BÁGER GUSZTÁV

Marginális értékek a lineáris programozási feladatban

Az árnyékárat általában a lineáris programozási modellben szereplő korlát értékelésének tekintjük. Egy korlátozó feltétel árnyékára a korlátvektor egy komponensének kismértékű változtatásához tartozó célfüggvényérték-változás nagyságát és irányát mutatja meg.

Hasonló értelemben olyan árnyékárakat is értelmezhetünk, amelyek jelzik azt, hogy az együtthatómatrix és a célfüggvénykoefficiensek kismértékű változtatásának hatására — a többi paraméter változatlansága mellett — milyen mértékben változik meg a célfüggvény értéke. A lineáris programozási feladat marginális értékeinek ily módon való értelmezése egy általánosabb árnyékár-fogalomhoz vezet.

Jelen cikkben a lineáris programozási feladat marginális értékeivel foglalkozunk és — A. C. Williams egy matematikai dolgozatának eredményei alapján [1] — olyan tételeket és formulákat tekintünk át, amelyek a marginális értékek létezésével és kiszámításával függnek össze.

Így cikkünk nemcsak az árnyékár fogalma általánosításának egy lehetőségét mutatja be, hanem a lineáris programozási feladat érzékenységének általánosabb alapokon való elemzésére alkalmas módszert is leír. Az optimálási eredmények elemzésében felhasználható eszköztár gazdagítására sarkall az a gyakorlati vizsgálatainkból adódó tapasztalat, hogy a hazai népgazdasági programozási számítások árnyékárainak instabilitása nagy.

1. A probléma felvetése

Adott egy lineáris programozási probléma a duáljával:

$$\text{I. } \max c^*x, \text{ ha } x \geq o,\ Ax \leq b,$$

$$\text{II. } \min y^*b, \text{ ha } y^* \geq o^*,\ y^*A \geq c^*.$$

Kérdés: adott H, $\hat{b}$ és $\hat{c}$ esetén mit mondhatunk az

$$\text{I.}' \max (c^* + \alpha \hat{c}^*)\, x, \text{ ha } x \geq o,\ (A + \alpha H)\, x \leq b + \alpha \hat{b}$$

$$\text{II.}' \min y^*(b + \alpha \hat{b}), \text{ ha } y^* \geq o^*, y^*(A + \alpha H) \geq c^* + \alpha \hat{c}^*$$

lineáris programozási problémák célfüggvényértékéről (röviden: értékéről), ha α 0-hoz közeli pozitív szám.

Egy jelölést vezetünk be: legyen A az előbbi m×n-es matrix, b m-dimenziós oszlop, c^* n-dimenziós sorvektor, és

$$(1) \qquad \tilde{A} = \begin{bmatrix} A & b \\ c^* & o \end{bmatrix}.$$

Legyenek továbbá:

S($\tilde{A}$) az I. primál probléma megengedett megoldásainak halmaza,
T($\tilde{A}$) a II. duál probléma megengedett megoldásainak halmaza,
$S_0(\tilde{A})$ az I. primál probléma optimális x_0 vektorainak halmaza,
$T_0(\tilde{A})$ a II. duál probléma optimális y_0 vektorainak halmaza.

A lineáris programozás ismert alaptétele szerint, ha $S_0(\tilde{A})$ vagy $T_0(\tilde{A})$ egyike nem üres, akkor a másik sem és $y_0^*b = c^*x_0$. Ebben az esetben azt mondhatjuk, hogy $\tilde{A}$ megoldható és a program értéke $c^*x_0 = y_0^*b$. Ezt az értéket jelöljük $\varphi(\tilde{A})$-val.

Legyen most H egy m×n-es matrix, $\hat{b}$ m-dimenziós oszlop, $\hat{c}^*$ n-dimenziós sorvektor, és

$$\widetilde{H} = \begin{bmatrix} H & \hat{b} \\ \hat{c}^* & o \end{bmatrix}. \tag{2}$$

A $\widetilde{H}$ matrixot *perturbációs matrixnak* fogjuk nevezni.

Legyen $\alpha \geq 0$. Az $(\tilde{A} + \alpha\widetilde{H})$ matrixhoz tartozó lineáris programozási feladatot vizsgáljuk. Amennyiben a feladatnak van megoldása, definiálhatjuk a következő $f(\alpha)$ függvényt:

$$f(\alpha) = \varphi(\tilde{A} + \alpha\widetilde{H}), \tag{3}$$

ahol a φ függvény, mint a fentiekben bevezettük, a lineáris programozási feladat értékét jelenti.

