** tetszőleges n×m-es matrix, $u_1, u_2, \ldots, u_k$ n elemű oszlop, $v_1', v_2', \ldots, v'_k$ m elemű sorvektorok. (1)-ben k-ra nem teszünk fel k > 0-n kívül más feltételt, így a felbontás nyilvánvalóan nem egyértelmű. Felírható egy tetszőleges **A** matrix minimális számú diád összegeként is.

Legyen **A** egy r rangú matrix. Bontsuk ezen **A** matrixot egy r rangú **B** és egy r rangú **C**′ matrix szorzatára úgy, hogy

$$\mathbf{A} = \mathbf{BC}' = \sum_{i=1}^{r} u_i v_i'$$

teljesüljön, ahol u_i vektorok **B** oszlopai v_i' vektorok **C**′ sorai i = 1, 2, . . ., r. **B** oszlopainak, illetve **C**′ sorainak száma tehát r.

Az előző felbontást alkalmas módszer segítségével elvégezve **A** matrix rangja automatikusan adódik, ezért sokszor éppen az előállító diádok minimális számát tekintik a rang definíciójának.

A minimális diadikus felbontásra bemutatunk egy módszert:

Ha **A** rangja ϱ (**A**) ≥ 1, akkor van legalább egy 0-tól különböző $a_{\beta\gamma}$ eleme. Képezzük az

$$a_{\beta\gamma}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\gamma} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdot & \ldots & a_{2\gamma} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{\beta 1} & \ldots & \ldots & a_{\beta\gamma} & \ldots & a_{\beta m} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n\gamma} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{1\gamma} \\ a_{2\gamma} \\ \vdots \\ \cdot \\ a_{n\gamma} \end{bmatrix} [a_{\beta 1}\ a_{\beta 2} \ldots a_{\beta n}] =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & \ldots & 0 & \ldots & a_{1m}^1 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 & \ldots & 0 & \ldots & a_{2m}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^1 & a_{n2}^1 & \ldots & 0 & \ldots & a_{nm}^1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1 \qquad (2)$$

különbséget.

Az így nyert $\mathbf{A}_1$ matrix egy sora és egy oszlopa csupa 0 elemet tartalmaz, a többi eleme pedig az **A** matrix elemeiből képzett másodrendű determinánsok. Ha a fenti eljárást alkalmazzuk $\mathbf{A}_1$ majd a keletkezett $\mathbf{A}_2$, A_3, stb. matrixokra r lépés után, ahol r az **A** matrix rangja, **0** matrixhoz jutunk, s ezzel a felbontásnak a végére értünk.

Egy adott **A** matrixnak minimális számú diád összegére való felbontása az előbbiek szerint, mivel a generáló elem tetszőleges, nem egyértelmű. Kimutatható azonban, hogy ha egy $\mathbf{A} = \mathbf{UV}'$ minimális előállítás már ismert, akkor abból az összes minimális előállítások az

$$\mathbf{A} = (\mathbf{UM})\,(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{V}')$$

alakban adódnak, ahol **M** tetszőleges r-ed rendű nem szinguláris matrix.

A minimális diádfelbontás tehát feltételezi, hogy minden egyes leválasztott diád az eredeti **A** matrix rangját eggyel csökkenti. Egerváry kidolgozott egy olyan rangcsökkentő eljárást, amely a diadikus felbontás általánosításának tekinthető.

Az eljárás a következő *lemmán* alapul:

Ha valamely **A** matrixból levonunk egy uv' diádot, **A** rangja akkor, és csak akkor csökken eggyel, ha az uv' diád

$$uv' = \frac{\mathbf{A}xy'\mathbf{A}}{y'\mathbf{A}x}$$

alakban írható fel, ahol x és y tetszőleges, csupán az $y'\mathbf{A}x \neq 0$ feltételt kielégítő vektorok. Ezek szerint, ha kiindulunk egy tetszőleges r rangú **A** matrixból, azt r lineárisan független diád összegére tudjuk bontani az

$$\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{A}_k - \frac{\mathbf{A}_k x_k y_k' \mathbf{A}_k}{y_k' \mathbf{A}_k x_k} \qquad k = 1, 2, \ldots, r$$

rekurzív eljárással. Az eljárásban $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}$ és x_k, y_k tetszőleges, csupán az $y'_k\mathbf{A}_k x_k \neq 0$ feltételt kielégítő vektorok.

Ekkor a minimális diadikus felbontást a következőképpen kapjuk:

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\mathbf{A}_k x_k y'_k \mathbf{A}_k}{y'_k \mathbf{A}_k x_k}$$

Az $x_k = e_k$, $y'_k = e'_k$ választás mellett éppen a (2) felbontást kapjuk.

