Bod Péter

Az indifferens programozási feladatokról

Az elméleti operációkutatási irodalom hosszú időn át viszonylag kevés figyelmet fordított a gazdasági döntési feladatok modellezésénél jelentkező érdek és célkonfliktusok elemzésére. Általánosan elterjedett, hogy kézikönyvekben és tananyagokban döntési problémákat egyszerűen mint matematikai programozási feladatokat tárgyalnak.

Az utóbbi években fokozódott az érdeklődés az olyan matematikai programozási modellek és eljárások iránt, amelyekben egyidejűleg több célt lehet figyelembe venni. A kérdés aktualitását mutatja, hogy a 7-ik nemzetközi matematikai programozási symposium (1970, Hága) külön szekciót szentelt e téma vizsgálatának. B. Roy áttekintést nyújtó bevezető előadása a közelmúltban nyomtatásban is megjelent [1]. Jellemző, hogy a cikkben hivatkozott 66 tudományos dolgozat közül csak 16 jelent meg 1966 előtt.

A több, egyidejűleg ható érdek alapján való optimalizálás általában valamilyen kompromisszumos döntésre kell hogy vezessen. Az itt alkalmazható operációkutatási eszközök éppen „okos" kompromisszumok megkeresését kell, hogy szolgálják. Ahol kompromisszumra van szükség, mert ellentétes érdekek ütköznek, ott rendszerint nincs lehetőség arra, hogy a megengedett döntések halmazán teljes rendezést vezessünk be. Meg kell elégedni részleges rendezéssel és így az ún. egzakt módszerek nem adnak egyértelmű megoldást, hanem elvezetnek a megengedett döntések egy olyan halmazához, amelynek elemei az alkalmazott rendezési reláció alapján nem összehasonlíthatók.

Kézenfekvő ezek után az a kérdés, hogy léteznek-e olyan programozási feladatok, amelyekben egyértelmű megoldásokat nyerünk annak ellenére, hogy nem teljes rendezési relációkkal dolgozunk; vagy másként fogalmazva: megadhatók-e olyan programozási feladatok, amelyekben az optimális megoldás messzemenően független a célfüggvény konkrét megválasztásától.

A továbbiakban ennek a kérdésnek a megválaszolására szolgáló néhány eredményt foglalunk össze.

1963-ban megjelent cikkemben [2] megmutattam, hogy az

$$L = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b};\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^* \mathbf{x} \\ \mathbf{c}_2^* \mathbf{x} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{c}_k^* \mathbf{x} \end{bmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{x} \to \max!$$

$$\underset{(m\times n)}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}; \ \varrho(\mathbf{A}) = r\,; \ \mathbf{A}_{11} : (r\times r)\,; \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}; \ \mathbf{C} = [\mathbf{C}_1\,; \ \mathbf{C}_2]$$

lineáris vektormaximum probléma efficiens (tehát egy nem teljes rendezési reláció alapján optimális) megoldásainak a halmaza (a változók célszerű átindexelése után) az alábbi egyetlen elemből áll:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{b}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

ha a

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{E}_{m-r} \end{bmatrix}$$

olyan megengedett bázis, hogy

$$\tilde{\mathbf{C}} = [-\mathbf{C}_1\mathbf{A}_{11}^{-1};\ \mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}] \leq \mathbf{0}$$

Könnyen belátható, hogy ha adva van egy fenti tulajdonságú vektormaximum feladat, akkor a

$$Z = \{\mathbf{c}^* \mid c^* = \mathbf{p}^*\mathbf{C};\ \mathbf{p}^* \geq \mathbf{0}^*\}$$

halmazból tetszőlegesen választott paramétervektorral rendelkező lineáris függvény maximuma az L halmazon mindig felvétetik az $\mathbf{x}_0$ pontban. Vagyis olyan lineáris programozási feladattal van dolgunk, amelynek optimális megoldása jelentősen független a célfüggvény megválasztásától.

