Virág Ildikó

Gazdasági rendszerek vegetatív működése sztochasztikus külső fogyasztással

Dolgozatunk tárgya a következő:

Adva van egy absztrakt gazdasági rendszer, amelynek működését kizárólag készletjelzések szabályozzák. A rendszerben végbemenő fogyasztást sztochasztikus folyamatnak tekintjük, ebben a fogyasztásra vonatkozó információk bizonytalansága fejeződik ki. Kérdés: milyen feltételek mellett képes a rendszer működni?

A jelen cikk előzménye *Kornai János* és *Martos Béla* „Gazdasági rendszerek vegetatív működése" [1] című tanulmánya. A cikk először egy általános modellt ismertetett, amely keretül szolgál konkrét vizsgálatok sorozatához, majd a 4. szakaszban specifikálta az általános modellt, s egy konkrét modellen végzett elemzést.

Ez a dolgozat is e vizsgálatsorozathoz tartozik. A szerzők az általános modell tárgyalásakor nyitva hagyták a kérdést, hogy sztochasztikus vagy determinisztikus változókat szerepeltetnek-e. A 4. szakaszban szereplő specifikus modelljük *determinisztikus* volt. A mi jelen modellünk tulajdonképpen e specifikus modell *sztochasztikus* változata. Sztochasztikus folyamatnak tekintjük a $g(\omega, t)$ külső fogyasztást. Ez maga után vonja, hogy az összes változót sztochasztikus folyamatként kell kezelnünk. Meg kell változtatnunk ennek következtében a rendszer „működőképességének" definícióját is. Dolgozatunkban definiáljuk a p valószínűséggel való működőképességet. Majd megfogalmazzuk azokat a feltételeket, amelyek mellett a modell p valószínűséggel működik és végül egy alsó becslést adunk p-re.

Mivel modellünk a külső fogyasztásra vonatkozó feltételektől eltekintve azonos Kornai–Maros speciális modelljével, ezért a leírást csak ott részletezzük, ahol a determinisztikus esethez képest eltérés van. A jelöléseket csak annyiban változtatjuk meg, hogy az argumentumba mindenhova ω-t írtunk a véletlentől való függés jelölésére.

Feltevések

1. A modell változói mind sztochasztikus folyamatok, melyeket az alábbi valószínűségi téren értelmezhetünk. Legyen $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ valószínűségi tér és a $[0, \infty]$ idő intervallum paraméterhalmaz [2]. Legyenek $u_i(\omega, t)$, $V_{ji}(\omega, t)$, $w_i(\omega, t)$, $x_i(\omega, t)$, $Y_{ij}(\omega, t)$ és $z_i(\omega, t)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ sztochasztikus folyamatok az $\Omega \times [0, \infty]$-ben. Ez azt jelenti, hogy adott $t^* \in [0, \infty]$ és $\omega^* \in \Omega$-ra $u_i(\omega^*, t^*)$, $V_{ij}(\omega^*, t^*)$, $w_i(\omega^*, t^*)$, $x_i(\omega^*, t^*)$, $Y_{ij}(\omega^*, t^*)$ és $z_i(\omega^*, t^*)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ valós szám minden rögzített $t^* \in [0, \infty]$ pontban $u_i(\omega, t^*)$ stb. $(i, j = ,1 2, \ldots, n)$ valószínűségi változó a $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ valószínűségi mérték-

téren és minden rögzített $\omega^* \in \Omega$ pontban $u_i(\omega^*, t)$ stb. $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ közönséges függvénye az időnek. Ez utóbbiak a folyamatok egyes realizációi.

Tegyük fel, hogy a folyamatok Lebesque integrálhatók.[1]

2. Egyetlen fogyasztó van.

3. A gazdasági rendszer reálszférája Leontief-típusú, azaz:

Nincsenek külső erőforrások.

Az i-ik terméket egyetlen termelő állítja elő, — az i-ik ágazat —, mégpedig egyetlen technológiával.

A ráfordítási függvények lineárisak.

4. Az $F(t)$ input-koefficiens mátrix nem negatív, folytonosan differenciálható és a spektrális rádiusra 1-nél kisebb minden $t \geq 0$-ra.