Jelöljük a kvadratikus **A** matrix diagonális elemeinek összegét, nyomát, sp **A**-val, az összes elemei négyzetösszegéből vont négyzetgyököt, a mátrix *euklideszi normáját* pedig $||\mathbf{A}||$-val. További bizonyításainkban többször felhasználjuk a következő két összefüggést:

1.* $||\mathbf{A}||^2 = \text{sp } \mathbf{A}\mathbf{A}'$

2.* $\text{sp } \mathbf{A}\mathbf{B} = \text{sp } \mathbf{B}\mathbf{A}$

melyek megtalálhatók a [4] illetőleg [5] munkákban.

Egy speciális diadikus felbontás.

Tekintsük az **A** matrix összes

$$\mathbf{A} = uv' + \mathbf{R} \tag{3}$$

alakú előállításait.

Az előbbiek szerint az ilyen előállításokban

$$\varrho(\mathbf{R}) = \varrho(\mathbf{A}) - 1$$

akkor áll fenn, ha uv' felírható

$$uv' = \frac{\mathbf{A}wz'\mathbf{A}}{z'\mathbf{A}w} \tag{4}$$

alakban, ahol w és z tetszőleges, csupán a

$$z'\mathbf{A}w \neq 0 \tag{5}$$

feltételt kielégítő vektorok.

Vizsgáljuk meg az **A** matrix olyan (3) alakú felbontását, amelyekre (4) és (5) is teljesül. Nevezzük az ilyen előállításokat *rangcsökkentő diád-leválasztásnak*. Mivel (2)-ből kitűnik, hogy az ilyen diádok meghatározása nem egyértelmű, módunkban áll az uv' diád rangcsökkentő hatásán kívül még más feltételt is előírnunk rá.

Be fogjuk bizonyítani a következő tételt:

Tétel: az **A** matrixnak

$$\mathbf{A}_k = u_{k+1}v'_{k+1} + \mathbf{A}_{k+1}\,; \quad ||\mathbf{A}_{k+1}|| = \min \tag{6.a}$$

$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}$, alakú rekurzív diadikus felbontása esetén az u_k az $\mathbf{A}\mathbf{A}'$ a v_k pedig az $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ matrix sajátvektora.

A tétel bizonyítása előtt bebizonyítunk két segédtételt.

1. segédtétel Az

$$\mathbf{A} = uv' + \mathbf{R} \qquad \| \mathbf{R} \| = \min \tag{6}$$

felbontás uv'-ben egyértelmű.

Bizonyítás: Átrendezve (3)-at

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} - uv',$$

mindkét oldal normanégyzetét véve

$$\| \mathbf{R} \|^2 = \| \mathbf{A} - uv' \|^2 = \mathrm{sp}\,[(\mathbf{A} - uv')\,(\mathbf{A}' - vu')] \tag{7}$$

az ismert 1* összefüggés alapján.

Minimalizálnunk kell tehát a (7) jobboldalát. Feltételezve, hogy u rögzített vektor, határozzuk meg v-t úgy, hogy (7) jobboldala a minimumát vegye fel. Elvégezve a kijelölt műveletet (7)--ben, majd egyszerűsítve:

$$\mathrm{F} = \| \mathbf{A} - uv' \|^2 = \mathrm{sp}\,\mathbf{AA}' + \mathrm{sp}\,u'uv'v - 2\,\mathrm{sp}\,u'\mathbf{A}v\,,$$

Deriválva v szerint az

$$\mathrm{F}_1' = \mathrm{sp}\,\mathbf{AA}' + u'uv'v - 2\,u'\mathbf{A}v$$

kifejezést:

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} = (\mathrm{sp}\,\mathbf{AA}' + u'uv'u - 2\,u'\mathbf{A}v)^* = 2\,u'uv' - 2\,u'\mathbf{A}\,.$$

Minimum hely keresés esetén

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} = 2\,u'\,uv' - 2\,u'\mathbf{A} = 0\,,$$