A függvény értelmezési tartománya az olyan α-k halmaza, melyekre a megfelelő $S_0(\tilde{A} + \alpha\widetilde{H})$ és $T_0(\tilde{A} + \alpha\widetilde{H})$ halmaz nem üres: azaz, melyekre $(\tilde{A} + \alpha\widetilde{H})$ megoldható.

Mivel bennünket az érdekel, hogyan viselkedik az $f(\alpha)$ akkor, ha az α „közel" nulla, megvizsgálhatjuk, hogy az $f(\alpha)$ függvény $\alpha = 0$-nál milyen feltételek esetén deriválható jobbról. A függvényt jobbról deriválhatónak mondjuk, ha a következő feltételek teljesülnek:

(I) a 0 egy jobboldali környezete beletartozik az f(x) függvény értelmezési tartományába,
(II) legyen a függvény 0-ban jobbról folytonos,
(III) létezzék továbbá a következő határérték:

$$f'(o) = \lim_{\alpha \to +0} \frac{\varphi(\tilde{A} + \alpha\widetilde{H}) - \varphi(\tilde{A})}{\alpha}. \tag{4}$$

Az $f'(0)$-t az $\tilde{A}$ program $\widetilde{H}$ perturbációs matrixra vonatkozó *marginális értékének* nevezzük. Mint később látni fogjuk, a $\widetilde{H}$ perturbációs mátrix speciális választásával a szokásos értelemben árnyékárnak nevezett értékeket kapjuk meg marginális értékként. Vagyis a marginális érték az árnyékár *általánosításának* tekinthető.

Alapvető egzisztenciatétel, hogy $\tilde{A}$ programnak minden $\widetilde{H}$-ra vonatkozóan akkor és csakis akkor létezik a marginális értéke, ha $S_0(\tilde{A})$ és $T_0(\tilde{A})$ halmazok korlátosak.[1]

[1] Ezt a tételt A. C. Williams bizonyította be, aki *Mills* eredményeit [2] fejlesztette tovább.

2. A perturbáció speciális választásánál jelentkező árnyékár típusok

A $\tilde{H}$ perturbációs matrix alkalmas megválasztásával olyan marginális értékekhez juthatunk, amelyek a közgazdasági elemzés szempontjából nagy jelentőséggel bírnak. A továbbiakban feltételezzük, hogy a feladat nem degenerált és a primális optimális és duális optimális halmazok korlátosak.

Három alapvető (tiszta) marginális értéket vezetünk be. Ezek a következők:

Korlátárnyékár

Ha a $\tilde{H}$ perturbációs matrixot úgy választjuk, hogy

$$H = o, \quad \hat{c}^* = o^*, \quad \hat{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} (i),$$

akkor az $f'(0)$ marginális érték azt mutatja meg, hogy a korlátvektor i-edik komponensének változásával a célfüggvény értéke milyen arányban változik. Változáson természetesen egy eléggé „kicsi" változást értünk, amelyet az egységnek megfelelő megválasztásával egységnyinek fogunk mondani.

Mint látjuk, a korlátárnyékár azt mutatja, hogy a korlátérték egységnyivel történő növelése mennyivel változtatja a program értékét, vagyis a szokásos árnyékár fogalommal azonos. Hasonló megállapítás tehető akkor is, ha az i-edik komponensben 1 helyett —1-et írunk.

Tevékenység-árnyékár

Ha a $\tilde{H}$ perturbációs matrixot úgy választjuk, hogy:

$$H = \begin{array}{c} (j) \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array} (i), \quad \hat{c}^* = o^*, \quad \hat{b} = o,$$

ekkor az $f'(0)$ marginális érték arról tájékoztat, hogy az A matrix α_{ij} elemének egységnyi változása miként hat a lineáris programozási feladat értékére. Ily módon a *tevékenység*-árnyékár a szélesebb értelemben vett — a reál és a szabályozási szférát felölelő — termelési technológiában jelentkező változások hatásainak elemzésére szolgálhat.

Hozam-árnyékár

Ha a $\tilde{H}$ perturbációs matrixot úgy választjuk, hogy:

$$H = o, \quad \hat{c}^* = [o \ldots \overset{(i)}{1} \ldots o], \quad \hat{b} = o,$$

akkor a hozam-árnyékár az i-edik tevékenység hatékonysága egységnyi változásának hatását mutatja meg a program értékére. Mivel a hatékonyság-változás elvileg árváltozásban nyilvánul meg, a hozam-árnyékár az árváltozások hatásainak elemzéséhez nyújthat segítséget.

