A KVÁZI- ÉS ÁLTALÁNOSÍTOTT HIPERBOLIKUS DISZKONTÁLÁS HOSSZÚ TÁVON[1]

NESZVEDA GÁBOR – DEZSŐ LINDA
„Lendület" Kutatócsoport, Budapesti Corvinus Egyetem – Bécsi Egyetem

Az intertemporális döntések fontos szerepet játszanak a közgazdasági modellezésben, és azt írják le, hogy milyen átváltást alkalmazunk két különböző időpont között. A közgazdasági modellezésben az exponenciális diszkontálás[2] a legelterjedtebb, annak ellenére, hogy az empirikus vizsgálatok alapján gyenge a magyarázó ereje. A gazdaságpszichológiában elterjedt általánosított hiperbolikus diszkontálás viszont nagyon nehezen alkalmazható közgazdasági modellezési célra. Így tudott gyorsan elterjedni a kvázi-hiperbolikus diszkontálási modell, amelyik úgy ragadja meg a főbb pszichológiai jelenségeket, hogy kezelhető marad a modellezés során. A cikkben azt állítjuk, hogy hibás az a megközelítés, hogy hosszú távú döntések esetén, főleg sorozatok esetén helyettesíthető a két hiperbolikus diszkontálás egymással. Így a hosszú távú kérdéseknél érdemes felülvizsgálni a kvázi-hiperbolikus diszkontálással kapott eredményeket, ha azok az általánosított hiperbolikus diszkontálási modellel való helyettesíthetőséget feltételezték.

Kulcsszavak: kvázi-hiperbolikus diszkontálás, általánosított hiperbolikus diszkontálás, intertemporális döntések.

Bevezetés

Az értékek és hasznosságok átváltása a különböző időpontok között alapvetően határozza meg az élet szinte összes területét. A közgazdasági modellezést mind a mai napig Samuelson (1937) *várható diszkontált hasznossági modellje* dominálja. Ez az exponenciális diszkontálásra épül, és az ismert modellek között az egyedüli konzisztens diszkontálási forma (Koopmans 1960). Ezt a gondolatmenetet azonban már régóta kritika övezi (Böhm-Bawerk 1888-1930, Strotz 1955), mivel a tapasztalat nem támasztja alá a használatát. Már a legelső kritikai észrevételekben megemlítik, hogy az emberi természet hajlamos a jelenbeli hasznosságokat felülbecsülni, míg a jövőbeli hasznosságokét aránytalanul alulbecsülni. Később a kísérletek alapján már egyértelművé vált, hogy az elméletben elfogadott egységes konzisztens kamatláb elmélete nem írja le jól az emberi döntések jellegét. Az exponenciális diszkontáláshoz képest számos anomáliát figyeltek meg (Benzion et al. 1989, Thaler 1981). A legjelentősebbek az időinkonzisztencia, a nyereség-veszteség aszimmetria,

---

[1]Beérkezett: 2013. április 22. E-mail: `gabor.neszveda@gmail.com`

[2]A diszkontálást szokás a magyar nyelvben leszámítolásnak is nevezni.

a nagysági hatás, a gyorsítás és lassítás aszimmetriája és a pozitív sorozat preferálása. Az alternatív diszkontálási modellt először állatkísérletek alapján formalizálták (Ainslie 1975, 1992) és a diszkontrátát hiperbolikus formában adták meg.

Ezt többen különböző formában módosították (Mazur 1984, Harvey 1994), de egyik módosított modell sem tudta kellően általánosan megfogni a felfedezett anomáliákat. Ebben hozott újat az *általánosított hiperbolikus diszkontálás* (Loewenstein-Prelec 1992). Az általánosított hiperbolikus diszkontálás egységesen tudta kezelni az anomáliákat az értékfüggvény alkalmazásával. A kilátáselméletben (Kahneman-Tversky 1979) használt értékfüggvény segítségével mind a nyereség-veszteség, mind a nagysági hatás magyarázhatóvá vált, míg az általánosított hiperbolikus megközelítés lehetőséget adott a kísérletekkel megismert emberi viselkedés kellően általános leírására. Viszont ez a diszkontálási függvényforma nehezen kezelhető, így összetettebb modellekben nem jól alkalmazható. Emiatt tudott gyorsan és könnyen teret nyerni a kvázi-hiperbolikus diszkontálás (Laibson 1997), amely az exponenciális diszkontálást kiegészítette egy lineáris jellegű fix költséggel. A kvázi-hiperbolikus diszkontálás hasonló időinkonzisztens viselkedést ír le, mint a hiperbolikus diszkontálás, de egy sokkal egyszerűbb és kezelhetőbb formában.

