Szepesi György—Székely Béla

# A gazdasági növekedés optimális pályái egy szabályozott gazdasági rendszerben

## Bevezetés

A szocialista gazdasági tervezés egyre szélesebb körben használja fel a közgazdasági-matematikai növekedési modelleket. Nem törekszünk e modellek rendszerezésére és ismertetésére, csak néhány, a jelen munkában bemutatott modell szempontjából lényeges sajátosságaikat emeljük ki. Nagyon általánosan fogalmazva, ezek a modellek a gazdaság valamilyen kvantitative leírt állapotához hozzárendelnek olyan növekedési egyensúlyi pályákat, amelyek azon közgazdasági elméleti rendszer értelmében, amelyben e modellek fogalmazódtak, optimálisak. Ezt az optimumot dinamikusan értelmezik, azaz nem egy állapot, hanem egy olyan pálya, amelynél az adott optimum kritérium értelmében nem létezik jobb. (Lásd pl. [13].) Ezek a modellek csak korlátozottan alkalmazhatók a tervezés céljaira. A tervezés végső feladata abban rejlik, hogy kidolgozza a gazdaság egy, a változó körülményekhez alkalmazkodó pályáját és meghatározza azokat az eszközöket, szabályozókat, amelyek segítségével ez a pálya a valóságban realizálható. Ezek a növekedési modellek két szempontból nem alkalmazkodnak a tervezés követelményeihez. Egyrészt többségük csak változatlan, konstans struktúrához tudja hozzárendelni az optimális növekedési pályát és különböző struktúrák esetén többször meg kell oldani a modellt. Viszont a struktúrák közötti kapcsolatról, az áttérés lehetőségeiről és az áttérési pályákról e modellek segítségével nem szerezhetünk információt. Másrészt e modellek nem szabályozott rendszereket tükröznek, nem tudjuk segítségükkel meghatározni, hogy a modellben leírt optimális növekedési pályához — hogy ez megvalósuljon — milyen szabályozó eszközöket kell alkalmazni, milyen eszközökkel és hogyan lehet a gazdaságot rátéríteni erre az egyensúlyi pályára. E két hiányosság bizonyos mértékű kiküszöbölésére próbálunk modellünkkel kísérletet tenni. Ilyen irányú kísérlettel már találkozhattunk a hazai és külföldi irodalomban. A hazai irodalomból megemlítjük Bródy András, Kornai János és Martos Béla, a külföldi irodalomból pedig Hamada, Szmirnov, Murakami nevét. Modellünk heurisztikusan a következő alapokra épül fel.

A gazdasági fejlődés folyamatát diszkrét és folytonos folyamatok egységeként fogjuk fel, mégpedig a következő módon. A fejlődés egy meghatározott szakaszában csak mennyiségi változás (növekedés) van, a struktúra változatlan marad az erre a szakaszra jellemző átlagos szinten. A struktúra változása diszkrét (ugrásszerű), új fejlettségi szint kialakítását jelenti, amin szintén mennyiségi növekedés fog végbemenni. A gazdasági fejlődés szakaszai diszkréten váltják egymást, míg az egyes szakaszokon belül a fejlődés folytonos. A modell erre a gazdasági fejlődési hipotézisre épül fel. Az egyes szakaszok sorrendje a modell számára meghatározott, azonban az áttérés feltételeinek megérési ideje és az áttérés szabályozható. A modell segítségével a gazdaság működésének törvényszerűségei szabályozhatók. A modell a tervezésben úgy nyerhet alkalmazást, hogy a tervező felméri, hogy a közeljövőben milyen strukturális változások következhetnek be, vagy kívánatos, hogy bekövetkezzenek (nem futurologikus célokról van szó), meghatározza azokat az időhorizontokat, amik egy-egy új struktúrára való áttéréshez véleménye szerint szükségesek és ekkor a modell segítségével meghatározhatja a modellben a szabályozók azon értékét, amelyek mellett a gazdaság a meglevő struktúrán optimálisan fejlődik és minimális idő alatt áttér az új struktúrára. Optimális fejlődés alatt az adott fejlettségi szinten, az adott struktúrához és szabályozáshoz tartozó maximális növekedési ütemű *egyensúlyi* fejlődést értjük. Az egyensúly értelmezésére még visszatérünk.

## I. A modell megfogalmazása

### *1.1. Alapvető közgazdasági definíciók és feltételezések*

A modellben centrális szerepet játszik a *gazdasági struktúra* fogalma, amin általános értelemben vett ráfordítási szerkezetet értünk, beleértve a fogyasztás szerkezetét, mint a munkaerő bővített újratermeléséhez szükséges ráfordítási szerkezetet és az export-import szerkezetet. A technikát a modellben a ráfordítási struktúrával fogjuk jellemezni.

*Ráfordításokon* folytonos és egyszeri ráfordításokat értünk. Egyszeri ráfordítás a teljes eszköz (álló + forgó) igényt tartalmazza.

*Ráfordítási szerkezet*: matematikai formáját tekintve $n$ elemű vektor, a tevékenység egységnyi intenzitású gyakorlásához szükséges ráfordításokat tartalmazza.

*Egyszerű ráfordítási szerkezet* csak a holtmunka ráfordításokat tartalmazza (anyagi ráfordítások).

*Teljes ráfordítási szerkezet* a holtmunka ráfordításon kívül az eleven munka ráfordításokat is tartalmazza.

*Visszagyűrűztetett ráfordítási szerkezet* olyan teljes anyagi ráfordítási struktúra, ami az eleven munka ráfordítások helyett azok szétosztott anyagi ráfordítás igényét tartalmazza.

*Szektor* alatt homogén tevékenységet értünk, amelyhez adott időpontban rögzített ráfordítási szerkezet tartozik.

*Technikai szint* olyan műszaki fejlettségi állapot, amelyet konstans ráfordítási szerkezettel jellemzünk.

*Áttérés* a technikai szint megváltozása, amelynek feltétele az egyszeri ráfordítások, termelési alapok meghatározott hányadának lecserélése és megfelelő tartalékok, készletek képzése.

*Termelési struktúrán* egy olyan $n$ elemű vektort értünk, amelynek $k$-ik komponense a $k$-ik szektor termelési szintjének mutatója.

Dinamikus *egyensúly* alatt azt a fejlődési pályát értjük, amely adott ráfordítási szerkezet mellett az összes ezen ráfordítási szerkezethez tartozó lehetséges fejlődési pályákat egy bizonyos $t$ idő után dominálja. Az ilyen dinamikus egyensúlyi pályát *Neumann path*-nak, vagy *turnpike*-nak nevezik az angol nyelvű irodalomban.

A további tárgyalás folyamán a következő feltételezésekkel élünk, anélkül, hogy újra hivatkoznánk rá.

*a)* A népgazdaság $n$ szektort tartalmaz.