Ezek mellett természetesen vizsgálhatók olyan esetek is, amikor a $\widetilde{H}$ perturbációs matrix nemcsak egy nem-nulla elemet tartalmaz. Példaként megemlítjük a következő esetet. Ha a $\widetilde{H}$ perturbációs matrixot úgy választjuk, hogy

$$H = o, \quad \hat{c}^* = o^*, \quad \hat{b} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{\beta}^m \end{bmatrix},$$

akkor az a hatás elemezhető, amelyet a korlátvektor együttes módosítása okoz, ha a $\hat{b}$ irányába mozdulunk el. A gyakorlati alkalmazások szempontjából természetesen jelentősebbek azok az esetek, amikor nem a korlátvektor egészének, hanem néhány — egymással szoros kapcsolatban álló — komponensének a módosítására kerül sor.

Ha a H, $\hat{b}$, $\hat{c}^*$ matrixok nemcsak egy nem-nulla elemet tartalmaznak, akkor nem tiszta, hanem kevert korlát-, tevékenység és hozam-árnyékárról beszélünk.

3. Eljárások a különböző típusú árnyékárak kiszámítására

Az előző pontban bevezetett általánosított árnyékárak kiszámítására az [1] dolgozat következő tétele ad lehetőséget.

TÉTEL (Williams): Ha az $\tilde{A}$-hoz tartozó lineáris programozási feladatra az $S_0(\tilde{A})$ és $T_0(\tilde{A})$ halmazok nem üresek, korlátosak és $\widetilde{H}$ tetszőleges perturbációs matrix, akkor az $f'(0)$ marginális értékre

$$f'(o) = \max_{x \in S_0(\tilde{A})} \min_{y \in T_0(\tilde{A})} \Psi(\widetilde{H}, x, y), \tag{5}$$

ahol

$$\Psi(\widetilde{H}, x, y) = \hat{c}^* x + y^* \hat{b} - y^* H x.$$

Mint a tételből látható, nagyon egyszerűen számolható az $f'(0)$ marginális érték abban az esetben, ha *egyetlen* primál és duál optimális megoldás van. Ekkor ugyanis

$$f'(o) = \Psi(\widetilde{H}, x_0, y_0) = \hat{c}^* x_0 + y_* \hat{b} - y^*_0 H x_0 . \tag{6}$$

Ezen formula alapján az előző pontban tárgyalt árnyékártípusokra a következők adódnak:

Korlátárnyékár

A (6) egyenlet alapján

$$f'(o) = y^* \hat{b} . \tag{7}$$

Az $f'(0)$ jelentése miatt ez azt jelenti, hogy ha „kicsi" α mellett $\alpha\hat{b}$-pal növeljük a korlátvektort, akkor a program értéke $\alpha y^*_0\hat{b}$-pal nő. Speciálisabban: tiszta korlátárnyékár esetében $f'(0) = \eta_i$, vagyis a szokásos árnyékár fogalommal van dolgunk. (η_i az y_0 vektor i-edik komponense.)

Tevékenység-árnyékár

A (6) egyenlet és az előző pontban mondottak alapján

$$(8)\qquad f'(0) = y_0^*\,(0,\ldots,0,\overset{(j)}{h},0,\ldots 0)\,x_0 = (y_0^* h)\,\xi_j,$$

ahol ξ_j az x_0 vektor j-edik komponense.

Ha tehát a j-edik tevékenység ráfordítási együtthatóit αh-val növeljük, akkor a célfüggvény értéke $\alpha(y_0^* h)\xi_j$-vel nő. Vagyis a tevékenység együtthatóváltozását árnyékáron értékelve meg kell szoroznunk a tevékenységnek az optimális megoldásban való terjedelmével ahhoz, hogy a marginális értéket megkapjuk.[2]

A tiszta koefficiens-árnyékár esetében viszont

$$(9)\qquad f'(0)\,\eta_i\,\xi_j\,.$$

Ekkor, ha $\eta_i = 0$, a szóban forgó feltételben történő koefficiens-változásra a célfüggvény értéke érzéketlen. Ugyanez a helyzet akkor is, ha egy tevékenység nulla szinten van és az oszlopába tartozó együtthatók változásának hatását vizsgáljuk. Ez azt jelenti tehát, hogy a program értéke azokra a koefficiensváltozásokra érzékeny, amelyek az optimális bázisban levő tevékenységekhez és az aktív feltételekhez tartoznak.