5. Az $x(\omega, 0) = x^0$ (véletlentől nem függő) induló termelés folytatható, azaz

$$x^0 - F(t)x^0 > 0$$

6. Az induló készletek (nem véletlenek) pozitívak.

$$u(\omega, 0) = u^0 > 0, \ V(\omega, 0) = V^0 > 0, \ w(\omega, 0) = w^0 > 0$$

7. Ebben a pontban a $g(\omega, t)$ külső fogyasztásra vonatkozó feltevéseket közöljük.

$$\text{Legyen } g(\omega, t) = m(t) + G(\omega, t),$$

ahol $m(t)$ adott vektor $m_i(t)$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$ komponensekkel,és $G(\omega, t)$ adott sztochasztikus vektorfolyamat, melynek komponenseit $G_i(\omega, t)$-vel $(1, 2, \ldots, n)$ jelöljük. $G_i(\omega, t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$-k legyenek értelmezve az $\Omega \times [0, \infty]$ téren.

Legyen $g(\omega, 0) = g^0 = m(0) = m^0$ adott konstans (tehát nem véletlen), melyre fennáll, hogy $m_i^0 > | x_i^0 - \Sigma F_{ij}^0 x^0 - m_i^0 |$ $(i = 1, 2, \ldots,)$ az $m_i(t)$-k pedig alulról korlátosak m_i^0 korláttal, azaz $m_i(t) > m_i^0$.

a) Legyenek $G_i(\omega, t)$-k $(i = 1, 2, \ldots, n)$ szeparábilisek.[2]

b) Legyenek $G_i(\omega, t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ folyamatok Wiener-folyamatok.[3]

[1] A Lebesque integrálhatóságot realizációként értjük. A Lebesque-integrálhatóság itt matematikai technikai feltevés, közgazdasági szempontból nem lényeges. Pl. minden szakaszosan folytonos függvény Lebesque integrálható. Itt különben is enyhítettünk [1] feltevésén, ott ugyanis folytonos differenciálhatóság volt feltéve.

[2] A szeparábilitás definícióját itt nem közöljük, megtalálható pl. [2]-ben. A szeparábilitás feltételezése azért szükséges, mert legtöbb matematikai eredmény szeparábilis sztochasztikus folyamatokra vonatkozik. Feltételezése közgazdasági szempontból nem jelent megkötést. Gyakorlatilag mindig szeparábilis sztochasztikus folyamatokkal dolgozhatunk, mert igen általános feltételek mellett igaz az az állítás, hogy egy tetszőleges sztochasztikus folyamathoz található vele sztochasztikusan ekvivalens szeparábilis sztochasztikus folyamat [2], ahol a sztochasztikus ekvivalencia heurisztikusan azt jelenti, hogy bármely rögzített $t^* \in [0, \infty]$ esetén a tetszőleges és a szeparális sztochasztikus folyamat legfeljebb 0 mértékű halmazon különbözhet. A pontos fogalmak és tételek pl. [2]-ben találhatók.

[3] Egy $G_k(\omega, t)$ sztochasztikus folyamatot Wiener-folyamatnak nevezünk, ha független növekményű Gauss-folyamat. [3] Független növekményűnek nevezünk egy $G_i(\omega, t)$ sztochasztikus folyamatot, ha tetszőleges $t_0 < t_1 < \ldots < t_m$ értékekre a $G_i(\omega, t_0)$, $G_i(\omega, t_1) - G_i(\omega, t_0), \ldots, G_i(\omega, t_m) - G_i(\omega, t_{m-1})$ valószínűségi változók függetlenek [3].

Gauss-folyamatnak nevezünk egy $G_i(\omega, t)$ sztochasztikus folyamatot, ha tetszőleges $t_1, t_2, \ldots, t_m$ szám m-esre $G_i(\omega, t_1)$, $G_i(\omega, t_2) \ldots G_i(\omega, t_m)$ m-dimenziós valószínűségi változó m-dimenziós normális eloszlású [4].