*b)* A népgazdasági struktúra egy adott $i$-ik technikai szinten jellemezhető, egy $\mathbf{A}_i$, $\mathbf{B}_i$ matrix-párral, amely matrixok oszlopvektorai az egyes szektorok folytonos és egyszeri ráfordítási szerkezetei.

*c)* A technikai szintek sorrendje közgazdasági megfontolások alapján meghatározott. Ezek a közgazdasági megfontolások egyrészt nemzetközi összehasonlításon, másrészt műszaki fejlődés prognózisain alapulhatnak.

### 1.2. *A modellben alkalmazott jelölések*

$I = \{I/i = 1, 2, 3, \ldots, m\}$ indexhalmaz a vizsgálatba bevont lehetséges technikai szintek rendező halmaza.

$\mathbf{A}_i$ az $i$-edik technikai szinthez tartozó visszagyűrűztetett folyó ráfordítási szerkezet.

$\mathbf{B}_i$ az $i$-edik technikai szinthez tartozó visszagyűrűztetett egyszeri ráfordítási szerkezet.

$\hat{x}_i$ az $i$-edik technikai szinthez tartozó optimális egyensúlyi temelési struktúrának megfelelő pálya (Neumann-pálya).

$x_i$ az $i$-edik technikai szinthez tartozó nem egyensúlyi termelési struktúra.

$\bar{\lambda}_i$ az $i$-edik technikai szinthez tartozó maximális egyensúlyi növekedési ütem a Neumann—Leontieff—Bródy modellben.

$\lambda_i$ az $i$-edik technikai szinthez tartozó maximális egyensúlyi növekedési ütem $\alpha_i$ vezérlés mellett.

$\alpha_i$ az $i$-edik technikai szinthez tartozó, az $i+1$-ik szintre való áttérés feltételeinek megérését szabályozó paraméter.

$u$ külső erőforrás az áttérés vezérlésére.

$$\varphi(x_i) = \begin{cases} 0, \text{ ha } x_i = \hat{x}_i \\ 1, \text{ ha } x_i \neq \hat{x}_i \end{cases}$$ a feladat szintetizáló funkcionálja.

### 1.3. *A Neumann—Leontieff—Bródy modellről*

Modellünk egy zárt, dinamikus input-output modellen alapul, ezért szükséges kitérni ezen modellcsalád néhány alapvető jellemzőjére.

*a)* Ezek a modellek egy teljesen zárt gazdaságot tükröznek: a gazdaság outputja egyensúlyi esetben teljes egészében a következő időszak inputjául szolgál és azt ki is elégíti.

*b)* A gazdasági struktúra jellemezhető egy fent definiált $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ matrixpárral, mely matrixok egyensúlyi esetben egyértelműen meghatározott input szerkezetet követelnek meg. Mivel az *a)* pont értelmében a gazdaság input-szerkezete azonos output-szerkezetével, ez a közös input-output, amely csak egy konstans skalár szorzóval térhet el egymástól az $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ matrixok által jellemzett transzformáció saját-vektora.

A modellben szereplő transzformációs matrix — amely $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ matrixokból komponálódik[1] — közgazdasági tulajdonságokból kifolyólag (nem negatív és irreducibilis) olyan, hogy csak egyetlen pozitív saját-vektorral rendelkezik. Mivel közgazdaságilag ebben a modellben csak a pozitív inputok és outputok

[1] $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ komponálódásán azt értjük, hogy a transzformáció matrixa $\mathbf{Q}\,\mathbf{B}$, ahol $\mathbf{Q} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$.

értelmezhetők, az előbbiekben leírtak alapján ez az egyetlen olyan fejlődési pálya, amely végtelen időhorizonton **A** és **B** változatlansága mellett egy zárt gazdaságban fenntartja az input és output egyensúlyát, ezért ezt a pályát maximális *egyensúlyi* növekedési pályának és az ehhez a saját-vektorhoz tartozó saját-értéket (amely nyilvánvalóan egy növekedési ütem, amely azt mutatja, hogy az output hányszorosa az inputnak) maximális egyensúlyi növekedési ütemnek nevezzük. Mivel ilyen tulajdonságú pályát hasonló feltételek mellett Neumann-nak sikerült először definiálnia, ezen pályát Neumann-pályának nevezik. E pálya meghatározására törekszik Leontief és Bródy A. is.

Mivel a mi modellünk főleg Bródy A. modelljéhez kapcsolódik, röviden szólunk erről a modellről.

A modell alapformulája a következő:

$$x = \mathbf{A}x + \mathbf{B}\dot{x}\,,$$

ahol **A** és **B** visszagyűrűztetett folytonos és egyszeri ráfordítási szerkezet, $x$ a termelés és $\dot{x}$ a termelés idő szerinti növekménye (derivált). A feladat egy lineáris homogén differenciálegyenletrendszerhez vezet és Bródy A. bebizonyította, hogy ezen egyenletrendszer fundamentális matrixának domináns saját-értékéhez tartozó saját-vektor a fentiek értelmében Neumann-pálya. A fenti feladat megoldását tehát ezen Neumann-pálya megkeresése jelenti.

Ezután rátérünk modellünk ismertetésére.

### 1.4. *A feladat megfogalmazása*

Adott $m$ darab technikai szint meghatározott fejlettségi sorrendbe rendezve. A gazdaság jelenlegi állapota $x_0$ termelési vektorral és $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}_1$ ráfordítási szerkezettel jellemezhető. Meg kell határozni a gazdasági fejlődésnek egy olyan pályáját, amely a következő sajátosságokkal rendelkezik:

*a)* $x_0(t_0)$-ból átveszi a gazdaságot egy $\hat{x}_1(t)$ pontba és ez az átvitel minimális idő alatt történik.

*b)* Minden $i$-edik technikai szinten az $i$-edik szintnek megfelelő $\hat{x}_i$ egyensúlyi termelési vektorhoz tartozó egyensúlyi pálya biztosítja olyan kapacitástartalékok (definícióját lásd később) képződését, amely lehetővé teszi az $i+1$-ik szintre való áttérést $T$ idő után.

*c)* A megfelelő tartalékok képződése után az $i$-edik technikának megfelelő $\hat{x}_i$ termelési szerkezetről az $i+1$-ik technikának megfelelő $\hat{x}_{i+1}$ szerkezetre való áttérés minimális idő alatt történik.

A matematikai modell alapja egy zárt dinamikus Bródy modell, amelynek segítségével meg lehet határozni a hosszú távú fejlődés egyensúlyi pályáját. A jelen modell ettől a következőkben tér el:

*a)* A modell az egyensúlyi pályák közötti átmeneti pályákat időoptimalizálja.

*b)* Az egyes szintekhez tartozó egyensúlyi pályák nemcsak a jelen technika feltételeit fejezik ki, hanem tartalmazzák a fejlettebb technikai szintre való áttérés feltételeit is.

*c)* Az egyensúlyi pályák nem abszolút determináltak a ráfordítási szerkezet által, hanem a műszaki fejlődés gyorsaságát, az áttérés idejét befolyásoló paraméterrel szabályozhatók.