és ez teljesül, ha

$$v' = \frac{u'\mathbf{A}}{u'u} \tag{8}$$

Vizsgáljuk továbbá, hogy az így kapott v rögzítése mellett milyen u értéknél veszi fel (7) jobboldala minimumát. Helyettesítsük vissza (8)-at (7)-be:

$$\| \mathbf{R} \|^2 = \mathrm{sp}\left[\left(\mathbf{A} - \frac{uu'\mathbf{A}}{u'u}\right)\left(\mathbf{A}' - \frac{\mathbf{A}'uu'}{u'u}\right)\right] =$$

$$= \mathrm{sp}\left(\mathbf{AA}' - \frac{\mathbf{AA}'uu'}{u'u} - \frac{uu'\mathbf{AA}'}{u'u} + \frac{uu'\mathbf{AA}'uu'}{(u'u)^2}\right).$$

Képezve tagonként a nyomot és a negyedik tagra alkalmazva a 2* összefüggést, majd egyszerűsítve:

$$\| \mathbf{R} \|^2 = \mathrm{sp}\left(\mathbf{AA}' - \frac{\mathbf{AA}'uu'}{u'u}\right).$$

A második tagra alkalmazva az előbb említett tételt, mivel az konstans

$$\| \mathbf{R} \|^2 = \mathrm{sp}\, \mathbf{AA}' - \frac{u'\mathbf{AA}'u}{u'u}, \tag{9}$$

$\mathbf{AA}'$ matrix pozitív szemidefinit lévén sp $\mathbf{AA}' \neq 0$ és

$$\frac{u'\mathbf{AA}'u}{u'u} \geqq 0. \tag{10}$$

(9) akkor veszi fel minimumát, mikor a (10) Rayleigh hányados felveszi a maximumát. Ez pedig akkor következik be, ha u az $\mathbf{AA}'$ matrix legnagyobb abszolút értékű sajátértékéhez tartozó sajátvektor. Felírható tehát v az előbbiek alapján

$$\mathbf{AA}'u = \alpha u$$

segítségével

$$v = \frac{1}{\alpha} \frac{\mathbf{A}'\mathbf{AA}'u}{u'u}$$

alakban, amelyből kitűnik, hogy v visszahelyettesítésével

$$\alpha v = \mathbf{A}'\mathbf{A}v$$

szerint v sajátvektora az $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ matrixnak. Így bebizonyítottuk, hogy a (6) felbontás uv'-ben egyértelmű.

A teljes felbontás egyértelműsége érdekében belátjuk, hogy:

2. *segédtétel* Az uv' diád az $\mathbf{A} = uv' + \mathbf{R}$ felbontásban $\|\mathbf{R}\| = \min$ esetén rangcsökkentő.

Bizonyítás: Be kell látni, hogy a (6)-ban előállt uv' diád előállítható

$$uv' = \frac{\mathbf{A}wz'\mathbf{A}}{y'\mathbf{A}w}$$

alakban. Lássuk be, hogy

a) A v' vektor $z'\mathbf{A}$ alakú.

(8)-ból
$$v' = \frac{u'\mathbf{A}}{u'u}$$

és ebből

$$\frac{u'}{u'u} = z'$$

helyettesítéssel a kívánt eredményt kapjuk.

b) Másodszor be kell látnunk, hogy az u vektor $\mathbf{A}w$ alakú. Segítségül véve, hogy u (6) teljesülése esetén $\mathbf{AA}'$ legnagyobb abszolút értékű sajátértékéhez tartozó sajátvektor,

$$\mathbf{AA}'u = \alpha u.$$

$\mathbf{AA}' \neq 0$; $\alpha \neq 0$ lévén

$$\mathbf{A}\left(\frac{1}{\alpha}\mathbf{A}'u\right) = u\,,$$

ahonnan

$$\frac{1}{\alpha}\mathbf{A}'u = w$$

helyettesítésével u tényleg $\mathbf{A}w$ alakú.

c) Meg kell még vizsgálni, hogy

$$z'\mathbf{A}w \neq 0 \tag{11}$$

teljesül-e?

$$z' = \frac{u'}{u'u} \quad \text{és} \quad w = \frac{1}{\alpha}\mathbf{A}'u$$

esetén

$$z'\mathbf{A}w = \frac{u'\mathbf{AA}'u}{u'u}$$

amiből rögtön következik (11), mivel éppen (10) kvadratikus alak $\frac{1}{\alpha}$-szorosáról van szó és (11) nem lehet zérus, mivel (10) éppen maximumát veszi fel.

Bebizonyítottuk tehát, hogy a (6) előállításban szereplő uv' diád rangcsökkentő.