A kvázi-hiperbolikus diszkontálás alapgondolata, hogy exponenciális diszkontálást követ a döntéshozó, de a jelen felé torzít azzal, hogy egy konstanssal mindent leértékel, ami a jövőben történik (Phepls-Pollack 1968). Mivel a kvázi-hiperbolikus diszkontálás lényegesen kezelhetőbb a modellekben, de egyben megragadja az általános hiperbolikus viselkedés két legfontosabb tulajdonságát (bár nem ragadja meg az anomáliákat), mind a nemzetközi (Laibson 1997, Donoghue-Rabin 2000), mind a hazai szakirodalomban (Nagy 2011) előszeretettel használják a hiperbolikus diszkontálás helyettesítésére.

Cikkünkben azt mutatjuk be, hogy a két diszkontálási modell hosszú távú döntések esetében különböző eredményre jut, főleg sorozatok esetén. Ezért olyan helyzetek modellezésére, ahol hosszú távú kérdések is felmerülnek, nem lehet közelítően helyettesíteni egymással a két diszkontálási függvényt.

A diszkontálási modellek és az adódó anomáliák

Az exponenciális modell

Samuelson (1937) diszkontált hasznossági modellje a legelterjedtebb a közgazdasági elemzésekben és modellezésben. A modell szerint a döntéshozó egy $(c_0, \ldots, c_T)$ fogyasztási tervet akkor és csak akkor preferál egy $(c'_0, \ldots, c'_T)$ fogyasztási tervvel szemben, ha $\sum_{t=0}^{T} \delta^t u(c_t) > \sum_{t=0}^{T} \delta^t u(c'_t)$, ahol δ jelöli a diszkontfaktort és t az időt.

Ezt a modellt szokás exponenciális modellként is hivatkozni, mivel a diszkontfüggvény az exponenciális függvényt követi:

$$\delta^t = \left(\frac{1}{1+r}\right)^t ,$$

ahol r jelöli az egységnyi (egy időszakra felszámított) kamatlábat.

Ez a modell széles körben elterjedt konzisztens tulajdonságai és jól kezelhetősége miatt. Viszont az empirikus eredmények azt mutatták, hogy a valós emberi döntések jellegét nem írja le helyesen.

A legfontosabb anomáliák

Azonos különbség hatása

Ha megvizsgáljuk a diszkontált hasznossági modellt, akkor az alapján a két különböző időpontbeli fogyasztás közötti preferenciát csak a két időpont között eltelt idő határozza meg (Loewenstein-Prelec 1992). Ez adja az „időben konzisztens" tulajdonságát, ami kulcskérdés a diszkontált hasznosság axiomatikus levezetésében (Koopmans 1960). De a gyakorlatban gyakran megfordulhat a preferencia két késleltetett hasznosság között, ha mindkettőt azonos mértékben eltoljuk. Thaler (1981) híres példája jól rámutat erre: valaki könnyen preferálhat egy almát ma, holnapi kettővel szemben, ugyanakkor inkább választja a két almát 51 nap múlva, mint az egyet 50 nap múlva.

Az azonos különbség hatása (*The Common Difference Effect*) inkonzisztens viselkedéshez vezet, ami az egyik legerősebb anomália. A megfigyelések szerint a legerősebb inkonzisztencia a jelen és a jövőbeli hasznosságok között van (*Present Bias*), azaz a jelen felé torzítunk leginkább. Ez egyben azt is jelenti, hogy minél hosszabb időintervallumról van szó, annál jobban csökken az egységnyi diszkontráta.

Formalizálva: Ha egy t idő elteltével kapott x_1 hasznosságot ekvivalensnek tart egy $t' > t$ idő elteltével kapott $x_2 > x_1$ hasznossággal, abból következik, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ idővel eltolva t-t és t'-t, a később kapott nagyobb hasznosságot jobbra értékeli. Azaz ha $U(x_1, t) = U(x_2, t')$, akkor $U(x_1, t + \varepsilon) \leq U(x_2, t' + \varepsilon)$.