Az alkalmazott módszert tekintve a modell egy sajátérték feladat és egy lineáris időoptimum feladat sajátos szintézise, amelyben a szintetizáló funkcionál szerepét $\varphi(x)$ játsza.

A modell egy szakadásos jobboldalakkal rendelkező lineáris inhomogén differenciálegyenlet rendszerrel írható le:

$$x_i(t) = \mathbf{A}_i x_i(t) + \mathbf{B}_i \dot{x}_i(t) + \alpha_i \mathbf{B}_{i+1} \dot{x}_i(t) - \varphi(x_i)\, u(t)\,.$$

## 2. A modell működése

A $\varphi(x_i)$ funkcionál aktuális értékeinek megfelelően két részre bonthatjuk a feladatot.

### *2.1. I. fázis: Egyensúlyi fejlődés adott technikai szinten*

Legyen $x_i(t) = \hat{x}_i(t)$, ekkor a $\varphi(x)$ funkcionál értéke a definíció szerint 0. A feladat ebben az esetben a következő formában írható fel:

$$\hat{x}_i(t) = \mathbf{A}_i \hat{x}_i(t) + \mathbf{B}_i \dot{\hat{x}}_i(t) + \alpha_i \mathbf{B}_{i+1} \dot{\hat{x}}(t)\,. \tag{1}$$

Ezen összefüggés közgazdasági tartalma a következő: a termelésnek, mint forrásnak fedeznie kell a termelés és a fogyasztás folyó ráfordításait $\mathbf{A}_i \hat{x}_i$, a termelés és fogyasztás növekedéséhez szükséges egyszeri ráfordítás-növekményeket $\mathbf{B}_i \dot{\hat{x}}_i$ (álló + forgóalap növekmény) és ezen kívül fedezni kell az $i + 1$-ik technikai szintre való áttéréshez szükséges, e szint egyszeri ráfordítási szerkezetének megfelelő és $\alpha_i$ skalár paraméterrel szabályozott, kapacitások képződését. A modell segítségével kapható egyensúlyi növekedési ütem alacsonyabb lesz, mint más modellekkel való számításoknál (pl. nem visszagyűrűztetett struktúrával dolgozó I—0 modellek) a következő okok miatt: $\mathbf{B}_i$ matrix konstrukciója olyan, hogy a termelésnek, mint forrásnak nem csak a termelő alapok megfelelő $\lambda$ ütemű növekedését kell biztosítani, hanem a nem-termelő alapok és az ún. szellemi tőke (az oktatásban lekötött tőke) $\lambda$ ütemű növekedését is. Ezen alapok fajlagos tőkeigényességi koefficiensei Kovács J. és Bródy A. számításai szerint elég magasak a termelő alapokhoz képest. Az egyensúlyi fejlődéshez viszont ezen alapok megfelelő ütemű növekedése is szükséges. Ebből látszik, hogy a modell rendkívül érzékeny a nem-termelő szektor (modellünkben vissza van gyűrűztetve a termelő szektorokba) fajlagos tőkeigényességi mutatóira. Külön magyarázatot igényel $\alpha_i \mathbf{B}_{i+1} \dot{\hat{x}}_i$ közgazdasági tartalma. A felhasználás ezen elemét a jövőbe fektetett beruházásoknak tekinthetjük, amely beruházás, selejtezés, pótlás révén is realizálódhat. A meglevő $i$-edik szintű állóalapok meghatározott részét ki kell selejtezni és a termelésnek, mint forrásnak ezen rész pótlását is fedeznie kell.

Modellünkben ez a pótlás biztosítja a következő technikai szintre való áttérés feltételeit, mivel a következő technikai szint fejlettebb termelési alapjait az előző szinten kell megtermelni, tehát amikor beindul az $i$-edik technikai szinten való termelés, akkor a nettó beruházások színvonala már az $i + 1$-ik szintnek, ugyanakkor a meglevő állóalapok szintje és struktúrája az $i$-edik szintnek felel meg. Az áttérés elvi feltételét úgy fogalmazhatjuk meg, hogy ezen induló állóalapok meghatározott részét kicseréljük $i + 1$-ik szinten levő állóalapokkal. Ezt az évenként végbemenő pótlást reprezentálja az $\alpha_i \mathbf{B}_{i+1} \dot{\hat{x}}_i$.

(Ezen vektor pontos jelentését még a következő pontban megmagyarázzuk.) Ezen vektor definíciójából következően, a pótlás egy szektoron belül az $i+1$-ik struktúrának, a szektorok közötti arány, mivel $\hat{x}_i$ vektorral szorzunk, az $i$-edik technikai szintnek felel meg. Nyilvánvaló, hogy az új technikára való áttérés bekövetkezése az itt leírt pótlási folyamattól függ. Modellünkben ezt a folyamatot fogjuk szabályozni és ezzel egyben szabályozzuk az áttérés lehetséges időpontját is. E pótlási folyamat szabályozása két oldalról történik. Egyrészt az évenkénti pótlás szabályozásával, erre szolgál az $\alpha_i$ paraméter, másrészt annak az aránynak a meghatározásával, amely megmutatja, hogy az $i$-edik szinten levő induló állóalapok mekkora hányadát kell lecserélni az $i+1$-ik szintre való áttéréshez. (Ennek szabályozására a későbbiekben definiálandó $\gamma_i$ paraméter szolgál.)

### *2.2 A Neumann-pálya szabályozása*

Térjünk mégegyszer vissza $\alpha_i \mathbf{B}_{i+1} \dot{\hat{x}}_i$ tartalmára. Az előző pontban ezt mint selejtezés-pótlást értelmeztük, amely pótlás egy adott ágazaton belül nem az $i$-edik, hanem az $i+1$-ik struktúra szerint megy végbe. Ennek a pótlásnak nem a szerkezetét, hanem csak a szintjét szabályozzuk $\alpha_i$ paraméterrel, ebből viszont az következik, hogy az állóalapok szerkezete nem, viszont fajtánkénti átlagos élettartama megváltozik, mivel a selejtezés és az annak teljesen megfelelő pótlás az $i$-edik struktúrától eltérő $i+1$-ik struktúrán történik. Ebből az is következik, hogy bizonyos állóalap fajtáknál az induló állóalapok meghatározott hányadának lecserélése előbb befejeződhet, viszont az $i+1$-ik struktúrára csak akkor lehet áttérni, ha ez a lecserélődés minden állóalap fajtánál befejeződött. Ezért ha pl. a $k$-adik állóalap fajtánál az induló állóalap már lecserélődött, akkor ettől az időponttól fogva a $\alpha_i \mathbf{B}_{i+1} \dot{\hat{x}}_i$ $k$-adik sora már nem selejtezés-pótlást, hanem az $i+1$-ik struktúrára való áttéréshez szükséges kapacitások képzését jelenti. Ennek megfelelően az új struktúrára való áttérés feltétele nem szűkíthető le pusztán az induló állóalapok lecserélésére, hanem magában foglalja a régi és új állóalap struktúra közti különbségnek megfelelő kapacitások képződését is.