Hozam-árnyékár

Ismét a (6) egyenlet és az előző pont alapján

$$(10)\qquad f'(0) = \hat{c}^*\,x_0.$$

Ez azt jelenti, hogy $\alpha\hat{c}^*$ változás hatására a lineáris programozási feladat értéke $\alpha\hat{c}^* x_0$-val nő. Tehát „kicsi'' változás esetén a célfüggvény értékének módosulása csak olyan tevékenységekhez tartozó célfüggvény-koefficienseknek a változására érzékeny, amelyek benne vannak az optimális bázisban.

Ha a primál- vagy duálfeladatnak *több* optimális megoldása is van, akkor az árnyékárak Williams tétele alapján ugyancsak kiszámíthatók, de ebben az esetben egy — esetleg két — lineáris programozási feladat megoldására van szükség.

Korlátárnyékár

A (5) képlet alapján

$$(11)\qquad f'(0) = \min_{y\in T_0(\tilde{A})} y^*\,\hat{b}\,.$$

Tehát az $f'(0)$ marginális érték a következő lineáris programozási feladat értékével azonos.

$$y^* A \geq c$$
$$y^* \geq o^*$$
$$y^* b = \varphi(\tilde{A})$$
$$y^* \hat{b} \rightarrow \min.$$

[2] Hasonló eljárást követhetnénk akkor is, amikor a H matrixban nem egy oszlop, hanem egy sor nem-nulla.

Amint a (11) formulából látszik, a célfüggvény értékének növekedését úgy kapjuk meg, hogy kiszámoljuk azokat az árnyékárakat, amelyeken a korlátváltozást értékelve a legkisebb értéket kapjuk.

Tevékenység-árnyékár

A (5) egyenletből kiindulva

$$f'(0) = \max_{x \in S^0} \min_{y \in T_0} y^* H x = \max_{x \in S_0} \min_{y \in T_0} (y^* h)\, \xi_j =$$

(12)
$$= \begin{cases} \min\limits_{y \in T^0} (y^* h) \cdot \max\limits_{x \in S^0} \xi_j, & \text{ha} \quad \min\limits_{y \in T^0} (y^* h) \geq 0 \\ \min\limits_{y \in T^0} (y^* h) \cdot \min\limits_{x \in S^0} \xi_j, & \text{ha} \quad \min\limits_{y \in T^0} (y^* h) \leq 0. \end{cases}$$

A szóbanforgó max., ill. min. értékeket a következő lineáris programozási feladatok megoldásával kapjuk meg.

$$\begin{array}{lcl} y^* A \geq c & & A\,x \leq b \\ y^* \geq o^* & \text{és} & x \geq o \\ y^* b = \varphi(\tilde{A}) & & c^* x = \varphi(\tilde{A}) \\ y^* h \to \min & & \xi_j \to \max, \ (\min). \end{array}$$

Mint látható, a formulából a marginális értéket úgy nyerjük, hogy a koefficiens-változást legalacsonyabban értékelő árnyékárrendszert keressük meg és ezt szorozzuk a tevékenység bekerülési szintjének lehető legnagyobb (legkisebb) értékével.

Hozam-árnyékár

Az (5) formula alapján

(13)
$$f'(0) = \max_{x \in S^0(\tilde{A})} \hat{c}^* x$$

Ebből következően az $f'(0)$ marginális érték az alábbi lineáris programozási feladat megoldásából adódik.

$$\begin{aligned} A\,x &\leq b \\ x &\geq o \\ c^* x &= \varphi(\tilde{A}) \\ \hat{c}^* x &\to \max \end{aligned}$$

Az $f'(0)$ marginális értéket tehát úgy kapjuk meg, hogy megkeressük a célfüggvénykoefficienst módosító vektor és az optimális tevékenységek vektorai szorzatának legnagyobb értékét.

Megjegyezzük, hogy a fenti lineáris programozások mindegyike az eredeti (I) és (II) lineáris programozási feladatpártól csak egyetlen feltételben különbözik, ezért számítástechnikailag nagyon egyszerűen tovább lehet lépni az (I) és (II) feladat megoldásáról a fenti feladatok megoldására.