Wiener-folyamat esetén elegendő ismerni a $G_i(\omega, t)$ eloszlást minden $t \in [0, \infty]$-re (ez normális eloszlás) és $G_i(\omega, t_k) - G_i(\omega, t_{k-1})$ eloszlást minden $t_{k-1} < t_k$-ra, amely a követ-

c) Legyenek a $G_i(\omega, t)$-k nulla várható értékűek. $\left(M[G_i(\omega, t)] = 0, (i = 1, 2, \ldots, n)\right)$ és szórásuk legyen $D^2[G_i(\omega, t)] = \sigma_G^2(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Megjegyezzük, hogy ez nem túl szigorú megkötés $g(\omega, t)$-re vonatkozólag mivel $M(g(\omega, t)) = m(t)$ ettől még akármi lehet. (Mivel $g_i^0 = m_i^0$ a $G_i(\omega, 0) = G_i^0 = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$)

d) Legyen $\sigma_{G^i}^2(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ folytonos függvény. (Ez a feltevés biztosítja, hogy $G_i(\omega, t)$-k egy valószínűséggel folytonosak, ugyanis Wiener folyamat esetén a folyamat folytonosságának szükséges és elégséges feltétele a szórásnégyzet és a várható érték függvény folytonossága [2]).

Nem szükséges feltennünk, hogy $g(\omega, t)$ Lebesque integrálható, mivel eddigi feltételeink ezt is biztosítják, hiszen $m(t)$ folytonos $G(\omega, t)$ pedig egy valószínűséggel folytonos, így összegük is egy valószínűséggel folytonos, amely elégséges feltétele a Lebesque integrálhatóságnak.

Végül megjegyezzük $G_i(\omega, t)$-k összefüggéséről nincs semmi feltéve, lehetnek függetlenek vagy akár azonosak is.

Összefoglalva: $g(\omega, t)$-re vonatkozó feltételeink azt jelentik, hogy a fogyasztás egy monoton növekvő várható értékű sztochasztikus folyamat, azonban pozitív valószínűséggel fordulhatnak elő nemcsak nem monoton növekvő, de még csak nem is korlátos realizációi.

Természetesen akármilyen függvények nem jöhetnek realizációként szóba. Erre teszünk megszorításokat a $G(\omega, t)$-re vonatkozó feltételekkel. Ezzel együtt [1]-hez képest itt kissé enyhítettünk a fogyasztásra vonatkozó feltételeken.

A modell

Az alábbiakban [1] speciális modelljében leírt összefüggésekkel analóg összefüggéseket adunk meg.

A különbség egyrészt az, hogy itt minden változó sztochasztikus folyamat, másrészt minden egyenletet integrálegyenlet alakban írjunk fel.[4] Ez a technikai változtatás azonban az egyenleteken és azok értelmezésén nem változtat.

Az egyenletek sztochasztikus integrálegyenletek, amelyeket realizációként értelmezünk. Rögzített ω mellett mindenegyes sztochasztikus integrálegyenlet egy realizációját kapjuk, amely közönséges függvényekre vonatkozó integrálegyenlet és majdnem minden ω-ra teljesül.

---

kező [4]:

$$P(G_i(\omega. t_k) - G_i(\omega, t_{k-1}) < x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_{G_i}^2(t_k) - \sigma_{G_i}^2(t_{k-1})}} \int_{-\infty}^{x} \exp \frac{[u - (m_{G_i}(t_k) - m_{G_i}(t_{k-1}))]^2}{2(\sigma_{G_i}^2(t_k) - \sigma_{G_i}^2(t_{k-1}))} du$$

ahol $M[G_i(\omega, t)] = m_{G_i}(t)$ a folyamat várható értéke és $D^2[G_i(\omega, t)] = \sigma_{G_i}^2(t)$ a folyamat szórásnégyzete.

[4] Ezt a technikai változtatást azért kellett végrehajtanunk, mivel $g(\omega, t)$-ről nem tehetjük fel a differenciálhatóságot. Ugyanis $g(\omega, t) = m(t) + G(\omega, t)$ ahol $G(\omega, t)$ nem differenciálható egy valószínűséggel, mivel feltételünk értelmében Wiener-folyamat és egy Wiener-folyamat nem differenciálható egy valószínűséggel [3].