Ha már most a (6) típusú felbontást alkalmazzuk az $\mathbf{R}$ matrixra, majd az így keletkezett $\mathbf{R}_1$ matrixra, stb.:

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{A} = u_1v_1 + \mathbf{R}_1 & \|\mathbf{R}_1\| = \min \\
\mathbf{R} = u_2v_2 + \mathbf{R}_2 & \|\mathbf{R}_2\| = \min \\
\vdots & \\
\mathbf{R}_{k-1} = u_kv_k' + \mathbf{R}_k & \|\mathbf{R}_k\| = \min\,.
\end{array} \tag{12}$$

A megfelelő visszahelyetesítésekkel az $\mathbf{A}$ matrix

$$\mathbf{A} = u_1v_1' + u_2u_2' + \ldots + u_kv_k' + \mathbf{R}_k \tag{13}$$

alakú diadikus felbontását nyerjük, amely előállítás éppen megfelel (6.a)-nak és mivel a *2. segédtétel* szerint

$$\varrho(\mathbf{R}_k) = \varrho(\mathbf{R}_{k-1}) - 1,$$

$$k = \varrho(\mathbf{A}) \quad \text{esetén} \quad \mathbf{R}_k = 0\,.$$

(13) az $\mathbf{A}$ matrix egyértelmű minimális számú diádfelbontását adja.

Lássuk ezek után a *főtétel* bizonyítását.

A főtételben azt mondtuk ki, hogy a (12) felbontás esetén az u_k, v_k vektorok az $\mathbf{AA}'$ illetőleg az $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ matrixok sajátvektorai. *Az első segédtételből* láthatjuk, hogy a (6)-os felbontásban — mely a (12)-es felbontás első lépéseként tekinthető — keletkező u, v' vektorok az $\mathbf{AA}'$ illetőleg $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ matrixok saját vektorai. Ezek után azt kell belátnunk, hogy a további lépésekben — most már a maradék matrixokból — keletkező u_k, v_k' vektorok szintén $\mathbf{AA}'$ illetőleg $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ sajátvektorai.

Tudjuk az *első segédtételből*, hogy az első diád u_1 vektora az $\mathbf{AA}'$ matrix legnagyobb abszolút értékű sajátértékéhez tartozó sajátvektor. Be kell bizonyítanunk, hogy u_1 sajátvektora $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_1'$ matrixnak is, méghozzá a $\alpha = 0$ sajátértékhez tartozó sajátvektora. Ebben az esetben u_1 ortogonális u_2-re, amely az $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_1'$ matrix legnagyobb abszolút értékéhez tartozó sajátvektor, mivel $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_1'$ sajátvektorainak normáltjai ortonormált rendszert alkotnak. Tehát bizonyítanunk kell, hogy $\mathbf{AA}'$-ből $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_1'$ defláció útján keletkezett, vagyis

$$\mathbf{AA}' - \gamma x y' = \mathbf{RR}_1',$$

ahol x, illetve y az $\mathbf{AA}'$ jobb, illetve baloldali sajátvektorai [5].

$$\mathbf{R}_1\mathbf{R}_1' = \left(\mathbf{A} - \frac{uu'\mathbf{A}}{u'u}\right)\left(\mathbf{A}' - \frac{\mathbf{A}'uu'}{u'u}\right).$$

Elvégezve a kijelölt műveletet és alkalmazva az $\mathbf{AA}'u = \alpha\, u$-t,

$$\mathbf{R}_1\mathbf{R}_1' = \mathbf{AA}' - \alpha\frac{uu'}{u'u}, \tag{14}$$

ahol

$$xy' = uu',$$

$$\gamma = \frac{\alpha}{u'u}.$$

Tehát a leválasztott diád tényezői tényleg $\mathbf{AA}'$ jobb, illetve baloldali sajátvektorai ($\mathbf{AA}'$ szimmetrikus lévén ezek egyenlők), így az eljárás tényleg defláció.

Most azt lássuk be, hogy u_1 tényleg sajátvektora $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_1'$-nek is. (14) szerint:

$$\mathbf{R}_1\mathbf{R}_1' = \mathbf{AA}' - \alpha\frac{u_1u_1'}{u'u_1}$$

$$\mathbf{R}_1\mathbf{R}_1'u_1 = \left(\mathbf{AA}' - \alpha\frac{u_1u_1'}{u_1'u_1}\right)u_1.$$

Elvégezve a szorzást és felhasználva, hogy

$$\alpha\, u_1 = \mathbf{AA}'u_1,$$

$$\mathbf{R}_1\mathbf{R}_1'u_1 = \mathbf{AA}'u_1 - \alpha\frac{u_1u_1'u_1}{u_1'u_1} = \alpha\, u_1 - \alpha\, u_1 = 0.$$

Mivel $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_1' \neq 0$ és $u_1 \neq 0$ vektor, ez csak $\alpha = 0$ esetén lehet igaz, amiből következik, hogy u_1 $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_1'$-nek a $\alpha = 0$ sajátértékhez tartozó sajátvektora.

