VÉLEMÉNYRANGSOROK ALKALMAZÁSA PÉNZÜGYI SZITUÁCIÓKBAN[1]

BAYER PÉTER
Eötvös Loránd Tudományegyetem

A Bayesi–Nash-Egyensúly egy kellemetlen tulajdonságát vizsgáljuk. Egy bankpánikot modellező játék felírása során két lehetséges megoldást mutatunk be, az első a játék Bayesi–Nash-Egyensúlya, melyhez ismertetjük az elméleti hátteret elsősorban Harsányi (1967-68) alapján, a második pedig egy optimista feltevésen alapuló döntés. A második esetben véleményrangsorokat használtunk arra, hogy az általunk használt optimizmusnak racionális korlátokat szabjunk. Eredményül azt kaptuk, hogy a Bayesi–Nash-Egyensúly nagyon óvatos, a közgazdasági feltevéseknek ellentmondó stratégiát követ, míg az optimista stratégia teljesíti az előzetesen elvárt tulajdonságokat. Azt gondoljuk, hogy a gyakorlati életben mutatott viselkedés közelebb van ehhez az optimista stratégiához mint a Bayesi–Nash-Egyensúlyban mutatott túlzott óvatossághoz.

Kulcsszavak: Bayesi-játékok, Bayesi–Nash-Egyensúly, véleményrangsorok, interim normál forma, ex-ante normál forma.

1 Bevezetés

A cikk a Bayesi-játékokon értelmezett Nash-Egyensúly fogalmak egy negatív tulajdonságával foglalkozik. A játékelmélet közgazdasági alkalmazása szempontjából lényeges, hogy a gyakran használt fogalmak intuícióinknak megfelelően működjenek a fontos közgazdasági jelenségeken. Nálunk ez a jelenség egy fiktív vállalat bankbetétjének kezelése lesz a különböző pénzügyi helyzetekben, a játékelméleti fogalom pedig a nem tökéletes információs helyzetek modellezésénél használt legalapvetőbb egyensúlyfogalom, a Bayesi–Nash-Egyensúly.

A pénzügyi szituációk játékelméleti megközelítése bejáratott terület. Erre jó hazai példa Csóka (2003) és Balog et al. (2011), akik kooperatív játékelméleti eszközöket mutatnak be kockázatkezelési szituációkban, vagy Szűcs et al. (2010), akik a különböző gazdasági szerződéseket vizsgálják episztemológiai szempontból. A pénzügyi piac szereplői között fellépő interakciókból származó kockázat egyik megjelenése a bankpánik. A bankpánikoknak szintén komoly irodalma létezik, ezek közül a legismertebb Diamond és Dybvig (1983), akik

[1]Ezúton szeretném megköszönni Pintér Miklósnak segítőkészségét, és hogy idejét nem kímélve támogatott szakmai és formai tanácsaival. Köszönöm szépen Tóth Mánuelnek, hogy gondolkodott velem és megosztotta velem véleményét. Beérkezett: 2013. február 20.
E-mail: `bayerpet@cs.elte.hu`

többidőszakos modelljét Green és Lin (2000) és Green és Lin (2003) gondolták tovább. Ugyanennek a modellnek az egyidőszakos variánsa jön elő Allen és Morris (1998)-ban is, némileg fordított gondolatmenettel: ők egy absztrakt episztemológiai struktúra, a véleményrangsor fontosságát hangsúlyozták pénzügyi környezetben. Cikkünk az általuk bevezetett játék, a szarvasvadászat (ld. *1. táblázat*) egy nem tökéletes információs átiratát használja szemléltetésül. Az átirat lényege, hogy bevezetünk egy kockázatparamétert mindkét játékosra, mely egy külső adottság, továbbá mindkét játékost ellátjuk vélekedésekkel a másik kockázati paraméteréről. Az így kapott új játékban a kockázatos akciót (szarvas) a bankbetét megtartása helyettesíti, a kisebb kifizetést nyújtó biztonságos akciót (nyúl) a betét feloldása. Itt az fogja jelenteni a veszélyt, (a szarvas elijesztését) hogy ha valaki kockázatmentes stratégiát választ, azzal bankcsődöt idéz elő, és a nagyobb kifizetés elérhetetlenné válik. Látni fogjuk, hogy az új játéknak egyetlen Bayesi–Nash-Egyensúlypontja van, ez pedig az, ami a szarvasvadászatban a kockázatdomináns Nash-Egyensúlynak felel meg (nyúl, nyúl), tehát elveszítjük a Pareto-optimális Nash-Egyensúlyt (szarvas, szarvas).

		Másik vadász	
		Szarvas	Nyúl
Egyik vadász	Szarvas	(2,2)	(0,1)
	Nyúl	(1,0)	(1,1)

1. táblázat. A szarvasvadászat

Ez a megoldás a pénzügyi világból vett tapasztalatnak ellentmond, a bankokat alacsony kockázat mellett nem rohanják meg a betétesek és nem következik be a bankcsőd. Így a közgazdasági alkalmazások szempontjából lényeges, hogy magyarázatot tudjunk találni arra, hogy miként jöhet létre mégis viszonylag alacsony kockázat esetén a Pareto optimális egyensúly, amikor a bankbetéteket nem oldják fel, illetve megmondjuk, hogy milyen kockázati paraméterértékre éri meg a nagyobb kifizetésre utazni, és mikor éri meg inkább a biztonságos akció. Ehhez a játékosok episztemológiai tulajdonságait írjuk fel, a típusokat a lehetséges kockázati paraméterértékekhez igazítva. Az egyes típusokban levezetjük a játékosok véleményrangsorait Aumann (1999b) alapján, majd ennek megfelelően definiálunk döntéseket a játékosoknak. Látni fogjuk, hogy az így kapott döntések megfelelnek az elvárt logikus követelményeknek, tehát kapunk olyan típusokat, amiben a Pareto-optimális egyensúlyt játsszák a játékosok és alacsonyabb kockázat esetén alacsonyabb a bankcsőd bekövetkezésének valószínűsége.