Mérlegegyenletek:

$$u(\omega, t) = \int_0^t x(\omega, t)dt - \int_0^t Y(\omega, t)\, e\, dt - \int_0^t z(\omega, t)dt + u^0 \tag{1}$$

$$V(\omega, t)\, e_j = \int_0^t V(\omega, t)\, e_j dt - \int_0^t F(t)\, E_j x(\omega, t)\, dt + V^0 e_j \tag{2}$$

$$w(\omega, t) = \int_0^t z(\omega, t)\, dt - \int_0^t g(\omega, t)\, dt + w^0 \tag{3}$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, n$$

Magatartási szabályok

A következő konstansok a szabályozó rendszer beállítását végzik[1]:

u^*, V^*, w^* = a megfelelő változókra vonatkozó normálkészletek (nem véletlenek)

C = a szabályozó paraméterek diagonális mátrixa (C_i az i-edik ágazat szabályozó paramétere)

$$x(\omega, t) = Y(\omega, t)e + z(\omega, t) + \int_0^t c^2\big(u^* - u(\omega, t)\big)\, dt + x^0 - Y^0 e - z^0 \tag{4}$$

$$Y(\omega, t)\, e_j = F(t)\, E_j x(\omega, t) + \int_0^t c^2\big(V^* - V(\omega, t)\big)\, e_j dt + Y^0 e_j - F^0 E_j x^0 \tag{5}$$

$$z(\omega, t) = g(\omega, t) + \int_0^t c^2\big(w^* - w(\omega, t)\big)\, dt + z^0 - g^0 \tag{6}$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

A modell megoldása

A fenti (1)—(6) sztochasztikus lineáris egyenletrendszer rögzített $\omega \in \Omega$ mellett közönséges lineáris integrálegyenletrendszer. E lineáris integrálegyenletrendszer rögzített ω-hoz tartozó megoldása a sztochasztikus integrálegyenlet ω-hoz tartozó realizációja.

Az integrálegyenletek elméletéből ismeretes, hogy a lineáris integrálegyenletrendszernek egyetlen megoldása van. Ezt a megoldást úgy nyerhetjük, hogy a rendszert formálisan differenciáljuk, és formálisan megoldjuk (u.i. $g(\omega, t)$ nem deriválható). Hogy az igy kapott megoldás tényleg megoldása az integrálegyenlet rendszernek, helyettesítéssel ellenőrizhető.

$$u(\omega, t) = u^* + (\cos Ct)\ (u^0 - u^*) + (C^{-1} \sin Ct)\ (x^0 - Y^0 e - z^0) \tag{7}$$

$$V(\omega, t)e_j = V^* e_j + (\cos Ct)\ (V^0 - V^*)e_j + (C^{-1} \sin Ct)\ (Y^0 e_j - F^0 E_j x^0) \tag{8}$$

$$w(\omega, t) = w^* + (\cos Ct)\ (w^0 - w^*) + (C^{-1} \sin Ct)\ (z^0 - g^0) \tag{9}$$

$$x(\omega, t) = \big(E - F(t)\big)^{-1} [g(\omega, t) - (C \sin Ct)\ (u^0 - u^* + V^0 e_j - V^* e_j + w^0 - w^*) + (\cos Ct)\ (x^0 - F^0 x^0 - g^0)] \tag{10}$$

$$Y(\omega, t)\, e_j = F(t)\, E_j x(\omega, t) - (C \sin Ct)\; (V^0 - V^*)\, e_j + (\cos Ct)$$

$$(Y^0 e_j - F^0 E_j x^0) \qquad (11)$$

$$z(\omega, t) = g(\omega, t) - (C \sin (t)\; (w^0 - w^*) + (\cos Ct)\; (z^0 - g^0) \qquad (12)$$

A megoldást vizsgálva láthatjuk, hogy u, V, w egyike sem függ a véletlentől. Ezek egyike sem függ $g(\omega, t)$-től, márpedig a modell változói tulajdonképpen $g(\omega, t)$-n keresztül sztochasztikus folyamatok.

Az (1)—(6) sztochasztikus integrálegyenlet rendszer megoldásrendszere tehát közönséges időfüggvényekből és sztochasztikus folyamatokból áll.