G. Wintgen 1964-ben konkrét számítások tapasztalatai alapján észrevette, hogy a statikus nyílt input-output modell alapján felírt

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{c}^*\mathbf{x} \to \min!$$

$$\mathbf{A} \geq \mathbf{0};\ \mathbf{1}^*A < \mathbf{1}^*$$

minimalizálási feladat mindig ugyanazt az optimális programot szolgáltatja, bármilyen nem negatív vektor is szerepel a célfüggvényben.

E jelenség alapján Wintgen bevezette a következő definíciót:

(3):

Legyen $\mathfrak{Z}$ a célfüggvények egy osztálya és $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ egy leképezés R^n-ből R^m-be. Tekintsük az

$$L = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}\}$$

megengedett megoldáshalmazt és a

$$z(\mathbf{x}) \to \max! \quad z(\mathbf{x}) \in \mathfrak{Z}$$

alakú optimalizálási feladatot: F.

F. indifferens programozási feladat a $\mathfrak{Z}$ függvényosztályra nézve, ha

$$\exists \mathbf{x}_0 \in L \text{ hogy } z(\mathbf{x}) \leq z(\mathbf{x}_0)\text{: } \forall \mathbf{x} \in L \text{ és } \forall z(\mathbf{x}) \in \mathfrak{Z}\text{-re.}$$

Wintgen fogalomalkotásának jogosságát éppen az a körülmény adta, hogy sikerült előzetesen nem triviális indifferens feladatokat találni. Triviálisan indifferens feladatok ugyanis könnyen definiálhatók:

Pl. — Ha egy programozási feladatban a megengedett megoldások halmaza egyetlen elemből áll, akkor az minden célfüggvényre nézve indifferens.

— Minden véges optimummal rendelkező feladat indifferens a célfüggvény monoton transzformáltjai által alkotott függvényosztályra.

Az alábbi elégséges feltételeket kimondó tételek Wintgentől származnak:

Wintgen 1. *tétele:* Legyen $L = \{\mathbf{x}(\mathbf{g}(\mathbf{x}) \geqq \mathbf{0}\}$ a megengedett megoldások halmaza és

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} z_1(\mathbf{x}) \\ z_2(\mathbf{x}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_k(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

komponensenként folytonos, az L halmazon felülről (alulról) korlátos k elemű vektor-vektor függvény, amelynek komponensei L-en a végesben felveszik maximumukat (minimumukat).

A feladat indifferens a $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ vektor minden

$$\mathbf{c}^*\mathbf{z}(\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{c}^* \geq \mathbf{o}^*)$$

alakú nem negatív sulyokkal vett kombinációjára, ha $\mathbf{x} \in L$; $\mathbf{J} \in L =\rangle$

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}) \cup \mathbf{z}(\mathbf{y}) \in \mathbf{z}(L) \qquad \text{(max. feladat esetén)}$$

illetve

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}) \cap \mathbf{z}(\mathbf{y}) \in \mathbf{z}(L) \qquad \text{(min. feladat esetén)}$$

ahol:

$$\mathbf{x} \cup \mathbf{y} = [\max (x_i, y_i)]$$

$$\mathbf{x} \cap \mathbf{y} = [\min (x_i, y_i)]$$

Wintgen 2. *tétele:* Ha a $\mathbf{B}$ mátrix minden sorában egy nem negatív elemet tartalmaz és az összes többi elem nem pozitív, akkor a

$$\mathbf{B}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{c}^*\mathbf{x} \to \min! \qquad (\mathbf{c}^* \geq \mathbf{0}^*)$$

lineáris programozási feladat indifferens a nem negatív együtthatójú lineáris függvények osztályára nézve.

Wintgen eredményeihez kapcsolódva, 1966-ban bebizonyítottam [4], hogy a

$$\mathbf{c}^*\mathbf{x} \to \min! \qquad (\mathbf{c}^* \geq \mathbf{0})$$

$$\mathbf{x} \in L$$

$$L = \{\mathbf{x}|\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b};\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \neq 0$$

$$\mathbf{A} : (m \times n);\ \varrho(\mathbf{A}) = m$$

feladat akkor és (degenerációmentes esetben) csak akkor indifferens a nem negatív lineáris függvények osztályára nézve, ha az együtthatómátrix oszlopvektorterének van olyan megengedett bázisa, amelyben valamennyi nem bázisvektor koordinátái nem pozitívak.

