VÉLEMÉNYRANGSOROK ALKALMAZÁSA PÉNZÜGYI SZITUÁCIÓKBAN[1]

BAYER PÉTER
Eötvös Loránd Tudományegyetem

A Bayesi–Nash-Egyensúly egy kellemetlen tulajdonságát vizsgáljuk. Egy bankpánikot modellező játék felírása során két lehetséges megoldást mutatunk be, az első a játék Bayesi–Nash-Egyensúlya, melyhez ismertetjük az elméleti hátteret elsősorban Harsányi (1967-68) alapján, a második pedig egy optimista feltevésen alapuló döntés. A második esetben véleményrangsorokat használtunk arra, hogy az általunk használt optimizmusnak racionális korlátokat szabjunk. Eredményül azt kaptuk, hogy a Bayesi–Nash-Egyensúly nagyon óvatos, a közgazdasági feltevéseknek ellentmondó stratégiát követ, míg az optimista stratégia teljesíti az előzetesen elvárt tulajdonságokat. Azt gondoljuk, hogy a gyakorlati életben mutatott viselkedés közelebb van ehhez az optimista stratégiához mint a Bayesi–Nash-Egyensúlyban mutatott túlzott óvatossághoz.

Kulcsszavak: Bayesi-játékok, Bayesi–Nash-Egyensúly, véleményrangsorok, interim normál forma, ex-ante normál forma.

1 Bevezetés

A cikk a Bayesi-játékokon értelmezett Nash-Egyensúly fogalmak egy negatív tulajdonságával foglalkozik. A játékelmélet közgazdasági alkalmazása szempontjából lényeges, hogy a gyakran használt fogalmak intuícióinknak megfelelően működjenek a fontos közgazdasági jelenségeken. Nálunk ez a jelenség egy fiktív vállalat bankbetétjének kezelése lesz a különböző pénzügyi helyzetekben, a játékelméleti fogalom pedig a nem tökéletes információs helyzetek modellezésénél használt legalapvetőbb egyensúlyfogalom, a Bayesi–Nash-Egyensúly.

A pénzügyi szituációk játékelméleti megközelítése bejáratott terület. Erre jó hazai példa Csóka (2003) és Balog et al. (2011), akik kooperatív játékelméleti eszközöket mutatnak be kockázatkezelési szituációkban, vagy Szűcs et al. (2010), akik a különböző gazdasági szerződéseket vizsgálják episztemológiai szempontból. A pénzügyi piac szereplői között fellépő interakciókból származó kockázat egyik megjelenése a bankpánik. A bankpánikoknak szintén komoly irodalma létezik, ezek közül a legismertebb Diamond és Dybvig (1983), akik

[1]Ezúton szeretném megköszönni Pintér Miklósnak segítőkészségét, és hogy idejét nem kímélve támogatott szakmai és formai tanácsaival. Köszönöm szépen Tóth Mánuelnek, hogy gondolkodott velem és megosztotta velem véleményét. Beérkezett: 2013. február 20.
E-mail: `bayerpet@cs.elte.hu`

többidőszakos modelljét Green és Lin (2000) és Green és Lin (2003) gondolták tovább. Ugyanennek a modellnek az egyidőszakos variánsa jön elő Allen és Morris (1998)-ban is, némileg fordított gondolatmenettel: ők egy absztrakt episztemológiai struktúra, a véleményrangsor fontosságát hangsúlyozták pénzügyi környezetben. Cikkünk az általuk bevezetett játék, a szarvasvadászat (ld. *1. táblázat*) egy nem tökéletes információs átiratát használja szemléltetésül. Az átirat lényege, hogy bevezetünk egy kockázatparamétert mindkét játékosra, mely egy külső adottság, továbbá mindkét játékost ellátjuk vélekedésekkel a másik kockázati paraméteréről. Az így kapott új játékban a kockázatos akciót (szarvas) a bankbetét megtartása helyettesíti, a kisebb kifizetést nyújtó biztonságos akciót (nyúl) a betét feloldása. Itt az fogja jelenteni a veszélyt, (a szarvas elijesztését) hogy ha valaki kockázatmentes stratégiát választ, azzal bankcsődöt idéz elő, és a nagyobb kifizetés elérhetetlenné válik. Látni fogjuk, hogy az új játéknak egyetlen Bayesi–Nash-Egyensúlypontja van, ez pedig az, ami a szarvasvadászatban a kockázatdomináns Nash-Egyensúlynak felel meg (nyúl, nyúl), tehát elveszítjük a Pareto-optimális Nash-Egyensúlyt (szarvas, szarvas).

		Másik vadász	
		Szarvas	Nyúl
Egyik vadász	Szarvas	(2,2)	(0,1)
	Nyúl	(1,0)	(1,1)

1. táblázat. A szarvasvadászat

Ez a megoldás a pénzügyi világból vett tapasztalatnak ellentmond, a bankokat alacsony kockázat mellett nem rohanják meg a betétesek és nem következik be a bankcsőd. Így a közgazdasági alkalmazások szempontjából lényeges, hogy magyarázatot tudjunk találni arra, hogy miként jöhet létre mégis viszonylag alacsony kockázat esetén a Pareto optimális egyensúly, amikor a bankbetéteket nem oldják fel, illetve megmondjuk, hogy milyen kockázati paraméterértékre éri meg a nagyobb kifizetésre utazni, és mikor éri meg inkább a biztonságos akció. Ehhez a játékosok episztemológiai tulajdonságait írjuk fel, a típusokat a lehetséges kockázati paraméterértékekhez igazítva. Az egyes típusokban levezetjük a játékosok véleményrangsorait Aumann (1999b) alapján, majd ennek megfelelően definiálunk döntéseket a játékosoknak. Látni fogjuk, hogy az így kapott döntések megfelelnek az elvárt logikus követelményeknek, tehát kapunk olyan típusokat, amiben a Pareto-optimális egyensúlyt játsszák a játékosok és alacsonyabb kockázat esetén alacsonyabb a bankcsőd bekövetkezésének valószínűsége.

A következő részben bevezetjük a fogalmakat, amikkel dolgozunk, elsősorban Forgó et al. (2005) és Pintér (2011) alapján. A Bayesi-játék fogalma és a közös prior feltételezése Harsányi (1967-68)-tól ered. A Bayesi–Nash-Egyensúlyhoz Nguyen (2011) és Battigalli et al. (2011) volt segítségünkre. A Bayesi–Nash-Egyensúly episztemológiai feltételeihez lásd még Aumann és Brandenburger (1995). A harmadik részben bemutatjuk az Allen és Morris (1998)-ban szereplő, Bayer és Tóth (2011) által átírt játékot, és felírjuk a Bayesi–Nash-Egyensúlyt. Ezután a játékosok vélekedése és az intuícióink alapján konstruálunk a játékra egy alternatív megoldást. A negyedik részben az itt kapott megoldás gyakorlati feltételeit mutatjuk be.

2 Alapfogalmak

Egy bevett játékelméleti jelöléssel a tanulmány során $i \in N$ esetén $-i$-vel jelöljük az $N \setminus \{i\}$ halmazt. A halmaz esetén $\mathcal{P}(A)$-val jelöljük A hatványhalmazát.

2.1 Bayesi-játék és Bayesi–Nash-Egyensúly

Az itt használt fogalmakhoz lásd még például Pinter (2011).

2.1. Definíció. *Egy $G = (N, \{A_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N})$ listát normál formában megadott játéknak nevezünk, ahol*

- *N a játékosok véges, nemüres halmaza,*
- *A_i az i játékos véges, nemüres akcióhalmaza, továbbá a $\times_{i\in N} A_i$ szorzatot A-val jelöljük,*
- *$u_i : A \to I\!R$ a játékosok kifizetésfüggvénye.*

2.2. Definíció. *Egy $a^* \in A$ akcióprofil $G = (N, \{A_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N})$ játék Nash-Egyensúlya, ha minden $i \in N$-re és minden $a_i \in A_i$-re $u_i(a_i, a^*_{-i}) \leq u_i(a^*)$.*

A közgazdasági problémák túlnyomó többségéhez a játék normál formában történő felírása kevés, ugyanis nem szerepelnek benne a játékra hatást gyakorló belső (játékosokhoz rendelhető) és külső (játékosokhoz nem rendelhető, úgynevezett természeti) paraméterek. A Bayesi-játék és a típustér fogalma ezt hivatott megoldani. Mivel a példánk minden paramétere csak véges halmazból kerül ki, didaktikai okokból Osborne és Rubinstein (1994)-hez hasonlóan véges típusteret feltételezünk. Magától értetődő, hogy amit állítunk, általánosabb definíciókkal is működik.

2.3. Definíció. *A $\mathcal{T} = (P, \{T_i\}_{i\in N}, \Pi)$ listát típustérnek nevezzük, ahol*

- *P a véges, nemüres paramétertér,*
- *T_i az i játékos véges, nemüres típushalmaza,*
- *Π a közös prior, mely egy valószínűségeloszlás $P \times T = \Omega$ fölött, ahol $T = \times_{i\in N} T_i$.*

A fenti felírásban a P paraméterteret a természet állapotainak is szokás nevezni, és a világ a játék azon információit gyűjti össze, amelyek relevánsak a játék szempontjából, de nem az egyes játékosokra vonatkoznak. Ezzel szemben a T_i típushalmazok tartalmazzák azokat a paramétereket, amik kifejezetten a játékosokhoz kapcsolható információk. A $P \times T$ halmazt Ω-val jelöljük, és világállapotok halmazának nevezzük.

2.4. Példa. A részvénypiacon két állapot jöhet létre, növekedés (p_1) vagy csökkenés (p_2). Van két befektető $(1, 2)$, akik különböző információkkal rendelkeznek a piac alakulásáról. Az első várhat stagnálást (t_1^1) vagy növekedést (t_1^2). Ha stagnálást vár, akkor a piac kétszer akkora valószínűséggel csökken, mint nő, míg ha növekedést vár, akkor 1 valószínűséggel növekszik. A második befektető semmit nem tud a piacról. A részvénypiac $1/2 - 1/2$ prior valószínűséggel nő vagy csökken. Ezen episztemológiai szituációhoz tartozó típustér a következőképp írható fel: $P = \{p_1, p_2\}$, $T_1 = \{t_1^1, t_1^2\}$, $T_2 = \{t_2\}$ és Π olyan, hogy

$$\Pi(\{p_1\} \times \{t_1^1\} \times \{t_2\}) = \Pi(\{p_1\} \times \{t_1^2\} \times \{t_2\}) = \frac{1}{4}\,,$$
$$\Pi(\{p_2\} \times \{t_1^1\} \times \{t_2\}) = \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \Pi(\{p_2\} \times \{t_1^2\} \times \{t_2\}) = 0\,.$$

Ekkor a feltételes valószínűségekre teljesülnek a szövegben felírt összefüggések:

- $\Pi(\{p_1\}) = \frac{1}{2}$, $\Pi(\{p_2\}) = \frac{1}{2}$,
- $\Pi(\{p_1\}|\{t_1^1\}) = \frac{1}{3}$, $\Pi(\{p_2\}|\{t_1^1\}) = \frac{2}{3}$,
- $\Pi(\{p_1\}|\{t_1^2\}) = 1$, $\Pi(\{p_2\}|\{t_1^2\}) = 0$.

2.5. Definíció. *Egy $G_B = (N, \{A_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N}, \mathcal{T})$ listát Bayesi-játéknak nevezünk, ahol*

- *N és A_i a 2.1. definícióból valóak,*
- *$s_i : T_i \to A_i$, i játékos stratégiája, S_i az $i \in N$ játékos stratégiahalmaza,*
- *$u_i : P \times A \to \mathbb{R}$ az $i \in N$ játékos kifizetésfüggvénye,*
- *$\mathcal{T}$ a 2.3. definícióban megadott típustér.*

Ahhoz, hogy Bayesi–Nash-Egyensúlyról tudjunk beszélni, a 2.5. definícióban megadott játékot Harsányi (1967-68)-t követve át kell írnunk normál formába. Ehhez Battigalli et al. (2011) kétféle átírást említ, az interim és az ex-ante formát. A két átírás nagyban különbözik megközelítés szempontjából, és általában a rajtuk értelmezett Nash-Egyensúly is eltérő eredményeket ad.

2.6. Definíció. *A $G_B = (N, \{A_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N}, \mathcal{T})$ Bayesi-játék interim normál formájának nevezzük azt a $G_{int} = (\hat{N}, \{\hat{A}_j\}_{j\in\hat{N}}, \{\hat{u}_j\}_{j\in\hat{N}})$ normál formában megadott játékot, ahol*

- *$\hat{N} = \cup_{i\in N} T_i$,*

– $\hat{A}_j = A_i$, *ahol* $j \in T_i$, $i \in N$,

– $\hat{u} : \hat{A} \to I\!R$, *hogy minden* $\hat{a} \in \hat{A}$*-ra:* $\hat{u}_j(\hat{a}) = \int_{P \times A} u_j \circ (\mathrm{id}_P, \hat{s})\, d\Pi_j$,

ahol $\hat{A} = \times_{j \in \hat{N}} \hat{A}_j$, $\hat{s}_i : T_i \to A_i$, *hogy minden* $k \in T_i : \hat{s}_i(k) = \hat{a}_k$, $i \in N$, $\hat{s} : T \to A$ *az* $\{\hat{s}_i\}_{i \in N}$ *leképezések szorzata,* $(\mathrm{id}_P, \hat{s})$ *leképezés az* id_P *és* s *leképezések szorzata,* Π_j *pedig a játékosok egyes típusaiban lévő elsőrendű vélekedése, mely valószínűségi eloszlást a közös priorból származtatjuk a feltételes valószínűség naiv definíciója alapján* $j = t_i$*-re:*

$$\Pi_j(\{t_1\} \times \ldots \times \{t_i\} \times \ldots \times \{t_n\}) = \frac{\Pi(\{t_1\} \times \ldots \times \{t_i\} \times \ldots \times \{t_n\})}{\Pi(T_1 \times \ldots \times T_{i-1} \times \{t_i\} \times T_{i+1} \times \ldots \times T_n)} .$$

Az interim megközelítésben az eredeti játék típusai lesznek az új játékosok, akcióhalmazaik nem változnak (a régi játékosok akcióhalmazai lesznek az új játékosok akcióhalmazai), az új kifizetőfüggvényben pedig nincsenek egymásra hatással azok a típusok, akik egyazon játékoshoz tartoztak. Az interim forma értelmezhető úgy is, hogy először a természet lép, és minden játékosnak kisorsol egy típust, majd ennek megfelelően a típusok ismeretében a játékosok választanak egy akciót. A játékosoknak új vélekedésük lesz a világállapotokról, ezt a vélekedést nevezzük elsőrendű vélekedésnek.

2.7. Példa. Tekintsük a következő $(N, \{A_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N}, \mathcal{T})$ Bayesi-játékot:

– $N = \{1, 2\}$, $A_1 = A_2 = \{\mathrm{Long}, \mathrm{Short}\}$,

– $\{u_i\}_{i \in N}$ kifizetéseket a 2. és 3. táblázatban adjuk meg,

– $\mathcal{T}$ a 2.4. példából származik.

		2-es játékos	
		Long	Short
1-es játékos	Long	(60,60)	(0,0)
	Short	(0,0)	(0,0)

2. táblázat. A kifizetések p_1 természetállapot esetén

		2-es játékos	
		Long	Short
1-es játékos	Long	(0,0)	(0,120)
	Short	(120,0)	(0,0)

3. táblázat. A kifizetések p_2 természetállapot esetén

Ekkor a Bayesi-játék interim normál formáját a 4. táblázat tartalmazza, a kifizetések sorrendje: t_1^1, t_1^2, t_2.

t_1^1		t_2	
Long-ot játszik		Long	Short
t_1^2	Long	(20,60,30)	(0,0,60)
	Short	(20,0,15)	(0,0,60)

t_1^1		t_2	
Short-ot játszik		Long	Short
t_1^2	Long	(40,60,15)	(0,0,0)
	Short	(80,0,0)	(0,0,0)

4. táblázat. Az interim normál formában megadott játék

2.8. Definíció. *A $G_B = (N, \{A_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N}, \mathcal{T})$ Bayesi-játék ex-ante normál formájának nevezzük azt a $G_{ex} = (N, \{S_i\}_{i\in N}, \{\bar{u}_i\}_{i\in N})$ normál formában megadott játékot, ahol*

- *Az $\{S_i\}_{i\in N}$ stratégiahalmazok a 2.5. definícióból valók,*
- *$\bar{u}_i : S \to \mathbb{R}$, hogy minden $s \in S$-re: $\bar{u}_i(s) = \int_{P\times T} u_i \circ (\mathrm{id}_P, s)\, d\Pi$,*

ahol $S = \times_{j\in N} S_j$, Π pedig a közös prior.

Az ex-ante megközelítés abban különbözik az interimtől, hogy itt a játékosok a típusuk kézhez kapása előtt választanak maguknak egy stratégiát, azaz minden típusra megmondják, mit fognak játszani. Ehhez a közös priorjukat fogják felhasználni, ugyanis a döntés előtt azt feltételezzük, hogy a játékosok nem tudják, milyen típust kapnak.

2.9. Példa. Tekintsük 2.7. példában megadott Bayesi-játékot. Ennek az ex-ante normál formáját az 5. táblázatban adtuk meg. A sorjátékos stratégiáiban elöl a t_1^1-ben, hátul pedig a t_1^2-ben választott akció kezdőbetűje szerepel.

		2-es játékos	
		Long	Short
1-es játékos	LL	(30,30)	(0,60)
	LS	(15,15)	(0,60)
	SL	(45,15)	(0,0)
	SS	(60,0)	(0,0)

5. táblázat. Az ex-ante normál formában megadott játék

2.10. Definíció. *Egy $s^* \in S$ stratégiaprofil $G_B = (N, \{A_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N}, \mathcal{T})$ Bayesi-játék interim Bayesi–Nash-Egyensúlya, ha létezik olyan $\hat{a} \in \hat{A}$ akcióprofil, ami Nash-Egyensúly az $(\hat{N}, \{\hat{A}_i\}_{i\in\hat{N}}, \{\hat{u}_i\}_{i\in\hat{N}})$ játékban, ez a játék G_B interim normál formája, és minden $i \in N$ játékosra és $k \in T_i$ típusra $s_i^*(k) = \hat{a}_k$.*

2.11. Példa. Tekintsük a 2.7. példában megadott Bayesi-játékot. Ekkor a 3. és 4. táblázatból kiolvasható, hogy ((Short, Long), Long) a játék egy interim Bayesi–Nash-Egyensúlya.

2.12. Definíció. *Egy $s^* \in S$ stratégiaprofil $G_B = (N, \{A_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N}, \mathcal{T})$ Bayesi-játék ex-ante Bayesi–Nash-Egyensúlya, ha s^* Nash-Egyensúly az $(N, \{S_i\}_{i\in N}, \{\bar{u}_i\}_{i\in N})$ játékban, és ez a játék G_B ex-ante normál formája.*

2.13. Példa. Tekintsük a 2.7. példában megadott Bayesi-játékot. Ekkor a 2.9. példában felírt formából látszik, hogy ((Short, Long), Long) a játék egy ex-ante Bayesi–Nash-Egyensúlya (5. táblázat).

2.14. Felvetés. *$G_B = (N, \{A_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N}, \mathcal{T})$ véges típusterű Bayesi-játékra feltesszük, hogy minden típus prior valószínűsége pozitív, azaz:*

$$\Pi(P \times T_1 \times \dots T_{i-1} \times \{t_i\} \times T_{i+1} \times \dots \times T_n) > 0$$

tetszőleges $i \in N$-re és $t_i \in T_i$-re.

2.15. Állítás. *Ha $G_B = (N, \{A_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N}, \mathcal{T})$ Bayesi-játékban a 2.14. felvetés teljesül, akkor $s \in S = \times_{i \in N} S_i$ stratégiaprofil pontosan akkor interim Bayesi–Nash-Egyensúlya G_B játéknak, ha ex-ante Bayesi—Nash-Egyensúly is.*

Bizonyítás. Lásd például Nguyen (2011), vagy Mas-Colell et al. (1995) 255. oldal 8.E.1. ezzel ekvivalens állítását. □

Mivel a 2.14. felvetés tanulmányunk során végig teljesül, az interim és az ex-ante Bayesi–Nash-Egyensúly fogalma a 2.15. állítás miatt esetünkben egybeesik, ezért csak Bayesi–Nash-Egyensúlyként hivatkozunk rá.

2.2 Véleményrangsorok

Általánosan a véleményrangsorok megkonstruálása elég technikai, így az általunk használt speciális esetben didaktikai okokból nem írjuk fel őket. Ennek részben az is az oka, hogy míg az elsőrendű vélekedés viszonylag kézzelfogható a valós életben is, a vélekedésekről alkotott vélekedések fogalma, és a játékra való hatásuk már kevésbé.

2.16. Példa. Anna és Béla a következő játékot játsszák: Adott egy négy fiókos szekrény, melynek mindegyik fiókjában van két-két összehajtogatott papírlap. A papírlapokon számok szerepelnek úgy, hogy mindegyik fiókban van egy lap, amin 1-es szerepel, egy fiókba került 0- ás szám, a maradék három fiókba pedig egy-egy 2-es szám. A játék elején Anna és Béla megegyeznek, hogy melyik fiókot választják (egyikük sem tudja, melyik fiókban van a 0), majd azon belül mindketten választanak egy-egy papírlapot és megnézik a sajátjukat. Ezután Anna dönthet, hogy beszáll-e a licitbe vagy nem. Ha nem száll be, Béla nyer egy forintot Annától. Ha beszáll, Béla is dönthet, hogy beszáll, vagy nem. Ha Béla nem száll be, Anna kap egy forintot Bélától. Ha Béla is beszáll, akkor mindketten megnézik egymás lapját is, és amelyikükén nagyobb szám szerepel, az négy forintot nyer a másiktól.

Ez a játék megmutatja, hogy a másodrendű vélekedések is szerepet kapnak a játék megoldásában. Vizsgáljuk meg, mi történik ebben a példában akkor, ha Anna a nullás számot húzza. Ekkor ő természetesen pontosan tudja, hogy Béla kezében egyes van, ahogyan azt is, hogy Béla szerint Annánál $\frac{1}{4}$ valószínűséggel van nullás és $\frac{3}{4}$ valószínűséggel kettes. Azaz Anna vélekedése Béláról az, hogy Béla nyerne, ha mindketten beszállnának, de Anna vélekedése Béla vélekedéséről megmondja, hogy Béla be sem szállna a játékba, ugyanis Béla várható kifizetése ekkor a saját elsőrendű vélekedése szerint $-4 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = -2$, míg ha nem száll be, akkor a várható kifizetése -1.

A példában látható, hogy a játékosok a világállapotokról való információikat hogyan tudják felhasználni a többi játékos akcióira való következtetéshez. A következtetés eszközei a vélemények, a szakirodalomban használt véleményrangsor fogalom pedig ezeket formalizálja. Ahhoz, hogy Anna tudjon Béla döntéséről következtetni, szükség van arra, hogy Anna tudja, hogy Béla (első rendben) racionális. A racionalitás és a tudás fogalmának széles játékelméleti irodalma van (Aumann, 1999a), amivel itt nem foglalkozunk kiterjedten. A tudást a szó köznapi értelmében használjuk, a köztudott azt jelenti, hogy minden játékos tudja, hogy minden játékos tudja ... és így tovább a végtelenségig, míg a racionalitás azt fogja jelenteni, hogy a játékosok várható kifizetést maximalizálnak.

Mivel minden játékosnak minden játékos vélekedéséről lehet vélekedése, a magasabb rendű véleményeket két játékos esetén a legegyszerűbb vizsgálni. A példában is láthatjuk, hogy a másodrendű vélekedés a véges esetben, minden típusra egy valószínűségeloszlás lesz a világállapotok terén. Az elsőrendű vélekedések köztudottak, hiszen a közös priorból számoljuk őket. Intuitíve, a véleményekről alkotott vélemények csak az elsőrendű vélekedésektől függenek, és így a másodrendű vélemények is kiszámolhatók a közös priorból és köztudottak. Ez lépésenként minden véleményszintre elmondható, tehát a játékosok véleményrangsora – a különböző rendű vélekedések összessége – köztudott.

3 A vizsgált szituáció

Ebben a részben az Allen és Morris (1998) által tárgyalt játék egy változatát vizsgáljuk. A játék mögötti történet a következő: Két vállalat a fő betétesei egy banknak. Mindkét vállalat előtt két lehetőség áll, vagy kiveszik a betétjüket (W=Withdraw) vagy bennhagyják minden pénzüket a bankban (R=Remain). Legyen a vállalatok betétje 100\$ – 100\$. Amennyiben mindkét vállalat úgy dönt, hogy a bankban hagyják a pénzüket, az időszak végén a bank mindkettejüknek fizet kamatot, ennek mértéke 35% (a pontos érték közgazdaságilag nem releváns, azért használunk ilyen magas kamatlábat, hogy kevés játékos és kevés típus esetén is tudjunk következtetni). Amennyiben bármelyik vagy mindkét vállalat kiveszi a pénzét, akkor hozzájut a 100\$-jához, azonban ha az egyik vállalat bent hagyja a pénzét, míg a másik kiveszi, akkor a történet szerint a bank csődbe megy, és az első vállalat elbukja a 100\$-ját.

A $\Gamma = (N, \{A_1, A_2\}, \{u_1, u_2\})$ játék a következő:

- $N = \{1, 2\}$ a játékosok halmaza,
- $A_1 = A_2 = \{R, W\}$ a játékosok akcióhalmazai,
- A játékosok u_1, u_2 kifizetéseit a 6. táblázat mutatja.