A következő részben bevezetjük a fogalmakat, amikkel dolgozunk, elsősorban Forgó et al. (2005) és Pintér (2011) alapján. A Bayesi-játék fogalma és a közös prior feltételezése Harsányi (1967-68)-tól ered. A Bayesi–Nash-Egyensúlyhoz Nguyen (2011) és Battigalli et al. (2011) volt segítségünkre. A Bayesi–Nash-Egyensúly episztemológiai feltételeihez lásd még Aumann és Brandenburger (1995). A harmadik részben bemutatjuk az Allen és Morris (1998)-ban szereplő, Bayer és Tóth (2011) által átírt játékot, és felírjuk a Bayesi–Nash-Egyensúlyt. Ezután a játékosok vélekedése és az intuícióink alapján konstruálunk a játékra egy alternatív megoldást. A negyedik részben az itt kapott megoldás gyakorlati feltételeit mutatjuk be.

2 Alapfogalmak

Egy bevett játékelméleti jelöléssel a tanulmány során $i \in N$ esetén $-i$-vel jelöljük az $N \setminus \{i\}$ halmazt. A halmaz esetén $\mathcal{P}(A)$-val jelöljük A hatványhalmazát.

2.1 Bayesi-játék és Bayesi–Nash-Egyensúly

Az itt használt fogalmakhoz lásd még például Pinter (2011).

2.1. Definíció. *Egy $G = (N, \{A_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N})$ listát normál formában megadott játéknak nevezünk, ahol*

- *N a játékosok véges, nemüres halmaza,*
- *A_i az i játékos véges, nemüres akcióhalmaza, továbbá a $\times_{i \in N} A_i$ szorzatot A-val jelöljük,*
- *$u_i : A \to I\!R$ a játékosok kifizetésfüggvénye.*

2.2. Definíció. *Egy $a^* \in A$ akcióprofil $G = (N, \{A_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N})$ játék Nash-Egyensúlya, ha minden $i \in N$-re és minden $a_i \in A_i$-re $u_i(a_i, a^*_{-i}) \leq u_i(a^*)$.*

A közgazdasági problémák túlnyomó többségéhez a játék normál formában történő felírása kevés, ugyanis nem szerepelnek benne a játékra hatást gyakorló belső (játékosokhoz rendelhető) és külső (játékosokhoz nem rendelhető, úgynevezett természeti) paraméterek. A Bayesi-játék és a típustér fogalma ezt hivatott megoldani. Mivel a példánk minden paramétere csak véges halmazból kerül ki, didaktikai okokból Osborne és Rubinstein (1994)-hez hasonlóan véges típusteret feltételezünk. Magától értetődő, hogy amit állítunk, általánosabb definíciókkal is működik.

2.3. Definíció. *A $\mathcal{T} = (P, \{T_i\}_{i \in N}, \Pi)$ listát típustérnek nevezzük, ahol*

- *P a véges, nemüres paramétertér,*
- *T_i az i játékos véges, nemüres típushalmaza,*
- *Π a közös prior, mely egy valószínűségeloszlás $P \times T = \Omega$ fölött, ahol $T = \times_{i \in N} T_i$.*

A fenti felírásban a P paraméterteret a természet állapotainak is szokás nevezni, és a világ a játék azon információit gyűjti össze, amelyek relevánsak a játék szempontjából, de nem az egyes játékosokra vonatkoznak. Ezzel szemben a T_i típushalmazok tartalmazzák azokat a paramétereket, amik kifejezetten a játékosokhoz kapcsolható információk. A $P \times T$ halmazt Ω-val jelöljük, és világállapotok halmazának nevezzük.

2.4. Példa. A részvénypiacon két állapot jöhet létre, növekedés (p_1) vagy csökkenés (p_2). Van két befektető $(1, 2)$, akik különböző információkkal rendelkeznek a piac alakulásáról. Az első várhat stagnálást (t_1^1) vagy növekedést (t_1^2). Ha stagnálást vár, akkor a piac kétszer akkora valószínűséggel csökken, mint nő, míg ha növekedést vár, akkor 1 valószínűséggel növekszik. A második befektető semmit nem tud a piacról. A részvénypiac $1/2 - 1/2$ prior valószínűséggel nő vagy csökken. Ezen episztemológiai szituációhoz tartozó típustér a következőképp írható fel: $P = \{p_1, p_2\}$, $T_1 = \{t_1^1, t_1^2\}$, $T_2 = \{t_2\}$ és Π olyan, hogy

$$\Pi(\{p_1\} \times \{t_1^1\} \times \{t_2\}) = \Pi(\{p_1\} \times \{t_1^2\} \times \{t_2\}) = \frac{1}{4} ,$$

$$\Pi(\{p_2\} \times \{t_1^1\} \times \{t_2\}) = \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \Pi(\{p_2\} \times \{t_1^2\} \times \{t_2\}) = 0 .$$

Ekkor a feltételes valószínűségekre teljesülnek a szövegben felírt összefüggések:

- $\Pi(\{p_1\}) = \frac{1}{2}$, $\Pi(\{p_2\}) = \frac{1}{2}$,
- $\Pi(\{p_1\}|\{t_1^1\}) = \frac{1}{3}$, $\Pi(\{p_2\}|\{t_1^1\}) = \frac{2}{3}$,
- $\Pi(\{p_1\}|\{t_1^2\}) = 1$, $\Pi(\{p_2\}|\{t_1^2\}) = 0$.

2.5. Definíció. *Egy $G_B = (N, \{A_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N}, \mathcal{T})$ listát Bayesi-játéknak nevezünk, ahol*

- *N és A_i a 2.1. definícióból valóak,*
- *$s_i : T_i \to A_i$, i játékos stratégiája, S_i az $i \in N$ játékos stratégiahalmaza,*
- *$u_i : P \times A \to \mathbb{R}$ az $i \in N$ játékos kifizetésfüggvénye,*
- *$\mathcal{T}$ a 2.3. definícióban megadott típustér.*

Ahhoz, hogy Bayesi–Nash-Egyensúlyról tudjunk beszélni, a 2.5. definícióban megadott játékot Harsányi (1967-68)-t követve át kell írnunk normál formába. Ehhez Battigalli et al. (2011) kétféle átírást említ, az interim és az ex-ante formát. A két átírás nagyban különbözik megközelítés szempontjából, és általában a rajtuk értelmezett Nash-Egyensúly is eltérő eredményeket ad.