Nagysági hatás

A nagysági hatás (*Absolute Magnitude Effect*) alapján az emberek a nagyobb értékeket alacsonyabb kamatrátával diszkontálják, mint a kisebb értékeket (Thaler 1981). A hatás magyarázata és modellezése nehezen megoldható. Az általánosított hiperbolikus modell az értékfüggvény (Kahneman-Tversky 1979) megközelítéssel, míg Benhabib et al. modellje (Benhabib et al. 2010) az egyszeri fix költség felszámításával magyarázza a nagysági hatást. Formalizálva: ha van két kis hasznosság (jelölje a „k" felső index) különböző időpontokban és van két nagy hasznosság („n"-nel jelölve) ugyanabban a két időpontban, s ezek ekvivalens értéket képviselnek a döntéshozónak, akkor az eltelt idő a kis hasznosságra gyakorol nagyobb százalékos hatást, azaz a kis hasznosságnál nagyobb az elvárt hozam. Azaz, ha $t' > t$ és $U(x_1^{\mathrm{k}}, t) = U(x_2^{\mathrm{k}}, t')$ és $U(x_1^{\mathrm{n}}, t) = U(x_2^{\mathrm{n}}, t')$, akkor szükségszerűen

$$\frac{U(x_2^{\mathrm{n}})}{U(x_1^{\mathrm{n}})} < \frac{U(x_2^{\mathrm{k}})}{U(x_1^{\mathrm{k}})} \; .$$

Nyereség-veszteség aszimmetria

A klasszikus megközelítésben a feltételezések között szokott szerepelni, hogy mind a nyereségeinket, mind a veszteségeinket a piaci kamatláb alapján diszkontáljuk. A kisérletek alapján viszont a nyereségeinket nagyobb kamatláb mellett diszkontáljuk, mint a veszteségeinket (Loewenstein 1987): ez a nyereség-veszteség aszimmetria (*Gain-Loss Asymmetry*). Formalizálva: ha két időpont közötti két hasznosság ekvivalens egy döntéshozónak, akkor a nyereség hozama nagyobb, mint a veszteségé. Azaz, ha $t' > t$, a nyereség felső indexe „n”, és a veszteségé „v”, valamint: $U(x_1^{\mathrm{n}}, t) = U(x_2^{\mathrm{n}}, t')$ és $U(x_1^{\mathrm{v}}, t) = U(x_2^{\mathrm{v}}, t')$, akkor

$$\frac{U(x_2^{\mathrm{n}})}{U(x_1^{\mathrm{n}})} < \frac{U(x_2^{\mathrm{v}})}{U(x_1^{\mathrm{v}})} \, .$$

Késleltetés és felgyorsítás aszimmetria

Scholten és Read (2011) a következő példával mutatja be a késleltetés és felgyorsítás aszimmetriáját (*Delay-Speedup Asymmetry*). Képzeljük el, hogy megrendeltünk egy csomagot. Ha megkérdeznék, hogy mekkora kompenzációt lennénk hajlandóak elfogadni, azért mert a csomag késik egy hetet, akkor az elvárt kompenzáció az egy hét késésért lényegesen nagyobb, mint amit azért lennénk hajlandóak fizetni, hogy egy héttel korábban kapjuk azt meg. Formalizálva: ha egy adott x hasznosságot egy adott t időponthoz képest $\varepsilon > 0$ időintervallummal eltolunk, akkor annak a hozama magasabb, mint ha ezzel az $\varepsilon > 0$ időintervallummal előrébb hozzuk. Azaz

$$\frac{U(x, t+\varepsilon)}{U(x,t)} > \frac{U(x,t)}{U(x, t-\varepsilon)}$$

Eloszlási hatás

A racionális döntéshozó a hamarabb elérhető hasznosságot preferálja az azonos mértékű későbbivel szemben. Ezzel szemben a kísérletek rámutatnak az eloszlási hatásra (*Preference For Spread*). Az eloszlási hatás szerint a döntéshozó preferálja, ha egyenletesen oszlik el a fogyasztási pálya. Például, ha a résztvevők dönthettek, hogy a következő három hét során mikor használják fel az ajándékba kapott éttermi kuponjukat, akkor a többség a második hetet választotta, míg ha két kupont is fel tudott használni, akkor az első és a harmadik hetet (Frederick et al. 2002).

Növekvő sorozat preferálása

A növekvő sorozatok preferálása (*Preference for Improving Sequence*) azt jelenti, hogy az emberek, ha megválaszthatják a bevételeik kifizetési sorozatát, akkor a növekvőt preferálják a csökkenővel vagy állandóval szemben még akkor is, ha racionális feltevések mellett nem azt kellene (Frederick et al.

2002). Ez a hatás leginkább a bérezési modelleknél merült fel, ahol a munkavállaló inkább egy növekvő bért akar kisebb kezdeti bérrel, mint egy csökkenőt, ahol a kezdeti fizetése lenne a magasabb (Loewenstein–Sicherman 1991).