Az utóbb említett két tétel nem-lineáris függvények osztályára nézve mondja ki bizonyos típusú feltételrendszerek esetében az indifferenciát. Az alábbi lemma figyelembevétele alapján azonban megállapítható, hogy az ilyen indifferencia egyenértékű azzal a ténnyel, hogy a megfelelő feladatok megengedett megoldáshalmazaiban létezik ,,legkisebb'' elem. Az R^n egy H halmazában ,,legkisebbnek'' nevezünk egy $\mathbf{x}_0 \in H$ elemet, ha

$$\mathbf{x}_0 \leqq \mathbf{x}; \qquad \forall \mathbf{x} \in H$$

Lemma: Ha $\mathbf{x}; \mathbf{y} \in R^n$, akkor

$$\mathbf{x} \leqq \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{c}^*\mathbf{x} \leqq \mathbf{c}^*\mathbf{y}$$

tetszőleges $\mathbf{c}^* \geqq \mathbf{0}$ mellett.

Bizonyítás: Ha $\mathbf{x} \leqq \mathbf{y}$ és $\mathbf{c}^* \geqq \mathbf{0}^* \Rightarrow \mathbf{c}^*\mathbf{x} \leqq \mathbf{c}^*\mathbf{y}$.

Ha $\mathbf{c}^*\mathbf{x} \leqq \mathbf{c}^*\mathbf{y}$ tetszőleges $\mathbf{c}^* \geqq \mathbf{0}^*$ mellett, akkor válasszuk $\mathbf{c}^*$ helyébe az egységvektorokat $(\mathbf{e}_i)$. Vagyis:

$$\mathbf{e}_i^*\mathbf{x} \leqq \mathbf{e}_i^*\mathbf{y} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \Rightarrow$$

$$x_i \leqq y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \Rightarrow$$

$$\mathbf{x} \leqq \mathbf{y}$$

Ha tehát egy programozási feladatban a megengedett megoldások halmazának van legkisebb eleme, akkor az indifferens a nem negatív lineáris függvények osztályára nézve; sőt, az indifferencia ebben az esetben fennáll a minden változójában azonos irányban monoton függvények osztályára nézve is. Vagyis a fenti tételt úgy is lehet tekinteni, mint amely megadja a szükséges és elégséges feltételeket ahhoz, hogy egy olyan konvex poliéderben legyen legkisebb elem, amely kifejezhető, mint véges sok hipersík és a nem-negatív ortáns közös része.

A közelmúltban Cottle és Veinott [5] azt vizsgálták, hogy miként jellemezhetők általában az olyan poliéderek, amelyeknek van legkisebb elemük. Ismeretes, hogy minden konvex poliéder felfogható, mint véges sok zárt féltér közös része, vagyis felírhatók

$$L = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geqq \mathbf{b}\} \qquad A : (m \times n)$$

alakban.

Cottle és Veinott 1. *tétele:* Egyenértékűek a következő állítások:

1. $\hat{\mathbf{x}}$ legkisebb eleme L-nek;

2. $\hat{\mathbf{x}} \in L$ és létezik olyan nem negatív $(n \times m)$ méretű $\mathbf{A}^+ \geqq \mathbf{0}$ mátrix, hogy $\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{E}$ és $\mathbf{A}^+\mathbf{b} = \hat{\mathbf{x}}$.