Amíg meg nem érlelődnek az $i+1$-ik struktúrára való áttérés feltételei, addig a gazdaság az $i$-edik struktúra Neumann-pályáján fejlődik, így lehetséges, hogy felesleges kapacitások is képződnek, mivel a Neumann-pálya definíciója miatt nem lehet csökkenteni azon állóalapok termelését, amelyek az $i+1$-ik struktúrán kisebb súllyal szerepelnek, mint az $i$-ediken. A $\mathbf{B}_{i+1}$ matrix bekapcsolásával arra törekszünk, hogy az eredeti nem szabályozott Neumann-pályát egyensúlyi voltának megtartása mellett a következő $i+1$-ik struktúrának megfelelő egyensúlyi irány felé térítsük el — mivel $\mathbf{B}_{i+1}$ bekapcsolásával a felhasználási szerkezetben megjelenik egy olyan elem, amely az $i+1$-ik struktúra követelményeinek tesz eleget — de ugyanakkor megtartjuk a modell zártságát.

Közgazdaságilag belátható, hogy a Neumann-pálya kialakításában az $\alpha_i \mathbf{B}_{i+1}$ matrix jóval kisebb szerepet játszik, mint akár az $\mathbf{A}_i$, akár a $\mathbf{B}_i$ matrix, amiből következik, hogy az eltérítés mértéke nem lehet nagy. Az eltérítés mértékét $\alpha_i$ paraméterrel szabályozzuk.

Látható, hogy $\alpha_i$ nem csak a pótlási folyamatot szabályozza, hanem a maximális növekedési ütem $\lambda_i$ nagyságát is befolyásolja. $\alpha_i$ és $\lambda_i$ közötti kapcsolat megvilágítása már a modell matematikai analízisét igényli.

Mivel az (1) differenciálegyenletrendszert, amit a Bródy modell kibővítésének tekinthetünk, nem $x_i$-re, hanem az $x_i$-k közül egy kitüntetett $\hat{x}_i$-re oldjuk meg, ezért a Neumann-pálya definíciója értelmében bevezethetjük az

$$\dot{\hat{x}}_i = \lambda_i \hat{x}_i \tag{2}$$

egyenlőséget, ahol $\hat{x}_i > 0$.

Így az (1) differenciálegyenletrendszer egy $\lambda_i$-re vonatkozó saját-érték feladattá alakítható át:

$$\hat{x}_i = \mathbf{A}_i \hat{x}_i + \lambda_i (\mathbf{B}_i \hat{x}_i + \alpha \mathbf{B}_{i+1} \hat{x}_i)\,. \tag{3}$$

A modellben szereplő matrixok tulajdonságai alapján a feladat $\alpha_i$ bizonyos értékei mellett $\lambda_i$-re és $\hat{x}_i$-re megoldható. (Lásd: a modell matematikai levezetése c. fejezetben.)

Felmerül a kérdés, hogy hogyan válasszuk meg $\alpha_i$ szabályozó paraméter értékét.

Az előbbi leírásból következik, hogy $\alpha_i$ és $\lambda_i$ között függvénykapcsolat van, amelynek segítségével lemérhető a szabályozó hatása $\lambda_i$-re.

A matematikai részben bizonyítjuk, hogy ennek a függvénynek létezik az inverze, akkor viszont meg tudjuk határozni, hogy $\lambda_i$ egyes értékeihez milyen $\alpha_i$ tartozik. Nevezzük ezt a függvényt válaszfüggvénynek és jelöljük $V(\lambda_i)$-vel. Mivel $\lambda_i$ a gazdaság maximális egyensúlyi növekedési ütemét jelöli, ezért e $V(\lambda_i)$ függvény értelmezési tartománya közgazdasági megfontolások alapján behatárolható. $\lambda_i$ felső határát a nem szabályozott Neumann—Leontief—Bródy modellből kiszámítható maximális egyensúlyi növekedési ütem $\bar{\lambda}_i$ jelenti, alsó határát pedig a lakosság növekedési üteme plusz az életszínvonalra előírt közgazdasági és politikai megfontolások által meghatározott minimális növekedési ütem adja. Ha fent definiált intervallumban meghatározzuk $V(\lambda_i)$ értékeit, akkor megkapjuk az adott technikai szinthez tartozó lehetséges $\alpha_i$ szabályozó paramétereket és azoknak a növekedési ütemre gyakorolt hatását.

A szabályozás elvi ismertetésénél leírtuk, hogy a selejtezés-pótlási folyamatot nem csak az évi pótlás, hanem az áttéréshez szükséges lecserélési arány meghatározásával is szabályozzuk.

Most ezen második szabályozóval foglalkozunk.

Az $i$-edik egyensúlyi szint induló tőkeállománya $\mathbf{B}_i \hat{x}_i(0) = d_i^{(1)}$. A lecserélést azonban nem $\mathbf{B}_i$ struktúra, hanem $\mathbf{B}_{i+1}$ struktúra szerint hajtjuk végre. Tegyük fel, hogy az áttéréshez $d_i^{(1)}$-nek $\gamma_i$ százalékát kell lecserélni, akkor az áttérés egy olyan $T_i = \tau_i$ idő múlva következhet be, amelyre teljesül

$$\lambda_i \alpha_i \int_0^{\tau_i} \mathbf{B}_{i+1} \hat{x}_i(t)\, dt \geq \gamma_i d_i^{(1)}; \quad \tau_i \to \min\,, \tag{4}$$

$\alpha_i$ és $\gamma_i$ között a következő összefüggés áll fenn: mindkettővel $T_i$ időszakaszt szabályozzuk. Felírhatunk tehát egy

$$T_i = G(\gamma_i, \alpha_i)$$

függvényt, s $V(\lambda_i) = \alpha_i$ függvény segítségével meghatározhatjuk e kétváltozós függvény értékkészletét. Így $G$ függvény segítségével egy adott $i$ struktúrához tartozó lehetséges ($\lambda_i$ szempontjából) és kívánt szabályozás meghatározható és a modell segítségével kiszámítható e szabályozáshoz tartozó optimális fejlődési ütem.