4. A numerikus vizsgálatok jelentőségéről

Az általános árnyékár fogalom bevezetése, a különböző marginális értékek ismerete nemcsak az árnyékárvizsgálatok elvont módszertana, hanem a gyakorlati alkalmazások szempontjából is fontos. A marginális értékek ismerete lehetőséget teremt arra, hogy a népgazdasági programozási modellek paraméterei változásának a program értékére gyakorolt hatását teljeskörűen elemezzük.

Az ilyen elemzések hasznosságát — úgy véljük — nem kell különösképpen bizonygatnunk. A fő érvet maga a népgazdasági programozási gyakorlat adja, az a körülmény, hogy a tervezési folyamat egyes lépéseit leíró-követő modellek paraméterei rendkívüli gyorsasággal változnak. Itt mindenekelőtt a beruházási programok adatainak és a külkereskedelmi áraknak a változása említhető meg példaként.

Ha viszont az elvi-közgazdasági modellszerkesztés oldaláról nézzük a marginális érték-vizsgálatok jelentőségét, megállapíthatjuk, hogy szerepük itt is nagy: jelezhetik a modell stabil vagy instabil voltát, tájékoztatást nyújthatnak arról, hogy a modell szerkezetét és paramétereit érintő bizonyos változtatások indokoltak-e, a program értékének megváltozása reális vagy irreális-e. Annak a gyakorlati tapasztalatnak alapján, miszerint a modellekben nagyobb választási lehetőséget és helyettesíthetőséget kell megengedni, különösen kitűnik az ilyen jellegű vizsgálatok jelentősége.

(Beérkezett: 1971. február 16.)

IRODALOM

1. WILLIAMS, A. C.: Marginal values in linear programming. J. SIAM. Vol. 11. No. 1 March 1963.
2. MILLS, H. D.: Marginal values of matrix games and linear programs. Linear Inequalities and Related Systems, No. 7.,1956·Princeton University Press, pp. 183—193.

MARGINAL VALUES IN LINEAR PROGRAMS

By means of utilization and economic interpretation of A. C. Williams' mathematical results, the paper surveys theorems and formulae related to the existence and calculation of marginal values.

Depending on the special choice of perturbation three basic (pure) marginal values emerge which can be considered as a generalization of the notion of shadow price. These are as follows:

— Bound shadow price: it shows the rate of change in the value of the objective function when changing the i-th component of the bounding vector.

— Activity shadow price: it indicates how an individual change affecting a single element of matrix A influences the value of the linear program.

— Objective shadow price: it shows the effect of a unit change in efficiency of the i-th activity on the value of the program.

The notion of generalized shadow price can also be defined in case the perturbation matrix contains more than one non-zero element. In this case we have mixed bound, activity and objective shadow prices and not pure ones.

The paper then surveys the formulae of different types of shadow prices. The calculation processes are divided into two groups taking into account whether the primal or dual problem has one or more optimal solutions.

The notion of generalized shadow prices finds important practical application in the economy-wide programming, by showing whether a model is stable or unstable under the assumption that the parameters are subject to abrupt changes.

МАРГИНАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Статья, используя и экономически интерпретируя математические результаты работы А. Ц. Вилиамса, рассматривает такие теоремы и формулы, которые связаны со существованием и расчетом маргинальных значений.

В зависимости от специального выбора пертурбаций, получаются три основных (чистых) маргинальных значений, которые можно считать обобщением понятия теневой цены. Эти следующие:

— Теневая цена ограничения: показывает, до какой меры изменяется значение целевой функции с изменением i-го компонента вектора ограничения.

— Теневая цена деятельности: показывает влияние частного изменения (касающегося отдельных элементов матрицы A) на значение задачи линейного программирования.

— Теневая цена выручки: показывает влияние единичного изменения в эффективности i-ой деятельности на значение программы.

Понятие общей теневой цены можно толковать и в таких случаях, когда матрица пертурбации содержит не один ненулевой элемент. В этом случае мы говорим не о чистой, а о смещенной теневой цене ограничения, деятельности и выручки.

В дальнейшем статья показывает формулы различных типов теневой цены. Способы расчетов разделяются на две группы в зависимости от того, что прямая или двойственная задача имеет одно или больше оптимальных решений.

Понятие общей теневой цены важно с точки зрения практического использования в народнохозяйственном программировании для показания того, является ли модель стабильной или нестабильной при условиях чрезвычайного скорого изменения параметров.