A rendszer működőképessége

A rendszer működőképességének feltételeit az [1]-ben található feltételekhez képest némileg megváltoztatjuk. A determinisztikus esetben bizonyos működési változók pozitív volta jelentette a működőképességet. Továbbra is megtartjuk ezt a követelményt nem véletlen változók esetében. A véletlentől függő változók esetén a pozitivitást csak p valószínűséggel és adott T időtartamra kötjük ki. A rendszerről tehát akkor mondjuk, hogy p valószínűséggel működőképes a $[0, T]$ intervallumban, ha mindenegyes változóra és minden koordinátára egyszerre p valószínűséggel teljesülnek az alábbi feltételek:

$$x_i(\omega, t) > 0 \qquad 0 \leq t \leq T \; (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (13)$$

$$u_i(t) > 0 \qquad 0 \leq t \leq T \; (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (14)$$

$$V_{ij}(t) > 0 \qquad 0 \leq t \leq T \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (15)$$

$$w_i(t) > 0 \qquad 0 \leq t \leq T \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (16)$$

Ez a „túlélési" feltétel a túlélés [1]-ben definiált fogalmánál enyhébb fogalom. Csak azt biztosítja, hogy ha egy t időpontban érvényesek (1)—(12) feltételei és összefüggései, akkor az ilyen rendszerrel jellemzett gazdaság még T ideig p valószínűséggel működik. Természetesen konkrét esetekben mindig meg kell mondanunk, hogy mekkora T és p értékek mellett nevezhetjük ezt a feltételt még „túlélési" feltételnek és mikor kell már inkább „elhalási" feltételnek neveznünk. Nyilvánvalóan kis T érték esetén csak nagy p mellett értelmes a feltételt túlélési kritériumnak tekinteni, nagyon nagy T esetén azonban megelégedhetünk kisebb biztonság, tehát kisebb p garantálásával is.

Állítás: Sztochasztikus rendszerünkben van a C_i szabályozó paraméterek-nek és az u_i^*, V_{ij}^*, w_i^* normálkészleteknek olyan pozitív értékrendszerük, hogy az (1)—(6) egyenletrendszer megoldása eleget tesz a (13)—(16) feltételeknek, azaz a rendszer a $[0, T]$ intervallumban p valószínűséggel működőképes, ahol

$$p > 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{i=1} \frac{\sigma_{G_i(T)}}{|a_i|} \cdot \exp - \frac{|a_i|^2}{2\,\sigma_{G_i}^2(T)}$$

ahol
$$a_i = |\, x_i^0 - \sum_j F_{ij}^0 x_j^0 - g_i^0 \,| - m_i^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Bizonyítás: A bizonyításnak az a része, amely a nem véletlen változók pozitivitásra vonatkozik azonos a [1]-ben található bizonyítással.

Ha a normálkészleteket most is úgy választjuk meg, hogy

$$u_i^* = u_i^0$$
$$(18) \qquad V_{ij}^* = V_{ij}^0$$
$$w_i^* = w_i^0$$

és a C_i szabályozó paramétereket pedig úgy, hogy

$$(19) \qquad C_i > \max\left\{\frac{|x_i^0 - \Sigma_j Y_{ij}^0 - z_i^0|}{u_i^0};\quad \max_j \frac{|Y_{ij} - F_{ij}^0 x_j^0|}{v_{ij}^0};\quad \frac{|z_i^0 - g_i^0|}{w_i^0}\right\}$$

akkor a (14), (15), (16) egyenlőtlenségek teljesülnek az [1]-ben található bizonyítás alapján.

Eltérés csak (13) fennállásának bizonyításánál van.

A (13)-as feltétel teljesüléséhez [1] analógiájára itt elégséges belátni, hogy annak valószínűsége, hogy az alábbi egyenlőtlenség egyszerre minden i-re teljesül p.

$$\inf_{[0,T]} g_i(\omega, t) - [(C \sin Ct)\,(u_i^0 - u_i^* + \sum_j V_{ij}^0 - \sum_j V_{ij}^* + w^0 - w^*) -$$
$$(20) \qquad - (\cos Ct)\,(x_i^0 - \sum_j F_{ij}^0 x_i^0 - g_i^0)] > 0$$

Ha az [1]-ben található meggondolásokat realizációnként elvégezzük (20) fennállásához elegendő, ha annak valószínűsége, hogy

$$\inf_{[0,T]} g_i(\omega, t) > [C_i^2(u_i^0 - u_i^* + \sum_j V_{ij}^0 - \sum_j V_{ij}^* + w_i^0 - w_i)^2 +$$
$$(21) \qquad + (x_i^0 - \sum_j F_{ij}^0 x_j^0 - g_i^0)^2]^{1/2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

egyenlőtlenség egyszerre minden i-re fennáll p.