3. Létezik olyan $(n \times m)$ méretű $\mathbf{A}^+$ mátrix, hogy az

$$\mathbf{y}(\mathbf{c}) \equiv \mathbf{c}^*\mathbf{A}^+$$

vektor minden $\mathbf{c}^* \geq \mathbf{0}^*$ mellett megengedett megoldása az

$$\mathbf{y}^*\mathbf{A} = \mathbf{c}^*$$

$$\mathbf{y}^* \geq \mathbf{0}^*$$

$$\mathbf{y}^*\mathbf{b} \to \max!$$

lineáris programozási feladatnak és optimális megoldás valamilyen pozitív $\mathbf{c}^* > \mathbf{0}^*$ esetén; és ezen felül $\mathbf{A}^+\mathbf{b} = \hat{\mathbf{x}}$.

A fenti egymással egyenértékű állítások igazak akkor és — feltéve, hogy az $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}$ vektornak legfeljebb n zérus eleme van — csak akkor, ha az alábbi feltételek egyike teljesül:

4. $\hat{\mathbf{x}} \in L$ és $\hat{\mathbf{x}}$-t egy nem negatív inverzű bázis határozza meg;

5. $\hat{\mathbf{x}}$-t nem negatív inverzű bázis határozza meg és ez a bázis optimális a (3) alatti feltételben definiált lineáris programozási feladatban — valamilyen $\mathbf{c}^* > \mathbf{0}^*$ mellett.

A fenti tétel valamilyen adott poliéder esetében mutatja meg annak a feltételeit, hogy legyen benne legkisebb elem. Azonban tekinthető az

$$L_\mathbf{b} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$$

halmazcsalád is. Hogyan jellemezhetők már most azok az $\mathbf{A} : (m \times n)$ mátrixok, amelyekre minden nem üres $L_\mathbf{b}$ halmaznak van legkisebb eleme. Erre a kérdésre válaszol

Cottle és Veinott 2. tétele: Egyenértékűek a következő állítások:

1. Minden $\mathbf{b}$-hez, amelyre $L_\mathbf{b} \neq \emptyset$ létezik legkisebb elem $L_\mathbf{b}$-ben:

2. $\mathbf{A}$-ban van olyan $\mathbf{B}$ bázis, hogy a $\mathbf{c}^*\mathbf{B}^{-1} \geq \mathbf{0}^*$ egyenlőtlenségnek van pozitív megoldása ($c^* > o^*$) és minden ilyen bázis inverze nem negatív:

Ha a mondott feltételeken túl az $\mathbf{A}$ mátrix tartalmaz teljesen n-edrendű egymásmátrixot, akkor

3. $\mathbf{A}^*$ Leontief típusú mátrix.

Egy mátrixot szokás pre-Leontief típusúnak mondani, ha minden oszlopában legfeljebb egy pozitív elem van. Egy pre-Leontief mátrix Leontief típusú, ha

$$\exists \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad \text{hogy} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} > \mathbf{0}$$

Fenti tételek általánosítják az eddigi eredményeket és lezárják a problémát konvex poliéderek legkisebb elemére vonatkozóan, illetve azzal a kérdéssel összefüggésben, hogy lineáris programozási feladatok mikor indifferensek valamennyi nem negatív lineáris függvényre.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy a nem negatívan invertálható bázisok létezése indifferenciát eredményez bizonyos típusú programozási feladatoknál — bár e feladatok megengedett megoldásainak halmazában nincs legkisebb elem. Nyilvánvaló azonban, hogy ilyen esetekben az indifferencia nem vonatkozik a nem negatív lineáris függvények teljes osztályára, hanem annak csak bizonyos alosztályára. Ezek a vizsgálataink az ún. intervallum programozási feladatokhoz kapcsolódnak.

Az ún. intervallumprogramozás Charnestől és Ben-Israeltől származik [6]. Ők nevezték el intervallumprogramozási feladatnak az alábbi formában megfogalmazott lineáris programozási problémát:

$$\mathbf{c}^*\mathbf{x} \to \max!$$

$$\mathbf{x} \in L$$

$$L = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a} \leq \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\} \qquad \mathbf{A} : (m \times n)$$