## 2.3. *Áttérés az új egyensúlyi állapotra*

### 2.3.1. *Az áttérés feltételeinek megérése*

Gazdaságunk az előbb leírt módon egy egyensúlyi pályán eljutott egy olyan állapothoz, hogy a rendelkezésre álló állóalapok struktúrája lehetővé teszi az új technikának megfelelő ráfordítási struktúrára való áttérést. Azzal a hipotézissel éltünk, hogy a ráfordítási struktúra, a feltételek megérése után egy adott időpontban diszkréten átalakul (azaz az $\mathbf{A}_i$ a modellben $\mathbf{A}_{i+1}$-re, a $\mathbf{B}_i$ pedig $\mathbf{B}_{i+1}$-re cserélődik ki) és ugyanakkor az új ráfordítási struktúrához tartozó új egyensúlyi termelési struktúra kialakulása folytonos (hosszabb ideig tartó) folyamat. Természetesen a termelési alapok új struktúrájának diszkrét kialakulása tőkeveszteséggel jár, amely tőkeveszteség két részre osztható. Az első rész abból adódik, hogy a régi egyensúlyi termelési arányok mellett a $\mathbf{B}_i$-t átcseréljük $\mathbf{B}_{i+1}$-re, ennek nagyságát a következő kifejezésből határozhatjuk meg

$$v_i^1 = (\mathbf{B}_{i+1} - \mathbf{B}_i)\,\hat{x}_i(T),$$

Ezen $v_i^1$ vektor negatív elemei jelentik a tőkeveszteséget. Pozitív elemei mutatják azt a tőkemennyiséget, amely a termelés szinten tartásához az $i+1$-ik technikán szükséges. Ebből rögtön látszik, hogy $\hat{x}_i$ most már nem egyensúlyi vektor, mert nem képes szinten tartani külső erőforrások nélkül a termelést. A tőkeveszteség második felének magyarázatára csak az áttérés leírása után térünk vissza.

### 2.3.2. *Az áttérési folyamat*

A modell alapfeltételezései mellett hosszútávon az egyedüli stabil fejlődést az egyensúlyi pálya, a Neumann-pálya biztosítja. A ráfordítási szerkezet átalakulásával a gazdaság kibillen erről az egyensúlyi pályáról, éppen ezért a modell szellemében feladatunk: a gazdaságot rátéríteni az új ráfordítási szerkezetnek megfelelő egyensúlyi pályára.

A gyakorlatban is ismertek a nem egyensúlyi fejlődésből adódó hátrányok (a gyakorlatban az egyensúly persze csak közelítőleg valósul meg), ezért jogosan támasztható az az igény, hogy ilyen szakaszokon minél előbb legyünk túl, minél hamarabb térjünk vissza az egyensúlyra. Persze az áttérés nem ingyenes és az áttéréshez igénybevehető erőforrások korlátosak. Ezért kézenfekvően adódik az az optimalizálási feladat, hogy ezeket az áttéréshez szükséges erőforrásokat olyan struktúrában és színvonalon használjuk fel (ezzel úgy szabályozzuk a gazdaságot), hogy az áttérés minimális idő alatt történjen.

Matematikailag fogalmazva egy olyan optimális szabályozási feladatról van szó, ahol egy rendszert minimális idő alatt a rendszer homogén egyenletrendszerének stacionárius megoldására akarjuk rátéríteni. Tulajdonképpen a feladat nem más, mint egy időoptimális szabályozási feladat, amely a modell alaprendszeréből adódóan lineáris.

Ilyen feladatokkal foglalkozott többek között L. V. Pontrjagin és munkacsoportja, különösen V. G. Boltjanszkij.

Egy lineáris időoptimum feladat modellünkre a következőképpen interpretálható.

Az áttéréshez szükséges külső erőforrásokat, a modell szabályozó paramétereit jelöljük $u$-val. Modellünk matematikai formája most a következő:

$$x = \mathbf{A}_{i+1} x + \mathbf{B}_{i+1} \dot{x} + \alpha_{i+1} \mathbf{B}_{i+2} \dot{x} - u \,. \tag{4.a}$$

A feladat tehát a gazdaságot rátéríteni a következő homogén differenciálegyenletrendszer stacionárius[2] megoldására (az $i+1$-ik technikához tartozó Neumann-pályára):

$$x = \mathbf{A}_{i+1} x + \mathbf{B}_{i+1} \dot{x} + \alpha_{i+1} \mathbf{B}_{i+2} \dot{x} \,, \tag{4.b}$$

minimális idő alatt, a következő peremfelvételek mellett:

$$x_0 = x(0) = \hat{x}_i(T) \,; \quad x(T + \Theta) = \hat{x}_{i+1}(T + \Theta),$$

ahol $\hat{x}_{i+1}$ (4.b) homogén rendszer stacionárius megoldása.

A megoldás során keresni kell egy olyan korlátos tartományba eső $u(t)$ függvényt, amelyhez tartozó $x(t)$, $u(t)$-vel együtt, kielégíti a (4.a) differenciálegyenletrendszert és ugyanakkor $x(t)$ átmegy $x_0$-on és $\hat{x}_{i+1}$ sugáron minimális $\Theta$ idő alatt.

Felmerül a kérdés, hogy $\hat{x}_{i+1}$-et hogy határozhatjuk meg, mivel ezt az áttérési feladathoz mint peremfelvételt meg kell adni. $\hat{x}_{i+1}$ éppen úgy határozható meg, mint 2.2.-ben az $\hat{x}_i$, a megfelelő behelyettesítéseket figyelembevéve.

Annak ellenére, hogy $\hat{x}_{i+1}$ kívülről kerül be a feladatba, feladatunk ún. mozgóvégpont feladat, mivel az $i+1$-ik struktúrához tartozó Neumann-pályát, mint irányt tudjuk csak megadni, s hogy ezt a struktúrát milyen szintent tudjuk elérni, csak a megoldásból derül ki.

Vizsgáljuk meg az $u$ szerepét. Az $u(t)$-nek egy olyan függvénynek kell lennie e feladat jellegéből kifolyólag, amely szakaszonként folytonos és az összes lehetséges $u(t)$ függvények értékkészlete egy zárt korlátos konvex halmazt alkot. Az $u(t)$ függvény szakadási pontjait nevezzük átkapcsolási pontoknak. Az átkapcsolások hatására az $x(t)$ pálya megőrzi folytonosságát, de az $u(t)$ függvény szakadási helyein törése van. Tehát az $u(t)$ függvény szakadás pontjai között az $x(t)$ pálya karaktere meghatározott, egy közönséges inhomogéin differenciálegyenletrendszer megoldása, amelynek jobboldala $u(t)$.

Közgazdaságilag $u(t)$ szerepe a következő: $x(t)$ jelenti a rendszerben önmaga által kitermelt forrást, ugyanakkor a rendszer által igényelt, ehhez a forráshoz szükséges, ráfordításokat ez a forrás nem tudja fedezni, mert $x(t)$ nem egyensúlyi. Ha azonban $x(t)$-hez hozzávesszünk $u(t)$-t is, mint a rendszer számára külső forrást, így a forrás és a felhasználás egyensúlyban lesz. Ugyanakkor $u(t)$ az a szabályozó, amely $x(t)$-t a stacionárius egyensúly felé irányítja. Ez az irányítás úgy történik, hogy $u(t)$ szakaszonként változik — mégpedig a kapcsolási pontokban — s így $x(t)$ pálya is szakaszonként, de folytonosan változik.

Nyilvánvaló, hogy a vezérlés lehetőségeit és ezáltal az áttérés jellegét az $u$-ra vonatkozó korlátok megadásával befolyásolhatjuk. A korlátok megválasztására nehéz általános tanácsot adni, ez következik a valóságban fennálló objektív korlátokból és a feladat konkrét közgazdasági tartalmából.