		2-es játékos	
		R	W
1-es játékos	R	(135,135)	(0,100)
	W	(100,0)	(100,100)

6. táblázat. A Γ játék kifizető-bimátrixa

Tegyük fel továbbá, hogy a vizsgált szituáció nem tökéletes információs, a játékosok különböző típusúak lehetnek Harsányi (1967-68), és a típusok hatással lehetnek a játékos stratégiáira. A játékosok típusai a likviditási mutatójuk, feltesszük, hogy mindkét vállalat likviditási mutatója egy-egy egész szám 0 és 7 között. A 0 „jelentése”, hogy az adott vállalat csődben van, az 1-é az, hogy egy vállalat csődközeli, a 7-es jelenti a pénzügyileg legjobb állapotot, míg a köztes értékek köztes likviditást jeleznek. Feltesszük, hogy ha egy vállalat csődben van, vagy csődközeli, akkor ki kell vennie a pénzét. A játékosok típusai nem függetlenek, korreláltak, ami nálunk azt fogja jelenteni, hogy a likviditási mutatójuk nem térhet el egynél jobban egymástól, azaz, ha 1-es játékos típusa 3, akkor 2-es játékosé 2, 3 vagy 4 lehet. Ennek magyarázata az általunk vizsgált helyzetben annyi, hogy a két vállalat ugyanabban az iparágban dolgozik, így ugyanazok a hatások hatnak rájuk, és bár lehetnek közöttük különbségek, likviditásuk nagyban összefügg.

A $\Gamma_B = (N, \{A_1, A_2\}, \{u_1, u_2\}, \mathcal{T})$, $\mathcal{T} = (P, \{T_1, T_2\}, \Pi)$ Bayesi-játék és a hozzá tartozó típustér a következő:

- N, $\{A_1, A_2\}$, $\{u_1, u_2\}$ a Γ játékból való, tehát az u_1 és u_2 kifizetőfüggvények nem függenek a típusoktól,
- $T_1 = T_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ a játékosok típushalmazai, P egyelemű,
- $s_i : T_i \to \{R, W\}$ az i játékos egy stratégiája olyan, hogy $s_i(t) \in \{R, W\}$, ha $t \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, és W különben, S_i az i játékos stratégiahalmaza, $i \in \{1, 2\}$, tehát 0 és 1 típusban egy vállalat mindenképp kiveszi a pénzét,
- Π a közös prior a 7. táblázatban látható.

		T_2							
		0	1	2	3	4	5	6	7
T_1	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	0	0	0	0	0	0
	1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	0	0	0	0	0
	2	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	0	0	0	0
	3	0	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	0	0	0
	4	0	0	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	0	0
	5	0	0	0	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	0
	6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$
	7	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$

7. táblázat. A Γ_B Bayesi-játék közös priorja

A 7. táblázatban az is látszik, hogy a közös priort úgy konstruáltuk, hogy ha egy játékos ismeri a típusát és az nem extremális pénzügyi helyzetet mutat (nem 0 vagy 7), akkor egyenlő valószínűséget rendel a másik játékos lehetséges típusaihoz. Egyébként minden típus előfordulásának prior valószínűsége $\frac{1}{8}$.

3.1 A játék Bayesi–Nash-Egyensúlya

Ebben a részben megnézzük, mi történik az általunk vizsgált játék Bayesi–Nash-Egyensúlyában.

3.1. Állítás. Γ_B*-nek pontosan egy Bayesi–Nash-Egyensúlya létezik és az az a stratégia, amiben mindkét játékos minden típusra* W*-t játszik.*

Bizonyítás. A bizonyítás során az interim megközelítést fogjuk használni. Azt fogjuk megmutatni, hogy amennyiben s stratégiaprofil Bayesi– Nash-Egyensúly, és van egy olyan $(t_1^*, t_2^*) \in \Omega$ világállapot, amire $\Pi(t_1^*, t_2^*) \neq 0$ és $s(t_1^*, t_2^*) = (W, W)$, akkor minden világállapotra $s(\omega) = (W, W)$.

Tudjuk, hogy $(t_1, t_2) = (0, 0)$-ra és $(t_1, t_2) = (1, 1)$-re a játékosok csak (W, W)-t játszhatnak. Ezen felül tudjuk, hogy Γ_B interim normál formájú átírásának létezik Nash-Egyensúlya (könnyű meggondolni, hogy mindkét játékosra mindig W például az). Ebből következik, hogy s Bayesi–Nash-Egyensúlyra is $s(1, 1) = (W, W)$, továbbá a közös priorból $\Pi(1, 1) = \frac{1}{24} \neq 0$. Nézzük, mit játszik az 1-es játékos a 2-es típusban (jelölése az interim játékban 12-es játékos lesz). A következőt fogjuk végiggondolni:

$$\hat{u}_{12}(s) \begin{cases} = 100\,, & \text{ha ha } s\text{-ben 12 } W\text{-t játszik}\,, \\ \leq 90\,, & \text{ha } s\text{-ben 12 } R\text{-t játszik}\,. \end{cases}$$

Ezek közül a felső ág világos, ha egy játékos W-t játszik, akkor 100-at kap. Ha azonban R-t, akkor a várható kifizetés három tényező összege lesz: $\hat{u}_{12}(s) \leq \frac{1}{3}0 + \frac{1}{3}135 + \frac{1}{3}135 = 90$, a közös prior és az eredeti játék kifizetőfüggvénye alapján. A 0-t onnan kaptuk, hogy tudtuk, hogy a 21-es játékos W-t játszik, hiszen mást nem tud, 135 pedig az elérhető legnagyobb kifizetés, így alkalmas felső becslésre.

Ettől megéri eltérni, ugyanis a W biztosan 100 kifizetést hoz, így a 12-es játékos s-ben W-t játszik. Hasonlóan megállapítható, hogy a 22-es játékos is W-t fog játszani. Innen a típusokat végigléptetve egészen 17-ig és 27-ig megkapjuk, hogy s-ben mindkét játékos mindig W-t játszik. $\square$

Láthatjuk, hogy az eredeti Γ játék két Nash-Egyensúlya, a (W, W) és az (R, R) közül csak az maradt meg, amiben a játékosok kiveszik a pénzüket. Ez azért nem szerencsés, mert azt várjuk, hogy nagyon biztonságos típuspárokra $(t_1 = t_2 = 7)$ már R-t játszanak a játékosok. Ahhoz, hogy megmagyarázzuk, hogyan is jöhet ki a való életben a Pareto-optimális Nash-Egyensúly és mikor jöhet ki ebben a példában, a játékosok véleményrangsorait fogjuk használni.

3.2 Véleményrangsorok két játékos esetén

Ebben a részben felírjuk a játékosok közös priorból származtatott vélekedéseit, ezzel a célunk az, hogy valamilyen más döntési stratégiát tudjunk velük definiálni. A 2.2. alfejezetben említettük a véleményrangsorok intuícióját, a kiszámolásukról viszont még nem esett szó.

$\pi_i^k(\cdot, \cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \times \Omega \to \mathbb{R}$ jelöli i játékos k-adrendű vélekedését, melyre teljesül, hogy tetszőlegesen rögzített $\omega^* \in \Omega$-ra $\pi_i^k(\cdot, \omega^*)$ egy valószínűségeloszlás az $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ téren, $i \in \{1, 2\}$ illetve $k \in \mathbb{N}$. A vélekedéseket a következő rekurzió alapján definiáljuk:

- $\pi_i^1(E, (\{t_i\}, \{t_{-i}\})) = \Pi_j(E)$, ahol $E \in \mathcal{P}(\Omega)$, $j = t_i$, Π_j pedig 2.6. definícióból való (Γ_B játékra alkalmazva),
- $\pi_i^k(E, \omega^*) = \sum_{\omega \in \Omega} \pi_{-i}^{k-1}(E, \omega) \pi_i^1(\{\omega\}, \omega^*)$, ahol $E \in \mathcal{P}(\Omega)$ és $k > 1$.

A $k = 1$ eset a már megismert elsőrendű vélekedés, ez az átírás azért kényelmes, mert eddig az elsőrendű vélekedések típusokra vonatkoztak, mi azonban az egyes játékosokhoz szeretnénk rendelni őket. A $k > 1$-hez elégséges magyarázat annyi, hogy i játékos ismeri $-i$ minden $k-1$-nél alacsonyabb rendű vélekedését, tehát tudja, mire gondolhat $-i$, tudja a saját típusát, de nem tudja, hogy a játék mely világállapotban van, így fel kell használnia az elsőrendű vélekedését. A struktúra hasonlít az átmenetvalószínűség fogalmához.

A gondolkodásmód pontosan ugyanaz, mint Markov-láncok esetén: ahhoz, hogy eljussunk ω^*-ból E-be, először eljutunk egy tetszőleges ω-ba, majd innen E-be, mert ezeket az átmeneteket már ismerjük, ha pedig a valószínűségeket összeadjuk, megkapjuk az ω^*-ból E-be jutás valószínűségét.

3.3 Következtetés a véleményrangsorok alapján

Világos, hogy az 1-es játékos R akciót játszik egy $t_1^* \in \{2,3,4,5,6,7\}$ típusban, ha

$$pu_1(R,R) + (1-p)u_1(R,W) > pu_1(W,R) + (1-p)u_1(W,W) \ ,$$

ahol p annak a valószínűsége hogy a 2-es játékos (1-es játékos szerint) R-t játszik. Ekkor a fenti egyenletbe való behelyettesítés után

$$135p > 100 \ .$$

Tehát, ha lenne ilyen p értékünk az egyes típusokra, akkor az 1-es játékos azonnal tudna dönteni. Ahhoz, hogy p-t meg tudjuk becsülni, az 1-es játékos véleményrangsorát fogjuk felhasználni.

Legyen $K \in \mathcal{P}(\Omega)$ esemény azon világállapotok összessége, amiben valamelyik játékos típusa vagy 0 vagy 1. Ekkor világos, hogy $p \leq p_1 = 1 - \pi_1^1(K,\omega)$, hiszen, ha a 2-es játékos 0 vagy 1 típusú, akkor biztosan W-t játszik. Ugyanúgy tudjuk azt is, hogy $p \leq p_2 = 1 - \pi_1^2(K,\omega)$, hiszen a 2-es játékos valamilyen valószínűséggel azt fogja hinni, hogy az 1-es játékos 0-ás vagy 1-es típusú, és ha ez túl nagy, akkor nem fog R-t játszani. Ez igaz lesz bármilyen rendű vélekedésre, tehát minden $m \in \mathbb{N}$-re $p \leq p_m$, ahol

$$p_m = 1 - \pi_1^m(K,\omega) \ .$$

3.2 Példa. Legyen $\omega = (3,3)$, $m = 4$. Ekkor $\pi_1^4(t_i = 0,\omega) = 0{,}0617$ és $\pi_1^4(t_i = 1,\omega) = 0{,}1235$, $i \in \{1,2\}$, tehát az 1-es (és persze a 2-es) játékos 3-as típusában $p_4 = 0{,}8148$. Tehát a negyedrendű vélekedésből tudjuk, hogy ha az 1-es játékos likviditása 3, akkor a 2-es játékos maximum $0{,}8148$ valószínűséggel játszik R-t.

A fent definiált p_m sorozat alapján határozzuk meg, hogy egy i játékos egy t_i típusban mit fog dönteni. Jelöljük a sorozat legnagyobb alsó korlátját $p_{\inf}$-fel. A döntéshez a következőket használjuk:

3.3 Állítás. *Ha* $135p_{\inf} < 100$*, akkor legyen* $k = \{\inf l : 135p_l < 100, l \in I\!N\}$*. Köztudott* k*-adrendű kölcsönös racionalitás mellett (*k *hosszan* i *tudja, hogy* $-i$ *tudja, hogy* i *tudja... várható kifizetést maximalizál)* i *játékos az adott típusban csak* W*-t játszhat.*

Bizonyítás. A k-adrendű vélekedésből az következik, hogy $-i$ játékos legalább $1 - p_k$ valószínűséggel W-t játszik. Ekkor a várható kifizetések: $135p_k < 100$, tehát ha R-t játszanánk, ellentmondanánk a k-adrendű racionalitásnak. □

3.4. Definíció. *Azokat a stratégiákat, melyben* $135p_{\inf} < 100$ *esetén* W*-t,* $135p_{\inf} > 100$ *esetén* R*-t játszunk, optimista stratégiáknak nevezzük.*

A 3.4. definíció azért szükséges, mert intuíciónk szerint nagyon biztonságos típuspárokra ($t_1, t_2 \in \{6, 7\}$-re) már létrejön Γ játék Pareto-optimális Nash-Egyensúlya, az (R, R) (ld. 6. táblázatot). A valós közgazdasági szituációkban is azt látjuk, hogy ha minden jól megy a gazdaságban, akkor az emberek nem félnek a bankcsődtől és nem oldják fel bankbetétjeiket. Az itt felmerülő kérdés az, hogy hol húzzuk meg a határt, azaz mi az a típus, amire már optimista esetben sem mondhatjuk, hogy játszhatunk R-t. Erre ad választ 3.3. állítás, ami egy alsó becslést ad arra, hogy milyen esetekben biztosan nem éri meg a kockázatos akció.

Az optimista döntés azt a ki nem mondott feltevést használja, hogy egy szereplő pontosan akkor veszi ki a pénzét, amikor csődös vagy csődközeli állapotban van, vagy azt hiszi, hogy a másik játékos csődös vagy csődközeli, vagy azt hiszi, hogy a másik játékos azt hiszi... és így tovább addig, amíg a kockázat túl nagy nem lesz, ha pedig nem lesz túl nagy, akkor benntart. Ekkor az általunk használt p_m sorozat infimuma nem csak felső becslés, hanem pontos érték p-re.

A sorozat típusonkénti meghatározása egy numerikus feladat. A 3.2. alfejezetben láttuk, hogy minden szintű vélekedés kiszámolható az elsőrendű vélekedésekből. Egy i játékos döntései az itt bevezetett szabály alapján a lehetséges t_i típusokban 8. táblázatban láthatók. A döntésekhez tartozó kritikus érték $\frac{100}{135} = 0,7407$.

Látszik, hogy ha van két különböző típusunk, és a nagyobb kockázatúban R a döntés, akkor a kisebb kockázatúban is az lesz, függetlenül a kritikus értéktől, amit a kamatszint határoz meg.

Az optimista döntésben látható, hogy biztonságos ($t_1, t_2 \in \{4, 5, 6, 7\}$) világállapotokra létrejön a szarvasvadászat Pareto optimális Nash-Egyensúlya, kockázatos ($t_i \in \{2, 3\}$, $i \in \{1, 2\}$) típusokra pedig a játékosok azt az akciót választják, ahol a kifizetésük nem függ a másik döntésétől (ezt a fajta akciót a szakirodalom időnként kockázatdomináns akciónak nevezi).

t_i	0	1	2	3	4	5	6	7
$p_{\inf}$	0	0	0,6063	0,7209	0,75	0,75	0,75	0,75
Optimista	W	W	W	W	R	R	R	R
Bayesi-Nash	W	W	W	W	W	W	W	W

8. táblázat. Az egyes típusokhoz tartozó döntések

A 8. táblázat tanulsága az, hogy bár mindkét döntési stratégiához ugyanúgy a közös priort használtuk, a döntés módja és a közös prior szerepe a döntésben eltérő. Az optimista döntéshozó minden véleményszintet megvizsgált, és a vélekedéseit (mely nálunk egy eloszlás volt a világállapotok terén) arra használta, hogy a másik játékos típusára következtessen, nem pedig a másik játékos által játszott akcióra. Csak azokat az eseteket vette figyelembe, amikor biztosan tudta, hogy az ellenfél W-t játszik és figyelmen kívül hagyta a többi esetet.

Ezzel szemben a Bayesi–Nash-Egyensúly csak az elsőrendű vélekedéssel számolt, mégpedig úgy, hogy azonnal következtetett az ellenfél által játszott akciókra. A probléma vele az, hogy ha nem nyolc típust állítunk be, hanem lényegesen többet, akkor is W marad az egyetlen egyensúlypont, ami nem jó eredmény alkalmazás szempontjából.

4 Konklúzió

A Bayesi-játékok normál formára való átírásakor óhatatlanul elveszítjük a közös prior eloszlásának néhány tulajdonságát, esetünkben azt, hogy a csődvalószínűség sokkal kisebb, mint a biztonságos állapotoké. Így aztán a Bayesi–Nash-Egyensúly fő problémája, hogy túl mohó módon próbálja optimalizálni a játékosok döntéseit, figyelmen kívül hagyva a közös prior globális tulajdonságait. Ebben a példában ez úgy nyilvánul meg, hogy mindkét játékos épp csak egy kicsit akar biztonságosabban játszani, mint a másik és ,,alullicitálják" egymást abban, hogy ki mikor veszi ki a pénzt egészen addig, amíg mindig ki nem veszik. Ha ez a valós gazdasági életben is így lenne, nem jönnének létre bankbetétek.

Kétféle gyakorlati magyarázatot látunk arra, hogy ez miért nem így történik. Az egyik a már említett optimizmus, mely azt jelenti alkalmazás szempontjából, hogy csak azokkal az esetekkel számolunk, amikor egészen biztos, hogy a biztonságos akciót kell választani, minden más esetben a kockázatos, de magasabb kifizetéshez vezető akciót választjuk, és azt várjuk, hogy a többi szereplő is így dönt. Ezzel létrejöhet az általunk felvázolt döntési stratégia.

A másik magyarázat azt feltételezi, hogy a szereplőknek önmagában kényelmesebb a status quo fenntartása, mint visszafordíthatatlan döntések meghozatala. Ez azt eredményezi, hogy bankbetétek képzése és feloldása nem ugyanolyan súlyú döntés lesz a szereplők életében. Ha már létezik egy szignifikáns betétünk, aminek a feloldása veszteséget okoz, akkor csak tényleg kockázatos esetekben tesszük azt meg és ugyanezt várjuk a többi szereplőtől is. Ezzel szintén létrejöhet a 8. táblázatban szereplő optimista stratégia, de csak akkor, ha a betét már a játék előtt létrejött. Fordított esetben, ha egy még nem létező betét megképzéséről kell döntést hozni, ez a megközelítés nem alkalmazható az általunk konstruált döntés magyarázatához.

Irodalom

1. Allen F., Morris S. (1998) Finance applications of game theory. Wharton Financial Institutions Center Working Paper Series 98-23-B
2. Aumann R. J. (1999) Interactive epistemology I: Knowkedge. *International Journal of Game Theory* 28:263–300
3. Aumann R. J. (1999) Interactive epistemology II: Probability. *International Journal of Game Theory* 28:301–314
4. Aumann R. J., Brandenburger A. (1995) Epistemic Conditions for Nash Equilibrium. *Econometrica* 63:1161–1180
5. Battigalli P., Di Tillio A., Grillo E., Penta A. (2011) Interactive epistemology and solution concepts for games with asymmetric information. *The B.E. Journal of Theoretical Economics*, 11(1)
6. Balog D., Bátyi T., Csóka P., Pintér M. (2011) Tőkeallokációs módszerek és tulajdonságaik a gyakorlatban. *Közgazdasági Szemle*, LVIII. évf., július-augusztus, 619–632
7. Bayer P., Tóth M. (2011) A véleményrangsorok fontossága—egy pénzügyi megközelítés—és az információs prémium. Tudományos Diákköri Konferencia dolgozat
8. Csóka P. (2003) Koherens kockázatmérés és tőkeallokáció. *Közgazdasági Szemle*, L. évf., október, 855–880
9. Diamond D. W., Dybvig P. H. (1983) Bank runs, deposit insurance, and liquidity. *Journal of Political Economy* 91(3):401–419
10. Ely J. C., Peski M. (2006) Hierarchies of belief and interim rationalizability. *Theoretical Economics*, 1:19–65
11. Forgó F., Pintér M., Simonovits A., Solymosi T. (2005) *Játékelmélet*. Elektronikus jegyzet.
12. Green E., Lin P. (2000) Diamond and Dybvig's Classic Theory of Financial Intermediation: What's Missing? *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review*, 24(1):3–13
13. Green E., Lin P. (2003) Implementing Efficient Allocations in a Model of Financial Intermediations. *Journal of Economic Theory* 109(1):1–23.
14. Harsányi J. (1967-68) Games with incomplete information played by bayesian players part I., II., III. *Management Science* 14:159–182, 320–334, 486–502.
15. Mas-Colell A., Whinston M. D., Green J. R. (1995) *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, Oxford
16. Myerson R. (1997) *Game Theory: Analysis of Conflict*. MIT Press
17. Nash J. (1950) Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 36(1):48–49
18. Nguyen G. (2011) Bayesi-játék Nash-Egyensúlya. Tudományos Diákköri Konferencia dolgozat.
19. Osborne M. J., Rubinstein A. (1994) *A course in game theory*. MIT Press
20. Pintér M. (2011) Biztosítási modellek a közgazdaságtanban. Órai jegyzet.
21. Szűcs N., Havran D., Csóka P. (2010) Információs paradoxon a vállalkozások hitelezésében nem fizető vevő esetén. *Közgazdasági Szemle*, LVII. évf., április, 318–336.

AN APPLICATION OF HIERARCHY OF BELIEFS IN FINANCIAL SITUATIONS

The paper examines an unpleasant attribute of the Bayesian Nash Equilibria. As we consider a bank run game of imperfect information, we present two possible solutions: The first is the game's Bayesian Nash Equilibrium, for which the necessary theoretical background is given, following [14]. The second is a solution based on an optimistic assumption about the players. In this second case we use the players' hiearchy of beliefs in order to create a rational bound to their optimism. As a result, we observe that the Bayesian Nash Equilibrium yields an overly careful strategy that is contradictory to general observations in everyday economic life, while the second, optimistic strategy satisfies our empirical and theoretical expectations.

KERESLET-ELŐREJELZÉS SPORADIKUS KERESLETŰ TERMÉKEKRE: EGY GYÓGYSZER-NAGYKERESKEDELMI VÁLLALAT ESETTANULMÁNYA[1]

GELEI ANDREA – DOBOS IMRE
Budapesti Corvinus Egyetem

A vállalatok jelentős része szembesül azzal, hogy termékei jelentős része iránt viszonylag kevés alkalommal jelentkezik kereslet. Ebből következik, hogy az ilyen termékekre a klasszikus előrejelzési módszerek, mint pl. a mozgó átlag számítása, vagy az exponenciális simítás nem alkalmazható. Azon termékeket, amelyek iránt viszonylag ritkán jelenik meg kereslet, sporadikus keresletű termékeknek nevezzük. A megkülönböztetés a sporadikus és nem sporadikus termékek között sokszor csak hüvelykujj szabály alapján állapítható meg, de erre vonatkozóan a szakirodalomban találunk iránymutatást. A nemzetközi szakirodalomban már megjelentek olyan új kereslet-előrejelzési módszerek, melyeket kimondottan az ilyen, sporadikus kereslettel rendelkező termékek estében javasoltak. Cikkünk célja, hogy ezeket a szakirodalmi ajánlásokat egy konkrét hazai vállalat valós adatain esettanulmány jelleggel tesztelje. A nemzetközi szakirodalomban is ritkán publikálnak tudományos dolgozatokat, amelyek ezt a témakört valós alkalmazási környezetben tárgyalják; ismereteink szerint magyar nyelven erről tudományos dolgozat pedig még nem született. Elméleti bevezetőnk után egy gyógyszer-nagykereskedelmi vállalatnál valós adatait használva vizsgáljuk a kérdéskört. Sor kerül a vállalat termékportfóliójának a kereslet-előrejelzés szempontjából történő tipizálására, majd sporadikus keresletű termékek keresletének előrejelzésére és ennek során a szakirodalomban az alkalmazandó módszerekre vonatkozó ajánlások vizsgálatára.

Kulcsszavak: kereslet-előrejelzés, sporadikus kereslet, statisztikai módszer, esettanulmány.

1 Bevezetés

A kereslet-előrejelzés az a tevékenység, amelynek során a vállalat értékteremtő folyamatokat menedzselő szervezeti egységei – saját tapasztalataikra, tudásukra és historikus értékesítési adatokra alapozva – közösen megbecslik a vállalat által gyártott termékek, illetve termékcsoportok várható piaci keresletét. E várható kereslet előrejelzésére azért van szükség, mert a vállalat működése és anyagi folyamatai csakis e várható jövőbeli kereslet ismeretében tervezhetőek és valósíthatóak meg hatékonyan. A vállalati működés során használt

[1]Dobos Imre köszöni a TÁMOP-4.2.2.A-11/1/KONV-2012-0051 kutatási program támogatását. Beérkezett: 2013. március 5. E-mail: `andrea.gelei@uni-corvinus.hu`

erőforrások tervezhetőségének alapját a jó minőségű előrejelzési adatok teremtik meg. A kereslet-előrejelzés eredménye tehát jóval több egy vállalat számára, mint egyszerű számadatok halmaza, hiszen erre épül a vállalat teljes rövid- és középtávú gazdálkodása. Cikkünkben a kereslet-előrejelzés módszertani kérdéseivel foglalkozunk. Olyan előrejelzési módszerek bemutatására és konkrét esettanulmányon keresztül történő tesztelésére kerül sor, melyek nem csak a hagyományos előrejelzési módszerek által vizsgált értékesítési volumen alakulását vonják be az elemzésbe, de vizsgálnak egy, a termékek várható keresletének meghatározása szempontjából fontos további jellemzőt is, mégpedig a kereslet időbeni szórtságát, azaz sporadicitását.

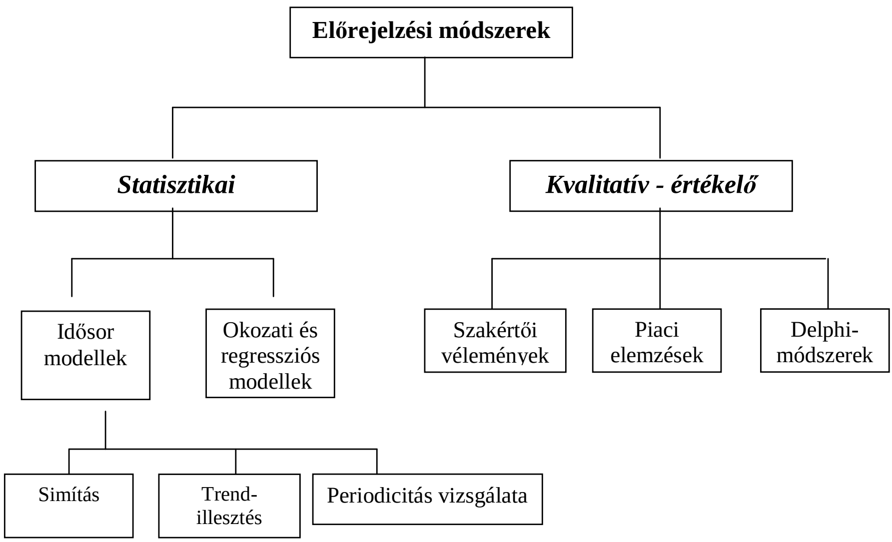
A termékek sporaditását is kezelő kereslet-előrejelzési módszerekkel már a '70-es évek elejének foglalkoztak (Croston (1972)), azok igazi fejlődése ugyanakkor csak az ezredfordulóra tehető. Az elmélet ekkor meginduló fejlődését azonban nem követte azonnal az üzleti alkalmazás. Nagyon kevés az olyan irodalom, mely a sporadikus termékek előrejelzésére javasolt módszereket valós adatokon, esettanulmányokon keresztül teszteli és értékeli (Boylan et al. (2008); Babiloni et al. (2010)). A nemzetközi szakirodalomban is ritkán publikálnak tudományos dolgozatokat, amelyek ezt a témakört tárgyalják; ismereteink szerint magyar nyelven erről tudományos dolgozat még nem is született.