Az intervallumprogramozás legegyszerűbb feladata az, ha $\mathbf{A} = E_n$, vagyis

$$\mathbf{c}^*\mathbf{x} \to \max!$$

$$\mathbf{x} \in L$$

$$L = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$$

Ennek a feladatnak az optimális megoldásait könnyű megtalálni a célfüggvény együtthatóinak közvetlen kiértékelése alapján. Minden olyan $\mathbf{x}_0$ vektor, amelyre

$$(\mathbf{x}_0)_i = \begin{cases} a_i \text{ ha } c_i < 0 \\ b_i \text{ ha } c_i > 0 \\ \lambda_i a_i + (1 - \lambda_i) b_i (0 \leq \lambda_i \leq 1) \text{ ha } c_i = 0 \end{cases}$$

nyilvánvalóan optimális megoldása a feladatnak.

Rendeljünk minden lineáris függvényhez két indexhalmazt:

$$J_{\mathbf{c}}^+ = \{i \in J = \{1, 2, \ldots, n\} \mid c_i > 0\}$$

$$J_{\mathbf{c}}^- = \{i \in J = \{1, 2, \ldots, n\} \mid c_i < 0\}$$

$J_{\mathbf{c}}^+$ és $J_{\mathbf{c}}^-$ alapján adódik: $J_{\mathbf{c}}^0 = J - J_{\mathbf{c}}^+ \cup J_{\mathbf{c}}^+$

Legyen $\mathfrak{Z}_{\mathbf{c}}$ azoknak a lineáris függvényeknek az osztálya, amelyekhez tartozó J^+ és J^- halmazok rendre megegyeznek $J_{\mathbf{c}}^+$-vel és $J_{\mathbf{c}}^-$-vel. Kimondható a következő nyilvánvaló megállapítás: a feladat indifferens $\mathfrak{Z}_{\mathbf{c}}$-re.

Tekintsük ezek után azokat az intervallumprogramozási feladatokat, amelyekben az együtthatómátrix teljes sorranggal rendelkezik:

$$\mathbf{A} : (m \times n); \qquad \varrho(\mathbf{A}) = m$$

Charnes és Ben-Israel hivatkozott cikkükben megmutatták, hogy amennyiben az ilyen típusú feladat megengedett megoldásainak halmaza nem üres és a célfüggvény e halmazon korlátos, úgy az optimális megoldások halmaza explicit módon megadható. A részleteket illetően az olvasó Gábor Győző ebben a folyóiratban megjelent ismertető cikke [7] alapján is tájékozódhat.

Használjuk majd az alábbi jelöléseket:

Az $\mathbf{A} : (m \times n)$ típusú mátrix képtere:

$$R(\mathbf{A}) = \{\mathbf{y} \in R^m \mid \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x};\ \mathbf{x} \in R^n\}$$

Az $\mathbf{A} : (m \times n)$ típusú mátrix magtere:

$$N(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in R^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

Olyan tetszőleges $\mathbf{T} : (n \times m)$ méretű mátrix, amely eleget tesz az

$$\mathbf{ATA} = \mathbf{A}$$

mátrixegyenletnek (minthogy e mátrixegyenlet megoldása általában nem egyértelmű) a megoldások halmazát $\mathbf{A}\{1\}$-gyel jelöljük és a halmaz minden eleme az $\mathbf{A}$ mátrix úgynevezett $\{1\}$ tulajdonságú általánosított inverze. η: leképezés, amely az $R^m \times R^m \times R^m$ teret R^m-be képezi le.

$$\eta(\mathbf{u}; \mathbf{v}; \mathbf{w}) = (\eta_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\eta_i = \begin{cases} v_i & \text{ha} \quad w_i < 0 \\ v_i & \text{ha} \quad w_i > 0 \\ \lambda_i u_i + (1-\lambda) v_i & \text{ha} \quad w_i = 0 \;\; 0 \leq \lambda_i \leq 1 \end{cases}$$

Igaz a következő állítás: A

$$\mathbf{c}^*\mathbf{x} \to \max!\ (\min!)$$
$$\mathbf{x} \in L$$
$$L = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a} \leq \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\} \neq \emptyset$$
$$\mathbf{A} : (m \times n); \qquad \varrho(\mathbf{A}) = m$$

feladat indifferens az $\mathbf{A}^*$ mátrix képterében fekvő, nem negatív együtthatóvektorral bíró lineáris függvények osztályára ($\mathfrak{Z}$) nézve, ha létezik az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektorterének nem negatívan invertálható bázisa.