Hiperbolikus modellek

A jelenséget először állatkísérletekben figyelték meg. A kísérletek alapján az állatok inkább választják a korábbi kisebb, mint a későbbi nagyobb jutalmat. Az itt megfigyelt adatok alapján a diszkontfaktort először a legegyszerűbb hiperbolikus formában adták meg (Ainslie 1975).

$$\delta = \frac{1}{t} \, ,$$

ahol δ jelöli a diszkontfaktort (a jövőbeli eseményeket ezzel a számmal szorozva kapjuk a jelenbeli értéküket) és t az időt.

Később az emberek viselkedésének megfigyelése alapján az egy paraméteres modellt javasolták (Mazur 1984)

$$\delta = \frac{1}{1+kt} \, ,$$

ahol k a paramétert és t az időt jelöli.

Később számos hiperbolikus függvényformát megvizsgáltak, hogy megtalálják a kellően erős magyarázó erővel bírót. Például az arányos (proportional) hiperbolikus diszkontálást (Harvey 1994)

$$\delta = \frac{1}{k+t} \, ,$$

ahol k jelöli a paramétert és t az időt.

Ezek a modellek mind leírták az emberek időinkonzisztens viselkedését, de az anomáliákra nem adott választ egyik sem. Ráadásul egyik sem ragadta meg elég erősen a jelen felé való torzítást.

Az általánosított hiperbolikus diszkontálás

A hiperbolikus diszkontálási modellek jól megragadták az inkonzisztens viselkedést és jól illeszkedtek az állatkísérletekben megfigyelt adatokra is, de számos empirikus megfigyelést nem tudtak magyarázni. Többek között nem tudták magyarázni a nagysági, nyereség-veszteség és a késleltetés-gyorsítás anomáliát sem.

Ezeket a hiányosságokat oldotta meg *az általánosított hiperbolikus diszkontálás modellje* (Loewenstein-Prelec 1992). Az általánosított hiperbolikus diszkontálás modell két részből áll, melyben a kilátás elmélet (Prospect Theory) (Kahneman-Tversky 1979) alapján vett értékfüggvény megközelítéssel tudja magyarázni az anomáliákat, míg az általánosított hiperbolikus diszkontálási függvény segíti az átváltást két időpont között

$$U(C_1, t_1, C_2, t_2, \ldots, C_n, t_n) = \sum_{i=1}^{n} v(C_i)\varphi(t_i) \, ,$$

ahol $\varphi(t_i)$ jelöli a diszkont függvényt és $v(C_i)$ jelöli az értékfüggvényt.

Ez alapján egy fogyasztási pálya hasznossága megegyezik a fogyasztások értékfüggvényével számolt értékeinek diszkontált összegével. A diszkontálási függvényt pedig a következő alakban szokás felírni

$$\varphi(t) = (1 + \alpha t)^{-\beta/\alpha} , \quad \alpha, \beta > 0 ,$$

ahol α jelöli, hogy mennyiben tér el a döntéshozó az exponenciális diszkontálástól. Általánosságban kijelenthető, hogy α növekedésével nő a jelen felé a torzítás. Míg ha α tart 0-hoz, akkor $\varphi(t) = e^{-\beta t}$ és így β a piaci kamatláb. β leginkább a piaci kamatláb értékeként értelmezhető.

A modell előnye, hogy magyarázza a nagysági, nyereség-veszteség és a késleltetés-gyorsítás anomáliát is. A jelen felé való torzítást és az időinkonzisztenciát a diszkontálási függvény írja le, olyan módon, hogy annak mértéke és jellege egyénenként tud változni a paraméterek segítségével. Például a kilátáselmélet értékfüggvénye alapján kijelenthető, hogy azért diszkontáljuk a nyereségeket jobban, mint a veszteségeket, mert a nyereségek értékfüggvényének meredeksége kisebb, mint a veszteségek értékfüggvényének meredeksége. A nyereség-veszteség aszimmetriára vezethető vissza a késleltetés-gyorsítás aszimmetriája is.

A számos hiperbolikus diszkontálás között érdekes közös vonást tár fel Ahlbrecht és Weber (1997) munkája, amely szerint a hiperbolikus diszkontálási függvény általános alakban:

$$\delta = \frac{1}{(1 + r)^{\alpha(t)}} ,$$

ahol $\alpha(t)$ az időérzékelést jelenti és r a kamatlábat.