2.6. Definíció. *A $G_B = (N, \{A_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N}, \mathcal{T})$ Bayesi-játék interim normál formájának nevezzük azt a $G_{int} = (\hat{N}, \{\hat{A}_j\}_{j\in\hat{N}}, \{\hat{u}_j\}_{j\in\hat{N}})$ normál formában megadott játékot, ahol*

- *$\hat{N} = \cup_{i\in N} T_i$,*

– $\hat{A}_j = A_i$, *ahol* $j \in T_i$, $i \in N$,

– $\hat{u} : \hat{A} \to I\!R$, *hogy minden* $\hat{a} \in \hat{A}$*-ra:* $\hat{u}_j(\hat{a}) = \int_{P \times A} u_j \circ (\mathrm{id}_P, \hat{s})\, d\Pi_j$,

ahol $\hat{A} = \times_{j \in \hat{N}} \hat{A}_j$, $\hat{s}_i : T_i \to A_i$, *hogy minden* $k \in T_i : \hat{s}_i(k) = \hat{a}_k$, $i \in N$, $\hat{s} : T \to A$ *az* $\{\hat{s}_i\}_{i \in N}$ *leképezések szorzata,* $(\mathrm{id}_P, \hat{s})$ *leképezés az* id_P *és s leképezések szorzata,* Π_j *pedig a játékosok egyes típusaiban lévő elsőrendű vélekedése, mely valószínűségi eloszlást a közös priorból származtatjuk a feltételes valószínűség naiv definíciója alapján* $j = t_i$*-re:*

$$\Pi_j(\{t_1\} \times \ldots \times \{t_i\} \times \ldots \times \{t_n\}) = \frac{\Pi(\{t_1\} \times \ldots \times \{t_i\} \times \ldots \times \{t_n\})}{\Pi(T_1 \times \ldots \times T_{i-1} \times \{t_i\} \times T_{i+1} \times \ldots \times T_n)} .$$

Az interim megközelítésben az eredeti játék típusai lesznek az új játékosok, akcióhalmazaik nem változnak (a régi játékosok akcióhalmazai lesznek az új játékosok akcióhalmazai), az új kifizetőfüggvényben pedig nincsenek egymásra hatással azok a típusok, akik egyazon játékoshoz tartoztak. Az interim forma értelmezhető úgy is, hogy először a természet lép, és minden játékosnak kisorsol egy típust, majd ennek megfelelően a típusok ismeretében a játékosok választanak egy akciót. A játékosoknak új vélekedésük lesz a világállapotokról, ezt a vélekedést nevezzük elsőrendű vélekedésnek.

2.7. Példa. Tekintsük a következő $(N, \{A_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N}, \mathcal{T})$ Bayesi-játékot:

– $N = \{1, 2\}$, $A_1 = A_2 = \{\text{Long}, \text{Short}\}$,

– $\{u_i\}_{i \in N}$ kifizetéseket a 2. és 3. táblázatban adjuk meg,

– $\mathcal{T}$ a 2.4. példából származik.

		2-es játékos	
		Long	Short
1-es játékos	Long	(60,60)	(0,0)
	Short	(0,0)	(0,0)

2. táblázat. A kifizetések p_1 természetállapot esetén

		2-es játékos	
		Long	Short
1-es játékos	Long	(0,0)	(0,120)
	Short	(120,0)	(0,0)

3. táblázat. A kifizetések p_2 természetállapot esetén

Ekkor a Bayesi-játék interim normál formáját a 4. táblázat tartalmazza, a kifizetések sorrendje: t_1^1, t_1^2, t_2.

t_1^1		t_2	
Long-ot játszik		Long	Short
t_1^2	Long	(20,60,30)	(0,0,60)
	Short	(20,0,15)	(0,0,60)

t_1^1		t_2	
Short-ot játszik		Long	Short
t_1^2	Long	(40,60,15)	(0,0,0)
	Short	(80,0,0)	(0,0,0)

4. táblázat. Az interim normál formában megadott játék

2.8. Definíció. *A $G_B = (N, \{A_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N}, \mathcal{T})$ Bayesi-játék ex-ante normál formájának nevezzük azt a $G_{ex} = (N, \{S_i\}_{i\in N}, \{\bar{u}_i\}_{i\in N})$ normál formában megadott játékot, ahol*

– *Az $\{S_i\}_{i\in N}$ stratégiahalmazok a 2.5. definícióból valók,*

– *$\bar{u}_i : S \to I\!R$, hogy minden $s \in S$-re: $\bar{u}_i(s) = \int_{P\times T} u_i \circ (\mathrm{id}_P, s)\, d\Pi$,*

ahol $S = \times_{j\in N} S_j$, Π pedig a közös prior.

Az ex-ante megközelítés abban különbözik az interimtől, hogy itt a játékosok a típusuk kézhez kapása előtt választanak maguknak egy stratégiát, azaz minden típusra megmondják, mit fognak játszani. Ehhez a közös priorjukat fogják felhasználni, ugyanis a döntés előtt azt feltételezzük, hogy a játékosok nem tudják, milyen típust kapnak.

2.9. Példa. Tekintsük 2.7. példában megadott Bayesi-játékot. Ennek az ex-ante normál formáját az 5. táblázatban adtuk meg. A sorjátékos stratégiáiban elöl a t_1^1-ben, hátul pedig a t_1^2-ben választott akció kezdőbetűje szerepel.