Tanulmányunk célja, hogy konkrét vállalati adatokon, egy hazai gyógyszernagykereskedelmi vállalat valós adatain keresztül teszteljük az irodalomban megtalálható azon állítást, miszerint az időben szórt kereslettel rendelkező termékek számára javasolt módszerek a korábbi módszereknél jobb megoldásokat adnak. A következőkben röviden bemutatjuk a kereslet-előrejelzés során alkalmazható módszereket, különös tekintettel azokra, melyek alkalmazása a sporadikus keresletű termékek esetében javasolt. Ismertetjük azokat az ajánlásokat is, melyeket a szakirodalom a különböző jellemzőkkel rendelkező termékekre vonatkozóan a konkrét előrejelzési módszertanra vonatkozóan megfogalmaz. Végül, de nem utolsó sorban a vállalat adatainak felhasználásával esettanulmányokat mutatunk be, melyek segítségével teszteljük, vajon ezeket a szakirodalmi ajánlásokat a gyakorlat is visszaigazolja-e.

2 A kereslet-előrejelzés módszertani alapjai

A modern kereslet-előrejelzési módszerek szempontjából két kiemelt keresleti jellemző vizsgálata fontos: (i) elemezni szükséges a *korábbi értékesítés volumenének időbeni alakulását, az értékesítési volumen relatív szórását*, (ii) másrészt vizsgálni kell a *múltbéli kereslet felmerülésének időbeli szórtságát, ún. sporadicitását*. E két kiemelt termékjellemző közül a hagyományos szakirodalom csak a kereslet volumenének szórását hangsúlyozza (Vollman et al. (1984); Chase – Aquilano (1985)). Az elmúlt évtizedben került a figyelem középpontjába a termékek keresletének másik fontos jellemzője, annak sporadicitása, azaz időbeni szórtsága (Boylan et al. (2008), Babiloni et al. (2010); Chitturi et al. (2010)).

A kereslet-előrejelzés során alkalmazott módszereket két fő csoportba sorolhatjuk, a kvantitatív és a kvalitatív előrejelzési módszerek csoportjaiba. A *kvantitatív* módszerek közé statisztikai módszerek, egyrészt ún. *idősoros*, másrészt *ok-okozati kapcsolatokat vizsgáló regressziós modellek* tartoznak. Ezek mindegyike a múltbeli adatokban rejlő tendenciák azonosítására koncentrál, s azokat próbálja meg kivetíteni a jövőben várható értékesítés alakulására. E matematikai modelleket azonban mindig rugalmasan kell kezelni, hiszen azok jellemzően nem képesek a kereslet jövőbeni alakulását közvetlenül, s gyakran erőteljesen befolyásoló aktuális és jövőbeni tényezők hatásainak figyelembe vételére (pl. állami szabályozás, piaci helyzet változásai). A statisztikai módszerekkel meghatározott várható keresletet ezért szakértői értékelésnek szükséges alávetni, s szükség esetén a számított értékeken módosítani kell. A szakértői, *kvalitatív* módszereknek is több típusát különböztethetjük meg (*1. ábra*). A következőkben a témánk szempontjából fontos statisztikai módszerek, ezen belül az idősoros modellek tárgyalására szorítkozunk.



1. ábra. Az előrejelzési módszerek csoportosítása (Chase – Aquilano (1985))

Mint azt említettük, *idősoros modellek* segítségével a múltbeli keresleti adatok, információk alapján próbálunk meg következtetést levonni a keresleti adatok jövőbeni alakulására vonatkozóan. E módszerek alkalmazása során tehát feltételezzük, hogy a múltbeli történések, folyamatok fognak folytatódni a jövőben is. Ezért a megfelelő kereslet-előrejelzés, a múltbeli adatok jövőre történő helyes kivetítése, extrapolálása szükségessé teszi a múltbeli adatokban rejlő tendenciák alapos vizsgálatát. Múltbéli adataink elemzésével többféle időbeli tendencia létére világíthatunk rá (Éltető et al. (1982); Varga (1986); Hunyadi et al. (1997)):

1. A kereslet alakulása jellemzően időben erősen ingadozik. Ez a változás a hosszabb periódusok (pl. több évnyi idősor) múltbeli adataira építő

előrejelzések során elemezhető. A statisztikai idősorokban megfigyelhető változás jellemzően három fő komponensből tevődhet össze:

a. az alapirányzatból vagy más néven *trend*ből,
b. a periodikus ingadozásból, amely lehet *ciklikus* vagy *szezonális*,
c. illetve *véletlen* elemekből.

2. *Stacionaritás.* A kereslet-előrejelzéshez rendelkezésre álló idősor rövidsége miatt adatbázisunkról feltételeztük a stacionaritást. Adatállományunk nem tette lehetővé a trend és a szezonalitás hatásának vizsgálatát. Ezért azt interpretálhatjuk úgy, mint egy statisztikai mintát. Ezzel a feltételezéssel a mi elemzésünk középpontjában álló, sporadicitást vizsgáló kutatók rendszeresen élnek (Chitturi et al. (2010); Babiloni et al. (2010)).

Az idősorok alapirányzatának elemzéséhez több hagyományos módszer közül választhatunk: lineáris trend, mozgó átlag számítása, egyszerű exponenciális simítás. A kereslet-előrejelzés e klasszikus módszertanának részletes leírásáról jó áttekintést nyújtanak a hagyományos termelés menedzsment tankönyvek (Vollman et al. (1984); Chase és Aquilano (1985)). Ezek a klasszikus módszerek azonban csak a kereslet volumenének alakulását vonják be az elemzésbe és nem foglalkoznak a termék sporadicitásának kérdésével. Elsőként 1972-ben Croston, majd az ezredfordulót követően számos más szerző is a termékek időbeni szórtságának és e jellemzőnek az alkalmazható kereslet-előrejelzési módszerre gyakorolt hatásának vizsgálatát állította kutatásainak fókuszába (Syntetos – Boylan (2001); Boylan et al. (2008); Babiloni et al. (2010)) és fejlesztett ki új előrejelzési technikákat. A következőkben röviden ismertetjük az ún. Croston és az erre épülő ún. Syntetos-Boylan módszerek alapjait, melyek kezelik a termék sporadikusságának problémáját.

Croston módszere sporadikus termékek előrejelzésére

A Croston (1972) módszer az exponenciális simítás módszerének egy, a sporadikus keresletű termékekre kiterjesztett speciális változata. Az egyszerű exponenciális simítás ugyanis nem kezeli az olyan periódusokat, ahol nem jelenik meg kereslet. A Croston módszer alapgondolata, hogy vizsgáljuk a kereslettel nem rendelkező periódusok alakulását is, határozzuk meg azon periódusok várható értékét, amelyek esetében nincs kereslet a termék iránt. Ezzel Croston egy újabb simítási egyenletet vezetett be.

A módszer matematikai formája a következő:

$$f_t = \begin{cases} f_{t-1}\,, & \text{ha } d_{t-1} = 0\,, \\ \alpha d_{t-1} + (1-\alpha) f_{t-1}\,, & \text{ha } d_{t-1} > 0\,, \end{cases} \qquad (t = 1, 2, \ldots, T)$$

$$p_t = \begin{cases} p_{t-1}\,, & \text{ha } d_{t-1} = 0\,, \\ \alpha q_{t-1} + (1-\alpha) p_{t-1}\,, & \text{ha } d_{t-1} > 0\,, \end{cases} \qquad (t = 1, 2, \ldots, T)$$

$$q_t = \begin{cases} q_{t-1} + 1\,, & \text{ha } d_{t-1} = 0\,, \\ 1\,, & \text{ha } d_{t-1} > 0\,. \end{cases} \qquad (t = 1, 2, \ldots, T)$$

A fenti képletekben az d_t a múltbeli realizált, f_t érték az előrejelzett keresletet jelzi. Az α érték a simítási együttható, $\alpha \in [0, 1]$. Amint az a képletből látható, ha a kereslet az adott periódusban nulla, akkor az előrejelzés megegyezik az előző periódus keresletével. Amennyiben a kereslet pozitív, akkor a klasszikus exponenciális simítás alapján határozható meg az előrejelzés. A p_t változó szintén egy simítási változó, amely a kereslettel nem rendelkező periódusokat számlálja a múltbeli keresleti idősorban. Azonban ebben az esetben a pozitív kereslettel rendelkező intervallumok hosszát „simítjuk", átlagoljuk. A q_t változó egy számláló mérték, amely azt számolja, hogy egymást követően hány periódusban nincs kereslet két olyan időpont között, amikor fellép kereslet, vagyis ez a változó leszámolja a kereslettel nem rendelkező, egymást nem metsző időintervallumok hosszát.

A fenti összefüggések segítségével lehet az előrejelzést kiszámítani:

$$\hat{f}_t = \frac{f_t}{p_t}\,, \quad (t = 1, 2, \ldots, T)\,.$$

A fenti hányados nem más, mint az átlagos periódushosszra eső átlagos előrejelzett kereslet. Abban az esetben, ha nincsenek kereslet nélküli periódusok, akkor ez a módszer megegyezik az egyszerű exponenciális simítással, hiszen ekkor q_t megegyezik eggyel minden periódusban, és p_t változó is egy lesz.

Syntetos és Boylan módszere

Syntetos és Boylan (2001) bebizonyította, hogy Croston (1972) módszere torzított becslést ad. A szerzőpáros az idézett dolgozatukban torzítatlan becslést ad a Croston módszerére. (A bizonyításokat az említett cikk tartalmazza.) Az új, torzítatlan előrejelzés ebben az esetben:

$$\hat{f}_t = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{f_t}{p_t}\,, \quad (t = 1, 2, \ldots, T)\,,$$

ami kisebb, mint a Croston módszerével adott előrejelzés. Az α érték a Croston módszer simítási együtthatójával egyezik meg, $\alpha \in [0, 1]$.

3 Javasolható előrejelzési módszerek a kereslet jellemzőinek függvényében

A hagyományos kereslet-előrejelzési módszerek a kereslet volumenének alakulását. Az előzőekben ismertetett módszerek már figyelembe veszik a termék keresletének időbeni szórtságát, azaz sporadicitását is.

A kereslet volumenének alakulása a relatív szórással ragadható meg. A relatív szórást a következőképpen definiálhatjuk:

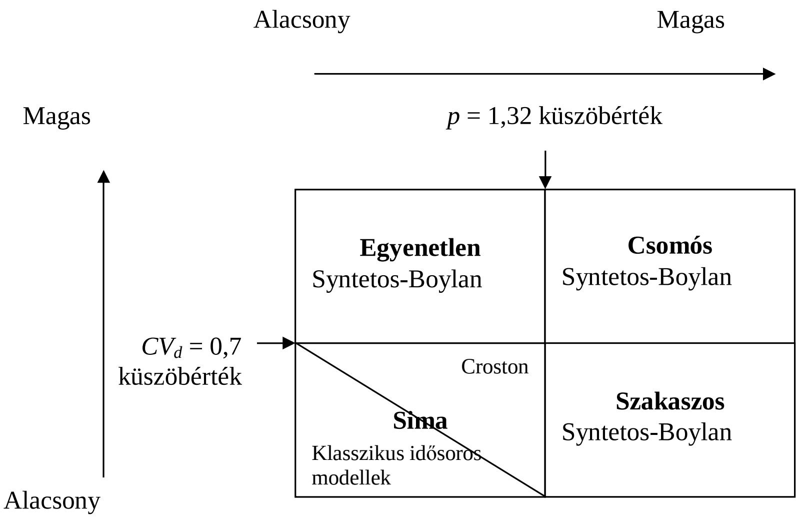
$$CV_d = \frac{D(d)}{E(d)}\,,$$

ahol $D(d)$ a d valószínűségi változó szórása és $E(d)$ annak várható értéke. A relatív szórás e mutatójára korábbi vizsgálatok különféle határértékeket javasolnak. Peterson és Silver (1985) például a 0,45-os küszöbértéket javasolják, míg mások, így pl. Boylan et al. (2008) is e változó esetén a 0,7-es küszöbértéket tekintik irányadónak. Ezeket azért nevezhetjük küszöbértéknek, mert gyakorlati, szimulációs eljárással kerültek megállapításra. Például Peterson és Silver készletgazdálkodási alkalmazásban azt tesztelte, hogy az optimális tételnagyság (EOQ) modellje milyen sztochasztikus kereslettel rendelkező termékekre használható. Elemzésünk során mi ez utóbbit, a Boylan et al. által javasolt küszöbértéket alkalmazzuk, mert a dolgozatunk alapvetően előrejelzési alkalmazásra fókuszál.

A termék időbeni szórtságát, sporadicitását a „kereslettel nem rendelkező periódusok hossza" eloszlásának empirikus várható értékével (p) ragadhatjuk meg. (Ez a Croston módszerében szereplő q_t változó átlaga.) E várható érték azért választható, mert a nemzetközi szakirodalom az e jellemző alapján történő tipizáláshoz is elfogadott hüvelykujj szabályokat dolgozott ki (Babiloni et al. (2010); Chitturi et al. (2010)). Ezek a hüvelykujj szabályok a vizsgált időintervallumok hosszára vonatkozóan 1,25 és 1,32 közötti értéket javasolnak. Dolgozatunkban az 1,32-es küszöbértékkel dolgozunk, amit Boylan et al. (2008) is használt.

A két kiemelt jellemző mentén a termékeket négy csoportba sorolhatjuk. Az alacsony relatív szórással és a kereslettel nem rendelkező időintervallumok alacsony átlagos értékével rendelkező termékek az ún. *sima keresletű* (smooth) termékek. Az alacsony relatív szórású, de a kereslettel nem rendelkező időintervallumok magas átlagos értékével rendelkező termékeket a szakirodalom *szakaszos keresletű* (intermittent) terméknek nevezi. Amennyiben a termék keresletének relatív szórása magas, de a kereslettel nem rendelkező időintervallumok átlagos értéke alacsony, ún. *egyenetlen keresletű* (erratic) termékről beszélünk. Azok a termékek pedig, melyek esetében mindkét keresleti jellemző a határérték feletti, *csomós keresletű* (lumpy) termékek. A négy csoport alapeseteit a *2. ábrán* szemléltethetjük.

A korábban bemutatott két kereslet-előrejelzési módszer (Croston és Syntetos-Boylan módszerei) figyelembe veszik a termék sporadikus jellegét is. Felmerül ugyanakkor a kérdés, hogy a két módszer közül melyik, és milyen jellemzővel bíró termékekre alkalmazható. A szakirodalom ajánlása szerint a magas (0,7 feletti) relatív szórással és/vagy a kereslettel nem rendelkező időperiódusok magas átlagértékével (p értéke 1,32 feletti) rendelkező termékek esetén a Syntetos-Boylan módszer alkalmazása javasolt (Boylan et al. (2008); Babiloni et al. (2010)). Alacsony relatív szórás és p érték mellett a Croston módszer javasolt, de a szakirodalmi ajánlások szerint e termékkör esetében a klasszikus idősoros modellek is jól használhatók.



2. ábra. A különböző terméktípusokhoz javasolt kereslet-előrejelzési módszerek (Babiloni et al. (2010))

Ahogy ezt már korábban is kiemeltük, a kereslet-előrejelzés nem más, mint egy korrigált statisztikai becslés. Teljesen pontos becslést nyilvánvalóan nem tudunk készíteni. A *becslés tényleges kereslethez viszonyított pontosságának elemzése* az egyik legfontosabb az értékteremtő folyamatok hatékonyságának vizsgálatakor. A kereslet-előrejelzési módszer megfelelőségét, tehát a kereslet-előrejelzés jóságát többféle módon is lehet mérni. A leginkább használt mutató erre az ún. átlagos abszolút eltérés mutató, azaz a MAD (Mean Absolute Deviation), amely jelzi, hogy az előre jelzett és a ténylegesen megfigyelt értékek különbsége mekkora (Hyndman – Koehler (2006))

$$MAD = \frac{\sum_{i=1}^{n} |d_i - f_i|}{n} ,$$

ahol n a megfigyelések száma, d_i a kereslet az i-ik periódusban, és f_i az előrejelzett érték.

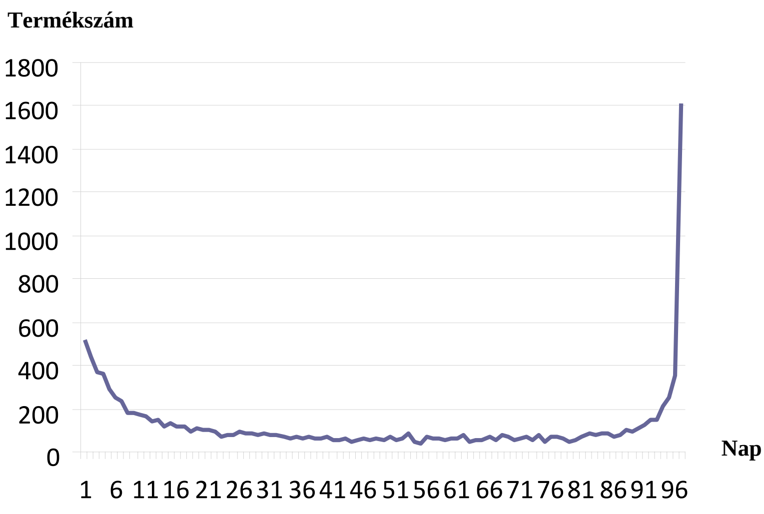
A fentiekben röviden bemutattuk a sporadikus termékek keresletének előrejelzéséhez ajánlott módszereket és ismertettük azok alkalmazása kapcsán a szakirodalomban megtalálható ajánlásokat. A következőkben egy hazai gyógyszer-nagykereskedelmi vállalat valós adatainak felhasználásával teszteljük, hogy ezek a szakirodalmi ajánlások a gyakorlatban is helytállóak-e. Elemzésünk során az elvégzett kereslet-előrejelzés pontosságát a fenti MAD mutatóval fogjuk mérni.

4 A javasolt módszerek tesztelése egy hazai gyógyszer-nagykereskedelmi vállalat adatainak felhasználásával

A vállalat 11 924 termékére vonatkozóan végeztük el elemzésünket, melyhez a cég 2011. január 3. és 2011. május 20. közötti, napi keresleti adatait használtuk fel. (Megjegyezzük, hogy ezek a keresleti adatok nem a fogyasztói igényeket, tehát nem a piacon tényleges felmerülő keresletet mutatják, hanem a valóságban realizált keresletet, hiszen a vállalat központi raktárába a patikáktól beérkezett és valóságosan ki is szolgált rendelésekre vonatkoznak.) Összesen 97 munkanap volt a jelzett két időpont között. E két időpont között minden munkanapra vonatkozóan rendelkeztünk információval azzal kapcsolatban, hogy a vizsgált periódusokban a vevői igényeket kiszolgáló központi raktában mely termékek rendelkeztek és mekkora kiszállítási értékkel, azaz tényleges vevői kereslettel.

4.1 Napi keresleti adatok vizsgálata

A keresleti görbe a napi rendelési adatok vizsgálata alapján az adott termékkör esetén széles U alakú görbét ír le (lásd *3. ábra*), ahol az U bal oldali szélén azok a termékek találhatóak, melyek erős sporadicitást mutatnak, tehát gyakori azoknak a napoknak a száma, amikor nem rendelnek belőle. Az U alakú görbe jobb oldalán pedig azok a termékek szerepelnek, melyek iránt szinte minden nap érkezik rendelés a raktárba. Ebből az ábrából azonnal látható, hogy a termékek nagy részére viszonylag sok megfigyeléssel rendelkezünk. Ezen termékekre egyszerűnek tűnik az előrejelzés. Ugyanakkor a kevés megfigyeléssel, azaz nagy sporadicitással rendelkező termékek száma is tetemes. Vizsgálatainkat e termékkörre fókuszáljuk.



3. ábra. Napi rendelési görbe a vállalat vizsgált 11 924 termékére vonatkozóan

Elemzésünk következő lépésében a kereslet-előrejelzés szempontjából kiemelt két jellemző (a kereslet volumenének relatív szórása (CV_d) és a kereslettel nem rendelkező időintervallumok várható értéke (p)) alapján elemeztük és csoportosítottuk a vizsgált termékeket! Az *1. táblázatban* az n értéke a kereslettel rendelkező periódusok számát mutatja, míg m a kereslettel nem rendelkező periódusok számát jelöli. (Ezeket a jelöléseket a további táblázatainkban is megtartjuk.) Elemzésünk eredményeként kapott csoportosítást mutatja az 1. táblázat.

Kereslet \ Idő	$m = 0$	$m \geq 1$, $p < 1,32$	$m \geq 1$, $p \geq 1,32$	Összesen
$n \geq 2$, $CV_d \geq 0,7$	573	**1043**	**4124**	5740
$n \geq 2$, $CV_d < 0,7$	1038	**503**	**4124**	5665
$n = 1$	0	0	519	519
Összesen	1611	1546	8762	11 924

1. táblázat. A vizsgált termékkörnek a kereslet relatív szórása és a kereslettel nem rendelkező időintervallumok átlaga alapján történt tipizálásának eredménye (napi adatok alapján)

Az 1. táblázat a szakirodalomban javasolt 2. ábra tipizálásának kiterjesztése. A különbség abból adódik, hogy a korábbi csoportosítást kiegészítettük azon termékekkel, amelyeket a 2. ábra nem tudott megragadni, hiszen a kereslet esetén a szórást nem lehet olyan termékekre számolni, amelyek iránt a vizsgált periódusban csak egyszer jelentkezett kereslet. Ugyanakkor olyan termékeket sem lehet a 2. ábrába felvenni, amely iránt minden nap volt kereslet, hiszen ekkor a p várható érték nem értelmezhető.

Mint az a fenti táblázatból kiolvasható, 1611 olyan terméket azonosítottunk az elemzésben szereplő majdnem 12 000 termékből, mely a vizsgált periódusban minden nap kiszállításra került. Ezekből a termékekből 1038 tekinthető többé-kevésbé egyenletes keresletűnek, míg a maradék 573 termék esetében a kereslet ingadozása viszonylag nagy.

Az is látszik, hogy 519 termékre a vizsgált periódusban csak egyszer érkezett rendelés. Már most előrebocsátjuk, hogy ez az a termékkör, melyre a rendelések alacsony száma miatt nem rendelkezünk megfelelő számú adattal, ezért ezek statisztikai vizsgálata (kereslet-előrejelezése) nem lehetséges. Természetesen amennyiben a vizsgálati periódus hosszát jelentősen növeljük (pl. a 97 nap helyett pl. egy teljes évre), úgy ez a termékkör várhatóan szűkül.

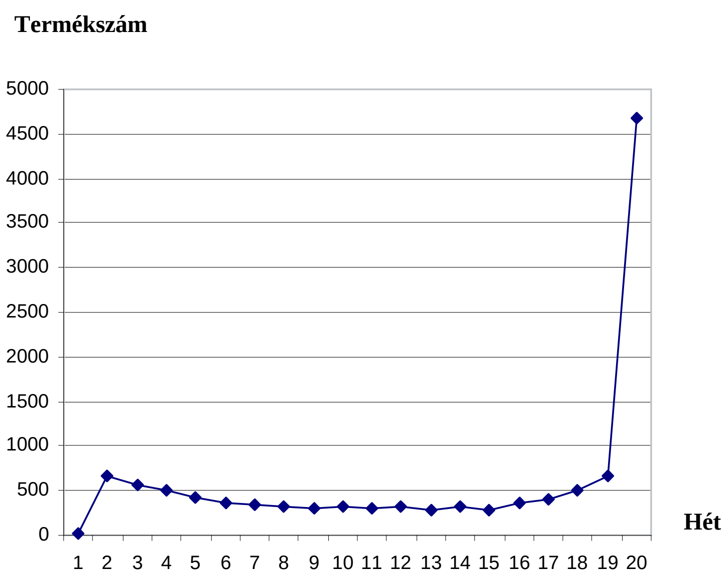
5665 termék esetén a kereslet mennyiségének relatív szórása viszonylag alacsony, ezen termékek kereslete erősen stacionáriusnak tekinthető, vagyis periódusonként viszonylag egyenletes kereslettel rendelkeznek. 5740 termék kereslete pedig nagy relatív szórású.

Az 1. táblázatban vastagítva szereplő négy termékcsoport kiemelten érdekes további elemzésünk szempontjából, s különösen igaz ez az ún. sporadikus kereslettel jellemezhető termékekre. Az irodalom ajánlása szerint ugyanis ezek esetén nyújthat komolyabb gazdálkodási előnyöket, amennyiben a termékek sporadicitását is kezelő kereslet-előrejelzési módszereket alkalmazzuk (2. ábra). Az általunk vizsgált termékkörben 503 sima keresletű terméket találtunk, mely a kereslet viszonylag alacsony relatív szórásával és viszonylag gyakori rendeléssel jellemezhető. 4124 olyan termék szerepel a vállalat termékportfóliójában, ahol a kereslet relatív szórása viszonylag alacsony, de a rendelési gyakoriság már jelentősen kisebb. Ezt a termékkört szakaszos keresletű terméknek neveztük. Szintén 4124 termék került elemzésünk eredményeképpen az ún. csomós kereslettel rendelkező, míg 1043 az ún. egyenetlen kereslettel rendelkező termékkörbe.