Minthogy a feladat megengedett megoldásainak a halmaza nem üres és a célfüggvény együtthatóvektora

$$\mathbf{c} \in R(\mathbf{A}^*) \quad \text{vagyis} \quad \mathbf{c} \perp N(\mathbf{A})$$

ezért minden szóba jöhető célfüggvény korlátos az L halmazon. Az optimális megoldások halmaza így:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{T}\,\eta(\mathbf{a}; \mathbf{b}; \mathbf{c}^*\mathbf{T}) + \mathbf{y}$$
$$\mathbf{T} \in \mathbf{A}\{1\}; \qquad \mathbf{y} \in N(\mathbf{A})$$

Feltevésünk szerint az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektorterének van nem negatívan invertálható bázisa. Legyen ez — az egyszerűség kedvéért — az első m oszlop. Vagyis

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{B1}\mathbf{A}_N] \quad \text{és} \quad \mathbf{A}_B^{-1} \geq \mathbf{0}$$

Ebben az esetben $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_B^{-1} \\ \mathbf{0}_{n-m,\,m} \end{bmatrix}$ olyan $(n \times m)$ méretű mátrix, amelyre

$$\mathbf{ATA} = [\mathbf{A}_B; \mathbf{A}_N] \begin{bmatrix} \mathbf{A}_B^{-1} \\ \mathbf{0}_{n-m,\,n} \end{bmatrix} [\mathbf{A}_B; \mathbf{A}_N] = \mathbf{E}_m[\mathbf{A}_B; \mathbf{A}_N] = \mathbf{A}$$

Vagyis $\mathbf{T} \in \mathbf{A}\{1\}$. Válasszuk $\mathbf{y} \in N(\mathbf{A})$-ként a zérus vektort. Így tetszőleges $\mathbf{c}^*\mathbf{x} \in \mathfrak{Z}$ célfüggvény alapján az

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{T}\,\eta[\mathbf{a}; \mathbf{b}; \mathbf{c}^*\mathbf{T}]$$

vektor optimális megoldást jelent.

Minthogy a $\mathbf{c}^*\mathbf{T} = \mathbf{c}^* \begin{bmatrix} \mathbf{A}_B^{-1} \\ \mathbf{0}_{n-m,\,n} \end{bmatrix}$ szorzatban minden tényező nem negatív, maximum feladat esetén

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{b}$$

minimum feladat esetén

$$x_0 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}$$

optimális megoldások: bármelyik $\mathbf{c}^*\mathbf{x} \in \mathfrak{Z}$ célfüggvény is forduljon elő.

Zlobec és Ben-Israel a közelmúltban általánosította az intervallumprogramozást olyan feltételrendszerek esetére is, amelyekben a rang kisebb mint a sorok száma [8]. Az ilyen feladatok explicit megoldása is lehetséges bizonyos körülmények között, de a megoldás során a $\mathbf{T}$ mátrix korábbi szerepét egy

$$\mathbf{TAA}^+$$

alakú mátrix veszi át, amelyben $\mathbf{A}^+$ a mátrix ún. Moore—Penrose-féle általánosított inverze [9]. Ha tudnánk: milyen mátrixok rendelkeznek nem negatív Moore—Penrose-féle általánosított inverzzel, további indifferens programozási feladatokat tudnánk értelmezni.

(Beérkezett: 1972. február 8.)