		2-es játékos	
		Long	Short
1-es játékos	LL	(30,30)	(0,60)
	LS	(15,15)	(0,60)
	SL	(45,15)	(0,0)
	SS	(60,0)	(0,0)

5. táblázat. Az ex-ante normál formában megadott játék

2.10. Definíció. *Egy $s^* \in S$ stratégiaprofil $G_B = (N, \{A_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N}, \mathcal{T})$ Bayesi-játék interim Bayesi–Nash-Egyensúlya, ha létezik olyan $\hat{a} \in \hat{A}$ akcióprofil, ami Nash-Egyensúly az $(\hat{N}, \{\hat{A}_i\}_{i\in\hat{N}}, \{\hat{u}_i\}_{i\in\hat{N}})$ játékban, ez a játék G_B interim normál formája, és minden $i \in N$ játékosra és $k \in T_i$ típusra $s_i^*(k) = \hat{a}_k$.*

2.11. Példa. Tekintsük a 2.7. példában megadott Bayesi-játékot. Ekkor a 3. és 4. táblázatból kiolvasható, hogy ((Short, Long), Long) a játék egy interim Bayesi–Nash-Egyensúlya.

2.12. Definíció. *Egy $s^* \in S$ stratégiaprofil $G_B = (N, \{A_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N}, \mathcal{T})$ Bayesi-játék ex-ante Bayesi–Nash-Egyensúlya, ha s^* Nash-Egyensúly az $(N, \{S_i\}_{i\in N}, \{\bar{u}_i\}_{i\in N})$ játékban, és ez a játék G_B ex-ante normál formája.*

2.13. Példa. Tekintsük a 2.7. példában megadott Bayesi-játékot. Ekkor a 2.9. példában felírt formából látszik, hogy ((Short, Long), Long) a játék egy ex-ante Bayesi–Nash-Egyensúlya (5. táblázat).

2.14. Felvetés. *$G_B = (N, \{A_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N}, \mathcal{T})$ véges típusterű Bayesi-játékra feltesszük, hogy minden típus prior valószínűsége pozitív, azaz:*

$$\Pi(P \times T_1 \times \dots T_{i-1} \times \{t_i\} \times T_{i+1} \times \dots \times T_n) > 0$$

tetszőleges $i \in N$-re és $t_i \in T_i$-re.

2.15. Állítás. *Ha $G_B = (N, \{A_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N}, \mathcal{T})$ Bayesi-játékban a 2.14. felvetés teljesül, akkor $s \in S = \times_{i\in N} S_i$ stratégiaprofil pontosan akkor interim Bayesi–Nash-Egyensúlya G_B játéknak, ha ex-ante Bayesi—Nash-Egyensúly is.*

Bizonyítás. Lásd például Nguyen (2011), vagy Mas-Colell et al. (1995) 255. oldal 8.E.1. ezzel ekvivalens állítását. □

Mivel a 2.14. felvetés tanulmányunk során végig teljesül, az interim és az ex-ante Bayesi–Nash-Egyensúly fogalma a 2.15. állítás miatt esetünkben egybeesik, ezért csak Bayesi–Nash-Egyensúlyként hivatkozunk rá.

2.2 Véleményrangsorok

Általánosan a véleményrangsorok megkonstruálása elég technikai, így az általunk használt speciális esetben didaktikai okokból nem írjuk fel őket. Ennek részben az is az oka, hogy míg az elsőrendű vélekedés viszonylag kézzelfogható a valós életben is, a vélekedésekről alkotott vélekedések fogalma, és a játékra való hatásuk már kevésbé.

2.16. Példa. Anna és Béla a következő játékot játsszák: Adott egy négy fiókos szekrény, melynek mindegyik fiókjában van két-két összehajtogatott papírlap. A papírlapokon számok szerepelnek úgy, hogy mindegyik fiókban van egy lap, amin 1-es szerepel, egy fiókba került 0- ás szám, a maradék három fiókba pedig egy-egy 2-es szám. A játék elején Anna és Béla megegyeznek, hogy melyik fiókot választják (egyikük sem tudja, melyik fiókban van a 0), majd azon belül mindketten választanak egy-egy papírlapot és megnézik a sajátjukat. Ezután Anna dönthet, hogy beszáll-e a licitbe vagy nem. Ha nem száll be, Béla nyer egy forintot Annától. Ha beszáll, Béla is dönthet, hogy beszáll, vagy nem. Ha Béla nem száll be, Anna kap egy forintot Bélától. Ha Béla is beszáll, akkor mindketten megnézik egymás lapját is, és amelyikükén nagyobb szám szerepel, az négy forintot nyer a másiktól.

Ez a játék megmutatja, hogy a másodrendű vélekedések is szerepet kapnak a játék megoldásában. Vizsgáljuk meg, mi történik ebben a példában akkor, ha Anna a nullás számot húzza. Ekkor ő természetesen pontosan tudja, hogy Béla kezében egyes van, ahogyan azt is, hogy Béla szerint Annánál $\frac{1}{4}$ valószínűséggel van nullás és $\frac{3}{4}$ valószínűséggel kettes. Azaz Anna vélekedése Béláról az, hogy Béla nyerne, ha mindketten beszállnának, de Anna vélekedése Béla vélekedéséről megmondja, hogy Béla be sem szállna a játékba, ugyanis Béla várható kifizetése ekkor a saját elsőrendű vélekedése szerint $-4\cdot\frac{3}{4}+4\cdot\frac{1}{4} = -2$, míg ha nem száll be, akkor a várható kifizetése -1.

A példában látható, hogy a játékosok a világállapotokról való információikat hogyan tudják felhasználni a többi játékos akcióira való következtetéshez. A következtetés eszközei a vélemények, a szakirodalomban használt véleményrangsor fogalom pedig ezeket formalizálja. Ahhoz, hogy Anna tudjon Béla döntéséről következtetni, szükség van arra, hogy Anna tudja, hogy Béla (első rendben) racionális. A racionalitás és a tudás fogalmának széles játékelméleti irodalma van (Aumann, 1999a), amivel itt nem foglalkozunk kiterjedten. A tudást a szó köznapi értelmében használjuk, a köztudott azt jelenti, hogy minden játékos tudja, hogy minden játékos tudja ... és így tovább a végtelenségig, míg a racionalitás azt fogja jelenteni, hogy a játékosok várható kifizetést maximalizálnak.