Ez a normálkészletek (18) alatti választása esetén tetszőleges C_i-k mellett akkor teljesül p valószínűséggel, ha

$$(22) \qquad \inf_{[0,T]} g_i(\omega, t) > |\, x_i^0 - \sum_j F_{ij}^0 x_j^0 - g_i^0 \,|)$$

is teljesül p valószínűséggel egyszerre minden i-re.

Jelöljük az alábbi valószínűséget p_i^*-gal

$$(23) \qquad P(\inf_{[0,T]} G_i(\omega, t) \geq a_i) = P(\inf_{[0,T]} G_i(\omega, t) \geq |\, x_i^0 - \sum_j F_{ij}^0 x_j^0 - g_i^0 \,| -$$
$$- m_i^0) = p_i^* \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ahonnan

$$(24) \qquad P(\inf_{[0,T]} G_i(\omega, t) + m_i^0 \geq |\, x^0 - \sum_j F_{ij}^0 x_j^0 - g_i^0 \,|) = p_i^*$$

$$0 \leq t \leq T$$

$$\inf_{[0,T]} G_i(\omega, t) + m_i^0 = \inf_{[0,T]} G_i(\omega, t) + \inf_{[0,T]} m_i(t) \leq$$
$$\leq \inf_{[0,T]} [G_i(\omega, t) + m_i(t)]$$

$$\text{mert } \inf_{[0,T]} m_i(t) = m_i^0, \qquad \text{hiszen } m_i(t) > m_i^0.$$

Tehát

$$(25)\qquad P(\inf_{[0,T]} G_i(\omega, t) + m_i(t)) \geq |x_i^0 - \sum_j F_{ij}^0 x^0 - g_i^0|) \geq p_i^*$$

mivel azonban $G_i(\omega, t) + m_i(t) = g(\omega, t)$ adódik, hogy

$$(26)\qquad p_i^* \leq P(\inf_{[0,T]} g_i(\omega, t) > |x_i^0 - \sum_j F_{ij}^0 x_{ij}^0 - g_i^0|)$$

A $t = 0$-ra pedig a 7-es feltétel miatt teljesül (22), hiszen $g_i^0 = m_i^0 > |x_i^0 - \sum_j F_{ij}^0 x_j - g_i^0|$. Így (22) teljesülésének valószínűsége p_i^*.

A továbbiakban bebizonyítjuk, hogy az állításban szereplő becslés valóban igaz.

A fentiek szerint elég a becslést (22) teljesülésének valószínűségére elvégezni

$$p_i^* = P(\inf_{[0,T]} G_i(\omega, t) \geq a_i)$$

Ismeretes a következő tétel [3]:
Egy folytonos realizációjú zéró várhatóértékű és $\sigma^2_{G_i(T)}$ szórásnégyzetű Wiener folyamatra, melyre teljesül, hogy $G(\omega, 0) = 0$ a$[0\,T]$ intervallumban fennáll a következő egyenlőtlenség

$$(27)\qquad P(inf_{[0,T]} G_i(t, \omega) \geq a_i) > 1 - \frac{\sigma_{G_i(T)}}{a_i}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp - \frac{|a_i|^2}{2\sigma^2_{G_i(T)}}$$

Mivel 7a, 7b, 7c, 7d $G_i(\omega, t)$-re vonatkozó feltételeink biztosítják e tétel feltételeinek teljesülését, minden p_i^*-ra igaz, hogy

$$(28)\qquad P_i^* > 1 - \frac{\sigma_{G_i(T)}}{a_i}\sqrt{\frac{2T}{\pi}} \exp - \frac{|a_i|^2}{2\sigma^2_{G_i(T)}}$$