Ebből következik, ha $\mathbf{AA}'$ sajátértékei nagyság szerint rendre $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, akkor $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_1'$ megfelelő sajátértékei $0, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_r$. Folytatva a deflációt, az $\mathbf{R}_k\mathbf{R}_k'$, $k = 1, 2, \ldots, r$ megfelelő sajátértékeihez tartozó sajátvektorai megegyeznek. Ezzel tételünket bebizonyítottuk.

A konkrét számítások esetén a sajátvektorok megkeresését az úgynevezett Myses iterációval végezhetjük. Az $\mathbf{AA}'$ illetőleg az $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ matrixok szimmetrikusak lévén sajátértékeik valósak és így az említett iterációs eljárás mindenesetben alkalmazható.

A módszer alkalmazása az összehasonlító elemzésben

Fenti módszer többek között alkalmazhatónak tűnik időbeli változások (pl. struktúrák időbeli alakulásának) vizsgálatára, valamint keresztmetszeti elemzésre is.

Az időbeli vizsgálat esetén valamely gazdaság vagy a gazdaság valamely része időbeli változásának közös jellemzőit keressük. Keresztmetszeti elemzés esetén különböző gazdasági egységek (pl. iparágak, országok, stb.) egy azonos időpontra vonatkozó állapotait hasonlíthatjuk össze.

A diádok rendkívül egyszerű szerkezetéből — sorai illetőleg oszlopai egymás konstansszorosai — adódik, hogy az előbb bemutatott felbontás matrixok belső arányainak feltárásához nagy segítséget nyújthat. Éppen ezért alkalmas lehet pl. input-output táblák belső arányainak elemzésére is.

Eddig a módszert gyakorlatilag két esetben alkalmaztuk. Az egyik esetben input-output táblák időbeli összehasonlítására, — ezzel az esettel a továbbiakban részletesebben foglalkozunk. A másik esetben a gazdasági fejlődésre jellemző idősorok elemzésénél vettük segédeszközül. Erről az elemzésről Rimler Judittal írott cikkünkben szeretnénk részletesen beszámolni a Szigma egy későbbi számában.

Folyamatban van ezenkívül egy nemzetközi input-output elemzés, melynél a gazdaságilag hasonló ország-csoportok kiválasztásánál ugyancsak segédeszközként alkalmazzuk a bemutatott módszert.

A következőkben egy megoldott feladat alapján megpróbáljuk ismertetni a módszer — ezen feladatra vonatkozó — közgazdasági interpretációját.

A feladat a következő:

Adott egy gazdaság, jelen esetben Magyarország I—0 tábláinak egy idősora 1959-től 1964-ig, öt szektorban. Keresünk egy olyan I—0 táblát, melynek eltérése (egy-egy konstans számmal való szorzás után) az eredeti egy-egy időponthoz tartozó tábláktól minimális. Terítsünk ki minden ráfordítási együttható mátrixot egy oszlop-vektorba, úgy hogy az egyes szektorokat reprezentáló oszlopok egymás alá kerüljenek. Az így keletkező oszlopok az egész népgazdaság ráfordítási struktúráját írják le egy adott évben. Ezeket az egyes táblákból keletkező vektorokat helyezzük el egy matrixba, mint oszlopokat (lásd 1. táblázat).