Ha $\alpha(t)$ lineáris, azaz lényegében t-vel egyenlő, akkor visszakapjuk az exponenciális diszkontálást. Ha $\alpha(t)$ konkáv, akkor a hiperbolikus diszkontálásokat kapjuk vissza. Ezen belül:

- Ha $\alpha(t) = \frac{\ln(1+kt)}{\ln(1+r)}$, akkor Mazur (1987) modelljét kapjuk meg: $\delta = (1 + kt)^{-1}$.
- Ha $\alpha(t) = \frac{h \ln(1+gt)}{g \ln(1+r)}$, akkor az általánosított hiperbolikus diszkontálást kapjuk meg: $\delta = (1 + gt)^{-h/g}$ (a paramétereket most g-vel és h-val jelöltük, hogy ne keveredjen az időérzékelés paraméterével a jelölés).

Ez a formalizálás jól rámutat arra, hogy az időérzékelés módja lehet az egyik magyarázó erő a hiperbolikus diszkontfüggvények mögött. Ez alapján a hiperbolikus diszkontfüggvények időérzékelése konkáv, szemben például az exponenciálissal, ahol lineáris.

A kvázi-hiperbolikus diszkontálás

A kvázi-hiperbolikus diszkontálást alapvetően először a generációk közötti döntéshozatal makroszintű modellezésére találták ki (Phelps – Pollack 1968).

Phelps és Pollack (1968) alapgondolata szerint az exponenciális diszkontálást használva mindenki úgy dönt, hogy a saját és az összes többi generációnak együttesen a legjobb legyen. Viszont a jelenlegi generáció leértékeli a jövőbeli generációk hasznosságát, és így torzít a saját értékei felé. A kvázi-hiperbolikus modell ezt egy $\beta < 1$ szorzóval veszi figyelembe

$$\delta = \beta \frac{1}{(1+r)^t} ,$$

ahol $t > 0$ és csak egész számokon van értelmezve, r pedig a kamatláb.

A modell egyszerűsége és a jól kezelhetősége miatt később más jelenségek vizsgálatakor is használni kezdték, és kvázi-hiperbolikus diszkontálásként vált ismertté. Laibson (1997) használta először ezt a függvényformát kifejezetten a hiperbolikus diszkontálás hatását vizsgálva a makrogazdasági folyamatokban. Később általánossá vált az a felfogás, hogy a modellezés során az empirikus eredményekre legjobban illeszkedő és azokat legjobban megragadó általánosított hiperbolikus diszkontálás helyettesíthető a kvázi-hiperbolikus függvénnyel, mivel a lényegi részét ugyanúgy megfogja. Vagyis a helyettesítéskor csak bizonyos tulajdonságok teljesülését követelik meg, miközben egyértelmű, hogy a két függvényforma alapjaiban más, így szó sem lehet egyszerűsítő átalakításról. Miközben a helyettesítés egyre elterjedtebb szakmai elemzésekben, a mai napig nem született elemzés arról, hogy milyen esetben működik, és milyen esetekben nem alkalmazható a kvázi-hiperbolikus modell az általános hiperbolikus helyettesítéseként. Cikkünk további részében ezt vizsgáljuk.

A helyettesíthetőség alapgondolata

A kvázi-hiperbolikus diszkontálással való helyettesítést Laibson (1997) már említett cikkére lehet visszavezetni, melyben ő maga így érvel a kvázi-hiperbolikus diszkontfüggvény használata mellett: „Ez a diszkontálási struktúra jól utánozza a hiperbolikus diszkontálási függvények kvalitatív tulajdonságait, miközben megtartja az exponenciális függvény könnyű kezelhetőségét” (Laibson 1997, 450. o.). A későbbiekben erre hivatkozva tekintik helyettesíthetőnek az általánosított hiperbolikus függvényt és a kvázi-hiperbolikus függvényt (Angeletos 2001, Laibson 2007, Nagy 2011).

Laibson a cikkében csak két tulajdonságot említ, amit meg tud ragadni a kvázi-hiperbolikus diszkontálás. Az egyik az inkonzisztens viselkedés a jelen és a jövőbeli vagy akár két jövőbeli preferencia között. A másik az idő hosszának növekedésével csökkenő egységnyi diszkontráta. Azaz az exponenciális δ^t diszkontálás esetén $-f'(t)/f(t)$-t egy konstans diszkontráta jellemzi ($\log(1/\delta)$), míg az általánosított hiperbolikus esetén a diszkontráta folyamatosan csökken, ha az idő hossza nő, a $\beta/(1+\alpha t)$ függvényt követve.

Ezek az állítások nem garantálják, hogy a két módszer minden téren elegendően hasonló következtetésekre jut.