4.2 A heti adatok vizsgálata

A keresleti görbét aggregált heti, havi és negyedéves adatokra is fel lehet rajzolni. A heti adatok elemzését 95 nap összegzésével végeztük, mert a rendelkezésünkre álló 97 napi adatból ez a 95 nap tett ki kerek 19 hetet. 23 termék esetében fordult elő, hogy a heti adatok vizsgálatából kimaradt utolsó két napon nyúltak hozzá a termékhez, de ezeket a fentiek miatt az elemzésbe nem vettük bele. Fontos megjegyeznünk, hogy az adatok ilyen aggregálási folyamatával növeljük a valamennyi vizsgált időintervallumban kereslettel rendelkező termékek arányát. A napi 1611-ről a heti elemzés esetében már pl. 4671-re emelkedett azon termékek száma, melyeket a patikák minden héten rendeltek a raktárból.

Az előzőekben a napi, most az aggregált heti rendelési, keresleti adatok felhasználásával készítettük el a vizsgált termékkör csoportosítását. Mivel a vállalat jelenlegi működése során a rendelés utánpótlási ideje jellemzően nagyjából egy hét, ezért a heti összevont keresleti adatok elemzése is fontos.



4. ábra. Heti aggregált adatok alapján a keresleti görbe alakulása

Erre az összevont, heti rendelési adatállományra is két szempont szerint végeztük el a csoportosítást, ezúttal is a napi adatokon nyugvó csoportosításnál már megismert jellemzőket használtuk, tehát a kereslet relatív szórását és a kereslettel nem rendelkező időintervallumok átlagát. A jelölések a korábbiak szerint alakulnak.

Idő / Kereslet	$m = 0$	$m \geq 1$		Összesen
		$p < 1,32$	$p \geq 1,32$	
$n \geq 2$, $CV_d \geq 0,7$	542	564	1780	2886
$n \geq 2$, $CV_d < 0,7$	4129	905	3321	8355
$n = 1$	0	0	683	683
Összesen	4671	1469	5784	11 924

2. táblázat. A vizsgált termékkörnek a kereslet relatív szórása és a kereslettel nem rendelkező időintervallumok átlaga alapján történt tipizálásának eredménye (heti adatok alapján)

Mint az a fenti, 2. táblázatból kiolvasható, 4671 olyan terméket találtunk, mely a vizsgált periódusban minden nap kiszállításra került. Ezekből a termékekből 4129 tekinthető többé-kevésbé egyenletes keresletűnek tekinthető. Ezek szerint heti bontású adatok alapján a vizsgált termékkör több mint egyharmada a kereslet-előrejelzés szempontjából könnyen kezelhető. Az összevont, heti adatok tehát jóval szélesebb körű, viszonylag jól előrejelezhető keresletű termékkört mutattak ki, mint a napi rendelési adatok alapján végzett elemzés. E termékkör számszerűen négyszeresére növekedett!

Az is látszik, hogy 683 termék iránt a vizsgált periódusban csak egyszer volt kereslet. Ez esetben is igaz, hogy ez az a termékkör, melyre a keresleti adatok alacsony száma miatt nem rendelkezünk megfelelő számú adattal, ezért ezek statisztikai vizsgálata (kereslet-előrejelzése) nem lehetséges. 8355 termék esetén viszonylag alacsony a kereslet relatív szórása, míg 2886 termék nagy szórással rendelkezik, tehát a kereslet előrejelzése terén problematikus termék.

A heti, összevont rendelési adatok alapján a vizsgált termékkörben 905 sima keresletű terméket találtunk, mely a kereslet viszonylag alacsony relatív szórásával és viszonylag gyakori rendeléssel jellemezhető. 3321 szakaszos keresletű terméket találtunk, ahol a kereslet relatív szórása viszonylag alacsony, de a rendelési gyakoriság már jelentősen kisebb. 1 780 termék került elemzésünk eredményeképpen az ún. csomós kereslettel rendelkező, míg 564 az ún. egyenetlen kereslettel rendelkező termékkörbe tartozik. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az egyik legkritikusabb, azaz a csomós keresletű termékkör a napi rendelési adatok alapján végzett tipizáláshoz képest radikálisan, az előző 43%-ára (4124-ről 1780-ra) csökkent.

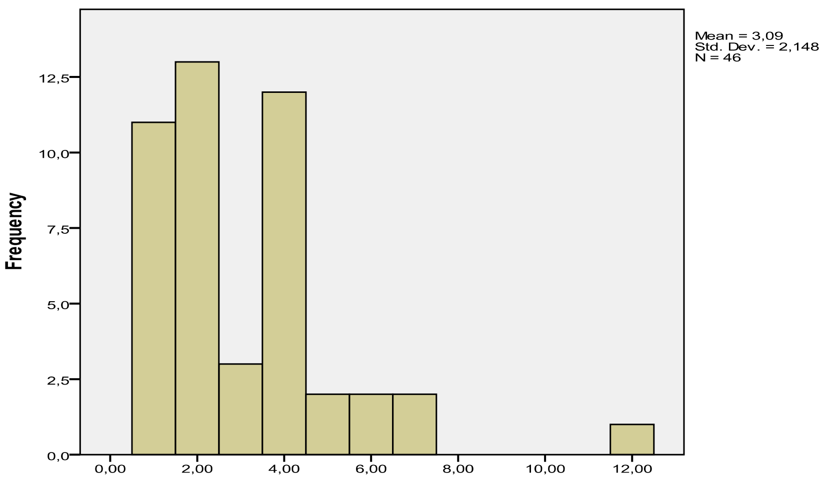
Természetesen mindez a napi adatok összevonásának tudható be, és a további, a megfelelő kereslet-előrejelzési módszer kiválasztása érdekében végzendő elemzésünk szempontjából pozitívnak tekinthető. A raktárellátás során meglévő heti beszállítási gyakorlat ugyanis a heti összevont rendelési adatok használatát lehetővé teszi, a heti szállítás miatt az egy héten belüli ciklikusságot pedig nem szükséges kezelni.

5 Kereslet-előrejelzési módszerek alkalmazása sporadikus termékekre

Ebben a fejezetben a vizsgált vállalat adatait felhasználva két, a sporadicitás szempontjából különösen kritikus termék-típusba tartozó terméket vizsgálunk. Közülük az egyik egy konkrét szakaszos, míg a másik egy csomós keresletű termék. Ezek esetében végeztük el a szakirodalom által javasolt módszerekkel is a kereslet előrejelzését. Azt vizsgáltuk, vajon a kapott eredmények mennyire tekinthetőek jó előrejelzésnek, vajon vizsgálatunk megerősíti-e a szakirodalmi ajánlásokat.

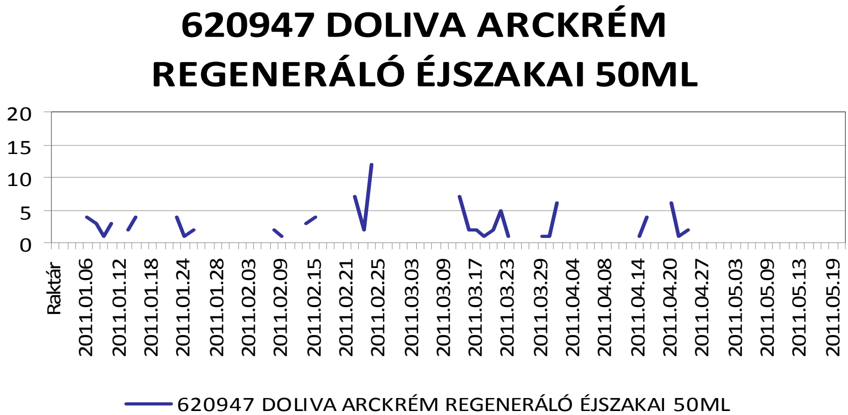
5.1 A napi adatok alapján szakaszos keresletű csoportot reprezentáló termék esettanulmánya

A szakaszos keresletű terméktípust képviseli a *Doliva arckrém regeneráló éjszakai 50ml* (továbbiakban Doliva) nevű termék. A Doliva iránti kereslet volumenének relatív szórása 0,7, ami nem túl magas, csoportosításunkban éppen a szakaszos keresletű termékek határértékét jelöli. A p értéke 2, ami erős közepes, túl van az 1,32-es határértéken. Ennél a terméknél 46 megfigyelés állt rendelkezésre, tehát a vizsgált 97 periódus majdnem felénél jelent meg a raktárban kereslet az adott termék iránt. Felrajzoltuk a termék keresletének hisztogramját, ami megmutatja, milyen gyakorisági elemei voltak a termék keresletének (volumen). Az *5. ábra* mutatja, hogy a termék relatív kicsi rendelési volumenekkel rendelkezett, kereslete időben szintén szórt.

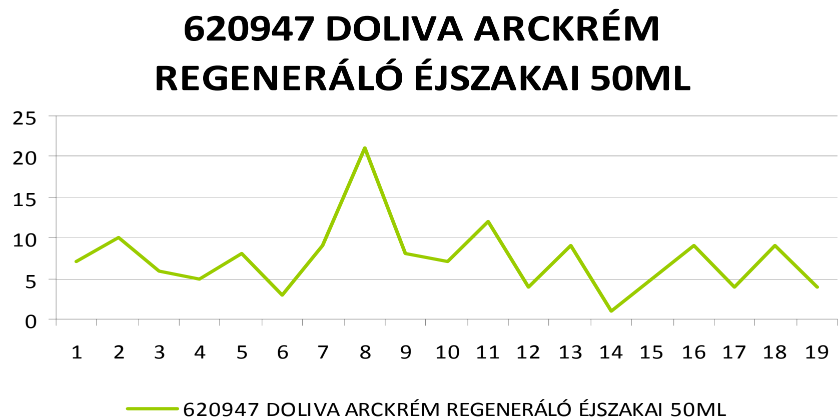


5. ábra. A Doliva egyenetlen keresletű termék hisztogramja (napi kereslet)

A Doliva keresletének időbeli alakulását mutatja a *6. és 7. ábra*. Ezek illusztrálják a termék és az általa képviselt termékcsoport keresletének (volumen) viszonylagos egyenletességét, de azt is, hogy ez a kereslet időben szórt, nagyon sok periódusban nincs rendelés a termékre. A heti aggregált adatok jól mutatják, hogy ezen az időhorizonton nagy valószínűséggel stabilan lehet számítani kereslet felmerülésére.



6. ábra. A Doliva termék keresletének időbeli alakulása (napi kereslet)



7. ábra. A Doliva termék keresletének időbeli alakulása (heti kereslet)

A termék múltbéli keresleti adatait felhasználva a 2. fejezetben bemutatott módszerek (azaz a Croston és a Syntetos–Boylan módszere), valamint hagyományos módszernek tekinthető mozgó átlag számítása és az exponenciális simítás segítségével is elvégeztük a kereslet előrejelzését. Mind a napi, mind az aggregált heti keresleti adatokra számítottuk a várható keresletet. (A Melléklet tartalmazza az elemzés során használt, becsült paraméterek értékeit, tehát a mozgó átlag tagjainak számát és a simítási együtthatókat.)

A leginkább használható előrejelzési módszer kiválasztásánál a MAD legkisebb értéke az irányadó. Mint az a *3. táblázatból* is látszik, a vizsgált termék esetében a napi adatokra a Syntetos-Boylan módszere adta a legkisebb MAD értéket. A heti aggregált adatokra pedig az exponenciális simítás vezetett a legkisebb MAD értékekhez (*4. táblázat*).

Előrejelzési módszer	Előrejelzett kereslet (2011. május 21-re)	Abszolút átlagos eltérés (MAD)
Mozgó átlag	0,33	1,76
Exponenciális simítás	0,93	1,70
Croston módszer	1,19	1,70
Syntetos-Boylan módszere	*0,74*	*1,62*

3. táblázat. A Doliva termékre végzett kereslet-előrejelzés eredményei (napi kereslet)

Előrejelzési módszer	Előrejelzett kereslet (2011 20. hetére)	Abszolút átlagos eltérés (MAD)
Mozgó átlag	5,67	3,69
Exponenciális simítás	*6,92*	*3,27*
Croston módszer	5,70	5,08
Syntetos-Boylan módszere	3,57	4,44

4. táblázat. A Doliva termékre végzett kereslet-előrejelzés eredményei (heti kereslet)

A Doliva a napi keresleti adatok alapján a szakaszos keresletű termékek csoportjába tartozik, ahol a kereslet relatív szórása viszonylag alacsony (esetünkben a határérték 0,7), tehát nagyjából egyenletes kereslettel lehet számolni. A probléma inkább a kereslet felmerülésének időbelisége, szórtsága. A napi keresleti adatok alapján szakaszos kereslettel jellemezhető termék esetében a szakirodalom által javasolt előrejelzési módszer a Syntetos-Boylan módszer, amit elemzésünk is a legalacsonyabb MAD értéket eredményező módszernek mutatott.

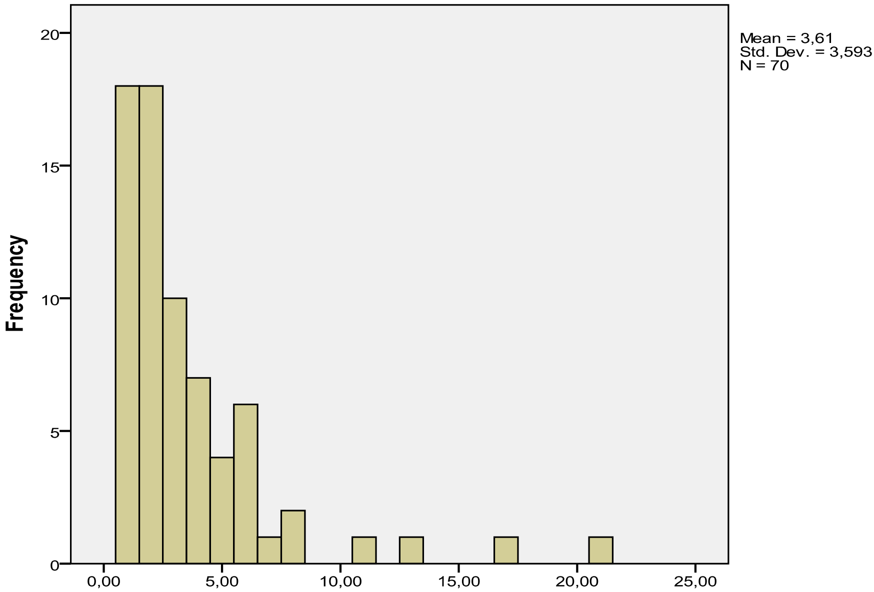
A napi adatok heti aggregálását követően újraszámoltuk a termékek csoportosításhoz használt két változó értékét. A Doliva esetén a heti aggregációt követően a CV_d értéke 0,58 lett, míg a p értékéke nem létezik. Ez azt jelenti, hogy ez, a napi adatok alapján egyenetlen kereslettel rendelkező termék az aggregált heti adatok alapján már a sima keresletű termékcsoportba kerül át, mely esetén a hagyományos kereslet-előrejelzési módszerek is jól használhatóak. A heti aggregált adatok alapján végzett számításaink támogatják a szakirodalmi ajánlásokat, mely szerint ilyen termékek esetén javasolt módszer a Croston módszer, vagy a hagyományos idősoros modellek.

Termék	Kereslet típusa (napi adatok alapján)	A kereslettel rendelkező napok száma (és aránya, a rendelkezésre álló 97 naphoz viszonyítva)	Kereslet típusa (aggregált heti adatok alapján)	A kereslettel rendelkező hetek száma (és aránya, a rendelkezésre álló 19 héthez viszonyítva)
DOLIVA ARCKRÉM REGENERÁLÓ ÉJSZAKAI 50ML	*Szakaszos* $CV_d = 1{,}46$ $p = 2$	46 (47,42%)	*Sima* $CV_d = 0{,}58$ p nem létezik	19 (100%)

5. táblázat. A Doliva termék csoportosításához használt jellemzők értékei a napi és a heti keresleti adatok alapján

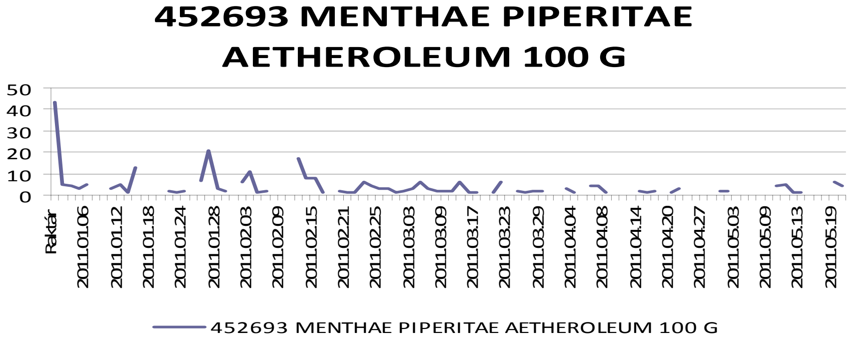
5.2 A napi adatok alapján csomós keresletű csoportot reprezentáló termék esettanulmánya

A napi adatok esetén csomós keresletű terméktípust képviseli a *Menthae Piperitae Aetheroleum 100g* (továbbiakban Menthae) nevű termék. A csomós keresletű termékkör általunk kiválasztott reprezentánsa, a Menthae esetében a kereslet volumenének relatív szórása 0,99, ami magas érték. A termék 1,35-ös p értékkel rendelkezik, mely viszont éppen a határérték fölött található. A 8. ábrán látható hisztogram jól illusztrálja ezeket az extrém keresleti jellemzőket. A hisztogram exponenciális keresleti eloszlásra utal.

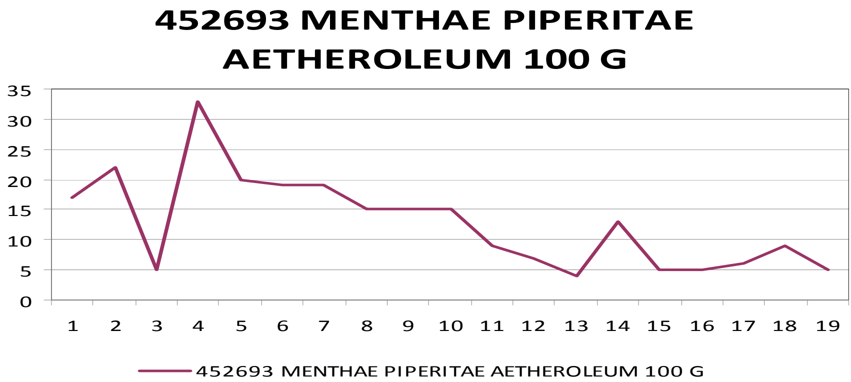


8. ábra. A Menthae csomós keresletű termék hisztogramja (napi kereslet)

A Menthae keresletének időbeli alakulását mutatják az alábbi ábrák. A termék érdekessége, hogy magas a megfigyelések száma, a 97 napból 70 esetében volt a termék iránt kereslet. A keresleti adatok alapján arra következtethetünk, hogy szezonális termékkel állunk szemben, mely termék forgalmának nagy része a téli hónapokban realizálódik.



9. ábra. A Menthae termék keresletének időbeli alakulása (napi kereslet)



10. ábra. A Menthae termék keresletének időbeli alakulása (heti kereslet)

A termék múltbeli keresleti adatait felhasználva ez alkalommal is a bemutatott módszerek segítségével végeztünk kereslet-előrejelzést. Mint az a 6. táblázat mutatja, a vizsgált termék esetében a napi adatokra a Syntetos-Boylan módszer vezetett legkisebb MAD értékhez. A heti keresleti adatok esetén pedig a mozgó átlag használata hozta a legjobb eredményt (7. táblázat). (E számításainkhoz tartozó paraméterek értékeit is tartalmazza a Melléklet.)

Előrejelzési módszer	Előrejelzett kereslet (2011. május 21-re)	Abszolút átlagos eltérés (MAD)
Mozgó átlag	2,50	2,38
Exponenciális simítás	2,61	2,42
Croston módszer	2,91	2,61
Syntetos-Boylan módszere	*2,20*	*2,31*

6. táblázat. A Menthae termékre végzett kereslet-előrejelzés eredményei (napi kereslet)

Előrejelzési módszer	Előrejelzett kereslet (2011. 20. hetére)	Abszolút átlagos eltérés (MAD)
Mozgó átlag	*6,25*	*3,30*
Exponenciális simítás	6,49	5,02
Croston módszer	5,67	6,68
Syntetos-Boylan módszere	4,71	5,74

7. táblázat. A Menthae termékre végzett kereslet-előrejelzés eredményei (heti kereslet)

Természetesen az alapadatok heti aggregálását követően a Menthae esetében is újraszámoltuk a termékek tipizálása során használt két változó értékét. A CV_d értéke az aggregálás során az 1,32-es értékről 0,61-re csökkent, míg az aggregálás után sem határozhatjuk meg p értékét. A napi adatok heti aggregálásával a termék a Dolivához hasonlóan átcsúszott a sima keresletű termékcsoportba. A szakirodalom a csomós terméktípus esetén a Syntetos-Boylan, míg a sima termékek esetén a Croston módszerét, vagy a hagyományos idősoros modelleket ajánlja. Számításaink hasonló eredményt hoztak, s ily módon támogatják ezeket az ajánlásokat.

Termék	Kereslet típusa (napi adatok alapján)	A kereslettel rendelkező napok száma (és aránya, a rendelkezésre álló 97 naphoz viszonyítva)	Kereslet típusa (aggregált heti adatok alapján)	A kereslettel rendelkező hetek száma (és aránya, a rendelkezésre álló 19 héthez viszonyítva)
MENTHEA PIPERITAE AETHEROLEUM	*Csomós* $CV_d = 1{,}32$ $p = 1{,}35$	70 (72,16%)	*Sima* $CV_d = 0{,}61$ p nem létezik	19 (100%)

8. táblázat. A Menthea termék csoportosításához használt jellemzők értékei a napi és a heti keresleti adatok alapján

6 Összefoglalás

A vállalati gyakorlat vizsgálata során egyértelművé válik, hogy a cégeknek nem csak a hagyományos kereslet-előrejelzési módszertan által kezelt mennyiségi problémát kell kezelnie az előrejelzés során, de a kereslet időbeli szórtsága, sporadicitása is nehézséget okoz. A kereslet-előrejelzés legfrissebb kutatási irányzata a termékeket a kereslet relatív szórása és a sporadicitás mértéke (kereslettel nem rendelkező periódusok hosszának átlaga) alapján fogalmazza meg ajánlásait. E két keresleti jellemző alapján a termékeket sima, egyenetlen, szakaszos és csomós keresletű termékekre osztja, s a kereslet-előrejelzésre vonatkozó javaslatokat ezekre vonatkozóan fogalmazza meg. Elemzésünkben ezért elsőként a kereslet-előrejelzés szempontjából e két kiemelt jellemző alapján tipizáltuk az esettanulmányunkban szereplő vállalat teljes termékportfólióját. A cég vizsgált termékkörének ilyen jellegű csoportosítását a napi és a heti aggregált adatokra egyaránt elvégeztük.

E két jellemző alapján cikkünkben bemutattuk a szakirodalomban megtalálható csoportosítás kiterjesztett változatát, mely a korábbi csoportosítást kiegészíti azon terméktípusokkal, melyek esetében a CV_d értékét nem lehet számolni, illetve, melyek esetében p várható értéke nem értelmezhető. Ily módon a vállalat teljes termékköre a tipizálás során kezelhetővé vált. A vizsgált 11 924 termék konkrét csoportba sorolása jó lehetőséget teremt a vállalat számára, hogy a kereslet-előrejelzési módszerek esettanulmányokban történő tesztelése során kapott eredményeket más termékekre is kiterjessze.

A kereslet-előrejelzési módszerek tesztelése során két, a sporadicitás szempontjából különösen problémás terméktípus egy-egy konkrét terméke esetén végeztük el számításainkat. A Doliva termék képviselte a szakaszos, míg a Menthae a csomós terméktípust (napi adatok esetén). A két esettanulmány során az előrejelzést négy módszerrel (mozgó átlag, exponenciális simítás, Croston és Syntetos-Boylan módszereivel) végeztük el. A napi adatok felhasználása mellett sor került továbbá a heti aggregált keresleti adatok alapján történő előrejelzésre is. *Számításaink eredményei mind a napi, mind a heti adatok használata esetén támogatják a szakirodalmi ajánlásokat*, mely szerint az erőteljes sporadicitással rendelkező – mint pl. a szakaszos és a csomós – termékek esetén a Syntetos-Boylan módszer alkalmazása ajánlott, míg a sima keresletű termékek esetén jó megoldást jelentenek a hagyományos idősoros modellek is.

Mindkét termék esetében megfigyelhető volt, hogy a napi adatok heti aggregálásával mindkét kritikus változó értéke csökkent és *a termékek egy, a kereslet-előrejelzés szempontjából egyszerűbb termékcsoportba, a sima kereslettel rendelkező terméktípusba kerültek át. Az adatok heti szintű aggregálása és erre alapozva a kereslet előrejelzésének heti időtávra szóló előrejelzése azért is javasolható a vállalat számára, mert az érvényes gyakorlat heti beszállításokkal működik.*

Az alapadatok aggregálása során tehát jellemzően csökken a kereslet sporadicitásának mértéke (az adott tervezési szinten sűrűbben állnak rendelkezésre adatok), ezért a statisztikai, benne a hagyományos kereslet-előrejelzési módszerek jellemzően megbízhatóbbá válnak. Bizonyos termékek esetén a sporadikus jelleg igen erős. Ezek esetében indokolt lehet az alapadatok havi, sőt akár negyedéves aggregálása is. Ennek ára ugyanakkor, hogy növelni kell az elemzésbe vont múltbéli információk hosszát. Havi tervezési szinten például már legalább 2-3 éves visszamenőleges adatra lenne szükség. A negyedéves tervezés szintjén pedig mintegy 5 évre visszamenő megfigyelések szükségesek (persze ez rövid élettartamú termékek esetén nem alkalmazható).