1. táblázat

A kiterített ráfordítási együtthatók matrixa

		1959	1960	1961	1962	1963	1964
	ipar	4145,6	4152,4	4174,4	4195,9	4184,6	4188,7
	építőip.	160,3	157,1	157,8	145,9	130,0	155,2
ipar	mezőg.	1191,5	1063,8	1066,6	1054,4	1037,4	964,6
	közl.	175,7	172,2	164,1	170,2	174,5	180,6
	egyéb	206,2	186,2	162,5	153,2	159,4	157,3
	ipar	4331,0	3981,9	4330,9	4301,5	4359,9	4438,0
	építőip.	161,7	144,1	164,1	161,5	160,0	173,5
építőip.	mezőg.	135,6	90,7	80,2	58,3	68,0	83,5
	közl.	823,8	836,9	784,4	819,0	787,7	743,7
	egyéb	243,2	257,9	218,6	180,5	185,8	160,5
	ipar	699,1	877,9	945,3	916,4	1129,2	1363,3
	építőip.	65,6	68,9	60,3	63,7	76,3	79,1
mezőg.	mezőg.	3346,3	3366,7	3499,6	3469,7	3246,3	3055,9
	közl.	5,0	15,0	29,7	16,1	16,7	17,1
	egyéb	200,2	255,3	225,1	217,9	213,3	189,8
	ipar	3104,2	2919,7	2893,8	2994,7	2756,6	2814,1
	építőip.	97,3	86,4	114,0	120,9	101,4	102,6
közlek. száll.	mezőg.	130,4	126,6	110,6	123,6	114,6	162,3
	közl.	102,7	72,6	73,5	79,6	76,6	79,3
	egyéb	89,2	109,2	89,3	78,0	86,2	93,3
	ipar	2226,5	1487,3	1907,5	1792,2	1909,4	1613,6
	építőip.	104,5	94,0	119,1	126,6	120,8	122,6
egyéb	mezőg.	121,2	86,9	78,0	99,0	96,9	90,8
	közl.	1345,0	1469,1	1478,8	1709,4	1633,3	1807,7
	egyéb	346,8	339,1	267,4	262,7	276,2	368,5

Ennek a táblának az oszlopai tehát ráfordítási struktúrák egy adott évben, sorai pedig az egyes ráfordítási együtthatók idősorai.

Az így keletkezett alapmátrixot vizsgáljuk. Az első diád leválasztása során kapunk egy a diádot generáló oszlopvektort és sorvektort (lásd 2. táblázat). Az oszlop-vektor jelenti ebben az esetben a *közös* ráfordítási struktúrát. A sorvektor azon konstansokat *(súlyokat)* tartalmazza, melyekkel végig szorozva a közös ráfordítási struktúrát, az eredeti ráfordítási struktúrák legjobb közelítését kapjuk egy-egy időpontban.

Ez az első diád tehát olyan matrix (egymás mellé írva a súlyozott közös ráfordítási struktúrákat, mint oszlopokat), melynek a ráfordítási struktúrák idősorától (alapmatrix) való eltérése normában minimális.

Ha már most az eredeti matrixból levonjuk az első diádot — melyet nevezzünk el első *közelítésnek* — megkapjuk az első maradék-matrixot. A maradék-matrix oszlopai azt mutatják, hogy milyen mértékben tér el a közös struktúra az egyes évekhez tartozó ráfordítási struktúrától. Soraiból leolvashatjuk, hogy az egyes ráfordítási együtthatók idősorai hogy követik a közös ráfordítási struktúra ugyanezen együtthatóinak időbeli változását. A maradék matrix vizsgálata rendkívül fontos és nagy alaposságot igényel. Többek között ezen matrix elemeinek nagyságából és elhelyezkedéséből dönthető el, hogy érdemes-e folytatni a felbontást, érdemes-e keresni a maradék matrix közös struktúráját vagy sem.

2. táblázat

Az első közös struktúra és az első súlyrendszer

ipar	ipar	4357,7
	ép. ip.	157,7
	mezőg.	1110,3
	közl.	180,5
	egyéb	178,3
ép. ip.	ipar	4481,5
	ép. ip.	168,0
	mezőg.	89,9
	közl.	834,4
	egyéb	216,7
mezőg.	ipar	1031,4
	ép. ip.	72,0
	mezőg.	3478,3
	közl.	17,3
	egyéb	226,3
közl. száll.	ipar	3043,0
	ép. ip.	108,5
	mezőg.	133,6
	közl.	84,4
	egyéb	94,7
egyéb	ipar	1906,3
	ép. ip.	119,7
	mezőg.	99,8
	közl.	1643,3
	egyéb	325,5

1959	1960	1961	1962	1963	1964
0,9715	0,9262	0,9668	0,9710	0,9565	0,9531

Mivel a módszer éppen a maradék matrix normájának minimalizálásán alapul, előfordulhat, hogy az első diád leválasztása után a maradék matrix elemei olyan kicsik lesznek, hogy belülesnek a mérési hibahatáron. Ebben az esetben a felbontást nem érdemes tovább folytatni. Ez azt jelenti, hogy a struktúrák időbeli belső változása olyan kicsi, hogy egy közös struktúrával lehet jellemezni az egész időszakot. Amennyiben a maradék matrix még tartalmaz értékes információt, úgy folytathatjuk a felbontást, most már ezen maradék matrixra. Az így keletkező diád a közös struktúrától való eltérések közös struktúráját és ennek súlyait adja. Az így keletkező maradék matrix újbóli vizsgálata után folytathatjuk a felbontást, és így tovább.