Mivel minden játékosnak minden játékos vélekedéséről lehet vélekedése, a magasabb rendű véleményeket két játékos esetén a legegyszerűbb vizsgálni. A példában is láthatjuk, hogy a másodrendű vélekedés a véges esetben, minden típusra egy valószínűségeloszlás lesz a világállapotok terén. Az elsőrendű vélekedések köztudottak, hiszen a közös priorból számoljuk őket. Intuitíve, a véleményekről alkotott vélemények csak az elsőrendű vélekedésektől függenek, és így a másodrendű vélemények is kiszámolhatók a közös priorból és köztudottak. Ez lépésenként minden véleményszintre elmondható, tehát a játékosok véleményrangsora – a különböző rendű vélekedések összessége – köztudott.

3 A vizsgált szituáció

Ebben a részben az Allen és Morris (1998) által tárgyalt játék egy változatát vizsgáljuk. A játék mögötti történet a következő: Két vállalat a fő betétesei egy banknak. Mindkét vállalat előtt két lehetőség áll, vagy kiveszik a betétjüket (W=Withdraw) vagy bennhagyják minden pénzüket a bankban (R=Remain). Legyen a vállalatok betétje 100\$ – 100\$. Amennyiben mindkét vállalat úgy dönt, hogy a bankban hagyják a pénzüket, az időszak végén a bank mindkettejüknek fizet kamatot, ennek mértéke 35% (a pontos érték közgazdaságilag nem releváns, azért használunk ilyen magas kamatlábat, hogy kevés játékos és kevés típus esetén is tudjunk következtetni). Amennyiben bármelyik vagy mindkét vállalat kiveszi a pénzét, akkor hozzájut a 100\$-jához, azonban ha az egyik vállalat bent hagyja a pénzét, míg a másik kiveszi, akkor a történet szerint a bank csődbe megy, és az első vállalat elbukja a 100\$-ját.

A $\Gamma = (N, \{A_1, A_2\}, \{u_1, u_2\})$ játék a következő:

- $N = \{1, 2\}$ a játékosok halmaza,
- $A_1 = A_2 = \{R, W\}$ a játékosok akcióhalmazai,
- A játékosok u_1, u_2 kifizetéseit a 6. táblázat mutatja.

		2-es játékos	
		R	W
1-es játékos	R	(135,135)	(0,100)
	W	(100,0)	(100,100)

6. táblázat. A Γ játék kifizető-bimátrixa

Tegyük fel továbbá, hogy a vizsgált szituáció nem tökéletes információs, a játékosok különböző típusúak lehetnek Harsányi (1967-68), és a típusok hatással lehetnek a játékos stratégiáira. A játékosok típusai a likviditási mutatójuk, feltesszük, hogy mindkét vállalat likviditási mutatója egy-egy egész szám 0 és 7 között. A 0 „jelentése”, hogy az adott vállalat csődben van, az 1-é az, hogy egy vállalat csődközeli, a 7-es jelenti a pénzügyileg legjobb állapotot, míg a köztes értékek köztes likviditást jeleznek. Feltesszük, hogy ha egy vállalat csődben van, vagy csődközeli, akkor ki kell vennie a pénzét. A játékosok típusai nem függetlenek, korreláltak, ami nálunk azt fogja jelenteni, hogy a likviditási mutatójuk nem térhet el egynél jobban egymástól, azaz, ha 1-es játékos típusa 3, akkor 2-es játékosé 2, 3 vagy 4 lehet. Ennek magyarázata az általunk vizsgált helyzetben annyi, hogy a két vállalat ugyanabban az iparágban dolgozik, így ugyanazok a hatások hatnak rájuk, és bár lehetnek közöttük különbségek, likviditásuk nagyban összefügg.

A $\Gamma_B = (N, \{A_1, A_2\}, \{u_1, u_2\}, \mathcal{T})$, $\mathcal{T} = (P, \{T_1, T_2\}, \Pi)$ Bayesi-játék és a hozzá tartozó típustér a következő:

- N, $\{A_1, A_2\}$, $\{u_1, u_2\}$ a Γ játékból való, tehát az u_1 és u_2 kifizetőfüggvények nem függenek a típusoktól,
- $T_1 = T_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ a játékosok típushalmazai, P egyelemű,
- $s_i : T_i \to \{R, W\}$ az i játékos egy stratégiája olyan, hogy $s_i(t) \in \{R, W\}$, ha $t \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, és W különben, S_i az i játékos stratégiahalmaza, $i \in \{1, 2\}$, tehát 0 és 1 típusban egy vállalat mindenképp kiveszi a pénzét,
- Π a közös prior a 7. táblázatban látható.

		T_2							
		0	1	2	3	4	5	6	7
T_1	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	0	0	0	0	0	0
	1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	0	0	0	0	0
	2	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	0	0	0	0
	3	0	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	0	0	0
	4	0	0	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	0	0
	5	0	0	0	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	0
	6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$
	7	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$

7. táblázat. A Γ_B Bayesi-játék közös priorja

A 7. táblázatban az is látszik, hogy a közös priort úgy konstruáltuk, hogy ha egy játékos ismeri a típusát és az nem extremális pénzügyi helyzetet mutat (nem 0 vagy 7), akkor egyenlő valószínűséget rendel a másik játékos lehetséges típusaihoz. Egyébként minden típus előfordulásának prior valószínűsége $\frac{1}{8}$.

3.1 A játék Bayesi–Nash-Egyensúlya

Ebben a részben megnézzük, mi történik az általunk vizsgált játék Bayesi–Nash-Egyensúlyában.

3.1. Állítás. Γ_B*-nek pontosan egy Bayesi–Nash-Egyensúlya létezik és az az a stratégia, amiben mindkét játékos minden típusra* W*-t játszik.*

Bizonyítás. A bizonyítás során az interim megközelítést fogjuk használni. Azt fogjuk megmutatni, hogy amennyiben s stratégiaprofil Bayesi– Nash-Egyensúly, és van egy olyan $(t_1^*, t_2^*) \in \Omega$ világállapot, amire $\Pi(t_1^*, t_2^*) \neq 0$ és $s(t_1^*, t_2^*) = (W, W)$, akkor minden világállapotra $s(\omega) = (W, W)$.