Melléklet. Az esettanulmányoknál használt előrejelzési módszerekhez tartozó simítási együtthatók

Termék neve	Napi keresleti adatok	Heti aggregált keresleti adatok
DOLIVA	$n = 3$ $\alpha_{\text{exp}} = 0{,}1$ $\alpha_C = 0{,}1$ $\alpha_{S-B} = 0{,}4$	$n = 3$ $\alpha_{\text{exp}} = 0{,}15$ $\alpha_C = 0{,}45$ $\alpha_{S-B} = 0{,}65$
MENTHAE	$n = 8$ $\alpha_{\text{exp}} = 0{,}2$ $\alpha_C = 0{,}3$ $\alpha_{S-B} = 0{,}6$	$n = 2$ $\alpha_{\text{exp}} = 0{,}5$ $\alpha_C = 0{,}5$ $\alpha_{S-B} = 0{,}5$

α_{exp} az exponenciális simításnál, α_C a Croston módszernél, míg α_{S-B} a Syntetos-Boylen módszerénél használt simítási együttható, illetve a mozgó átlag tagjainak száma (n)

Irodalom

1. Babiloni, E., Cardós, M., Albarracín, J. M., Palmer, M. E. (2010): Demand categorisation, forecasting and inventory control for intermittent demand items, *South African Journal of Industrial Engineering* 21, 115–130.
2. Boylan, J. E., Syntetos, A. A., Karakostas, G. C. (2008): Classification for forecasting and stock control: A case study, *Journal of the Operational Research Society* 59, 473–481.
3. Chase, R. B. – Aquilano, N. J. (1985): *Production and operations management*, 4th ed., Irwin, Homewood, IL.

4. Chitturi, P., Gershon, M., Chen, J., Boyarski, J. (2010): Identification and classification of intermittent demand patterns, *International Journal of Productivity and Quality management* 6, 304–317.
5. Croston, J. D. (1972): Forecasting and stock control for intermittent demand, *Operational Research Quarterly* 23, 289–304.
6. Éltető, Ö., Meszéna, Gy., Ziermann, M. (1982): *Sztochasztikus módszerek és modellek*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.
7. Hunyadi, L., Mundruczó, Gy., Vita, L. (1997): *Statisztika*; 2. kiadás, Aula Kiadó, Budapest.
8. Hyndman, R. J., Koehler, A. B. (2006): Another look at forecast accuracy, *International Journal of Forecasting* 22, 679–688.
9. Peterson, R. – Silver, E. (1985): *Decision Systems for Inventory Management and Production Planning*; Wiley, New York.
10. Syntetos, A. A., Boylan, J. E. (2001): On the bias of intermittent demand estimates, *International Journal of Production Economics* 7, 457–466.
11. Varga, J. (1986): *Idősorelemzés-előrejelzés*, IGK, Prodinform, Budapest.
12. Vollmann, Th. E., Berry, W. L., Whybark, D. C. (1984): *Manufacturing planning and control systems*, Irwin, Homewood, IL.

FORECASTING OF SPORADIC PRODUCTS - A CASE STUDY OF A PHARMACEUTICAL WHOLESALER COMPANY

Significant numbers of companies have the problem that demand for their products are sporadic in nature. Demand of such products is not continual in time; its demand is diffused, is random with large proportion of zero values in the analyzed time series. The sporadic character of a demand pattern actually means that available information on the demand of previous selling periods is leaky resulting in lower quality of data available. In these cases traditional forecasting techniques do not result in reliable forecast. Special forecasting algorithms have been developed during the last decade dealing with this problem. The paper introduces these techniques and offers suggestions for application. It also presents the case study of a Hungarian pharmaceutical wholesaler company. Based on real data we develop a topology of the company's product portfolio, carry out forecasts using different techniques including those developed for products with sporadic demand and also analyze the quality of these forecasts.

Keywords: demand forecasting, sporadic demand, statistical analysis, case study

MÉG EGYSZER AZ ESZMEI NYUGDÍJSZÁMLA ELVI HIBÁJÁRÓL[1]

SIMONOVITS ANDRÁS
MTA KRTK Közgazdaságtudományi Intézet

Korábbi munkáinkban (például *Eső–Simonovits–Tóth* [2011]) az eszmei nyugdíjszámla hibáját elemeztük. Ez a nyugdíjképlet eltekint attól, hogy a hátralévő várható élettartam rossz becslés a nyugdíjban töltött idő hosszára: minél később megy valaki nyugdíjba, várhatóan annál tovább él. Ezért a hosszabb élettartamúak életpálya-egyenlege negatív, míg a rövidebbeké pozitív. Eddigi elemzésünkben feltettük, hogy a járadékfüggvény rögzített (az életkortól független) teljes várható élettartammal számol, és minden dolgozó évi keresete azonos. *Banyár* [2011] joggal bírálta munkáinkat ezekért a durva egyszerűsítésekért (vö. *Banyár* [2012]). Ebben a cikkben elfogadom Banyár két javaslatát, figyelembe veszem a változó átlagos élettartamot és a kereseti különbségeket, s megmutatom, hogy eléggé általános feltevések mellett a rendszerhiba megmarad. Elutasítom viszont másik két javaslatát, amely rögzíti a nyugdíjszámla kezdeti értékét és nyugdíjazási kor helyett a nyugdíjigénylési kort változtatja, ezzel véli lényegében eltüntetni a rendszer hibáját.

JEL index: C61, C63, D82, D91, H55.
Kulcszavak: eszmei számla, változó nyugdíjkor, kontraszelekció, biztosításmatematikai méltányosság

1 Bevezetés

Az *eszmei nyugdíjszámla* alapötlete az, hogy az éves életjáradék kiszámításakor a nyugdíjba vonulásig felhalmozott eszmei nyugdíjvagyont elosztja a hátralévő várható élettartammal. (Közelítőleg a nyugdíjvagyon az átlagos életpálya-kereset és a szolgálati idő szorzata.) Hívei szerint ez a rendszer *biztosításmatematikailag méltányos*, azaz a nyugdíjkortól függetlenül minden típusnál a kiadásokat rugalmasan egyensúlyba hozza a bevételekkel (*Holzmann–Palmer*, 2006 és *Holzmann–Palmer–Robalino*, 2012). Ezáltal az eszmei nyugdíjszámla a hosszadalmas és költséges átmeneti időszak nélkül azonnal megteremti azt a szoros kapcsolatot az életpálya be- és kifizetések között, amelyért annak idején a tőkésített magánnyugdíj-rendszereket bevezették az

[1]Köszönetet mondok Banyár Józsefnek gondolatébresztő cikkéért és szíves felvilágosításáért. Természetesen ez nem jelenti azt, hogy egyetértene az itt elmondottakkal. Hálás vagyok Tóth Jánosnak, az egyik elfelejtett társszerzőnek, Ágoston Kolosnak, Barabás Bélának, Nicholas Barrnak, Hans Fehrnek, Robert Holzmann-nak, Krémer Balázsnak, valamint Radnóti Lászlónak értékes tanácsaikért. Beérkezett: 2013. április 1. E-mail: `simonovits.andras@krtk.mta.hu`

átmeneti gazdaságokban. Igaz, bizonyos technikai bonyodalmak miatt előfordulhat *korosztályok közti* újraelosztás (legújabb példa: *Knell* [2012]).

Az eszmei nyugdíjszámla hívei azonban elsiklottak a biztosításmatematikai méltányosság aszimmetrikus információn alapuló elméleti bírálata fölött: a későn nyugdíjba vonulók az átlagosnál várhatóan tovább élnek, és ezt valamennyire figyelembe kell venni az életjáradék kiszámításakor. A nemzetközi irodalomból tallózva: *Fabel* [1994], *Diamond* [2003], *Sheshinski* [2008] és *Bommier–Leroux–Lozachmeur* [2011].

Erről az irányzatról tudomást sem véve, *Banyár József* [2011] cikkében az eszmei nyugdíjszámláról (NDC = nonfinancial defined contribution) szóló munkáinkat bírálta. Banyárral szemben többes számot írok, mert többen voltunk a csapatban, lásd például *Eső–Simonovits* [2003], *Alács* [2004], *Simonovits–Tóth* [2007] és *Eső–Simonovits–Tóth* [2011].

Adataink (az *1. és 2. táblázat*) rámutatnak arra, hogy – ellentétben az NDC alapfeltevésével – az adott életkorban nyugdíjba vonulók és egyidejűleg a teljes munkaidőben végzett munkát abba hagyók átlagos nyugdíjtartama *nem* közelíthető jól a várható hátralévő élettartammal; az előbbi lassabban csökken az életkorral, mint az utóbbi, sőt, akár nőhet is. A nyugdíjtartam és a várható hátralévő élettartam különbségét nevezzük (előjeles) becslési hibának, s ez nő, és valahol előjelet vált az életkor növekedtével. Ezért a közelítésként számított eszmei járadékfüggvény bünteti a várhatóan rövid életűeket, és jutalmazza a várhatóan hosszú életűeket. Feltéve, hogy a hosszabb életűek tovább dolgoznak, és a feltételes becslési hibák keresettel súlyozott átlaga pozitív, még a rendszer egyenlege is negatív.

Ettől a fajta bírálattól függetlenül más kutatók (már korábban is) felhívták a figyelmet arra, hogy a várható élettartam erős és pozitív korrelációban van az életpálya-átlagkeresettel. Ezért arányos nyugdíj esetén az életpálya egészét tekintve perverz jövedelem-újraelosztás valósul meg az alacsonyabbtól a magasabb keresetűekhez (friss példa: *Breyer–Hupfeld* [2009]), míg csökkentett progresszív újraelosztás a degresszív rendszereknél. Kiemelem *Krémer* [2013] kiváló tanulmányát, amely a hazai kereseti és nyugdíjegyenlőtlenségeket elemzi. Felhívom a figyelmet arra az észrevételére, hogy a magyar kezdőnyugdíjak eloszlásában meglévő erős aszimmetriát részben a jobban keresők *tovább*élése tünteti el az összes nyugdíjak eloszlásában, alátámasztva cikkünk egyik feltevését. (Az összes nyugdíj eloszlásából eltűnő aszimmetria másik oka a korábbi degresszív nyugdíjrendszer továbbélése.) Hazánkban az 50 év fölötti népesség elégtelen időskori foglalkoztatását *Divényi–Kézdi* [2012] részben azzal magyarázta, hogy jelentős hányaduknak rossz az egészségi állapota.

Banyár joggal kifogásolta, hogy az eszmei nyugdíjszámlát bíráló cikkeinkben nemes egyszerűséggel eltekintettünk a kereseti heterogenitástól, és rögzítettnek (az életkortól függetlennek) vettük a nyugdíjképletben a várható élettartamot. Ugyanakkor minden ilyen tárgyú cikkünkben megemlítettük, hogy a keresettel is erősen és pozitívan korrelál a hátralévő élettartam, valamint a minimális és maximális nyugdíjkor közti halálozás kizárása (amely indokolta az egyszerűsítést) megszorító. Sőt, az Eső–Simonovits–Tóth cikkből idézett, itt az 1–2. számú táblázatpárra bővített adatokból (Borlói Rudolf és Marosi

Judit publikálatlan számítása) kiviláglik a rögzített élettartamos megközelítés hibája is.

Részletezve: a két táblázat világviszonylatban először adja meg egy adott év országos *kontraszelekcióját*. Konkrétan, hogyan függ az életkortól a 2004-ben öregségi nyugdíjasként elhalálozott magyar férfiak és nők adott korban hátralévő várható élettartama (nyilvános KSH-adat) és a tényleges nyugdíjtartama (korábban ismeretlen adat). Sejtésünkkel összhangban az átlagnál korábban/későbben nyugdíjba vonulóknak jóval kevesebb/több idejük marad hátra, mint amit a statisztika jósol. Például a 64 éves korban nyugdíjba vonuló férfiak átlagosan még 23,4 évet éltek, holott a demográfia csak 13,7 évet jósolt a 64 éveseknek: igaz, nyugdíjasoknak és dolgozóknak együtt. Az már csak ráadás, hogy a nyugdíjkorral meredeken nő a várható nyugdíjtartam. Például a 65 éves korban nyugdíjba vonuló férfiak átlagosan 0,9 évvel tovább éltek, holott a demográfia 0,6 évvel kevesebbet jósolt nekik, mint 64 évesen nyugdíjba vonult társaiknak.

A modellre térve vázolom, hogyan lehet bepótolni a Banyár által joggal kifogásolt korábbi analitikus hiányosságot. Átvéve Banyár ötletét, felteszem, hogy az élettartamban különböző típusok keresete is különböző (az élettartammal növekvő) és a számukra determinisztikus élettartamot a kormányzat sztochasztikus eloszlásúnak tekinti. (A valóságban az egyes típusok élettartama is sztochasztikus, hiszen egy várhatóan hosszabb életű professzor is meghalhat fiatalabban, mint egy várhatóan rövidebb életű bányász. Ezt a bonyodalmat itt elhanyagoljuk, de valójában várható élettartamokról kellene beszélnünk; vö. *Ágoston* [2008].) Nem foglalkozom azzal, hogy a heterogenitásnak mik az okai, és eltekintek attól is, hogy a nyugdíjkülönbségek tovább fokozhatják az élettartamokban megmutatkozó különbségeket.

Ilyen keretben igazolom, hogy viszonylag enyhe megszorítások mellett az információs aszimmetria által okozott NDC-rendszerhiba megmarad. Tovább vizsgálódva általánosabban belátom, hogy minden *szabályos* járadékfüggvény esetén van rendszerhiba, de az NDC-ben túl nagy.

Ebben a cikkben eltérek korábbi cikkeink optimalizálási megközelítésétől. Nem foglalkozom azzal, hogy az egyes típusok hogyan döntenek nyugdíjazási korukról, és azzal sem, hogy a kormányzat hogyan határozza meg a nyugdíjképletet. Az egyszerűség/közérthetőség kedvéért mindkettőt adottnak veszem. De ezzel a választással lemondok arról, hogy az ösztönzési hatásokat elemezzem, azaz, hogy a kormányzati szabályozás hat az egyéni döntésre.

Felhívom az Olvasó figyelmét arra, hogy bírálatában Banyár az eszmei nyugdíjszámlától és annak kritikájától idegen területre tereli a vizsgálatot, anélkül, hogy ezt kellően hangsúlyozná. Banyár 1) rögzíti a nyugdíjbefizetés korhatárát, és 2) megengedi, hogy a dolgozó tetszőleges ideig késleltesse a nyugdíjindítást, valamint 3) felteszi, hogy az egyének nem életpálya-hasznosságukat, hanem csupán életpálya-nyugdíjukat akarják maximalizálni. Az 1)–2) feltevés nagyon ritka jelenséget modellez, és a valóságtól elrugaszkodva feltételezi, hogy az egyének a nyugdíjukra is korlátozás mentes és olcsó kölcsönt vehetnek föl, vagy addig dolgoznak a járulékfizetés lezárása után, ameddig akarnak. A 3) feltevés pedig ellentmond a józan észnek! Itt jegyzem meg, hogy lélektanilag ezen életidegen feltevések jelenléte akadályozta meg, hogy korábban – szóban hallva és kéziratban olvasva – elfogadjam *Banyár* [2012] kritikájának konstruktív részét. Végül megemlítem, hogy Banyár és a mi megközelítésünk, valamint a kiindulásul szolgáló svéd rendszer eltekint a hozzátartozói nyugdíjaktól, amelyek figyelembe vétele módosíthatja következtetéseinket.

Nyomatékosan hangsúlyozom, hogy modellünkben a halálozási valószínűségek adottak, és függetlenek a nyugdíjkortól és a nyugdíjtól. Pedig ismert, hogy a valóságban az értelmes munka meghosszabbítja az élettartamot, és a megnövelt nyugdíj is kedvezően hat a nyugdíjas egészségügyi ellátására.

A dolgozat szerkezete a következő. A 2. szakasz ismerteti az élettartam és a nyugdíjba vonulási kor már említett statisztikáját. A 3. szakasz egy, a korábbiakat általánosító modellpárban elemzi az eszmei számlarendszer elvi hibáját. A 4. szakaszban a szabályos járadékfüggvények esetében is kimutatjuk az újraelosztást. Az 5. szakaszban tényleges adatokon hasonlítjuk össze a korábbi és a mostani módszert; valamint számpéldán szemléltetjük az eredeti és a módosított eszmei nyugdíjszámla különbségét. A 6. szakaszban levonjuk a következtetéseket.

2 Élettartam és nyugdíjazási kor statisztikája

Az eszmei nyugdíjszámlát a korosztályon belüli újraelosztás kapcsán bíráló rugalmas nyugdíjkorhatár (vagy változó nyugdíjkor) modellcsaládjának kulcsfeltevése szerint várhatóan minél később hal meg valaki, annál tovább dolgozik, még akkor is, ha eltekintünk a maximális korhatár előtt meghaltaktól.

Ezt a feltevést támasztja alá az 1. és 2. táblázat. Ismertetésünket a táblázatpár 2. oszlopával kezdjük: az 57–65, illetve 52–65 korév között nyugdíjba vonulási kor szerint csoportosítja a 2004-ben elhunyt férfiakat és nőket. A 3. oszlop e személyek relatív gyakoriságát adja meg. A 4. oszlop ezek nyugdíjban töltött éveinek az átlagát mutatja. Az 1. oszlop a csoport átlagos élettartamát tartalmazza mint az életkor és a nyugdíjtartam összegét. Az 5. oszlop az adott korúaknak a nyugdíjba vonulás tényétől függetlenül számított, a kormányzat által figyelembe vett hátralévő várható élettartamát közli (az előzőtől eltérő népességre számítva). Ezért a halandósági (és a vele pozitív korrelációban álló kereseti) heterogenitásból fakadó kontraszelekciót elhanyagoló eszmei nyugdíjszámlák elvileg hibásak. A 6. oszlopban a nyugdíjtartam pontos egyéni és pontatlan kormányzati becslésének a különbsége, a *becslési hiba* szerepel. Például a korábban említett 64 éves férfiaknál e hiba $23{,}4 - 13{,}7 = 9{,}7$ év.

Csak futólag említjük meg, hogy adataink nagyon kezdetlegesek, és nem tesznek különbséget a különböző korosztályok egyre javuló halandósági görbéiben. Úgy vélem, hogy minden hibájuk ellenére adataink meggyőzően bizonyítják a nyugdíjkor és a várható élettartam kapcsolatát.

Élettartam $L+D_R$	Nyugdíjkor $L+R$	Relatív gyakoriság $100f_R$	Átlagos nyugdíj-tartam D_R-R	Hátralévő várható élettartam M_R	Becslési hiba S_R
69,3	57	7,4	12,3	18,0	−5,7
71,5	58	6,0	13,5	17,3	−3,8
73,2	59	4,6	14,2	16,7	−2,5
77,2	*60*	*60,5*	*17,2*	*16,1*	*1,1*
79,1	61	12,7	18,1	16,4	1,7
82,9	62	3,9	20,9	14,9	6,0
85,4	63	2,1	22,4	14,3	8,1
86,4	64	1,6	23,4	13,7	9,7
89,3	65	1,4	24,3	13,1	11,2

Megjegyzések. $L=20$, $S_R=D_R-R-M_R$. Esetszám: 28,5 ezer, Magyarország, 2004. Borlói Rudolf és Marosi Judit publikálatlan számítása

1. táblázat. Élettartam–nyugdíjba vonulási kor, férfi

Élettartam $L+D_R$	Nyugdíjkor $L+R$	Relatív gyakoriság $100f_R$	Átlagos nyugdíj-tartam D_R-R	Hátralévő várható élettartam M_R	Becslési hiba S_R
66,8	52	2,3	14,8	27,4	−12,6
68,8	53	2,0	15,8	26,6	−10,8
73,7	54	2,3	19,7	25,7	−6,0
75,7	*55*	*46,2*	*20,7*	*24,9*	*−4,2*
79,6	56	16,8	23,6	24,1	−0,5
81,3	57	7,9	24,3	23,3	1,0
82,7	58	5,9	24,7	22,5	2,2
84,4	59	4,0	25,4	21,7	3,7
86,7	60	4,3	26,7	20,9	5,8
86,6	61	2,6	25,6	20,1	5,5
86,5	62	2,0	24,5	19,3	5,2
86,5	63	1,7	23,5	18,5	5,0
87,0	64	1,0	23,0	17,7	5,3
86,5	65	1,0	21,5	16,9	4,6

Megjegyzés. Vö. 1. táblázat. Esetszám: 30,3 ezer.

2. táblázat. Élettartam–nyugdíjkor, női

Figyeljük meg, hogy míg a férfiaknál a konstruált élettartamok monoton növekvőek, addig a nőknél az 59 év fölött nyugdíjba menő 12,6 százaléknál 86,5 év körüli élettartam mellett 60–65 éves korban szóródik a nyugdíjkor, azaz nyilván a munkaáldozat szerint heterogén népességről van szó. Az empirikus adatok áttekintése után rátérünk az életkorral változó élettartam modellezésére.

3 Az eszmei nyugdíjszámla új modellpárja

Új modellpárunkban feltesszük, hogy a kormányzat ismeri az egyéni halandóságok sztochasztikus eloszlását, s megfogadva Banyár javaslatát, megengedjük, hogy a legkorábbi halálozási kor kisebb legyen mint a legkésőbbi nyugdíjba vonulási kor. Ezért a kormányzat az életkorral változó (nem pedig rögzített) várható élettartamnak megfelelően számítja ki az eszmei nyugdíjszámla alapján az éves nyugdíjat. A szimmetrikus információ esetén a dolgozók is így gondolkodnak, az aszimmetrikus információ esetén viszont kihasználják saját, pontosabb információjukat. Az egyszerűség kedvéért egy idő után a modellben a nyugdíjkor helyett az élettartamot vesszük egésznek, és megengedjük, hogy a szolgálati idő/nyugdíjkor tört szám legyen. Emellett Banyár javaslatát követve az élettartamtól független helyett függő (növekvő) keresettel számolunk.

Szimmetrikus információ

Kiindulásképp tegyük föl, hogy a kormányzat számára a dolgozók élettartamát egy valószínűségi élettartam-eloszlás írja le. Az eszmei számla híveit követve, egyelőre tegyük fel azt is, hogy a dolgozók sem tudnak többet saját élettartamukról, s csak lustaságuk vagy szorgalmuk függvényében mennek előbb vagy később nyugdíjba. Technikai egyszerűsítés, hogy minden dolgozó $L = 0$ évesen kezd el dolgozni: ezért a szolgálati idő és a nyugdíjba vonulási kor egyenlő. Legyen f_i annak a valószínűsége, hogy valaki i évesen hal meg, $i = \alpha, \ldots, \omega$; $\sum_{i=\alpha}^{\omega} f_i = 1$, α és ω rendre a halandóság szempontjából figyelembe vett kezdő és végső kor. A pozitív egész számmal jellemzett a korúak *feltételes hátralévő* várható élettartama

$$M_a = \frac{\sum_{i=a+1}^{\omega} f_i(i-a)}{\sum_{i=a+1}^{\omega} f_i} > 0\,. \tag{1a}$$

Feltesszük, hogy M_a csökkenő sorozat, de a csökkenés korlátozott: $M_a > M_{a+1} > M_a - 1$.

Szükségünk lesz $M(\cdot)$ közbülső értékeire is, amit lineáris interpolációval adunk meg. Legyen az A valós szám *egész része* $a = [A]$, törtrésze $\{A\}$, azaz $A = a + \{A\}$. Ekkor

$$M(A) = (1 - \{A\})M_a + \{A\}M_{a+1} \quad \text{és} \quad -1 \le M'(A) < 0\,. \tag{1b}$$

Feltesszük, hogy a dolgozó keresete mindvégig w. Az eszmei számla elve (jele: alsó/felső index N) szerint az R évesen nyugdíjba vonuló dolgozó addig összegyűlt saját befizetése τRw, biztosításmatematikailag méltányos nyugdíja

$$b_N(R) = \frac{\tau Rw}{M(R)}\,. \tag{2}$$

Vegyük észre, hogy a nyugdíjba vonulást egy évvel elhalasztva, a járadék számlálója nő, a nevezője pedig csökken, azaz a járadékfüggvény is nő, s a halasztás duplán emeli az éves járadékot! A várható nyugdíjszámla-egyenlege egyébként valóban nulla:

$$z_N(R) = \tau Rw - M(R)b(R) = 0\,. \tag{3}$$

Egy másik szimmetrikus esetet is vizsgálhatunk, ahol mind a kormányzat, mind az egyén ismeri az élettartamot. Ekkor a teljes (Full) információs járadékfüggvény

$$b_F(R) = \frac{\tau R w}{D - R}\,, \tag{4}$$

s ez szintén nulla életpálya-egyenleget ad:

$$z_F(R) = \tau R w - (D - R) b_F(R) = 0\,. \tag{5}$$

Figyelemre méltó, hogy Breyer–Hupfeld (2009) típusfüggetlen nyugdíjkor mellett a nyugdíjképlet módosításával (5)-höz hasonlóan teljesen eltüntette az újraelosztást.

A szokásos megközelítésben a dolgozó célfüggvénye az életpálya-hasznosságfüggvény, amelyet az össznyugdíj tömege helyett (Banyár elfajult választása) a nyugdíjfolyam időbeli eloszlása és a nettó keresetek időbeli eloszlása definiál. Ezt a célfüggvényt maximalizálja az optimális nyugdíjkor, és ezek átlagát maximalizálja magasabb szinten a kormányzat, de ezzel a kérdéskörrel a cikkben nem foglalkozunk.

3.1 Aszimmetrikus információ

A szimmetrikus információs modellel ellentétben, az *1. és 2. táblázat* szerint – leszámítva a későn nyugdíjba vonulók nők heterogenitását – az R évesen nyugdíjba vonulók D_R élettartama közel sem állandó! Ezért a továbbiakban egy olyan modellt vázolok, ahol a dolgozók élettartama csak a kormányzat számára tűnik sztochasztikusnak, de a dolgozók számára determinisztikus: aszimmetrikus információ. Hitelesebb lenne, ha az élettartamokat is sztochasztikussá tennénk, és akkor táblázatainkhoz hasonlóan tört számokat kapnánk.

Tegyük fel, hogy az általános népességen belül létezik $n = \omega - \alpha + 1 > 2$ típus, egész éves $D = \alpha, \ldots, \omega$ élettartammal, f_D relatív gyakorisággal. Feltesszük, hogy a kereset típusfüggő: jele w_D.

Számítsuk ki újra az egyéni egyenleget, de ezúttal az aszimmetrikus információ mellett (erre utal az alsó D index). Bevezetjük a D élettartam esetén a nyugdíjtartam pontos és becsült értékének a különbségét, a *becslési hibát*:

$$S_D = D - R_D - M(R_D)\,.$$

(3)-mal ellentétben, most az egyenleget az aszimmetrikus információt figyelembe véve, a várt helyett a tényleges nyugdíjtartammal számoljuk:

$$\begin{aligned} z_D^N = \tau R_D w_D - (D - R_D)\frac{\tau R_D\, w_D}{M(R_D)} &= (M(R_D) - D + R_D) b_N(R_D) = \\ &= -S_D\, b_N(R_D)\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Szóban: az adott élettartamú és adott korban nyugdíjba vonulók egyenlege a becslési hiba ellentettjének és a megfelelő nyugdíjnak a szorzata.