Annak valószínűségéről, hogy minden koordinátára egyszerre teljesül (22), egyszerű valószínűségszámítási meggondolásokkal látható, hogy

$$(29)\qquad p > 1 - \sum_{i=1}^{n} (1 - p_i^*)$$

Ha (28)-t és (29)-t összevetjük láthatjuk, hogy állításunk bizonyítást nyert

$$(30)\qquad p > 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_{G_i(T)}}{|a_i|} \exp - \frac{|a_i|^2}{\sigma^2_{G_i(T)}}$$

(30)-as formulánkkal tetszőleges rögzített T-hez becslést adunk a rendszer p valószínűséggel való működőképességére. A formula jobb oldalán szereplő paraméterek a $g(\omega, t)$ paraméterei és a rendszer kezdeti értékeitől függő paraméterek, amelyek konkrét folyamat esetén ismertek. Formulánkkal tehát mindig meg tudjuk mondani, hogy ha a rendszer egy bizonyos időpontban működött, akkor adott T ideig mekkora valószínűséggel működik legalább. Mint már megjegyeztük, annak a kérdésnek az eldöntése, hogy milyen időszakra mekkora valószínűséggel való működőképességet tekintünk biztonságosnak konkrét esetekben kívülről kell eldöntenünk.

(29) pont alatti becslésünk, — mivel a p_i — k összefüggéséről nem teszünk fel semmit, — nem javítható. Ha azonban konkrét esetekben feltevéseinket

specifikáljuk, természetesen itt erősebb becsléseket alkalmazhatunk, így (30)-as becslésünket is erősíthetjük. A $G(\omega, t)$-re vonatkozó feltételeink elég erősek, kevésbé speciális folyamatokra azonban nem sikerült (27) jellegű eredményt találnunk az irodalomban.

Ennek ellenére, mint ahogy már korábban is megjegyeztük, a külső fogyasztásra tett megszorításokon enyhítettünk [1]-hez képest. Dolgozatunk végső következtetése: valamivel kevésbé megszorító feltevések mellett is sikerült bemutatni, hogy (meghatározott valószínűséggel, meghatározott ideig) működőképes a kizárólag készletjelzésekkel szabályozott absztrakt gazdasági rendszer.

(Beérkezett: 1971. július 26.)

IRODALOM

1. Kornai J.—Martos B.: Gazdasági rendszerek vegetatív működése. Szigma. 1971, 1—2. sz. 35—51. o.
2. Гихман, И. И. — Скороход, А. В.: Введение в теорию случайных процессов. Москва, 1965. Издательство «Наука» Физико-математической литературы. 656 стр.
3. Arató M.: Bevezetés a sztochasztikus folyamatok elméletébe. Bolyai J. Matematikai Társulat. (Jegyzet).
4. Rényi A.: Valószínűségszámítás. Budapest, 1966. Tankönyvkiadó. 510 p.

THE AUTONOMOUS FUNCTIONING OF AN ECONOMIC SYSTEM WITH STOCHASTIC EXTERNAL CONSUMPTION

We have an abstract economic system, the functioning of which is regulated exclusively by stock signals. Consumption within the system is considered a stochastic process. In the paper the author attempts to answer the question under what conditions the system is capable of functioning. We point out that under fairly strict assumptions about the stochastic process of consumption the system functions at least with what probability for arbitrarily given time T. This article is a stochastic variant of the model published in the 4th section of the paper „The autonomous functioning of an economic system" by János Kornai and Béla Martos [1]; familiarity with it is needed to the understanding of the present paper.

ВЕГЕТАТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ СО СТОХАСТИЧЕСКИМ ВНЕШНИМ ПОТРЕБЛЕНИЕМ

Дана абстактная экономическая система, действие которой регулируется исключительно сигнализациями запасов. Потребление в этой системы мы считаем стохастическим процессом. В данной работе мы попытаемся ответить на вопрос, при какими условиями система может действовать. Мы покажем, что при достаточно строгих условиях на стохастическй процесс потребления, система по крайней мере с какой вероятностью действует в течение определенного времени Т. Эта статья является стохастическим вариантом модели, сообщенной в 4-ой части труда Яноша Корнаи—Бела Мартоша: Вегетативное действие экономических систем [1], не зная которого эту статью нельзя понять.