Tudjuk, hogy $(t_1, t_2) = (0, 0)$-ra és $(t_1, t_2) = (1, 1)$-re a játékosok csak (W, W)-t játszhatnak. Ezen felül tudjuk, hogy Γ_B interim normál formájú átírásának létezik Nash-Egyensúlya (könnyű meggondolni, hogy mindkét játékosra mindig W például az). Ebből következik, hogy s Bayesi–Nash-Egyensúlyra is $s(1, 1) = (W, W)$, továbbá a közös priorból $\Pi(1, 1) = \frac{1}{24} \neq 0$. Nézzük, mit játszik az 1-es játékos a 2-es típusban (jelölése az interim játékban 12-es játékos lesz). A következőt fogjuk végiggondolni:

$$\hat{u}_{12}(s) \begin{cases} = 100\,, & \text{ha ha } s\text{-ben 12 } W\text{-t játszik}\,, \\ \leq 90\,, & \text{ha } s\text{-ben 12 } R\text{-t játszik}\,. \end{cases}$$

Ezek közül a felső ág világos, ha egy játékos W-t játszik, akkor 100-at kap. Ha azonban R-t, akkor a várható kifizetés három tényező összege lesz: $\hat{u}_{12}(s) \leq \frac{1}{3}0 + \frac{1}{3}135 + \frac{1}{3}135 = 90$, a közös prior és az eredeti játék kifizetőfüggvénye alapján. A 0-t onnan kaptuk, hogy tudtuk, hogy a 21-es játékos W-t játszik, hiszen mást nem tud, 135 pedig az elérhető legnagyobb kifizetés, így alkalmas felső becslésre.

Ettől megéri eltérni, ugyanis a W biztosan 100 kifizetést hoz, így a 12-es játékos s-ben W-t játszik. Hasonlóan megállapítható, hogy a 22-es játékos is W-t fog játszani. Innen a típusokat végigléptetve egészen 17-ig és 27-ig megkapjuk, hogy s-ben mindkét játékos mindig W-t játszik. $\square$

Láthatjuk, hogy az eredeti Γ játék két Nash-Egyensúlya, a (W, W) és az (R, R) közül csak az maradt meg, amiben a játékosok kiveszik a pénzüket. Ez azért nem szerencsés, mert azt várjuk, hogy nagyon biztonságos típuspárokra $(t_1 = t_2 = 7)$ már R-t játszanak a játékosok. Ahhoz, hogy megmagyarázzuk, hogyan is jöhet ki a való életben a Pareto-optimális Nash-Egyensúly és mikor jöhet ki ebben a példában, a játékosok véleményrangsorait fogjuk használni.

3.2 Véleményrangsorok két játékos esetén

Ebben a részben felírjuk a játékosok közös priorból származtatott vélekedéseit, ezzel a célunk az, hogy valamilyen más döntési stratégiát tudjunk velük definiálni. A 2.2. alfejezetben említettük a véleményrangsorok intuícióját, a kiszámolásukról viszont még nem esett szó.

$\pi_i^k(\cdot, \cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \times \Omega \to I\!R$ jelöli i játékos k-adrendű vélekedését, melyre teljesül, hogy tetszőlegesen rögzített $\omega^* \in \Omega$-ra $\pi_i^k(\cdot, \omega^*)$ egy valószínűségeloszlás az $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ téren, $i \in \{1, 2\}$ illetve $k \in I\!N$. A vélekedéseket a következő rekurzió alapján definiáljuk:

- $\pi_i^1(E, (\{t_i\}, \{t_{-i}\})) = \Pi_j(E)$, ahol $E \in \mathcal{P}(\Omega)$, $j = t_i$, Π_j pedig 2.6. definícióból való (Γ_B játékra alkalmazva),
- $\pi_i^k(E, \omega^*) = \sum_{\omega \in \Omega} \pi_{-i}^{k-1}(E, \omega) \pi_i^1(\{\omega\}, \omega^*)$, ahol $E \in \mathcal{P}(\Omega)$ és $k > 1$.

A $k = 1$ eset a már megismert elsőrendű vélekedés, ez az átírás azért kényelmes, mert eddig az elsőrendű vélekedések típusokra vonatkoztak, mi azonban az egyes játékosokhoz szeretnénk rendelni őket. A $k > 1$-hez elégséges magyarázat annyi, hogy i játékos ismeri $-i$ minden $k-1$-nél alacsonyabb rendű vélekedését, tehát tudja, mire gondolhat $-i$, tudja a saját típusát, de nem tudja, hogy a játék mely világállapotban van, így fel kell használnia az elsőrendű vélekedését. A struktúra hasonlít az átmenetvalószínűség fogalmához.

A gondolkodásmód pontosan ugyanaz, mint Markov-láncok esetén: ahhoz, hogy eljussunk ω^*-ból E-be, először eljutunk egy tetszőleges ω-ba, majd innen E-be, mert ezeket az átmeneteket már ismerjük, ha pedig a valószínűségeket összeadjuk, megkapjuk az ω^*-ból E-be jutás valószínűségét.

3.3 Következtetés a véleményrangsorok alapján

Világos, hogy az 1-es játékos R akciót játszik egy $t_1^* \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ típusban, ha

$$pu_1(R, R) + (1-p)u_1(R, W) > pu_1(W, R) + (1-p)u_1(W, W) \ ,$$

ahol p annak a valószínűsége hogy a 2-es játékos (1-es játékos szerint) R-t játszik. Ekkor a fenti egyenletbe való behelyettesítés után

$$135p > 100 \ .$$

Tehát, ha lenne ilyen p értékünk az egyes típusokra, akkor az 1-es játékos azonnal tudna dönteni. Ahhoz, hogy p-t meg tudjuk becsülni, az 1-es játékos véleményrangsorát fogjuk felhasználni.