[2] Egy lineáris homogén differenciálegyenletrendszer stacionárius megoldásán értjük a dominánes sajátértékhez tartozó parciális megoldást.

Az $u$ valóságban egyrészt mint külső erőforrás, másrészt mint a rendszer által felhasználatlan tartalék jelenik meg. Az $u$ statisztikai tartalmának értelmezésére bő lehetőség nyílik.

Ezek után visszatérünk az áttérés alatt keletkező tőkeveszteség nagyságának megvilágítására.

A tőkeveszteség második fele abból adódik, hogy az $i+1$-ik termelési alap struktúra mellett a termelési vektor fokozatosan és folytonosan az $i+1$-ik struktúrának megfelelően egyensúlyivá alakul (tulajdonképpen ezt az átalakulást írja le a második fázis). E veszteség mértékét a következőképpen határozhatjuk meg: tegyük fel, hogy az áttérés $T$ időpontban kezdődött és valamely $T+\Theta$ időpontban fejeződött be és ebben az időpontban a termelési struktúra már az $i+1$-ik ráfordítási struktúrához tartozó Neumann-pálya.

Ha az áttérési folyamatban a kapcsolási pontok száma $n$ és ezeknek megfelelő időpontokat $\tau_j$-vel ($j = 1, 2, \ldots, n$) jelöljük, akkor a második fázisban keletkező tőkeveszteséget a

$$v_i^2 = \mathbf{B}_{i+1}\left[x(\tau_1) - x(0) + \sum_{j=1}^{n} x(\tau_{j+1}) - x(\tau_j)\right],$$

— ahol $x(0) = \hat{x}_i(T)$ — vektor negatív komponensei reprezentálják. A pozitív komponensek az áttérési folyamathoz szükséges külső erőforrásból biztosítandó kumulált tőkemennyiséget mutatják.

## 3. A modell matematikai leírása

*I. fázis:* $\varphi(x) = 0$.

A feladat jelen fázisban a következőképpen írható fel:

$$x = \mathbf{A}_i x + \lambda_i(\mathbf{B}_i + \alpha_i \mathbf{B}_{i+1})\, x\,. \tag{5}$$

Alakítsuk át (5)-öt a következőképpen:

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A}_i)\, x = \lambda(\mathbf{B}_i + \alpha_i \mathbf{B}_{i+1})\, x\,. \tag{6}$$

Mivel $\mathbf{A}_i$ ún. Leontieff—Minkowszky típusú matrix, ezért

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A}_i)^{-1} = \mathbf{Q}_i \tag{7}$$

létezik, s mivel $\mathbf{A}$ matrix irreducibilitásából és abból, hogy Neumann sora konvergens — spektrális rádiusa kisebb, mint egy — következik, hogy

$$\mathbf{Q}_i \gg \mathbf{0}\,. \tag{8}$$

Vezessük be az $1/\lambda_i = \mu_i$ jelölést, ekkor feladatunkat felhasználva (7)-et és (8)-at a következőképpen alakíthatjuk át:

$$\mu_i x = \mathbf{Q}_i(\mathbf{B}_i + \alpha_i \mathbf{B}_{i+1})\, x\,. \tag{8.a}$$

A feladat jellegéből adódóan fennállnak a következő összefüggések:

$$\mathbf{B}_k \geq \mathbf{0}\,; \quad \alpha_k \geq 0\,; \quad k \in I\,, \tag{9}$$

ahol $I$ rendező indexhalmaz (lásd: „A modellben alkalmazott matematikai szimbólumok jelentése.").

(9)-ből következik, hogy

$$\mathbf{B}_i + \alpha_i \mathbf{B}_{i+1} \geq \mathbf{0}. \tag{10}$$

(10) és (8) miatt

$$\mathbf{K}_i(\alpha_i) = \mathbf{Q}_i(\mathbf{B}_i + \alpha_i \mathbf{B}_{i+1})$$

nem negatív és irreducibilis. Ezen megfontolás alapján alkalmazhatjuk a következő tételsorozatot:

1. $\mathbf{K}_i(\alpha_i)$-nek létezik pozitív $\hat{x}_i$ sajátvektora;
2. $\hat{x}_i$ egy skalárszorzótól eltekintve egyértelmű;
3. $\hat{x}_i$-hez tartozó $\mu_i$ sajátérték pozitív és domináns;
4. $\mathbf{K}_i(\alpha_i)$ matrixnak nincs több pozitív sajátvektora [5].

Feladatunkat domináns $\mu_i$-re és az ehhez tartozó $\hat{x}_i$-re oldjuk meg.

Az $\alpha_i$ szabályozó paraméter lehetséges értékeinek meghatározása a $V(\lambda_i)$ függvény segítségével történik. A $V(\lambda_i)$ függvény értelmezési tartománya legyen

$$\delta_i \leq \lambda_i \leq \bar{\lambda}_i, \tag{11}$$

ahol $\bar{\lambda}_i$ az $i$-edik szinthez tartozó Neumann pálya, $\alpha_i = 0$ esetén.

Bizonyítsuk be $V(\lambda_i)$ függvény egzisztenciáját. Írjuk fel újra (8.a)-t

$$\frac{1}{\lambda_i} x = \mathbf{Q}_i(\mathbf{B}_i + \alpha_i \mathbf{B}_{i+1})\, x$$

Ebből világosan látszik, hogy ez $\alpha_i$ és $\lambda_i$ között egy implicit függvénykapcsolatot fejez ki. Jelöljük e függvényt $V^{-1}(\alpha_i) = \lambda$-val.

Bizonyítandó, hogy létezik ennek a függvénynek inverze a (11) által meghatározott intervallumban.

Az inverz létezésének feltétele, hogy az $\alpha_i$-re megadott intervallumon a függvény monoton legyen. Ez a következők miatt áll fenn.

Ha $\mathbf{B}_i$-nek nincs tiszta 0 oszlopa, amit közgazdaságilag nyugodtan feltehetünk, akkor mivel $\mathbf{Q}_i > 0$, a matrixszorzás definíciója értelmében $\mathbf{Q}_i\mathbf{B}_i > 0$.

Ekkor, mivel $\alpha_i \geq 0$ tartományban van értelmezve és $\mathbf{B}_{i+1} \geq 0$, a (8.a) jobboldalán szereplő matrix is pozitív.

Ebből következik, hogy ha $\alpha_i$ nő, akkor ezen matrixnak van olyan eleme, amelyik nő, ekkor viszont alkalmazhatjuk a következő tételt:

Ha $\mathbf{A} > 0$ és legnagyobb saját értéke $\mu$, akkor $\mathbf{A}$ matrix bármelyik elemének növelésével $\mu$ nő, csökkenésével $\mu$ csökken. [3]

Ebből viszont egyértelműen következik, hogy $\lambda_i$ az $\alpha_i$-nek monoton csökkenő függvénye.