Ezen a ponton érintjük korábbi cikkeink Banyár által joggal bírált speciális feltevését; ott az aszimmetrikus információjú kormányzat a legkorábbi nyugdíjba vonuláskor rögzített élettartamból indul ki:

$$D^* = \sum_{D=\alpha}^{\omega} f_D D,$$

s $M(R) = D^* - R$ képlettel számolva a becslési hiba, az eszmei számla és egyenlege egyszerűen

$$S_D = D - D^*, \qquad b_N(R) = \frac{\tau R_D w_D}{D^* - R} \quad \text{és} \quad z_N(D) = (D^* - D) b_N(R_D)\,.$$

Itt jelezzük, hogy az *1. táblázat* adatai szerint a legkorábban meghalt férfitípus is (átlagosan) 69 évig élt, amikorra már mindenki nyugdíjba vonult: $R_{\max} = 65$. A *2. táblázatban* a legkorábbi női halálozási kor 66,8 éves – nagyobb, mint a legkésőbbi nyugdíjkor: 65 év. Egyébként ezt tettük föl korábbi cikkeinkben. Ez ellentmond a két táblázatba kivülről bevitt várható hátralévő értékek fokozatos csökkenésének.

A következőkben a feltevéseket adó képleteket külön számozzuk: A1, stb. Feltehető (egyébként a hasznosságmaximalizálásból levezethető), hogy a típusfüggő nyugdíjkor gyengén növekvő függvénye az élettartamnak:

$$R_D \le R_{D+1}, \qquad D = \alpha, \ldots, \omega - 1. \tag{A1}$$

Ehhez még empirikus alapon hozzátesszük, hogy a kereset–élettartam-függvény is gyengén növekvő:

$$w_D \le w_{D+1}, \qquad D = \alpha, \ldots, \omega - 1. \tag{A2}$$

Vegyük észre, hogy A1–A2, $M(R_D) \ge M(R_{D+1})$ és a (2) egyenlőségből következik, hogy a nyugdíj az élettartam növekvő függvénye: $b_D^N \le b_{D+1}^N$.

Kimondunk még egy természetes feltevést, amely az *1. és a 2. táblázat* szerint a magyar gyakorlatban is teljesült. Létezik egy olyan életkor, jele $\tilde{D}$, amelynél rövidebb/hosszabb élettartamúaknál a becslési hiba pozitív/negatív:

$$S_D < 0, \quad \text{ha} \quad D \le \tilde{D} \qquad \text{és} \qquad S_D \ge 0, \quad \text{ha} \quad D > \tilde{D}\,. \tag{A3}$$

(6) értelmében ekkor a rövidebb életűek NDC-egyenlege pozitív, a hosszabbaké viszont negatív vagy nulla:

$$z_D^N > 0, \quad \text{ha} \quad D \le \tilde{D} \qquad \text{és} \qquad z_D^N \le 0, \quad \text{ha} \quad D > \tilde{D}. \tag{7}$$

Megjegyezzük még, hogy érdemes lehet A3 helyett erősebb feltevéssel élni, nevezetesen a becslési hiba az élettartamnak nemcsak előjelváltó, de csökkenő függvénye:

$$S_\alpha < \ldots < S_{\tilde{D}} < 0 \le S_{\tilde{D}+1} < \ldots < S_\omega\,. \tag{A3*}$$

Ekkor igaz az

1. Tétel. *a) A1–A3* esetén a hosszabb életűek NDC-egyenlege az élettartam csökkenő és negatív értékű függvénye vagy 0:*

$$0 \geq z^N_{\tilde{D}+1} > \ldots > z^N_\omega. \tag{8a}$$

b) Ha mind a keresetek, mind a nyugdíjkorok típusfüggetlenek, akkor a rövidebb életűek NDC-egyenlege az élettartam csökkenő és pozitív értékű függvénye:

$$z^N_\alpha > \ldots > z^N_{\tilde{D}-1} > z^N_{\tilde{D}} > 0. \tag{8b}$$

Bizonyítás. a) (7) szerint a hosszabb életűek esetén (6)-ban a z^N_D első tényezője negatív, a második pozitív. Az A3* szerint az első, A1–A2 szerint a második tényező abszolút értéke növekvő, ezért szorzatuk negatív és csökkenő.

b) Ha w_D és R_D állandó, akkor b^N_D is az, azaz z^N_D arányos S_D-vel, stb. □

Megjegyzések. 1. A rögzített megközelítésben A3* automatikusan teljesül, hiszen $S_D = D - D^*$. 2. Hasonlóan igaz A3* a típusfüggetlen nyugdíjkorhatár esetén is, hiszen ekkor $S_D = D - R^* - M(R^*)$.

1. Példa. Szemléltetésként mérlegeljük a folytonosan egyenletes eloszlást, ahol az eloszlásfüggvény

$$F(x) = \frac{x-\alpha}{\omega-\alpha}, \qquad \alpha \leq x \leq \omega\ .$$

Emellett legyen a (felnőttkori) nyugdíjkor a (felnőttkori) élettartam homogén lineáris függvénye: $R(D) = \rho D$, ahol $1/2 < \rho < 1$. Banyár kritikáját követve, feltesszük, hogy a legkorábbi elhalálozás megelőzi a legkésőbbi nyugdíjba vonulást: $\alpha < \rho\omega$. Belátható, hogy a várható élettartam

$$D^* = \frac{\alpha+\omega}{2}\ ;$$

és a hátralévő várható élettartam

$$M(A) = D^* - A\,, \quad \text{ha} \quad 0 \leq A < \alpha$$

és

$$M(A) = \frac{1}{2}(\omega - A)\,, \quad \text{ha} \quad \alpha < A \leq \omega\ .$$

A becslési hiba függvénye szintén szakaszosan lineáris:

$$S(D) = D - D^*\,, \quad \text{ha} \quad \alpha \leq D \leq D_S$$

és

$$S(D) = \frac{1}{2}[(2-\rho)D - \omega]\,, \quad \text{ha} \quad D_S < D \leq \omega\ .$$

$\tilde{D} = D^*$ és A3 mellett A3* is teljesül.

Most már rátérhetünk a *várható egyenleg* előjelére:

$$z^* = \sum_{D=\alpha}^{\omega} f_D\, z_D. \tag{9}$$

Ahhoz, hogy általánosíthassuk korábbi tételünket (vö. Simonovits 2001, F1. tétel) a várható egyenleg negativitásáról, további elégséges feltételt keresünk; a feltételes becslési hibák keresetekkel súlyozott várható értéke pozitív vagy nulla:

$$a_4 = \sum_{D=\alpha}^{\omega} f_D\, S_D\, w_D \geq 0\,. \tag{A4}$$

Korábbi speciális modellünkben, ahol $S_D = D - D^*$ és $w_D \equiv 1$, $a_4 = 0$ volt. Ha a kereset nem nőne a várható élettartammal, akkor egyenletes halálozási eloszlás esetén A4 nem teljesülne: $a_4 < 0$. Az 5. táblázatban látni fogjuk, hogy egyenletes és folytonos halálozási valószínűségek esetén már az élettartammal nagyon enyhén emelkedő keresetek is pozitívvá teszik a a_4-et. Egyébként típusfüggetlen korhatár esetén A4 szükséges is az átlagegyenleg negativitásához. Ezek alapján úgy vélem, hogy a feltevés elfogadható.

2. Tétel. *Az A1–A4 feltevéseink mellett az NDC várható egyenlege negatív:* $z^{*N} < 0$*; kivéve, ha* $R_D \equiv R^*$ *és A4 egyenlőségre teljesül.*

Bizonyítás. Behelyettesítve a z_D^N-re vonatkozó (6) képleteket a z^{*N}-re vonatkozó (9) képletbe és a $b_D = b_{R_D} = \beta_D w_D$ jelölést alkalmazva:

$$z^{*N} = -\sum_{D=\alpha}^{\omega} f_D\, S_D\, w_D \beta_D^N\,. \tag{10}$$

Szükségünk lesz arra az észrevételre, hogy a

$$\beta_D^N = \frac{\tau R_D}{M(R_D)}\,, \qquad \text{ahol} \;\; D = \alpha, \ldots, \omega$$

helyettesítési arányok növekvő sorozatot alkotnak.

Az A3 feltevés szerint az átlag alattiakra $S_D < 0$, az átlag fölöttiekre $S_D \geq 0$. Kettévágva a z^* összeget, és a pozitív tagokban β_D^N-t az utolsó taggal $\beta_{\tilde{D}}^N$-nel becsüljük felül, a negatív tagokban pedig az elsővel, majd az említett utolsóval alul, a várható egyenleg felső becslése az A4 feltevés szerint

$$z^{*N} \leq -\sum_{D=\alpha}^{\omega} f_D\, \beta_{\tilde{D}}^N S_D\, w_D = -\beta_{\tilde{D}}^N \sum_{D=\alpha}^{\omega} f_D\, S_D\, w_D \leq 0\,.$$

Ha $R_\alpha < R_\omega$ vagy $a_4 > 0$, akkor $z^{*N} < 0$. □

Természetesen a hiányt legegyszerűbben a járadékok arányos csökkentésével lehet megszüntetni, például τ helyére olyan $\hat{\tau}(< \tau)$-t írva:

$$\hat{b}_N(R) = \frac{\hat{\tau} R w}{M(R)}\,, \qquad \text{amelyre} \quad z^{*N} = 0\,. \tag{11}$$

Ezen a ponton önkritikusan elismerem, hogy az aszimmetrikus információ modellezése még mindig kivánni valót hagy maga után: feltesszük, hogy a kormányzat ismeri R_D-t, de nem ismeri D-t. Hasonlóan kifogásolható, hogy a modellben a kereseti különbségek figyelembe vétele lehetőséget adna a kormányzatnak, hogy w_D-ből következtessen D-re. Legjobb védekezésünk az lehet, hogy a valóságban a rövidebb élettartamú és szorgalmasabb típusok azonos korban mennek nyugdíjba, mint a hosszabb élettartamú és lustább típusok. Hasonlóan, az azonos életkorban elhalálozottak életpálya keresete szóródhat.

Nyugdíjkor vs. nyugdíjigénylési kor

Eddig szinte minden magyar és külföldi közgazdász azt az alapvető kérdést vizsgálta, hogy mi történik változó nyugdíjkor és azonnali nyugdíjindítás esetén. Banyár azonban egészen más, és véleményem szerint lényegtelen kérdést vizsgál: rögzített nyugdíjtőke (C) esetén milyen korban (x) érdemes a nyugdíjkifizetést indítani?

Ennek a módosításnak szinte csak az az értelme, hogy a (2) járadékfüggvény számlálója állandóvá válik, és elég a nevezővel foglalkozni. De ezt a cikkében hangsúlyozottabban kellett volna jeleznie és indokolnia. Ekkor az eszmei számla új alakot ölt:

$$\hat{b}_x = \frac{C}{M_x}, \qquad x = R_m, \ldots, \omega - 1.$$

Ezzel az érdektelen változattal azonban nem foglalkozom. (Egészen más környezetben *Coile–Diamond–Gruber–Jousten* [2002] vizsgálta, mikor érdemes a munka abbahagyása után késleltetni a nyugdíjindítást.)

4 Szabályos járadékfüggvények és az újraelosztás

Ebben az eszmei számlák helyett általánosabb nyugdíjrendszereket tanulmányozunk. Átfogalmazva *Simonovits–Tóth* [2007] 4. tételét, kimondjuk, hogy minden szabályos járadék–nyugdíjkor-függvényre az életpálya-egyenleg az élettartam csökkenő függvénye: (8). Hatásuk csak az újraelosztás mértékében különbözik.

De mindenekelőtt bemutatunk egy ellenpéldát.

2. Példa. Az az eset, ahol nincs újraelosztás. Legyen a $\beta > 0$ helyettesítési arány típusfüggetlen: $b_D = \beta w_D$, és legyen a (felnőtt) nyugdíjazási kor arányos a (felnőtt) élettartammal: $R_D = \rho D$ $(1/2 < \rho < 1)$. Kiegyensúlyozott rendszer esetén $(\tau\rho = \beta(1-\rho))$ minden típus életpálya-egyenlege nulla:

$$z_D = \tau w_D \rho D - \beta w_D (1-\rho) D = 0, \qquad D = \alpha, \ldots, \omega\,.$$

Ez a szabály azonban ellentmond a józan észnek, mert nem jutalmazza a továbbszolgálatot, és nem bünteti a korai nyugdíjba vonulást.

Definiáljuk a *szabályos* járadékfüggvényeket, és elhagyjuk az N indexet. Legyen a b_D az D típus járadéka. További feltétel: az R_D nyugdíjkor ΔR_D gerjesztett növekménye kisebb, mint a megfelelő járadék aránya a járadék és az éves járulék összegéhez:

$$0 \le \Delta R_D \le \frac{b_D}{\tau w_D + b_D}, \qquad D = \alpha, \ldots, \omega - 1 . \tag{A1*}$$

Feltesszük még, hogy a járadék–bér különbségi hányados legalább akkora, mint a következő nyugdíjkornak a hátralévő tényleges élettartamhoz viszonyított aránya:

$$\frac{\Delta b_D}{\Delta w_D} \ge \frac{R_{D+1}}{D + 1 - R_{D+1}}, \qquad D = \alpha, \ldots, \omega - 1 . \tag{A5}$$

(Figyeljük meg, hogy a különbségi hányados számlálójában b_{D+1} két ok miatt is nő D-vel: $w_{D+1} > w_D$; és $R_{D+1} > R_D$!)

Az (A1*)-beli ΔR_D-re vonatkozó felső határt nem könnyű közgazdaságilag értelmezni, de célszerű megnézni a korábban tárgyalt NDC-járadékokra. Behelyettesítve a $b_D = b_N(R_D)$ képletet a feltevésbe:

$$0 \le \Delta R_D \le \frac{\tau R_D\, w_D / M(R_D)}{\tau w_D + \tau R_D\, w_D / M(R_D)} = \frac{R_D}{M(R_D) + R_D} < 1 .$$

A feltevés gyengítése: $\Delta R_D < 1$ azonban már természetes. Miért dolgozzon valaki több mint egy évvel többet, csak azért, mert egy évvel tovább él, mint a másik?

A különbségi hányadosra vonatkozó (A5) feltevést még nehezebb értelmezni. A Simonovits–Tóth cikkben a keresetek típusfüggetlenek voltak, ezért ott ez a feltevés automatikusan teljesült. Általánosabb keretünkben csak azt jelenti, hogy az élettartammal a típusfüggő kereset sokkal lassabban nő, mint a járadék. Például ha $R_D \equiv \rho D$, akkor a különbségi hányadosnak legalább $\rho/(1-\rho)$-nak kell lennie. Numerikus példáinkban ezek a feltevések nem mindig állnak fenn. Kimondható azonban a

3. Tétel. *a) Az A1*, A2 és A5 feltevések esetén minden szabályos járadékfüggvényre az életpálya-egyenleg az élettartam csökkenő függvénye:*

$$z_\alpha \ge \cdots \ge z_D \ge z_{D+1} \ge \cdots \ge z_\omega . \tag{12}$$

b) Kiegyensúlyozottság esetén ($z^* = 0$) az előjelváltás is szükségszerű.

Bizonyítás. a) Elindulva a $z_{D+1} = (\tau w_{D+1} + b_{D+1})R_{D+1} - b_{D+1}(D+1)$ képletből, növelésekkel z_D-hez jutunk. Valóban, bevezetve a $b_{D+1} = b_D + \Delta b_D$ és a $w_{D+1} = w_D + \Delta w_D$ jelöléseket,

$$z_{D+1} = [\tau(w_D + \Delta w_D) + b_D + \Delta b_D]R_{D+1} - b_{D+1}(D+1) =$$
$$= (\tau w_D + b_D)R_{D+1} - b_D(D+1) + [\tau \Delta w_D R_{D+1} - \Delta b_D(D + 1 - R_{D+1})] .$$

A különbségi hányadosra vonatkozó feltevés alapján a [ ]-ben levő 3. tag negatív vagy 0, ezért elhagyjuk. Bevezetve még az $R_{D+1} = R_D + \Delta R_D$

jelölést, az első két tag közti különbség a ΔR_D-ra vonatkozó feltevéssel becsülhető:

$$z_{D+1} \le (\tau w_D + b_D)R_{D+1} - b_D(D+1) = z_D + (\tau w_D + b_D)\Delta R_D - b_D \le z_D\ ,$$

azaz (12) igazolva van.

b) Triviális. □

Végső megjegyzés: különböző nyugdíjszabályok különböző nyugdíjkort adnak, és ezt figyelembe kell venni az összehasonlításokban (Eső és szerzőtársai).

5 Numerikus szemléltetés

Először a tényleges magyar adatokon mutatjuk meg, hogy a két megközelítés közti különbség kvantitatíve nem túl jelentős, majd egy mesterséges uniszex adatállományon összehasonlítjuk az eredeti és a módosított NDC működését.

A két megközelítés mennyiségi összehasonlítása

Az *1. és a 2. táblázat* segítségével numerikusan is összehasonlítjuk a durvább rögzített és a finomabb változó élettartam adta nyugdíjat és egyenleget. Mivel nem ismerjük a munkába lépési időket, a kereseteket, a nyugdíjakat, ezért adatainkat homogenizáljuk, és eszmei számlás nyugdíj feltevésével egészítjük ki. Mindegyik feltevés nagyon durva, de részben ellentételezik egymást: a hosszabb életűek statisztikailag később kezdtek el dolgozni (bár az egyetemen töltött idejük beleszámított a munkaviszonyukba) nagyobb keresetűek voltak, viszont erős degresszió rontotta kezdőnyugdíjukat. Járulékkulcs: $\tau = 0{,}3$. A két megközelítés közti különbség nem változtat az eredményeink kvalitatív mondanivalóján: míg a rögzítettben a nyugdíjak a bérköltség 55 és 112 százaléka között mozogtak, a változóban 61 és 103 százalék határolja a mozgásteret, és az életpálya-egyenleg az éves átlagkereset $[4,29; 13,7]$-szerese helyett a $[3,51; 11,54]$-szerese között változik.

Élettartam	Nyugdíjkor	"Rögzített"	"Változó"	"Rögzített"	"Változó"
		nyugdíj		egyenleg	
$L+D$	$L+R_D$	$100b^N$	$100b^N$	$100z^N$	$100z^N$
69,3	57	55,3	61,7	429,3	351,5
71,5	58	59,8	65,9	332,5	250,4
73,2	59	64,8	70,1	250,0	175,1
77,2	60	70,3	74,5	−9,9	−82,0
79,1	61	76,6	75,0	−156,4	−127,5
82,9	62	83,7	84,6	−488,8	−507,4
85,4	63	91,8	90,2	−765,4	−730,7
87,4	64	101,1	96,4	−1045,3	−934,6
89,3	65	112,0	103,1	−1370,4	−1154,2

Megjegyzés. $L+D^* = 77,06$ év; $R^* = 40$ év. Rögzített esetben $M(R) = D^* - R$.
1. táblázat adatai alapján.

3. táblázat. A két megközelítés különbsége, férfi

	Férfi		Női	
	Átlagos egyenleg Ez^N	Szórás Dz^N	Átlagos egyenleg Ez^N	Szórás Dz^N
Rögzített	−0,337	3,006	−0,428	2,655
Változó	−0,828	2,594	0,478	1,968

4. táblázat. A két megközelítés aggregált adatai

Nem mutatjuk be részletesen a két megközelítés különbségét a nők esetén (csak jelezzük, hogy a női minta várható élettartama alig nagyobb, mint a férfié, valószínűleg azért, mert a férfiaknál nagyobb a kihagyott rokkantnyugdíjasok súlya), és megbecsüljük az aggregált veszteségeket. Nyolc adatot kapunk: férfi–nő, változó–rögzített élettartamú megközelítés és az átlagos egyenleg és az egyenlegek szórása kombinációja. Az eredményeket táblázatos alakban közöljük, és **E**, illetve **D** rendre a várható érték és a szórás operátora.

A *2. táblázat* alján felboruló monotonitás miatt a változó megközelítésben csak a férfi átlagegyenleg negatív, a női nem. Ellentétben Banyár várakozásával, a változó megközelítésben az átlagos egyenleg *abszolút* nagysága a férfiaknál 2,46-szorosa a rögzítettnek, a nőknél viszont vált az előjel. Banyár várakozásával összhangban a szórás mindkét nem esetén csökken. A nagyságrend megítéléséhez szükségünk van az átlagos szolgálati időkre: a férfiaknál $R^* = 40{,}0$ és a nőknél $R^* = 36{,}4$ év. E számpárhoz képest az átlagos egyenlegek eltérése fél-, illetve egyévnyi bértömeg, azaz az 1,5–3 éves járuléktömeg.

Vélhető, hogy ha a valóságos nyugdíjrendszer rugalmasabb lett volna, azaz a szolgálati idők/nyugdíjkorok jobban szóródtak volna, akkor az átlagos szolgálati időhöz viszonyított átlagegyenleg abszolút értéke és az egyenleg szórása jóval nagyobb lett volna. Valószínűleg ugyanilyen hatású lett volna, ha figyelembe tudtuk volna venni, hogy a kereset–élettartam-függvény növekvő.

Eredeti és módosított NDC összehasonlítása

Ebben a részben egy mesterséges adatállományon összehasonlítjuk az eredeti és a módosított NDC-t, ahol az élettartamok egész számok. A legegyszerűbb analitikus halálozás-valószínűségi függvényt alkalmazzuk, az 1. példa egyenletes folytonos eloszlását. Az $\alpha = 42$ és $\omega = 72$ év adja a legkorábbi és legkésőbbi felnőtt halálozási kort (leszámítva a 21 éves gyermekkort) és takarékosságból csak 3 évenként léptetjük a rendszert. Feltesszük, hogy a korhatár az élettartam 2/3-a. Az 1. példában megadott képleteket használjuk. Továbbá feltesszük, hogy a bér–élettartam-függvény lineáris: $w_i = w_\alpha + \delta(i - \alpha)$, ahol az átlag 1. Ezért az önkényesen választott $w_\alpha = 0{,}9$ mellé $\delta = 0{,}0066\ldots$ tartozik. A járulékkulcs $\tau = 0{,}3$.

Az *eredeti*, de kiegyensúlyozott NDC-rendszerre vonatkozó aggregált statisztikákkal kezdjük. $\mathbf{E}D = 57$ év; $\mathbf{E}R = 38$ év; $\mathbf{E}b = 0{,}558$; $\mathbf{E}z = 0{,}05$ és $\mathbf{D}z = 4{,}8$, s $a_4 = -0{,}007$. (Úgy választottuk meg a minimális élettartamhoz tartozó w_α bért, hogy a_4 még éppen negatív legyen.) Belátható, hogy az NDC-re a várható életpálya-egyenleg negatív, 2,5 évnyi bértömeg, azaz 7,5 év körüli járuléktömeg. (A hiány eltüntetéséhez a járadékokat 5,5 százalékponttal kell csökkenteni, $\hat{\tau} = 0{,}244$-et írva a (11) járadékfüggvénybe.)

Az *5. táblázat* 1. oszlopa a 11 típus várható élettartamát, a 2. és 3. oszlopa rendre az élettartam-specifikus járadékát és egyenlegét adja meg. Figyeljük meg, hogy a legrövidebb élettartamúak éves járadéka meglehetősen kicsiny: a megfelelő nettó kereset 34 százaléka; míg a leghosszabb várható élettartamúé meglehetősen nagy: a megfelelő nettó kereset 140 százaléka. Az életpálya egyenlegek csökkennek, kezdve a saját bruttó kereset 5,1 évnyi többletétől egészen a saját bruttókereset 9,1 évnyi hiányáig. A $\Delta b_D/\Delta w_D \geq 2$ elégséges feltevés áll.

A *módosított* NDC-rendszerben (jele M index) *tompítjuk* az ösztönzést (*Simonovits*, 2001). Legyen θ egy 0 és 1 közti valós szám, és az eredeti NDC-járadék θ hatványát szorozzuk meg egy alkalmas b^* állandó járadék $1-\theta$ hatványával:

$$b_D^M = (b_D^N)^\theta (b^*)^{1-\theta}, \tag{13}$$

ahol $\theta = 0{,}5$ és $b^* = 0{,}527$. Hasznossági és jóléti függvények hiányában lemondunk a változó ösztönzési hatás elemzéséről.

A módosított futás aggregált statisztikái a következők: $\mathbf{E}R = 38$ év; $\mathbf{E}b = 0{,}501$; $\mathbf{E}z = 0{,}0$ és $\mathbf{D}z = 2{,}166$. Láttuk, hogy a $b^* = 0{,}527$ választás összhangban van a többi paraméterértékkel. Emellett a módosított futás egyenlegének szórása az eredetinek csupán 45 százaléka!

Az *5. táblázat* utolsó két oszlopa a módosított NDC-futás élettartam-specifikus járadékát és egyenlegét adja meg. Figyeljük meg, hogy a legrövidebb élettartamúak éves járadéka a módosítás miatt nő: a megfelelő nettó kereset 59 százaléka; míg a leghosszabb várható élettartamúé a korábbinál szerényebb: a megfelelő nettó kereset 108 százaléka. Az életpálya egyenlegek csökkennek, de összenyomottan; kezdve a sajátkereset 2,6 évnyi többletétől egészen a saját kereset 3,8 évnyi hiányig. Az életpálya egyenleg továbbra is csökken az élettartam növekedésével.

Várható (felnőtt) élettartam	Kiegyensúlyozott		Módosított	
		életpálya		életpálya
	N-járadék	N-egyenleg	M-járadék	M-egyenleg
D	$\hat{b}_D^N$	$\hat{z}_D^N$	b_D^M	z_D^M
42	0,212	4,579	0,371	2,371
45	0,250	4,523	0,402	2,250
48	0,295	4,307	0,436	2,046
51	0,348	3,881	0,474	1,740
54	0,412	3,175	0,515	1,307
57	0,490	2,090	0,562	0,716
60	0,588	0,480	0,616	−0,080
63	0,713	−1,878	0,679	−1,145
66	0,816	−3,964	0,726	−1,974
69	0,936	−9,964	0,777	−2,974
72	1,078	−10,032	0,834	−4,177

Megjegyzések. $R_D = \rho D$, $\rho = 2/3$, (11) és (13) alapján.