IRODALOM

1. Roy, B.: Problems and methods with multiple objective functions. Mathematical Programming, 1. (1971) 239—266. o.
2. Bod P.: Lineáris programozás több, egyidejűleg adott célfüggvény szerint. MTA Matematikai Kutató Intézetének Közleményei. VIII. B. 4. (1964) 541—556. o.
3. Wintger, G.: Indifferente Optimierungsprobleme. Mathematik und Kybernetik in der Ökonomie. Konferenzprotokoll. II. 3—6. (1964)
4. Bod P.: Megjegyzés G. Wintgen egy tételéhez. MTA III. Osztályának Közleményei. 16. (1966) 275—279. o.
5. Cottle, R. W.—Veinott, A. F. Jr.: Polyhedral sets having a least element. Megjelenés alatt a Mathematical Programming c. folyóiratban.
6. Ben-Israel, A.—Charnes, A.: An explicit solution of a special class of linear programming problems. Operations Research. 16. (1968) 1167—1175. o.
7. Gábor Gy.: Az intervallum programozás: a lineáris programozási feladatok egy speciális osztályának megoldási módszere. SZIGMA, 4. (1971) 117—125. o.
8. Zlobec, S.—Ben-Israel, A.: On explicit solutions of interval linear programs. Israel Journal of Mathematics. 8. (1970) 12—22. o.
9. Penrose, R.: A generalized inverse of matrices. Proc. Cambridge Philos. Soc. 51. (1955) 406—413. o.

ON THE INDIFFERENT PROGRAMMING PROBLEMS

Long the professionals of operations research have paid little attention to the analysis of conflicts of interests and purposes at the modelling of economic decisions. In the last years the interest has increased for mathematical programming models and procedures where more objectives can be considered at the same time [1].

Optimization taking more interests into account simultaneously, in general, leads to decisions of compromise. With these problems, because of the contradicting interests, there is usually no possibility to the introduction of some kind of „complete" ordering on the set of admissible decisions. One must rest satisfied with the application of a „partial" ordering relation. Owing to this, however, the optimization procedures fail to yield a unique solution, but they lead to a subset of the feasible decisions, the elements of which cannot be compared any more by the applied ordering relation. Therefore the question arises, if there are programming problems in which one can receive unique solutions in spite of the fact that one does not work with complete ordering relations. Or to put it another way: can programming problems be given such that the optimal solution is considerably independent on the selection of the objective function

In the article we review some old and recent contributions to answer this question. They come from Wintgen [3], Cottle and Veinott [5], as well as from the author [2, 4].

Finally, it is shown that the interval programming problem [6] which has a full row rank is indifferent for a well determined class of linear functions if the column vector space of the coefficient matrix has a basis that can be non-negatively inverted.

ОБ ИНДИФФЕРЕНТНЫХ ЗАДАЧАХ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Долгое время работники исследования операций обращали сравнительно мало внимания на анализ конфликта интересов и целей, возникающего при моделировании экономических ре шений.

В последние годы возрастал интерес к таким моделям и методам математического программирования, к которых можно принимать во внимание одновременно больше целей [1].

Оптимизация на основе нескольких, одновременно влияющих интересов вообще ведет к компромиссным решениям. При таких задачах, из-за противоположных друг другу интересов вообще нет возможности совершить какую-то «комплексную» систематизацию на множестве допустимых решений. Мы должны согласиться на применение «частичных» релаций систематизации. Однако, из-за этого процессы оптимализации не дают единозначного решения, а ведут к такому подмножеству допустимых решений, элементы которого уже не сопоставимые на основе примененной релации систематизации.

Поэтому вопрос очевиден: существуют ли такие задачи программирования, в которых мы получаем единозначные решения, несмотря на то, что мы работаем с некомплексных релаций систематизации. Или по-другому: можно ли создать такие задачи программирования, в которых оптимальное решение является существенно независимым от выборки целевой функции.

В статье рассматриваются несколько давних и новейших результатов ответа на этот вопрос. Они относятся к Винтгену [3], к Коттлу и Вейнотту [5], а также к автору [2, 4]. В конце показывается, что каждая задача программирования на интервалах, имеющая полную последовательность рангов [6] является индифферентной к хорошо определяемому классу линейных функций, если пространство векторов-столбцов матрикса коэффициентов имеет не отрицательно обратимый базис.