Most be kell bizonyítani, hogy ez a $V(\lambda_i)$ inverz függvény létezik a (11) által meghatározott tartományban.

(8.a)-ból egyszerű átalakítással a következő formulához jutunk

$$(\mathbf{E} - \lambda \mathbf{Q}_i \mathbf{B}_i)\, x = \lambda_i \alpha_i \mathbf{Q}_i \mathbf{B}_{i+1} x. \tag{11.a}$$

Ennek a kifejezésnek a baloldalán levő matrix egy resolvens.

Ha $\alpha_i > 0$, akkor az előző tétel értelmében $\lambda_i < \bar{\lambda}_i$, és így

$$\mu_i = 1/\lambda_i \quad \text{esetén}, \quad \mu_i > \bar{\mu}_i. \tag{11.b}$$

Osszuk el (11.a) mindkét oldalát $\lambda_i$-vel:

$$(\mu_i \mathbf{E} - \mathbf{Q}_i \mathbf{B}_i)\, x = \alpha_i \mathbf{Q}_i \mathbf{B}_{i+1} x\,. \tag{11.c}$$

(11.b) miatt a (11.c)-ben szereplő $\mu_i$-k a baloldali resolvens spektrális rádiusán kívül esnek, ezért ezen resolvens inverze létezik minden $\alpha_i > 0$-ra.

Ezzel a $V(\lambda_i)$ függvény egzisztenciáját bizonyítottuk.

A $\gamma_i$ szabályozó paraméter meghatározásához írjuk fel újra a (4) kifejezést:

$$\lambda_i \alpha_i \int_0^{\tau_i} \mathbf{B}_{i+1}\, \hat{x}_i(t)\, dt \geq \gamma_i d_i^{(1)}\,; \quad \tau_i \to \min\,.$$

Rögzítsük $\alpha_i$ értékét, ezáltal a $V^{-1}(\alpha_i)$ függvényen keresztül $\lambda_i$ is rögzített. Tegyük fel, hogy $T$ időpontban akarunk áttérni és határozzuk meg $\gamma_i$ értékét a $0 \leq \gamma_i \leq 1$ zárt intervallumon belül. (Közgazdaságilag nyilvánvaló, hogy $\gamma_i$ értéke csak ebbe az intervallumba eshet.)

Lássuk meg, hogy ez előbbi optimalizálási feladat helyett a célfüggvény rögzített optimális értékéhez keressük azt a $\gamma_i d_i^{(1)}$ feltételt, amely mellett ez a megoldás lehetséges is a $\gamma_i$-re megadott korlátok között. Így minden $\alpha_i$ és $T_i$-hez egy $L(\alpha_i, T_i)$ függvény segítségével hozzárendelhetünk egy olyan $\gamma_i$-t, amely mellett $T_i$ a (4) feladat optimális megoldása. (Természetesen e feladat a $\gamma_i$-re vonatkozó korlátok miatt rögzített $\alpha_i$ mellett csak egy zárt intervallumba eső $T_i$-kre oldható meg.)

*II. fázis:* $\varphi(x) = 1$.

Írjuk fel újra a feladat alapformuláját:

$$x(t) = \mathbf{A}_{i+1} x(t) + \mathbf{B}_{i+1} \dot{x}(t) + \alpha_{i+1} \mathbf{B}_{i+2} \dot{x}(t) - u(t)\,;$$

$$\int_0^{\tau} dt \to \min\,. \tag{12}$$

Vezessük be a

$$\mathbf{P}_{i+1} = \mathbf{B}_{i+1} + \alpha_{i+1} \mathbf{B}_{i+2}$$

jelölést. Ekkor feladatunk átrendezés után

$$\mathbf{P}_{i+1} \dot{x} = (\mathbf{E} - \mathbf{A}_{i+1})\, x + u\,, \tag{13}$$

$$x(0) = x_0\,,$$

$$x(\tau) = x_1\,.$$

Vezessünk be egy $p(t) = \big(p_1(t), p_2(t), \ldots, p_n(t)\big)$ skalár vektorfüggvényt. Írjuk fel a következő Hamilton-függvényt:

$$H(p, x, u) = \mathbf{P}_{i+1}^{-1}\big(p'(\mathbf{E} - \mathbf{A}_{i+1})\, x + p'u\big)\,. \tag{14}$$

A gyakorlati megoldásnál $\mathbf{P}_{i+1}$ invertálhatóságát nem kell feltételezni.

A (13)-hoz tartozó adjungált homogén rendszer:

$$-p'(\mathbf{E} - \mathbf{A}_{i+1}) = \dot{p}' \mathbf{P}_{i+1}\,; \quad p(0) = p_0\,. \tag{15}$$

*Tétel:* ha $x(t)$ és $u(t)$ optimális folyamat, amely átmegy $x_0$ és egy előre megadott $x(\tau)$ pontokon, akkor létezik olyan $p(t)$ függvény, amely eleget tesz a következő tulajdonságoknak:

1. kielégíti a (15)-ös differenciálegyenletrendszert,

2. $u(t)$ maximalizálja a (14) Hamilton-függvényt úgy, hogy ez a maximum a $[0,\tau]$ időintervallumban konstans és nem negatív.

A tétel bizonyítását lásd: [14].

A tétel az optimalitás szükséges feltételét fogalmazza meg. Az elégséges feltételek a differenciálegyenletrendszer konkrét tulajdonságaitól függnek. Mivel feladatunk II. fázisa lineáris időoptimum feladat, érvényes a következő tétel: Ha létezik lehetséges vezérlés, amely átviszi az objektumot egy adott kezdeti állapotból az egyensúlyi állapotba, akkor a maximumelv nem csak szükséges, hanem elégséges feltétel is. [6]

A megoldás a következő heurisztikus elven alapszik:

Tegyük fel, hogy a (12) differenciálegyenletrendszert egy jól választott transzformációval átalakítottuk úgy, hogy $x(\tau)$-t az origóba helyeztük. Ekkor bizonyítható, hogy léteznek olyan $C(t)$ halmazok, amelynek pontjaiból $t$ idő alatt el lehet jutni lehetséges pályán az origóba. Ezen $C(t)$ halmazok konvexek, zártak, korlátosak, egy vektorparaméter folytonos leképezései és tartalmazzák az origót.

A $C(t)$ halmazok határpontjain kell keresni azokat a pontokat, amelyekre nézve a $t$ optimális. A elválasztó hipersíkok tétele értelmében a (15) rendszer $p_0$ kezdeti értéket azon $C(t)$ halmaz $x_0$ pontján átmenő hipersík normálisa fogja megadni, amely halmaznak $x_0$ határpontja. Ebből látható, hogy a fő probléma a $p_0$ kezdeti érték megkeresése. Ez csak iterációval lehetséges [7].