5. táblázat. Az eredeti kiegyensúlyozott és a módosított NDC összehasonlítása

Zárásként megjegyezzük, hogy ha az egyenletes halálozási valószínűségnél reálisabb eloszlást használnánk, akkor az eszmei számla bizonyára kisebb torzítást okozna. Ugyanez lenne a hatása, ha a nyugdíjba vonulási korok nem homogén lineárisan függnének az élettartamoktól, hanem sűrűsödnének egy norma körül.

6 Következtetések

Az NDC alapjában véve jó nyugdíjrendszer, amely automatizálja a hosszú távon növekvő, időskorban várható élettartama miatt szükséges kiigazítást, és az adott korosztályon belül a késői/korai nyugdíjba vonulás jutalmazását/büntetését. Mindazonáltal elhanyagolja, hogy a nyugdíjba vonulási kor függ a várható élettartamtól, amely viszont erős pozitív korrelációban van a kereset-tel. Ezért ez a rendszer túl erős újraelosztást valósít meg a rövidebb várható élettartamú és rosszabbul keresőktől a hosszabb várható élettartamú és jobban keresők javára. Minőségileg hasonló újraelosztás valósul meg minden szabályos (és sok más) séma esetén, de az újraelosztás mérete az NDC-hez képest jelentősen csökkenthető. További kutatásra van szükség, hogy kalibrált adatokkal mechanizmustervezéssel meghatározhassuk az NDC társadalmilag optimális módosítását. Addig is nagyobb óvatosság indokolt az NDC alkalmazásában, még akkor is, ha a rászorultsági nyugdíj vagy nyugdíjjóváírás tompítja az NDC káros hatásait.

Irodalom

1. Alács Péter [2004]: Az optimális loglineáris ösztönzési feladat numerikus megoldásáról, *Közgazdasági Szemle 51*, 1029–1047.
2. Ágoston Kolos [2008]: Magánnyugdíj-járadékok közötti választás, *Szigma 39*, 27–47.
3. Banyár József [2011]: Javaslat az optimális járadékfüggvényre, *Szigma 42*, 105–124.
4. Banyár József [2012]: *A kötelező öregségi életjáradékok lehetséges modelljei*, Budapest, Gondolat.
5. Bommier, A.–Leroux, M.-L.–Lozachmeur, J.-M. [2011]: Differential Mortality and Social Security, *Canadian Journal of Economics 44*, 273–289.
6. Breyer, F.–Hupfeld, S. [2009]: Fairness of Public Pensions and Old-Age Poverty, Finanz Archiv/Public Finance Analysis 65, 358–380.
7. Coile, C.–Diamond, P.–Gruber, J.–Jousten, A. [2002]: Delays in Claiming Social Security Benefits, *Journal of Public Economics 84*, 357–385.
8. Diamond, P. [2003]: *Taxation, Incomplete Markets and Social Security*, Munich Lectures, Cambridge, MA, MIT Press.
9. Divényi János–Kézdi Gábor [2012]: Az alacsony foglalkoztatás okairól az 50 év feletti népességben Magyarországon. Az ösztönzők, a kognitív képességek és az egészségi állapot szerepe, *Társadalmi Riport*, (szerk. Kolosi Tamás–Tóth István György), Budapest, TÁRKI, 190–208.
10. Eső Péter–Simonovits András [2003]: Optimális járadékfüggvény tervezése rugalmas nyugdíjrendszerre, *Közgazdasági Szemle 50,* 99–111.

11. Eső Péter–Simonovits András–Tóth János [2011]: Designing Benefit Rules for Flexible Retirement: Welfare and Redistribution, *Acta Oeconomica 61,* 3–32.
12. Fabel, O. [1994]: *The Economics of Pensions and Variable Retirement Schemes*, New York, Wiley.
13. Holzmann, R.–Palmer, E., eds. [2006]: *Pension Reform through NDCs: Issues and Prospects for Non-Financial Defined Contribution Schemes*, Washington D.C. World Bank.
14. Holzmann, R.–Palmer, E.–Robalino, D., eds. [2012]: *NonFinancial Defined Contribution Pension Schemes in a Changing Pension World*, Washington D.C. World Bank.
15. Knell, M. [2012]: Increasing Life Expectancy and Pay-As-You-Go Pension Systems, Österreichische Nationalbank, Working Paper 179.
16. Krémer Balázs [2013]: Miért is olyan félelmetes a társadalmak számára az, hogy az emberek tovább élnek?, Szociológiai Szemle, megjelenés alatt.
17. Sheshinski, E. [2008]: *The Economic Theory of Life Annuities*, Princeton, Princeton University Press.
18. Simonovits András [2001]: Szolgálati idő, szabadidő és nyugdíj: ösztönzés korlátokkal, *Közgazdasági Szemle 48*, 393–408.
19. Simonovits András–Tóth János [2007]: Új eredmények az optimális járadékfüggvény tervezéséről, *Közgazdasági Szemle 54*, 628–643.

REVISITING THE CRITIQUE OF THE NONFINANCIAL DEFINED BENEFIT PENSIONS

In our earlier works (e.g. *Eső–Simonovits–Tóth* [2011]) we had analyzed the pitfall of NDC (nonfinancial defined contribution). The NDC formula neglects the fact that the remaining life expectancy is a poor proxy for the length of time spent in retirement: the later one retires, the longer he/she lives. Therefore their lifetime balance is negative, while the others' is positive. We had assumed that the benefit formula fixed the average life expectancy (making it independent of age) and neglected any wage heterogeneity. *Banyár* [2011, 2012] rightly criticized our works for these rude simplifications. In this paper, I show that even incorporating Banyár's two proposals, under quite general assumptions, the systemic error remains. I reject, however, his fixing the value of the initial pension capital and his replacement of variable (flexible) retirement age by variable claiming age and thus negating the systemic error.

Keywords: nonfinancial defined contributions, variable retirement, adverse selection, actuarial fairness

JEL Classification: C61, C63, D82, D91 and H55

A KVÁZI- ÉS ÁLTALÁNOSÍTOTT HIPERBOLIKUS DISZKONTÁLÁS HOSSZÚ TÁVON[1]

NESZVEDA GÁBOR – DEZSŐ LINDA
„Lendület" Kutatócsoport, Budapesti Corvinus Egyetem – Bécsi Egyetem

Az intertemporális döntések fontos szerepet játszanak a közgazdasági modellezésben, és azt írják le, hogy milyen átváltást alkalmazunk két különböző időpont között. A közgazdasági modellezésben az exponenciális diszkontálás[2] a legelterjedtebb, annak ellenére, hogy az empirikus vizsgálatok alapján gyenge a magyarázó ereje. A gazdaságpszichológiában elterjedt általánosított hiperbolikus diszkontálás viszont nagyon nehezen alkalmazható közgazdasági modellezési célra. Így tudott gyorsan elterjedni a kvázi-hiperbolikus diszkontálási modell, amelyik úgy ragadja meg a főbb pszichológiai jelenségeket, hogy kezelhető marad a modellezés során. A cikkben azt állítjuk, hogy hibás az a megközelítés, hogy hosszú távú döntések esetén, főleg sorozatok esetén helyettesíthető a két hiperbolikus diszkontálás egymással. Így a hosszú távú kérdéseknél érdemes felülvizsgálni a kvázi-hiperbolikus diszkontálással kapott eredményeket, ha azok az általánosított hiperbolikus diszkontálási modellel való helyettesíthetőséget feltételezték.

Kulcsszavak: kvázi-hiperbolikus diszkontálás, általánosított hiperbolikus diszkontálás, intertemporális döntések.

Bevezetés

Az értékek és hasznosságok átváltása a különböző időpontok között alapvetően határozza meg az élet szinte összes területét. A közgazdasági modellezést mind a mai napig Samuelson (1937) *várható diszkontált hasznossági modellje* dominálja. Ez az exponenciális diszkontálásra épül, és az ismert modellek között az egyedüli konzisztens diszkontálási forma (Koopmans 1960). Ezt a gondolatmenetet azonban már régóta kritika övezi (Böhm-Bawerk 1888-1930, Strotz 1955), mivel a tapasztalat nem támasztja alá a használatát. Már a legelső kritikai észrevételekben megemlítik, hogy az emberi természet hajlamos a jelenbeli hasznosságokat felülbecsülni, míg a jövőbeli hasznosságokét aránytalanul alulbecsülni. Később a kísérletek alapján már egyértelművé vált, hogy az elméletben elfogadott egységes konzisztens kamatláb elmélete nem írja le jól az emberi döntések jellegét. Az exponenciális diszkontáláshoz képest számos anomáliát figyeltek meg (Benzion et al. 1989, Thaler 1981). A legjelentősebbek az időinkonzisztencia, a nyereség-veszteség aszimmetria,

[1]Beérkezett: 2013. április 22. E-mail: `gabor.neszveda@gmail.com`
[2]A diszkontálást szokás a magyar nyelvben leszámítolásnak is nevezni.

a nagysági hatás, a gyorsítás és lassítás aszimmetriája és a pozitív sorozat preferálása. Az alternatív diszkontálási modellt először állatkísérletek alapján formalizálták (Ainslie 1975, 1992) és a diszkontrátát hiperbolikus formában adták meg.

Ezt többen különböző formában módosították (Mazur 1984, Harvey 1994), de egyik módosított modell sem tudta kellően általánosan megfogni a felfedezett anomáliákat. Ebben hozott újat az *általánosított hiperbolikus diszkontálás* (Loewenstein-Prelec 1992). Az általánosított hiperbolikus diszkontálás egységesen tudta kezelni az anomáliákat az értékfüggvény alkalmazásával. A kilátáselméletben (Kahneman-Tversky 1979) használt értékfüggvény segítségével mind a nyereség-veszteség, mind a nagysági hatás magyarázhatóvá vált, míg az általánosított hiperbolikus megközelítés lehetőséget adott a kísérletekkel megismert emberi viselkedés kellően általános leírására. Viszont ez a diszkontálási függvényforma nehezen kezelhető, így összetettebb modellekben nem jól alkalmazható. Emiatt tudott gyorsan és könnyen teret nyerni a kvázi-hiperbolikus diszkontálás (Laibson 1997), amely az exponenciális diszkontálást kiegészítette egy lineáris jellegű fix költséggel. A kvázi-hiperbolikus diszkontálás hasonló időinkonzisztens viselkedést ír le, mint a hiperbolikus diszkontálás, de egy sokkal egyszerűbb és kezelhetőbb formában.

A kvázi-hiperbolikus diszkontálás alapgondolata, hogy exponenciális diszkontálást követ a döntéshozó, de a jelen felé torzít azzal, hogy egy konstanssal mindent leértékel, ami a jövőben történik (Phepls-Pollack 1968). Mivel a kvázi-hiperbolikus diszkontálás lényegesen kezelhetőbb a modellekben, de egyben megragadja az általános hiperbolikus viselkedés két legfontosabb tulajdonságát (bár nem ragadja meg az anomáliákat), mind a nemzetközi (Laibson 1997, Donoghue-Rabin 2000), mind a hazai szakirodalomban (Nagy 2011) előszeretettel használják a hiperbolikus diszkontálás helyettesítésére.

Cikkünkben azt mutatjuk be, hogy a két diszkontálási modell hosszú távú döntések esetében különböző eredményre jut, főleg sorozatok esetén. Ezért olyan helyzetek modellezésére, ahol hosszú távú kérdések is felmerülnek, nem lehet közelítően helyettesíteni egymással a két diszkontálási függvényt.

A diszkontálási modellek és az adódó anomáliák

Az exponenciális modell

Samuelson (1937) diszkontált hasznossági modellje a legelterjedtebb a közgazdasági elemzésekben és modellezésben. A modell szerint a döntéshozó egy $(c_0, \ldots, c_T)$ fogyasztási tervet akkor és csak akkor preferál egy $(c'_0, \ldots, c'_T)$ fogyasztási tervvel szemben, ha $\sum_{t=0}^{T} \delta^t u(c_t) > \sum_{t=0}^{T} \delta^t u(c'_t)$, ahol δ jelöli a diszkontfaktort és t az időt.

Ezt a modellt szokás exponenciális modellként is hivatkozni, mivel a diszkontfüggvény az exponenciális függvényt követi:

$$\delta^t = \left(\frac{1}{1+r}\right)^t ,$$

ahol r jelöli az egységnyi (egy időszakra felszámított) kamatlábat.

Ez a modell széles körben elterjedt konzisztens tulajdonságai és jól kezelhetősége miatt. Viszont az empirikus eredmények azt mutatták, hogy a valós emberi döntések jellegét nem írja le helyesen.

A legfontosabb anomáliák

Azonos különbség hatása

Ha megvizsgáljuk a diszkontált hasznossági modellt, akkor az alapján a két különböző időpontbeli fogyasztás közötti preferenciát csak a két időpont között eltelt idő határozza meg (Loewenstein-Prelec 1992). Ez adja az „időben konzisztens" tulajdonságát, ami kulcskérdés a diszkontált hasznosság axiomatikus levezetésében (Koopmans 1960). De a gyakorlatban gyakran megfordulhat a preferencia két késleltetett hasznosság között, ha mindkettőt azonos mértékben eltoljuk. Thaler (1981) híres példája jól rámutat erre: valaki könnyen preferálhat egy almát ma, holnapi kettővel szemben, ugyanakkor inkább választja a két almát 51 nap múlva, mint az egyet 50 nap múlva.

Az azonos különbség hatása (*The Common Difference Effect*) inkonzisztens viselkedéshez vezet, ami az egyik legerősebb anomália. A megfigyelések szerint a legerősebb inkonzisztencia a jelen és a jövőbeli hasznosságok között van (*Present Bias*), azaz a jelen felé torzítunk leginkább. Ez egyben azt is jelenti, hogy minél hosszabb időintervallumról van szó, annál jobban csökken az egységnyi diszkontráta.

Formalizálva: Ha egy t idő elteltével kapott x_1 hasznosságot ekvivalensnek tart egy $t' > t$ idő elteltével kapott $x_2 > x_1$ hasznossággal, abból következik, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ idővel eltolva t-t és t'-t, a később kapott nagyobb hasznosságot jobbra értékeli. Azaz ha $U(x_1, t) = U(x_2, t')$, akkor $U(x_1, t+\varepsilon) \leq U(x_2, t'+\varepsilon)$.

Nagysági hatás

A nagysági hatás (*Absolute Magnitude Effect*) alapján az emberek a nagyobb értékeket alacsonyabb kamatrátával diszkontálják, mint a kisebb értékeket (Thaler 1981). A hatás magyarázata és modellezése nehezen megoldható. Az általánosított hiperbolikus modell az értékfüggvény (Kahneman-Tversky 1979) megközelítéssel, míg Benhabib et al. modellje (Benhabib et al. 2010) az egyszeri fix költség felszámításával magyarázza a nagysági hatást. Formalizálva: ha van két kis hasznosság (jelölje a „k" felső index) különböző időpontokban és van két nagy hasznosság („n"-nel jelölve) ugyanabban a két időpontban, s ezek ekvivalens értéket képviselnek a döntéshozónak, akkor az eltelt idő a kis hasznosságra gyakorol nagyobb százalékos hatást, azaz a kis hasznosságnál nagyobb az elvárt hozam. Azaz, ha $t' > t$ és $U(x_1^{\mathrm{k}}, t) = U(x_2^{\mathrm{k}}, t')$ és $U(x_1^{\mathrm{n}}, t) = U(x_2^{\mathrm{n}}, t')$, akkor szükségszerűen

$$\frac{U(x_2^{\mathrm{n}})}{U(x_1^{\mathrm{n}})} < \frac{U(x_2^{\mathrm{k}})}{U(x_1^{\mathrm{k}})} \ .$$

Nyereség-veszteség aszimmetria

A klasszikus megközelítésben a feltételezések között szokott szerepelni, hogy mind a nyereségeinket, mind a veszteségeinket a piaci kamatláb alapján diszkontáljuk. A kisérletek alapján viszont a nyereségeinket nagyobb kamatláb mellett diszkontáljuk, mint a veszteségeinket (Loewenstein 1987): ez a nyereség-veszteség aszimmetria (*Gain-Loss Asymmetry*). Formalizálva: ha két időpont közötti két hasznosság ekvivalens egy döntéshozónak, akkor a nyereség hozama nagyobb, mint a veszteségé. Azaz, ha $t' > t$, a nyereség felső indexe „n", és a veszteségé „v", valamint: $U(x_1^{\mathrm{n}}, t) = U(x_2^{\mathrm{n}}, t')$ és $U(x_1^{\mathrm{v}}, t) = U(x_2^{\mathrm{v}}, t')$, akkor

$$\frac{U(x_2^{\mathrm{n}})}{U(x_1^{\mathrm{n}})} < \frac{U(x_2^{\mathrm{v}})}{U(x_1^{\mathrm{v}})} \, .$$

Késleltetés és felgyorsítás aszimmetria

Scholten és Read (2011) a következő példával mutatja be a késleltetés és felgyorsítás aszimmetriáját (*Delay-Speedup Asymmetry*). Képzeljük el, hogy megrendeltünk egy csomagot. Ha megkérdeznék, hogy mekkora kompenzációt lennénk hajlandóak elfogadni, azért mert a csomag késik egy hetet, akkor az elvárt kompenzáció az egy hét késésért lényegesen nagyobb, mint amit azért lennénk hajlandóak fizetni, hogy egy héttel korábban kapjuk azt meg. Formalizálva: ha egy adott x hasznosságot egy adott t időponthoz képest $\varepsilon > 0$ időintervallummal eltolunk, akkor annak a hozama magasabb, mint ha ezzel az $\varepsilon > 0$ időintervallummal előrébb hozzuk. Azaz

$$\frac{U(x, t + \varepsilon)}{U(x, t)} > \frac{U(x, t)}{U(x, t - \varepsilon)}$$

Eloszlási hatás

A racionális döntéshozó a hamarabb elérhető hasznosságot preferálja az azonos mértékű későbbivel szemben. Ezzel szemben a kísérletek rámutatnak az eloszlási hatásra (*Preference For Spread*). Az eloszlási hatás szerint a döntéshozó preferálja, ha egyenletesen oszlik el a fogyasztási pálya. Például, ha a résztvevők dönthettek, hogy a következő három hét során mikor használják fel az ajándékba kapott éttermi kuponjukat, akkor a többség a második hetet választotta, míg ha két kupont is fel tudott használni, akkor az első és a harmadik hetet (Frederick et al. 2002).

Növekvő sorozat preferálása

A növekvő sorozatok preferálása (*Preference for Improving Sequence*) azt jelenti, hogy az emberek, ha megválaszthatják a bevételeik kifizetési sorozatát, akkor a növekvőt preferálják a csökkenővel vagy állandóval szemben még akkor is, ha racionális feltevések mellett nem azt kellene (Frederick et al.

2002). Ez a hatás leginkább a bérezési modelleknél merült fel, ahol a munkavállaló inkább egy növekvő bért akar kisebb kezdeti bérrel, mint egy csökkenőt, ahol a kezdeti fizetése lenne a magasabb (Loewenstein–Sicherman 1991).

Hiperbolikus modellek

A jelenséget először állatkísérletekben figyelték meg. A kísérletek alapján az állatok inkább választják a korábbi kisebb, mint a későbbi nagyobb jutalmat. Az itt megfigyelt adatok alapján a diszkontfaktort először a legegyszerűbb hiperbolikus formában adták meg (Ainslie 1975).

$$\delta = \frac{1}{t} \, ,$$

ahol δ jelöli a diszkontfaktort (a jövőbeli eseményeket ezzel a számmal szorozva kapjuk a jelenbeli értéküket) és t az időt.

Később az emberek viselkedésének megfigyelése alapján az egy paraméteres modellt javasolták (Mazur 1984)

$$\delta = \frac{1}{1+kt} \, ,$$

ahol k a paramétert és t az időt jelöli.

Később számos hiperbolikus függvényformát megvizsgáltak, hogy megtalálják a kellően erős magyarázó erővel bírót. Például az arányos (proportional) hiperbolikus diszkontálást (Harvey 1994)

$$\delta = \frac{1}{k+t} \, ,$$

ahol k jelöli a paramétert és t az időt.

Ezek a modellek mind leírták az emberek időinkonzisztens viselkedését, de az anomáliákra nem adott választ egyik sem. Ráadásul egyik sem ragadta meg elég erősen a jelen felé való torzítást.

Az általánosított hiperbolikus diszkontálás

A hiperbolikus diszkontálási modellek jól megragadták az inkonzisztens viselkedést és jól illeszkedtek az állatkísérletekben megfigyelt adatokra is, de számos empirikus megfigyelést nem tudtak magyarázni. Többek között nem tudták magyarázni a nagysági, nyereség-veszteség és a késleltetés-gyorsítás anomáliát sem.

Ezeket a hiányosságokat oldotta meg *az általánosított hiperbolikus diszkontálás modellje* (Loewenstein-Prelec 1992). Az általánosított hiperbolikus diszkontálás modell két részből áll, melyben a kilátás elmélet (Prospect Theory) (Kahneman-Tversky 1979) alapján vett értékfüggvény megközelítéssel tudja magyarázni az anomáliákat, míg az általánosított hiperbolikus diszkontálási függvény segíti az átváltást két időpont között

$$U(C_1, t_1, C_2, t_2, \ldots, C_n, t_n) = \sum_{i=1}^{n} v(C_i)\varphi(t_i) \, ,$$

ahol $\varphi(t_i)$ jelöli a diszkont függvényt és $v(C_i)$ jelöli az értékfüggvényt.

Ez alapján egy fogyasztási pálya hasznossága megegyezik a fogyasztások értékfüggvényével számolt értékeinek diszkontált összegével. A diszkontálási függvényt pedig a következő alakban szokás felírni

$$\varphi(t) = (1 + \alpha t)^{-\beta/\alpha} , \quad \alpha, \beta > 0 ,$$

ahol α jelöli, hogy mennyiben tér el a döntéshozó az exponenciális diszkontálástól. Általánosságban kijelenthető, hogy α növekedésével nő a jelen felé a torzítás. Míg ha α tart 0-hoz, akkor $\varphi(t) = e^{-\beta t}$ és így β a piaci kamatláb. β leginkább a piaci kamatláb értékeként értelmezhető.

A modell előnye, hogy magyarázza a nagysági, nyereség-veszteség és a késleltetés-gyorsítás anomáliát is. A jelen felé való torzítást és az időinkonzisztenciát a diszkontálási függvény írja le, olyan módon, hogy annak mértéke és jellege egyénenként tud változni a paraméterek segítségével. Például a kilátáselmélet értékfüggvénye alapján kijelenthető, hogy azért diszkontáljuk a nyereségeket jobban, mint a veszteségeket, mert a nyereségek értékfüggvényének meredeksége kisebb, mint a veszteségek értékfüggvényének meredeksége. A nyereség-veszteség aszimmetriára vezethető vissza a késleltetés-gyorsítás aszimmetriája is.

A számos hiperbolikus diszkontálás között érdekes közös vonást tár fel Ahlbrecht és Weber (1997) munkája, amely szerint a hiperbolikus diszkontálási függvény általános alakban:

$$\delta = \frac{1}{(1 + r)^{\alpha(t)}} ,$$

ahol $\alpha(t)$ az időérzékelést jelenti és r a kamatlábat.

Ha $\alpha(t)$ lineáris, azaz lényegében t-vel egyenlő, akkor visszakapjuk az exponenciális diszkontálást. Ha $\alpha(t)$ konkáv, akkor a hiperbolikus diszkontálásokat kapjuk vissza. Ezen belül:

- Ha $\alpha(t) = \frac{\ln(1+kt)}{\ln(1+r)}$, akkor Mazur (1987) modelljét kapjuk meg: $\delta = (1 + kt)^{-1}$.
- Ha $\alpha(t) = \frac{h \ln(1+gt)}{g \ln(1+r)}$, akkor az általánosított hiperbolikus diszkontálást kapjuk meg: $\delta = (1 + gt)^{-h/g}$ (a paramétereket most g-vel és h-val jelöltük, hogy ne keveredjen az időérzékelés paraméterével a jelölés).

Ez a formalizálás jól rámutat arra, hogy az időérzékelés módja lehet az egyik magyarázó erő a hiperbolikus diszkontfüggvények mögött. Ez alapján a hiperbolikus diszkontfüggvények időérzékelése konkáv, szemben például az exponenciálissal, ahol lineáris.

A kvázi-hiperbolikus diszkontálás

A kvázi-hiperbolikus diszkontálást alapvetően először a generációk közötti döntéshozatal makroszintű modellezésére találták ki (Phelps – Pollack 1968).

Phelps és Pollack (1968) alapgondolata szerint az exponenciális diszkontálást használva mindenki úgy dönt, hogy a saját és az összes többi generációnak együttesen a legjobb legyen. Viszont a jelenlegi generáció leértékeli a jövőbeli generációk hasznosságát, és így torzít a saját értékei felé. A kvázi-hiperbolikus modell ezt egy $\beta < 1$ szorzóval veszi figyelembe

$$\delta = \beta \frac{1}{(1+r)^t} \, ,$$

ahol $t > 0$ és csak egész számokon van értelmezve, r pedig a kamatláb.

A modell egyszerűsége és a jól kezelhetősége miatt később más jelenségek vizsgálatakor is használni kezdték, és kvázi-hiperbolikus diszkontálásként vált ismertté. Laibson (1997) használta először ezt a függvényformát kifejezetten a hiperbolikus diszkontálás hatását vizsgálva a makrogazdasági folyamatokban. Később általánossá vált az a felfogás, hogy a modellezés során az empirikus eredményekre legjobban illeszkedő és azokat legjobban megragadó általánosított hiperbolikus diszkontálás helyettesíthető a kvázi-hiperbolikus függvénnyel, mivel a lényegi részét ugyanúgy megfogja. Vagyis a helyettesítéskor csak bizonyos tulajdonságok teljesülését követelik meg, miközben egyértelmű, hogy a két függvényforma alapjaiban más, így szó sem lehet egyszerűsítő átalakításról. Miközben a helyettesítés egyre elterjedtebb szakmai elemzésekben, a mai napig nem született elemzés arról, hogy milyen esetben működik, és milyen esetekben nem alkalmazható a kvázi-hiperbolikus modell az általános hiperbolikus helyettesítéseként. Cikkünk további részében ezt vizsgáljuk.