Látható, hogy a bemutatott felbontás megkönnyítheti számunkra a vizsgálni kívánt struktúrák együttes időbeli alakulásának áttekintését.

Amennyiben az egyes leválasztásoknál keletkező súlyvektorokra (sorok) valamilyen formában trendgörbék illeszthetők, feltehetjük a kérdést: milyen lenne vizsgált struktúráink időbeli alakulása a jövőben, ha a különböző leválasztásokban kapott közös ráfordítási struktúrákhoz tartozó súlyvektorok engedelmesen követnék az őket legjobban közelítő analitikus függvényeket az extrapolációs szakaszon is?

Ebben az esetben, ha a keresett extrapolált struktúránkat e_i-vel az egyes lépésekben keletkezett súlyvektorokat s_j-vel, közös struktúráinkat k_j-vel jelöljük, akkor e struktúrák

$$e_i = \sum_{j=1}^{l} s_j(m+i)\, k_j$$

alakban állíthatók elő, ahol m az eredeti idősor hossza, l a leválasztott diádok száma s_j(m + i) a j-edik súlyvektor i-edik extrapolált értéke.

Visszatérve az említett példára: a bemutatott konkrét esetben az első diád leválasztásával már egészen pontos közelítést értünk el. A harmadik táblázatban közöljük az egyes szektorok évenkénti kibocsátásait abszolút számban és

3. táblázat

Az eredeti és az első közelítés szerinti kibocsátások abszolút számban és ezek %-os viszonya

	1959			1960		
	eredeti kibocs.	számított kibocs.	e/s %	eredeti kibocs.	számított kibocs.	e/s %
	a.	b.	c.	a.	b.	c.
ipar	103 230	105 866	102,5	112 067	111 299	99,3
ép. ip.	4 257	4 198	98,6	4 511	4 375	97,0
mezőg.	45 957	43 946	95,6	44 846	43 127	96,1
közl.	9 223	9 833	106,6	10 308	10 018	97,2
egyéb	6 869	6 225	90,6	7 380	6 322	85,6
M(%)			98,7			95,0
	1961			1962		
	a.	b.	c.	a.	b.	c.
ipar	124 654	125 145	100,4	132 448	134 215	101,3
ép. ip.	5 002	4 958	99,1	5 066	5 226	103,1
mezőg.	48 018	47 327	98,6	49 629	49 670	100,1
közl.	10 708	10 899	101,8	11 678	11 479	98,2
egyéb	6 730	6 830	101,4	6 628	7 380	111,3
M(%)			100,2			103,0
	1963			1964		
	a.	b.	c.	a.	b.	c.
ipar	143 259	141 593	98,8	156 979	153 207	97,6
ép. ip.	5 042	5 206	102,7	6 247	5 939	95,0
mezőg.	50 773	52 078	102,5	51 210	55 742	108,8
közl.	12 306	12 148	98,7	13 657	12 932	94,7
egyéb	7 232	7 780	107,5	7 782	8 347	107,2
M(%)			102,5			100,6

a közelített ráfordítási együttható táblákból az eredeti termelésekkel visszaszámított kibocsátásokat, valamint ezek %-os viszonyát, mely egyben a közelítés pontosságáról is felvilágosítást ad.

Látható, hogy a közelítés elég pontos. Az extremális közelítési mutatók: 85,6% és 111,3%. Mindkét érték az egyéb szektorban található, amiből kitűnik, hogy e szektor ráfordítási koefficiensei tudják legkevésbé követni a közös struktúra időbeli lefutását. A legjobban közelített év az 1961-es volt. A 4. táblázaton az 1961-es évi eredeti abszolút számos táblát az 5. táblán az ugyanezen évhez tartozó első közelítés abszolút számos tábláját mutatjuk be.

4. táblázat

Az eredeti 1961-es abszolút számos tábla

	1.	2.	3.	4.	5.
1. ipar	93 109	15 333	6 363	5 155	4 694
2. ép. ip.	3 519	581	406	203	293
3. mezőg.	23 789	284	23 556	197	192
4. közl.	3 661	2 777	200	131	3 939
5. egyéb	3 624	774	1 515	159	658
bttó term.	223 046	35 404	67 310	17 814	24 608

5. táblázat

Az első közelítésből visszaszámolt 1961-es abszolút számos tábla

	1.	2.	3.	4.	5.
1. ipar	93 964	14 694	6 711	5 241	4 535
2. ép. ip.	3 401	618	468	186	285
3. mezőg.	23 932	295	22 633	230	237
4. közl.	3 881	2 856	108	145	3 090
5. egyéb	3 682	742	1 473	164	769

A bemutatott feladat megoldásából keletkezett eredmények elemzésétől ezen cikkben eltekintünk. A bemutatás célja csak az volt, hogy szemléletesebben magyarázható legyen, milyen módon lehet a speciális diadikus felbontás egy bizonyos felhasználása esetén az alapmatrixot és a közelítő diádot (diádokat) értelmezni.