A mi feladatunk nem az origóba eljuttatni a rendszert, hanem az irányvektorával adott sugárra, amely nem más, mint a feladat homogén lineáris differenciálegyenletrendszerének stacionárius megoldása ($i+1$-ik Neumann-pálya). Alkalmaznunk kell tehát a transzverzalitási feltételt, ami heurisztikusan a következőt jelenti:

Ha a célbaérés $\tau$ időpontban történik, akkor a pálya az említett sugár azon $x(\tau)$ pontjában ér véget, amelyre fennáll a következő összefüggés

$$\big(p(\tau), x(\tau)\big) = 0 .$$

Az interációs megoldás menete a következő:

1. válasszunk ki egy tetszőleges $p_0$ kezdeti értéket,
2. oldjuk meg az adjungált homogén rendszert ezen $p_0$ mellett,
3. a Hamilton-függvény maximalizálása alapján határozzuk meg az $u(t)$ vezérlést,
4. oldjuk meg szakaszonként (12)-öt,
5. vizsgáljuk meg, hogy a differenciálegyenletrendszer azon megoldása, amely a transzverzalitási feltétel mellet metszi a megadott sugarat, milyen pontból indul ki. Ha nem $x_0$-ból, akkor a [7]-ben található iterációs módszer alapján változtassuk $p_0$-t és hajtsuk végre rendre az 1., 2., 3., 4., 5. lépéseket mindaddig, amíg be nem találunk az $x_0$ pontba.

Meg kell jegyeznünk, hogy az első fázisra is megadható egy időoptimum feladat: $\gamma_i$-hez keressük $\alpha_i$ azon értékét, ahol $T_i$ minimális. Ezen feladat megoldására alkalmazott elv hasonló az Eaton iterációhoz, tulajdonképpen egy általánosított duál módszer: optimális, de nem lehetséges megoldásokkal közelítünk a lehetséges megoldásokhoz.

*(Beérkezett: 1971. április 15.)*

## IRODALOM

1. ATHANS, M.: Optimal control. New York, 1966. McGraw Hill.
2. AUGUSTINOVICS M.: Egy hosszútávú tervezési modellsorozat. SZIGMA, 1970. 1. sz.
3. BRÓDY A.: Érték és újratermelés. Budapest, 1968. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
4. BRÓDY, A.: The optimal and time-optimal path of economic growth. Contributions to input-output techniques I. Ed.: A. P. Carter, A. Bródy. Amsterdam–London, 1970. North-Holland Publishing Co.
5. BODEWIG, E.: Matrix calculus. Amsterdam, 1959. North Holland Publishing Co.
6. БОЛТЯНСКИЙ, В. Г.: Математические методы оптимального управления. Москва, 1966. Издательство Наука.
7. EATON: An iterative solution to time-optimal control. Journal of Mathematical Analysis, 1962. 5. sz.
8. FADDEN, E.–GILBERT, E.: Computational aspects of time-optimal control problem. Computing methods in optimisation problem. Ed.: Balakrishnan and Neustadt. New York, 1964. Academic Press.
9. LEONTIEFF, V.: The dynamic inverse. Contributions to input-output techniques I. Ed.: A. P. Carter, A. Bródy, Amsterdam, 1970. North-Holland Publishing Co.
10. LEONTIEFF, V.: Input-output economics. Oxford, 1966. Oxford University Press.
11. MORISHIMA: Equilibrium stability and growth. Oxford, 1966. Clarendon Press.
12. MURAKAMI–TSHUKUI: The turnpike of Japanese economy. Contributions to input-output techniques II. Ed.: A. P. Carter, A. Bródy. Amsterdam, 1970. North-Holland Publishing Co.
13. PONTRJAGIN–BOLTJANSZKIJ–GAMKRELIDZE–MISCSENKO: Optimális folyamatok elmélete. Budapest, 1968. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
15. SAMUELSON, P.: Foundation of economic analysis. New York, 1965. Atheneum.
16. SZAKOLCZAI GY. (Szerk.): A gazdasági fejlődés feltételei. Budapest, 1963. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
17. SEPHARD, W.: The proof of law of diminishing returns. Zeitschrift für Nationalekonomie. Berlin, 1970. Springer.
18. WILKINSON, J. H.: The algebric eigenvalue problem. Oxford, 1965. Clarendon Press.

## OPTIMAL PATHS OF ECONOMIC GROWTH IN A CONTROLLED ECONOMIC SYSTEM

In the paper the authors construct a controllable input-output model. Thereby they endeavour to promote establishment of economico-methematical models in which a characteristic feature of the socialist economy, namely that it is planned and controlled, appears explicitly.

The input-output model described in the paper is a closed dynamic model of the Neumann–Leontieff–Bródy type, which has been further developed in the following directions: in the model economic development is characterized by the change of economic structure and this change takes place in a specific way. First the economy develops in a fixed structure along the maximal equilibrium growth path, but this equilibrium structure is specified in such a way that the conditions of passing over to the next, more developed structure are expressed, too. This appears in the mathematical model as a specific formulation of the extended reproduction of fixed assets. After the conditions of passing over to the next structure have grown ripe on a given structure (according to the requirements of the model) the transformation of the input structure takes place suddenly but the output structure slips out of the balance and accomodates itself to the new input structure only gradually. This change in the output structure is controlled in the model by applying a method of time optimization so that the equilibrium is attained as soon as possible.

The elements of control appear in the equilibrium period of the model as well. The authors control the conditions for the maturity of passing over to the new structure, too. They describe the equilibrium period mathematically as a special eigenvalue problem, in the second period the time optimization is based on the application of Pontrjagin's maximum principle for a linear time optimum problem.

# ОПТИМАЛЬНЫЕ ПУТИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА В РЕГУЛИРОВАННОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

В статье авторы построят регулируемую модель затрат и выпусков. Таким образом они хотят предвигать построение таких экономико-математических моделей, в которых выражается та черта социалистического планового хозяйства, что оно является планированным, регулированным.

Модель затрат и выпусков, разложенная в данной статье, является закрытой динамической моделью типа Наймана-Леонтьева—Броди, которую развели в следующем направлении: экономическое развитие в моделе характеризуется изменением экономической структуры, и это изменение происходит специальным образом. В начале хозяйство развивается в рамках данной структуры на путь максимального равновесного роста, но в таким образом определенной структуре равновесия находятся и предпосылки перехода на следующую, более развитую структуру. В математической модели это выражается в специфической формулировке расширенного воспроизводства основных фондов. После того, как в данной структуре — в соответствии с требованиями, поставленными в модели — созрели условия перехода на следующую структуру, преобразование структуры затрат происходит скачкообразно, а структура выпусков выходит из равновесного положения и только постепенно приспосабливается к новой структуре затрат. В данной модели авторы регулируют описанное изменение структуру выпусков, употребляя для наиболее быстрого достижения равновесного положения метод оптимализации времени.

Элементы регулировки появляются и в равновесном периоде модели. Авторы регулируют и условия созрения перехода на новую структуру. Период равновесия математически описывают с помощью специальной задачи собственного значения, а вторая часть, оптимализация времени, основывается на использование принципа максимума Понтрягина для линейной задачи оптимализации времени.