A helyettesíthetőség alapgondolata

A kvázi-hiperbolikus diszkontálással való helyettesítést Laibson (1997) már említett cikkére lehet visszavezetni, melyben ő maga így érvel a kvázi-hiperbolikus diszkontfüggvény használata mellett: „Ez a diszkontálási struktúra jól utánozza a hiperbolikus diszkontálási függvények kvalitatív tulajdonságait, miközben megtartja az exponenciális függvény könnyű kezelhetőségét” (Laibson 1997, 450. o.). A későbbiekben erre hivatkozva tekintik helyettesíthetőnek az általánosított hiperbolikus függvényt és a kvázi-hiperbolikus függvényt (Angeletos 2001, Laibson 2007, Nagy 2011).

Laibson a cikkében csak két tulajdonságot említ, amit meg tud ragadni a kvázi-hiperbolikus diszkontálás. Az egyik az inkonzisztens viselkedés a jelen és a jövőbeli vagy akár két jövőbeli preferencia között. A másik az idő hosszának növekedésével csökkenő egységnyi diszkontráta. Azaz az exponenciális δ^t diszkontálás esetén $-f'(t)/f(t)$-t egy konstans diszkontráta jellemzi ($\log(1/\delta)$), míg az általánosított hiperbolikus esetén a diszkontráta folyamatosan csökken, ha az idő hossza nő, a $\beta/(1+\alpha t)$ függvényt követve.

Ezek az állítások nem garantálják, hogy a két módszer minden téren elegendően hasonló következtetésekre jut.

Sorozatok diszkontálása

Hosszú távú döntések modellezése során sokszor nem egyszerűen egy távoli esemény diszkontálását feltételezik, hanem még tovább mennek és sok egymást követő hasznosságét. Hosszú távú döntést vizsgálunk például akkor is, amikor a döntéshozó egy életciklus modellben dönt a várható jövedelmei és kiadásai függvényében, vagy hosszú távú egyensúlyok elemzésekor, vagy olyan összefüggések esetében, mint például az örökjáradék. Ezeknél nem egyszerűen hosszú távú döntésekről van szó, hanem sorozatok értékeléséről is. A sorozatok pontos diszkontálását még nehezen kezeli a szakirodalom, de az biztos, hogy több hatás is torzítja (eloszlási, növekvő sorrend), ami miatt nem tekinthetünk rá úgy, mint a sorozat tagjai diszkontált értékeinek összegére.

Az örökjáradék példáján azt mutatjuk be, hogy az általánosított hiperbolikus diszkontálás helyettesítése a kvázi-hiperbolikus diszkontálással viszont még akkor is problémákhoz vezet, amennyiben úgy tekintjük, hogy a döntéshozó egymástól függetlenül egyenként diszkontálja a jövőbeli sorozat elemeit.

Az örökjáradék

Az örökjáradék az egyik legegyszerűbb sorozat. Az örökjáradék esetében minden időszakban kapunk a végtelenségig egy adott C összeget és az a kérdés, hogy ez mennyit ér nekünk a jelenben. Másképp fogalmazva mekkora a nettó jelenértéke egy ilyen örökjáradéknak. Az exponenciális diszkontálást használva erre egy viszonylag egyszerű formulát kapunk, ahol egy örökjáradék értéke C/r. (Egyszerű végtelen mértani sor összegképlet alapján, ahol r a kamatláb.)

Ezek után vizsgáljuk meg a kvázi-hiperbolikus diszkontálást. Ebben ez esetben az eredmény $\beta C/r$ lesz, ahol β a kvázi-hiperbolikus modellből ismert, a jelen felé torzítás mértékét adja meg. Ez szintén egy egyszerű, jól megfogható formula.

Miközben az általánosított hiperbolikus modell alapján még az sem garantált, hogy a nettó jelenérték egy véges érték, addig a kvázi-hiperbolikussal számolt nettó jelenérték mindig egy véges érték.

Állítás. *Amennyiben az általánosított hiperbolikus modell paramétereire igaz az, hogy β szigorúan nagyobb, mint α, akkor az örökjáradék nettó jelenértéke véges érték, míg ellenkező esetben nem.*

Bizonyítás. A kérdés az, hogy a $\sum_t (1+\alpha t)^{-\beta/\alpha}$ végtelen sor mikor konvergens és mikor nem. Konvergens akkor és csak akkor lesz, amikor a $\sum_n n^{-p}$ ($p \in \mathbb{R}$) konvergens. A Cauchy-féle kondenzációs teszt szerint monoton fogyó, pozitív tagú sorokra $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ véges akkor és csak akkor, ha $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ véges, ami ebben az esetben azt jelenti, hogy $p > 1$. Tehát az eredeti egyenlet esetében a $\beta > \alpha$ feltételnek kell teljesülnie, hogy konvergens legyen a sorösszeg. □

Összefoglalva, az általánosított hiperbolikus diszkontálás esetén az örökjáradék akkor és csak akkor konvergens, ha $\beta > \alpha$, míg a kvázi-hiperbolikus esetében mindig konvergens. Így az örökjáradék esetében az általánosított hiperbolikus diszkontálás alapjaiban juthat más következtetésre, mint a kvázi-hiperbolikus.

Hosszú távú határérték

Ahlbrecht és Weber (1997) modellje alapján jól látható, hogy a kvázi-hiperbolikus diszkontálás az idő lineáris érzékelését feltételezi egy szakadási ponttól eltekintve, míg az általános hiperbolikus modell az idő konkáv érzékelését feltételezi ($\alpha = 0$ kivételével). Már önmagában ez is jelzi, hogy hosszú távon a két függvény drasztikusan másképp számol.

A különbség az egységnyi kamatlábak között akkor a leglátványosabb, ha t tart végtelenbe. A kvázi-hiperbolikus diszkontálás egységnyi kamatlába r-be tart:

$$\delta = \lim_{t\to\infty} \sqrt[t]{\beta \frac{1}{(1+r)^t}} = \frac{1}{1+r} \, .$$

Az általánosított hiperbolikus diszkontálás egységnyi kamatlába ezzel szemben 0-ba tart ($\alpha > 0$), így

$$\delta = \lim_{t\to\infty} \sqrt[t]{\frac{1}{(1+\alpha t)^{\beta/\alpha}}} = \frac{1}{1} = 1 \, .$$

Nagyon hosszú távon az általánosított hiperbolikus modell egységnyi kamatlába 0-ba tart, így egységnyi időért a végtelenben már nem kér semmit. A kvázi-hiperbolikus diszkontálásnál is folyamatosan csökken az egységnyi kamatláb, de legalább egy konstans $r > 0$ kamatlábat mindig felszámít.

Hosszú távú különbségek becslése megfigyelések alapján

Ahhoz, hogy hosszú távra megbecsüljük a modellek értékeit, egy kísérletet végeztünk. Kísérletünkben egyetemistákat kérdeztünk meg, hogy egy adott nagyságú nyereséget vagy veszteséget mekkora összegért lennének hajlandóak időben eltolni. Ezek alapján kaptuk meg a több mint 100 résztvevőnél ($N = 113$), hogy 5000, 85 000, 1 200 000 forint esetén mennyiért lennének hajlandóak elfogadni 3, 6, 9, 12, 18 hónapnyi csúszást (veszteség esetén menynyit lennének hajlandóak maximum fizetni a csúszásért). Ezen értékek alapján egy átlagos kamatlábat kaphatunk mind az összeg nagysága, a nyereség-veszteség állapota, mind az idő múlása tekintetében. A kamatlábakból pedig kiszámolhatjuk az egységnyi diszkontrátát, amely a három hónapos kamatlábnak felel meg. Ezzel különböző időtávra felszámolt kamatokat egységesen össze tudunk hasonlítani. Ha megvizsgáljuk ezeket az átlagos egységnyi diszkontráta értékeket, akkor azok jól reprezentálják az eddig már ismertetett anomáliákat, tehát összhangban vannak az eddigi megfigyelésekkel.

	3 hónap	6 hónap	9 hónap	12 hónap	18 hónap
Nyereség: 5000 HUF	0,23	0,18	0,15	0,12	0,11
Veszteség: 5000 HUF	0,19	0,12	0,10	0,09	0,07
Nyereség: 85 000 HUF	0,10	0,08	0,08	0,06	0,05
Veszteség: 85 000 HUF	0,11	0,06	0,05	0,04	0,03
Nyereség: 1200 000 HUF	0,10	0,09	0,06	0,05	0,04
Veszteség: 1200 000 HUF	0,06	0,05	0,03	0,03	0,02

1. táblázat. Egységnyi diszkontráta átlaga (3 hónap). *Forrás:* Saját készítésű.

Benzion és társai (1989), az adatok szempontjából egyik leghivatkozottabb cikkükben hasonló értékekre jutottak. Ez a cikk elsősorban arra irányul, hogy kísérletekkel bizonyítsa, hogy az emberek különböző körülmények között (nyereség-veszteség, pénz nagysága...) más-más kamatlábat használnak. Így egyértelműen elvethető az a pénzügyi feltételezés, hogy a döntéshozók minden helyzetben a piaci kamatlábat használják a diszkontálásra. Összesen 204 egyetemista diák válaszai alapján kapták az alábbi táblázatokat, ami jelen elemzésünk során ideális arra a célra, hogy a vizsgált összefüggéseket egy független adathalmazon is vizsgáljuk a sajátunk mellett.

Nyereség (USD)	0,5 év	1 év	2 év	4 év
40	0,60	0,39	0,26	0,22
200	0,43	0,26	0,23	0,20
1000	0,41	0,28	0,20	0,19
5000	0,18	0,16	0,15	0,12

2. táblázat. Egységnyi diszkontráta (6 hónap) átlaga nyereség elhalasztásánál. *Forrás:* Benzion et al. 1989, 276 o.

Veszteség (USD)	0,5 év	1 év	2 év	4 év
40	0,33	0,22	0,19	0,14
200	0,26	0,17	0,16	0,13
1000	0,22	0,16	0,15	0,12
5000	0,15	0,11	0,09	0,08

3. táblázat. Egységnyi diszkontráta (6 hónap) átlaga veszteség elhalasztásánál. *Forrás:* Benzion et al. 1989, 276 o.

Mindegyik esetben látható a magas kezdeti érték és hogy időben csökken az egységnyi kamatláb. A következőkben a saját és az összehasonlító nemzetközi adatokon egyaránt bemutatjuk az általánosított és a kvázi-hiperbolikus diszkontálás illeszkedését. Mivel mindkét modell két paramétert használ, azonos szabadságfokkal rendelkeznek, így ezt nem kell kiegyensúlyozni, az abszolút eltérés összege kielégítően kifejezi az illeszkedés jóságát.

Először a saját adatokat mutatom be aszerint, hogy veszteségről vagy nyereségről van-e szó, és hogy mekkora összeg kapcsán válaszoltak a résztvevők. Jól látható, hogy a 4. és az 5. táblázatban található 6 esetből 4-szer az általánosított hiperbolikus modell adott jobb illeszkedést, 2-szer pedig a kvázi-hiperbolikus modell. Ami még érdekes, hogy mindegyik esetben $\alpha > \beta$, ami, mint láttuk, azt jelenti, hogy tetszőleges állapotban azt kapjuk eredményül, hogy az általánosított hiperbolikus modellezés esetén egy örökjáradék nem véges szám, míg a kvázi-hiperbolikusnál igen. Tehát a két modell különböző következtetésre jut a tapasztalati adatok alapján kalibrálva.

Nyereség (HUF)	Ált. hiper-bolikus α paraméter	Ált. hiper-bolikus β paraméter	Kvázi-hiper-bolikus β paraméter	Kvázi-hiper-bolikus r kamatláb	Ált. hiper-bolikus abszolút hiba	Kvázi-hiper-bolikus abszolút hiba
5000	0,70	0,26	0,85	0,08	0,10	0,12
85000	0,70	0,13	0,96	0,04	0,05	0,07
1200000	2,57	0,21	0,91	0,02	0,08	0,07

4. táblázat. A modellek paraméterbecslései és az illeszkedés hibái nyereségben a saját kísérlet alapján. *Forrás:* Saját készítésű.

Veszteség (HUF)	Ált. hiper-bolikus α paraméter	Ált. hiper-bolikus β paraméter	Kvázi-hiper-bolikus β paraméter	Kvázi-hiper-bolikus r kamatláb	Ált. hiper-bolikus abszolút hiba	Kvázi-hiper-bolikus abszolút hiba
5000	1,53	0,26	0,87	0,05	0,04	0,09
85000	9,70	0,39	0,92	0,01	0,03	0,03
1200000	2,23	0,11	0,95	0,01	0,01	0,03

5. táblázat. A modellek paraméterbecslései és az illeszkedés hibái veszteségben a saját kísérlet alapján. *Forrás:* Saját készítésű.

A Benzionék cikkében közölt adatok hasonló eredményt mutatnak. A 6. és a 7. táblázatból kiolvashatóan – amelyeket a hivatkozott cikk adataiból számoltunk ki –, az illeszkedés jósága még kiegyenlítettebb, mivel a 8 esetből 4-4 esetben illeszkedik jobban az egyik, illetve a másik modell. Viszont a Benzionék cikkében szereplő adatok alapján is minden esetben $\alpha > \beta$.

Nyereség (USD)	Ált. hiper-bolikus α paraméter	Ált. hiper-bolikus β paraméter	Kvázi-hiper-bolikus β paraméter	Kvázi-hiper-bolikus r kamatláb	Ált. hiper-bolikus abszolút hiba	Kvázi-hiper-bolikus abszolút hiba
40	0,70	0,41	0,85	0,16	0,20	0,05
200	0,32	0,28	0,92	0,16	0,10	0,05
1000	0,29	0,25	0,91	0,14	0,15	0,06
5000	0,44	0,19	0,95	0,10	0,02	0,08

6. táblázat. A modellek paraméterbecslései és az illeszkedés hibái veszteségben a Benzion cikk alapján. *Forrás:* Saját készítésű.

Veszteség (USD)	Ált. hiper-bolikus α paraméter	Ált. hiper-bolikus β paraméter	Kvázi-hiper-bolikus β paraméter	Kvázi-hiper-bolikus r kamatláb	Ált. hiper-bolikus abszolút hiba	Kvázi-hiper-bolikus abszolút hiba
40	0,79	0,29	0,91	0,11	0,05	0,09
200	0,39	0,20	0,94	0,11	0,05	0,05
1000	0,36	0,19	0,95	0,10	0,04	0,06
5000	0,41	0,12	0,96	0,06	0,03	0,01

7. táblázat. A modellek paraméterbecslései és az illeszkedés hibái veszteségben a Benzion cikk alapján. *Forrás:* Saját készítésű.

Kijelenthetjük, hogy mind saját megfigyeléseink, mind a hivatkozott cikk szerint a megfigyelt adatok abba a tartományba esnek, ahol a két diszkontálási modell teljesen más eredményre jut, például egy örökjáradék esetében, ami alátámasztja a két modell helyettesíthetőségének megkérdőjelezhetőségét ilyen típusú problémák esetén. Ez minden olyan esetben komoly problémákat vethet fel, ahol sorozatok értékeléséről van szó és hosszú távú elemek is vannak a sorozatban. A helyettesíthetőség problémája ugyanakkor nem csak sorozatok esetén merül fel. Előfordulhat olyan hosszú távú döntési helyzet, ahol már egyszeri diszkontálás esetén is más eredményre jut a két diszkontálási modell. Ha megvizsgáljuk, hogy a megfigyelt adatokra illesztett modelleknél mennyi idő után érjük el azt az állapotot, hogy az egyik modell (ez mindig a kvázi-hiperbolikus) legalább kétszer akkora kamatot számít fel, mint a másik, azt kapjuk, hogy ez viszonylag hamar megtörténhet.

A Benzion et al. cikk adatai alapján kijelenthető, hogy bármekkora pénzről van szó, és attól is függetlenül, hogy nyereségről vagy veszteségről van-e szó, 7,5 év után már legalább kétszeres a különbség. Saját adatbázisunk eredményei valamivel árnyaltabb képet mutatnak.

Nyereség (HUF)	Negyedév
5000	16
85000	19
1200000	19
Veszteség (HUF)	Negyedév
5000	16
85000	34
1200000	35

8. táblázat. Mennyi idő után lesz legalább kétszeres különbség a két modell kamatrátái között a saját kísérlet alapján. *Forrás:* Saját készítésű.

A 8. táblázatból látható, hogy míg nyereségben kis eltérés van a pénzösszegek nagyságának tekintetében, de 5 év után már minden esetben legalább kétszeres a különbség a két modell között, addig veszteségben már lassabban alakul ki ekkora különbség. Azonban 10 év után már itt is nagyságrendi a különbség, vagyis még az emberek számára fontos időtávon belül kialakul ilyen különbség. A Benzion et al. cikk adatai alapján viszont kijelenthető, hogy 12-13 félév után már kétszeres különbség alakul ki. De itt is megfigyelhető az a tendencia, hogy minél nagyobb összegről van szó, annál később alakul ki ekkora különbség, és az is megfigyelhető, hogy a veszteségben átlagosan szintén később alakul ki ilyen nagy különbség. Tehát mindkét adathalmazon azt a tendenciát láthatjuk, hogy a pénz nagyságának növekedésével jobban hasonlít a két modell eredménye egymásra, illetve azt is, hogy veszteségben inkább hasonlít a két modell következtetése egymásra, mint nyereségben.

Nyereség (USD)	Félév
40	11
200	12
1000	13
5000	12
Veszteség (USD)	Félév
40	11
200	13
1000	13
5000	15

9. táblázat. Mennyi idő után lesz legalább kétszeres különbség a két modell kamatrátái között a Benzion cikk alapján. *Forrás:* Saját készítésű.

Összefoglalás

Cikkünkben a közgazdasági modellezés alapkérdései közé tartozó intertemporális döntések modellezését vizsgáltuk. Míg a szokásos elemzésben a mai napig az exponenciális diszkontálás a legelterjedtebb, annak ellenére, hogy gyenge leíró erővel bír a megfigyelt adatok kapcsán, az erősebb magyarázó erejű modellre igényt tartó elemzők számára rendelkezésre áll az általánosított hiperbolikus diszkontálás, ami viszont modellezési célra nehezen alkalmazható összetett függvényformája miatt. Ezért terjedt el a kvázi-hiperbolikus diszkontálás, amely megragadja az általánosított hiperbolikus diszkontálási modell két legfontosabb tulajdonságát, de úgy, hogy közben könnyen kezelhető marad. Ennek köszönhetően elterjedt gyakorlat az, hogy a kvázi-hiperbolikus diszkontálást használják a modellezés során, helyettesítve az általánosított hiperbolikus megközelítést, ami rövid távú döntéseknél nagyon jól is működik.

Hosszú távú döntések kapcsán azonban a két modell helyettesíthetősége erősen megkérdőjelezhető. Bár a kvázi-hiperbolikus modell jól megragadja az általánosított hiperbolikus modell tulajdonságait rövid távon, azt már hosszú távon csak nagyságrendi különbségekkel tudja megtenni. Tetszőleges tapasztalati eredmények alapján kalibrált modellek esetén igaz, hogy legalább 10 éves döntések esetén (sok esetben már 5 év után) az egyik diszkontálás (a kvázi-hiperbolikus) legalább kétszer akkora kamatlábhoz vezet, mint a másik. Ráadásul a modellezés során sokszor nem két időpont közötti átváltásról van csak szó, hanem sorozatok diszkontálásáról is. A sorozatok diszkontálásánál még kevésbé feltételezhetjük a helyettesíthetőséget a cikkben bemutatott elméleti és tapasztalati eredmények alapján. Bemutattuk például, hogy az örökjáradék kapcsán nem egyszerűen nagy eltérésről van szó, hanem arról, hogy míg a kvázi-hiperbolikus függvény egy véges nettó jelenértéket ad az örökjáradékra, addig az általánosított hiperbolikus modell csak erős feltételek mellett ad véges nettó jelenértéket. Ráadásul a tapasztalati megfigyelések alapján ez az erős feltétel sosem teljesül. Így nem egyszerűen nagyságrendi különbség van a két modell eredménye között, hanem alapjaiban jutnak különböző következtetésre. Az eredmények alapján láthatjuk, hogy a két diszkontálási modell között a helyettesítés hosszú távon nem működik. Ennek függvényében érdemes újragondolni azokat a nemzetközi és hazai modellezési eredményeket, amelyek hosszú távú döntések kapcsán éltek a helyettesítéssel.

Irodalom

1. Ahlbrecht, M. – M. Weber (1997): An Empirical Study of Intertemporal Decision-Making in the Case of Risk. *Management Science*, 43. 813–826.
2. Ainslie, G. (1975): Specious Reward: A Behavioral Theory of Impulsiveness and Impulse Control. *Psychological Bulletin*, 82, 463–469.
3. Ainslie, G. – N. Haslam (1992): Hyperbolic Discounting. In G. Loewenstein and J. Elster (eds.) *Choice over Time*. New York: Russell Sage Foundation.
4. Angeletos, G. – M. D. Laibson – A. Repetto – J. Tobacman – S. Weinberg (2001): The Hyperbolic Consumption Model: Calibration, Simulation and Empirical Evaluation. *Journal of Economic Perspectives*, 15(3), 47–69.

5. Benhabib, J. – A. Bisin – A. Schotter (2010): Present bias, quasi-hyperbolic discounting, fixed cost. *Games and Economic Behavior*, 69, 205–223.
6. Benzion, U. – A. Rapaport – J. Yagil. (1989): Discount Rates Inferred from Decisions: An Experimental Study. *Management Science*, 35, 270–284.
7. Böhm-Bawerk, E. (1888-1930): *The Positive Theory of Capital.* New York: G. E. Stechert and Co.
8. Diamond, P. – Kőszegi B. (2003): Quasi-hyperbolic discounting and retirement, *Journal of Public Economics*, 87, 1839–72.
9. Frederick, S. – G. Loewenstein – T. O'Donoghue (2002): Time Discounting and Time preference: A Critical Review. *Journal of Economic Literature*, 40(2), 351–401.
10. Harvey, C. M. (1994): The reasonableness of nonconstant discounting. *Journal of Public Economics*, 53(1), 31-51.
11. Kahneman D. – A. Tversky (1979): An Analysis of Decision under Risk. *Econometrica*, 47(2), 263–291.
12. Koopmans, T. C. (1960): Stationary ordinal utility and impatience. *Econometrica*, 28, 287–309.
13. Laibson, D. (1997): Golden eggs and hyperbolic discounting. *Quarterly Journal of Economics*, 112, 443–477.
14. Laibson, D. – A. Repetto – J. Tobacman (2007): Estimating Discount Functions with Consumption Choices over the Lifecycle. NBER working paper No. 13314
15. Loewenstein, G. (1987): Anticipation and the Valuation of Delayed Consumption, *Economic Journal*, 97(387), 666–684
16. Loewenstein, G. – R. Thaler (1989): Anomalies: Intertemporal Choice. *Journal of Economic Perspectives*, 3, 181–193.
17. Loewenstein G. – D. Prelec (1991): Decision Making over Time and under Uncertainity. *Management Science*, 37(7), 770–786.
18. Loewenstein, G. – N. Sicherman (1991): Do Workers Prefer Increasing Wage Profiles? *Journal of Labor Economics*, 9(1), 67–84.
19. Loewenstein, G. – D. Prelec (1992): Anomalies in Intertemporal Choice—Evidence and an Interpretation. *Quarterly Journal of Economics*, 107(2), 573–597.
20. Mazur, J. E. (1984): Tests of an equivalence rule for fixed and variable delays. *Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Processes*, 10, 426–436.
21. Nagy B. (2011): A kvázi-hiperbolikus diszkontálás alkalmazása az optimális szabadalmak elméletében, *Szigma*, 42(1-2), 57–78.
22. O'Donoghue, T. – M. Rabin (2000): The economics of immediate gratification. *Journal of Behavioral Decision Making*, 13(2), 233–250.
23. Phepls, E. S. – R. A. Pollack (1968): On the second-best national saving and game-equilibrium growth. *Review of Economic Studies*, 35, 185–199.
24. Read, D. (2003): Intertemporal Choice, Working paper, No. LSEOR 03.58
25. Samuelson, P. (1937): A Note on the Measurement of Utility. *Review of Economic Studies*, 4, 155–161.

26. Scholten, M. – D. Read (2011): Descriptive Models of Intertemporal Choice Part 2: The Delay-Speedup Asymmetry and Other Anomalies. Working paper. Elérhető: http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1849705 vagy http://ssrn.com/abstract=1849705
27. Strotz, R. H. (1955): Myopia and inconsistency in dynamic utility maximization. *Reviewof Economic Studies*, 23, 165–180.
28. Thaler, R. (1981): Some empirical evidence of dynamic inconsistency. *Economics Letters*, 8, 201–207.

QUASI- AND GENERALIZED HYPERBOLIC DISCOUNTING IN LONG TERM

Intertemporal choice is one of the crucial questions in economic modeling and it describes decisions which require trade-offs among outcomes occurring in different points in time. In economic modeling the exponential discounting is the most well known, however it has weak validity in empirical studies. Although according to psychologists generalized hyperbolic discounting has the strongest descriptive validity it is very complex and hard to use in economic models. In response to this challenge quasi-hyperbolic discounting was proposed. It has the most important properties of generalized hyperbolic discounting while tractability remains in analytical modeling. Therefore it is common to substitute generalized hyperbolic discounting with quasi-hyperbolic discounting. This paper argues that the substitution of these two models leads to different conclusions in long term decisions especially in the case of series; hence all the models that use quasi-hyperbolic discounting for long term decisions should be revised if they states that generalized hyperbolic discounting model would have the same conclusion.

CONTENTS

TARTALOM

SZIGMA
Matematikai-közgazdasági folyóirat

A Gazdaságmodellezési Társaság lapja

Terjeszti a Gazdaságmodellezési Társaság. A kiadvány megjelenését az MTA Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága támogatta.

ISSN 0039-8128

www.szigma.ktk.pte.hu