Legyen $K \in \mathcal{P}(\Omega)$ esemény azon világállapotok összessége, amiben valamelyik játékos típusa vagy 0 vagy 1. Ekkor világos, hogy $p \leq p_1 = 1 - \pi_1^1(K, \omega)$, hiszen, ha a 2-es játékos 0 vagy 1 típusú, akkor biztosan W-t játszik. Ugyanúgy tudjuk azt is, hogy $p \leq p_2 = 1 - \pi_1^2(K, \omega)$, hiszen a 2-es játékos valamilyen valószínűséggel azt fogja hinni, hogy az 1-es játékos 0-ás vagy 1-es típusú, és ha ez túl nagy, akkor nem fog R-t játszani. Ez igaz lesz bármilyen rendű vélekedésre, tehát minden $m \in I\!N$-re $p \leq p_m$, ahol

$$p_m = 1 - \pi_1^m(K, \omega) \ .$$

3.2 Példa. Legyen $\omega = (3, 3)$, $m = 4$. Ekkor $\pi_1^4(t_i = 0, \omega) = 0,0617$ és $\pi_1^4(t_i = 1, \omega) = 0,1235$, $i \in \{1, 2\}$, tehát az 1-es (és persze a 2-es) játékos 3-as típusában $p_4 = 0,8148$. Tehát a negyedrendű vélekedésből tudjuk, hogy ha az 1-es játékos likviditása 3, akkor a 2-es játékos maximum $0,8148$ valószínűséggel játszik R-t.

A fent definiált p_m sorozat alapján határozzuk meg, hogy egy i játékos egy t_i típusban mit fog dönteni. Jelöljük a sorozat legnagyobb alsó korlátját $p_{\inf}$-fel. A döntéshez a következőket használjuk:

3.3 Állítás. *Ha* $135p_{\inf} < 100$*, akkor legyen* $k = \{\inf l : 135p_l < 100, l \in \mathbb{N}\}$*. Köztudott* k*-adrendű kölcsönös racionalitás mellett (*k *hosszan* i *tudja, hogy* $-i$ *tudja, hogy* i *tudja... várható kifizetést maximalizál)* i *játékos az adott típusban csak* W*-t játszhat.*

Bizonyítás. A k-adrendű vélekedésből az következik, hogy $-i$ játékos legalább $1-p_k$ valószínűséggel W-t játszik. Ekkor a várható kifizetések: $135p_k < 100$, tehát ha R-t játszanánk, ellentmondanánk a k-adrendű racionalitásnak. □

3.4. Definíció. *Azokat a stratégiákat, melyben* $135p_{\inf} < 100$ *esetén* W*-t,* $135p_{\inf} > 100$ *esetén* R*-t játszunk, optimista stratégiáknak nevezzük.*

A 3.4. definíció azért szükséges, mert intuíciónk szerint nagyon biztonságos típuspárokra ($t_1, t_2 \in \{6, 7\}$-re) már létrejön Γ játék Pareto-optimális Nash-Egyensúlya, az (R, R) (ld. 6. táblázatot). A valós közgazdasági szituációkban is azt látjuk, hogy ha minden jól megy a gazdaságban, akkor az emberek nem félnek a bankcsődtől és nem oldják fel bankbetétjeiket. Az itt felmerülő kérdés az, hogy hol húzzuk meg a határt, azaz mi az a típus, amire már optimista esetben sem mondhatjuk, hogy játszhatunk R-t. Erre ad választ 3.3. állítás, ami egy alsó becslést ad arra, hogy milyen esetekben biztosan nem éri meg a kockázatos akció.

Az optimista döntés azt a ki nem mondott feltevést használja, hogy egy szereplő pontosan akkor veszi ki a pénzét, amikor csődös vagy csődközeli állapotban van, vagy azt hiszi, hogy a másik játékos csődös vagy csődközeli, vagy azt hiszi, hogy a másik játékos azt hiszi... és így tovább addig, amíg a kockázat túl nagy nem lesz, ha pedig nem lesz túl nagy, akkor benntart. Ekkor az általunk használt p_m sorozat infimuma nem csak felső becslés, hanem pontos érték p-re.

A sorozat típusonkénti meghatározása egy numerikus feladat. A 3.2. alfejezetben láttuk, hogy minden szintű vélekedés kiszámolható az elsőrendű vélekedésekből. Egy i játékos döntései az itt bevezetett szabály alapján a lehetséges t_i típusokban 8. táblázatban láthatók. A döntésekhez tartozó kritikus érték $\frac{100}{135} = 0,7407$.

Látszik, hogy ha van két különböző típusunk, és a nagyobb kockázatúban R a döntés, akkor a kisebb kockázatúban is az lesz, függetlenül a kritikus értéktől, amit a kamatszint határoz meg.

Az optimista döntésben látható, hogy biztonságos ($t_1, t_2 \in \{4, 5, 6, 7\}$) világállapotokra létrejön a szarvasvadászat Pareto optimális Nash-Egyensúlya, kockázatos ($t_i \in \{2, 3\}$, $i \in \{1, 2\}$) típusokra pedig a játékosok azt az akciót választják, ahol a kifizetésük nem függ a másik döntésétől (ezt a fajta akciót a szakirodalom időnként kockázatdomináns akciónak nevezi).

t_i	0	1	2	3	4	5	6	7
$p_{\inf}$	0	0	0,6063	0,7209	0,75	0,75	0,75	0,75
Optimista	W	W	W	W	R	R	R	R
Bayesi-Nash	W	W	W	W	W	W	W	W

8. táblázat. Az egyes típusokhoz tartozó döntések

A 8. táblázat tanulsága az, hogy bár mindkét döntési stratégiához ugyanúgy a közös priort használtuk, a döntés módja és a közös prior szerepe a döntésben eltérő. Az optimista döntéshozó minden véleményszintet megvizsgált, és a vélekedéseit (mely nálunk egy eloszlás volt a világállapotok terén) arra használta, hogy a másik játékos típusára következtessen, nem pedig a másik játékos által játszott akcióra. Csak azokat az eseteket vette figyelembe, amikor biztosan tudta, hogy az ellenfél W-t játszik és figyelmen kívül hagyta a többi esetet.