Sorozatok diszkontálása

Hosszú távú döntések modellezése során sokszor nem egyszerűen egy távoli esemény diszkontálását feltételezik, hanem még tovább mennek és sok egymást követő hasznosságét. Hosszú távú döntést vizsgálunk például akkor is, amikor a döntéshozó egy életciklus modellben dönt a várható jövedelmei és kiadásai függvényében, vagy hosszú távú egyensúlyok elemzésekor, vagy olyan összefüggések esetében, mint például az örökjáradék. Ezeknél nem egyszerűen hosszú távú döntésekről van szó, hanem sorozatok értékeléséről is. A sorozatok pontos diszkontálását még nehezen kezeli a szakirodalom, de az biztos, hogy több hatás is torzítja (eloszlási, növekvő sorrend), ami miatt nem tekinthetünk rá úgy, mint a sorozat tagjai diszkontált értékeinek összegére.

Az örökjáradék példáján azt mutatjuk be, hogy az általánosított hiperbolikus diszkontálás helyettesítése a kvázi-hiperbolikus diszkontálással viszont még akkor is problémákhoz vezet, amennyiben úgy tekintjük, hogy a döntéshozó egymástól függetlenül egyenként diszkontálja a jövőbeli sorozat elemeit.

Az örökjáradék

Az örökjáradék az egyik legegyszerűbb sorozat. Az örökjáradék esetében minden időszakban kapunk a végtelenségig egy adott C összeget és az a kérdés, hogy ez mennyit ér nekünk a jelenben. Másképp fogalmazva mekkora a nettó jelenértéke egy ilyen örökjáradéknak. Az exponenciális diszkontálást használva erre egy viszonylag egyszerű formulát kapunk, ahol egy örökjáradék értéke C/r. (Egyszerű végtelen mértani sor összegképlet alapján, ahol r a kamatláb.)

Ezek után vizsgáljuk meg a kvázi-hiperbolikus diszkontálást. Ebben ez esetben az eredmény $\beta C/r$ lesz, ahol β a kvázi-hiperbolikus modellből ismert, a jelen felé torzítás mértékét adja meg. Ez szintén egy egyszerű, jól megfogható formula.

Miközben az általánosított hiperbolikus modell alapján még az sem garantált, hogy a nettó jelenérték egy véges érték, addig a kvázi-hiperbolikussal számolt nettó jelenérték mindig egy véges érték.

Állítás. *Amennyiben az általánosított hiperbolikus modell paramétereire igaz az, hogy β szigorúan nagyobb, mint α, akkor az örökjáradék nettó jelenértéke véges érték, míg ellenkező esetben nem.*

Bizonyítás. A kérdés az, hogy a $\sum_t (1+\alpha t)^{-\beta/\alpha}$ végtelen sor mikor konvergens és mikor nem. Konvergens akkor és csak akkor lesz, amikor a $\sum_n n^{-p}$ $(p \in \mathbb{R})$ konvergens. A Cauchy-féle kondenzációs teszt szerint monoton fogyó, pozitív tagú sorokra $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ véges akkor és csak akkor, ha $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ véges, ami ebben az esetben azt jelenti, hogy $p > 1$. Tehát az eredeti egyenlet esetében a $\beta > \alpha$ feltételnek kell teljesülnie, hogy konvergens legyen a sorösszeg. □

Összefoglalva, az általánosított hiperbolikus diszkontálás esetén az örökjáradék akkor és csak akkor konvergens, ha $\beta > \alpha$, míg a kvázi-hiperbolikus esetében mindig konvergens. Így az örökjáradék esetében az általánosított hiperbolikus diszkontálás alapjaiban juthat más következtetésre, mint a kvázi-hiperbolikus.

Hosszú távú határérték

Ahlbrecht és Weber (1997) modellje alapján jól látható, hogy a kvázi-hiperbolikus diszkontálás az idő lineáris érzékelését feltételezi egy szakadási ponttól eltekintve, míg az általános hiperbolikus modell az idő konkáv érzékelését feltételezi ($\alpha = 0$ kivételével). Már önmagában ez is jelzi, hogy hosszú távon a két függvény drasztikusan másképp számol.