Világos, hogy keresztmetszeti elemzés esetén az egyes gazdaságok, országok bizonyos azonos mutatószámrendszereit is tekinthetjük egy matrix oszlopainak és ebben az esetben az első diád éppen a legtöbb közös részt tartalmazó közös mutatószámrendszert adja, mint oszlopot; a közös mutatószámrendszer egyes országokra, gazdaságokra vonatkozó súlyai lesznek a sorvektor elemei.

(Beérkezett: 1970. június 29.)

IRODALOM

[1] BODEWIG, E.: Matrix Calculus. Amsterdam, 1959. North-Holland Publishing Company. 452 p.
[2] EGERVÁRY, J.: Mátrix-függvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról. MTA III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei, III. k., 1953. 4. sz.
[3] GANTMACHER: Matrizenrechnung. Berlin, 1965. VEB Verlag der Wissenschaften.
[4] MARCUS, M.: Basic Theorems in Matrix Theory. National Bureau of Standards. Applied Mathematics Series, 1960. 57. sz. Washington.
[5] ZURMÜHL, R.: Matrizen und Ihre technische Anwendungen. Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1964. Springer.
[6] EGERVÁRY, J.: On rank-diminishing operations and their applications to the solution of linear equations. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 1960. 11. sz.

A SPECIAL DIADIC DECOMPOSITION OF MATRICES AND SOME APPLICATIONS IN COMPARATIVE ANALYSIS

The article is in two separate parts. In the first part the author proves the following proposition: If a matrix **A** is decomposed into the sum of diadic products by the formula

$$\mathbf{A}_k = u_{k+1} v'_{k+1} + \mathbf{A}_{k+1}\,, \qquad \mathbf{A}_0 = \mathbf{A}$$

— so that the Euclidean norm of $\mathbf{A}_{k+1}$ should be minimum — the u_k vectors are proportionate to the eigenvectors of matrix $\mathbf{AA}'$, and the v_k vectors are proportionate to the eigenvectors of matrix $\mathbf{A}'\mathbf{A}$. Furthermore, in this part an iterative method being similar to the Myses iteration is given for the calculation of these u_k and v_k vectors.

In the second part, making use of the fact that after the deduction of the diadic product $u_1 v'_1$ from **A** according to the above recursion the sum of the squared entries of the remainder matrix is minimum among all the detachable diads — the author considers some fields of analysis (time series, input-output matrices, comparison of structures) where the investigation of the inherent connections of the analysed systems can be made especially easy when approximating the system by a matrix with such a simple structure as a diad. Beside the foregoing possibilities of analysis the meaning of the first detached diad is explained by the help of a numerical example as well.

СПЕЦИАЛЬНОЕ ДИАДИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ МАТРИЦ И НЕСКОЛЬКО ПРИМЕНЕНИЕ ЭТОГО ПРИ АНАЛИЗЕ СОПОСТАВЛЕНИЯ

Статья подразделяется на две изолированных части. В первой части автор доказывает следующую теорему: если матрицу **A** с помощью рекурзионной формулы $\mathbf{A}_k = u_{k+1}\ v'_{k+1}, + \mathbf{A}_{k+1}$, где $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}$ разбиваем на сумму диад так, чтобы Эвклидова норма $\mathbf{A}_{k+1}$ было минимальной, тогда векторы u_k пропорциональны собственным векторам матрицы $\mathbf{AA}'$ и векторы v_k собтветственно матрицы $\mathbf{A}'\mathbf{A}$. Помимо этого в этой части статья дает итерационный способ для расчета векторов u_k и v_k, который похож на итерацию Myses.

Во второй части, используя тот факт, что сумма квадратов, построенная из элементов остаточной матрицы, оставщейся после вычета из **A** диада $u_1 v_1'$ полученного из предыдущего произведения — минимальная из всех отдельных диадов, автор показывает несколько таких областей анализа (порядковые ряды, матрицы input-output, сопоставление структур), где приближение анализируемых систем с помощью матрицы такой простой структуры, как диад, может чрезвычайно облегчить изучение внутренних связей системы. Наряду с упомянутыми возможностями анализа с помощью числового примера автор освещает и значение превого отделившегося диада.