Ezzel szemben a Bayesi–Nash-Egyensúly csak az elsőrendű vélekedéssel számolt, mégpedig úgy, hogy azonnal következtetett az ellenfél által játszott akciókra. A probléma vele az, hogy ha nem nyolc típust állítunk be, hanem lényegesen többet, akkor is W marad az egyetlen egyensúlypont, ami nem jó eredmény alkalmazás szempontjából.

4 Konklúzió

A Bayesi-játékok normál formára való átírásakor óhatatlanul elveszítjük a közös prior eloszlásának néhány tulajdonságát, esetünkben azt, hogy a csődvalószínűség sokkal kisebb, mint a biztonságos állapotoké. Így aztán a Bayesi–Nash-Egyensúly fő problémája, hogy túl mohó módon próbálja optimalizálni a játékosok döntéseit, figyelmen kívül hagyva a közös prior globális tulajdonságait. Ebben a példában ez úgy nyilvánul meg, hogy mindkét játékos épp csak egy kicsit akar biztonságosabban játszani, mint a másik és „alullicitálják” egymást abban, hogy ki mikor veszi ki a pénzt egészen addig, amíg mindig ki nem veszik. Ha ez a valós gazdasági életben is így lenne, nem jönnének létre bankbetétek.

Kétféle gyakorlati magyarázatot látunk arra, hogy ez miért nem így történik. Az egyik a már említett optimizmus, mely azt jelenti alkalmazás szempontjából, hogy csak azokkal az esetekkel számolunk, amikor egészen biztos, hogy a biztonságos akciót kell választani, minden más esetben a kockázatos, de magasabb kifizetéshez vezető akciót választjuk, és azt várjuk, hogy a többi szereplő is így dönt. Ezzel létrejöhet az általunk felvázolt döntési stratégia.

A másik magyarázat azt feltételezi, hogy a szereplőknek önmagában kényelmesebb a status quo fenntartása, mint visszafordíthatatlan döntések meghozatala. Ez azt eredményezi, hogy bankbetétek képzése és feloldása nem ugyanolyan súlyú döntés lesz a szereplők életében. Ha már létezik egy szignifikáns betétünk, aminek a feloldása veszteséget okoz, akkor csak tényleg kockázatos esetekben tesszük azt meg és ugyanezt várjuk a többi szereplőtől is. Ezzel szintén létrejöhet a 8. táblázatban szereplő optimista stratégia, de csak akkor, ha a betét már a játék előtt létrejött. Fordított esetben, ha egy még nem létező betét megképzéséről kell döntést hozni, ez a megközelítés nem alkalmazható az általunk konstruált döntés magyarázatához.

Irodalom

1. Allen F., Morris S. (1998) Finance applications of game theory. Wharton Financial Institutions Center Working Paper Series 98-23-B
2. Aumann R. J. (1999) Interactive epistemology I: Knowkedge. *International Journal of Game Theory* 28:263–300
3. Aumann R. J. (1999) Interactive epistemology II: Probability. *International Journal of Game Theory* 28:301–314
4. Aumann R. J., Brandenburger A. (1995) Epistemic Conditions for Nash Equilibrium. *Econometrica* 63:1161–1180
5. Battigalli P., Di Tillio A., Grillo E., Penta A. (2011) Interactive epistemology and solution concepts for games with asymmetric information. *The B.E. Journal of Theoretical Economics*, 11(1)
6. Balog D., Bátyi T., Csóka P., Pintér M. (2011) Tőkeallokációs módszerek és tulajdonságaik a gyakorlatban. *Közgazdasági Szemle*, LVIII. évf., július-augusztus, 619–632
7. Bayer P., Tóth M. (2011) A véleményrangsorok fontossága—egy pénzügyi megközelítés—és az információs prémium. Tudományos Diákköri Konferencia dolgozat
8. Csóka P. (2003) Koherens kockázatmérés és tőkeallokáció. *Közgazdasági Szemle*, L. évf., október, 855–880
9. Diamond D. W., Dybvig P. H. (1983) Bank runs, deposit insurance, and liquidity. *Journal of Political Economy* 91(3):401–419
10. Ely J. C., Peski M. (2006) Hierarchies of belief and interim rationalizability. *Theoretical Economics*, 1:19–65
11. Forgó F., Pintér M., Simonovits A., Solymosi T. (2005) *Játékelmélet*. Elektronikus jegyzet.
12. Green E., Lin P. (2000) Diamond and Dybvig's Classic Theory of Financial Intermediation: What's Missing? *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review*, 24(1):3–13
13. Green E., Lin P. (2003) Implementing Efficient Allocations in a Model of Financial Intermediations. *Journal of Economic Theory* 109(1):1–23.
14. Harsányi J. (1967-68) Games with incomplete information played by bayesian players part I., II., III. *Management Science* 14:159–182, 320–334, 486–502.
15. Mas-Colell A., Whinston M. D., Green J. R. (1995) *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, Oxford
16. Myerson R. (1997) *Game Theory: Analysis of Conflict*. MIT Press
17. Nash J. (1950) Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 36(1):48–49
18. Nguyen G. (2011) Bayesi-játék Nash-Egyensúlya. Tudományos Diákköri Konferencia dolgozat.
19. Osborne M. J., Rubinstein A. (1994) *A course in game theory*. MIT Press
20. Pintér M. (2011) Biztosítási modellek a közgazdaságtanban. Órai jegyzet.
21. Szűcs N., Havran D., Csóka P. (2010) Információs paradoxon a vállalkozások hitelezésében nem fizető vevő esetén. *Közgazdasági Szemle*, LVII. évf., április, 318–336.

AN APPLICATION OF HIERARCHY OF BELIEFS IN FINANCIAL SITUATIONS

The paper examines an unpleasant attribute of the Bayesian Nash Equilibria. As we consider a bank run game of imperfect information, we present two possible solutions: The first is the game's Bayesian Nash Equilibrium, for which the necessary theoretical background is given, following [14]. The second is a solution based on an optimistic assumption about the players. In this second case we use the players' hiearchy of beliefs in order to create a rational bound to their optimism. As a result, we observe that the Bayesian Nash Equilibrium yields an overly careful strategy that is contradictory to general observations in everyday economic life, while the second, optimistic strategy satisfies our empirical and theoretical expectations.