A különbség az egységnyi kamatlábak között akkor a leglátványosabb, ha t tart végtelenbe. A kvázi-hiperbolikus diszkontálás egységnyi kamatlába r-be tart:

$$\delta = \lim_{t\to\infty} \sqrt[t]{\beta \frac{1}{(1+r)^t}} = \frac{1}{1+r} \,.$$

Az általánosított hiperbolikus diszkontálás egységnyi kamatlába ezzel szemben 0-ba tart ($\alpha > 0$), így

$$\delta = \lim_{t\to\infty} \sqrt[t]{\frac{1}{(1+\alpha t)^{\beta/\alpha}}} = \frac{1}{1} = 1 \,.$$

Nagyon hosszú távon az általánosított hiperbolikus modell egységnyi kamatlába 0-ba tart, így egységnyi időért a végtelenben már nem kér semmit. A kvázi-hiperbolikus diszkontálásnál is folyamatosan csökken az egységnyi kamatláb, de legalább egy konstans $r > 0$ kamatlábat mindig felszámít.

Hosszú távú különbségek becslése megfigyelések alapján

Ahhoz, hogy hosszú távra megbecsüljük a modellek értékeit, egy kísérletet végeztünk. Kísérletünkben egyetemistákat kérdeztünk meg, hogy egy adott nagyságú nyereséget vagy veszteséget mekkora összegért lennének hajlandóak időben eltolni. Ezek alapján kaptuk meg a több mint 100 résztvevőnél ($N = 113$), hogy 5000, 85 000, 1 200 000 forint esetén mennyiért lennének hajlandóak elfogadni 3, 6, 9, 12, 18 hónapnyi csúszást (veszteség esetén menynyit lennének hajlandóak maximum fizetni a csúszásért). Ezen értékek alapján egy átlagos kamatlábat kaphatunk mind az összeg nagysága, a nyereség-veszteség állapota, mind az idő múlása tekintetében. A kamatlábakból pedig kiszámolhatjuk az egységnyi diszkontrátát, amely a három hónapos kamatlábnak felel meg. Ezzel különböző időtávra felszámolt kamatokat egységesen össze tudunk hasonlítani. Ha megvizsgáljuk ezeket az átlagos egységnyi diszkontráta értékeket, akkor azok jól reprezentálják az eddig már ismertetett anomáliákat, tehát összhangban vannak az eddigi megfigyelésekkel.

	3 hónap	6 hónap	9 hónap	12 hónap	18 hónap
Nyereség: 5000 HUF	0,23	0,18	0,15	0,12	0,11
Veszteség: 5000 HUF	0,19	0,12	0,10	0,09	0,07
Nyereség: 85 000 HUF	0,10	0,08	0,08	0,06	0,05
Veszteség: 85 000 HUF	0,11	0,06	0,05	0,04	0,03
Nyereség: 1200 000 HUF	0,10	0,09	0,06	0,05	0,04
Veszteség: 1200 000 HUF	0,06	0,05	0,03	0,03	0,02

1. táblázat. Egységnyi diszkontráta átlaga (3 hónap). *Forrás:* Saját készítésű.

Benzion és társai (1989), az adatok szempontjából egyik leghivatkozottabb cikkükben hasonló értékekre jutottak. Ez a cikk elsősorban arra irányul, hogy kísérletekkel bizonyítsa, hogy az emberek különböző körülmények között (nyereség-veszteség, pénz nagysága...) más-más kamatlábat használnak. Így egyértelműen elvethető az a pénzügyi feltételezés, hogy a döntéshozók minden helyzetben a piaci kamatlábat használják a diszkontálásra. Összesen 204 egyetemista diák válaszai alapján kapták az alábbi táblázatokat, ami jelen elemzésünk során ideális arra a célra, hogy a vizsgált összefüggéseket egy független adathalmazon is vizsgáljuk a sajátunk mellett.

Nyereség (USD)	0,5 év	1 év	2 év	4 év
40	0,60	0,39	0,26	0,22
200	0,43	0,26	0,23	0,20
1000	0,41	0,28	0,20	0,19
5000	0,18	0,16	0,15	0,12

2. táblázat. Egységnyi diszkontráta (6 hónap) átlaga nyereség elhalasztásánál. *Forrás:* Benzion et al. 1989, 276 o.

Veszteség (USD)	0,5 év	1 év	2 év	4 év
40	0,33	0,22	0,19	0,14
200	0,26	0,17	0,16	0,13
1000	0,22	0,16	0,15	0,12
5000	0,15	0,11	0,09	0,08

3. táblázat. Egységnyi diszkontráta (6 hónap) átlaga veszteség elhalasztásánál. *Forrás:* Benzion et al. 1989, 276 o.

Mindegyik esetben látható a magas kezdeti érték és hogy időben csökken az egységnyi kamatláb. A következőkben a saját és az összehasonlító nemzetközi adatokon egyaránt bemutatjuk az általánosított és a kvázi-hiperbolikus diszkontálás illeszkedését. Mivel mindkét modell két paramétert használ, azonos szabadságfokkal rendelkeznek, így ezt nem kell kiegyensúlyozni, az abszolút eltérés összege kielégítően kifejezi az illeszkedés jóságát.

Először a saját adatokat mutatom be aszerint, hogy veszteségről vagy nyereségről van-e szó, és hogy mekkora összeg kapcsán válaszoltak a résztvevők. Jól látható, hogy a 4. és az 5. táblázatban található 6 esetből 4-szer az általánosított hiperbolikus modell adott jobb illeszkedést, 2-szer pedig a kvázi-hiperbolikus modell. Ami még érdekes, hogy mindegyik esetben $\alpha > \beta$, ami, mint láttuk, azt jelenti, hogy tetszőleges állapotban azt kapjuk eredményül, hogy az általánosított hiperbolikus modellezés esetén egy örökjáradék nem véges szám, míg a kvázi-hiperbolikusnál igen. Tehát a két modell különböző következtetésre jut a tapasztalati adatok alapján kalibrálva.

Nyereség (HUF)	Ált. hiper-bolikus α paraméter	Ált. hiper-bolikus β paraméter	Kvázi-hiper-bolikus β paraméter	Kvázi-hiper-bolikus r kamatláb	Ált. hiper-bolikus abszolút hiba	Kvázi-hiper-bolikus abszolút hiba
5000	0,70	0,26	0,85	0,08	0,10	0,12
85000	0,70	0,13	0,96	0,04	0,05	0,07
1200000	2,57	0,21	0,91	0,02	0,08	0,07

4. táblázat. A modellek paraméterbecslései és az illeszkedés hibái nyereségben a saját kísérlet alapján. *Forrás:* Saját készítésű.

Veszteség (HUF)	Ált. hiper-bolikus α paraméter	Ált. hiper-bolikus β paraméter	Kvázi-hiper-bolikus β paraméter	Kvázi-hiper-bolikus r kamatláb	Ált. hiper-bolikus abszolút hiba	Kvázi-hiper-bolikus abszolút hiba
5000	1,53	0,26	0,87	0,05	0,04	0,09
85000	9,70	0,39	0,92	0,01	0,03	0,03
1200000	2,23	0,11	0,95	0,01	0,01	0,03

5. táblázat. A modellek paraméterbecslései és az illeszkedés hibái veszteségben a saját kísérlet alapján. *Forrás:* Saját készítésű.

A Benzionék cikkében közölt adatok hasonló eredményt mutatnak. A 6. és a 7. táblázatból kiolvashatóan – amelyeket a hivatkozott cikk adataiból számoltunk ki –, az illeszkedés jósága még kiegyenlítettebb, mivel a 8 esetből 4-4 esetben illeszkedik jobban az egyik, illetve a másik modell. Viszont a Benzionék cikkében szereplő adatok alapján is minden esetben $\alpha > \beta$.

Nyereség (USD)	Ált. hiper-bolikus α paraméter	Ált. hiper-bolikus β paraméter	Kvázi-hiper-bolikus β paraméter	Kvázi-hiper-bolikus r kamatláb	Ált. hiper-bolikus abszolút hiba	Kvázi-hiper-bolikus abszolút hiba
40	0,70	0,41	0,85	0,16	0,20	0,05
200	0,32	0,28	0,92	0,16	0,10	0,05
1000	0,29	0,25	0,91	0,14	0,15	0,06
5000	0,44	0,19	0,95	0,10	0,02	0,08

6. táblázat. A modellek paraméterbecslései és az illeszkedés hibái veszteségben a Benzion cikk alapján. *Forrás:* Saját készítésű.

Veszteség (USD)	Ált. hiper-bolikus α paraméter	Ált. hiper-bolikus β paraméter	Kvázi-hiper-bolikus β paraméter	Kvázi-hiper-bolikus r kamatláb	Ált. hiper-bolikus abszolút hiba	Kvázi-hiper-bolikus abszolút hiba
40	0,79	0,29	0,91	0,11	0,05	0,09
200	0,39	0,20	0,94	0,11	0,05	0,05
1000	0,36	0,19	0,95	0,10	0,04	0,06
5000	0,41	0,12	0,96	0,06	0,03	0,01

7. táblázat. A modellek paraméterbecslései és az illeszkedés hibái veszteségben a Benzion cikk alapján. *Forrás:* Saját készítésű.

Kijelenthetjük, hogy mind saját megfigyeléseink, mind a hivatkozott cikk szerint a megfigyelt adatok abba a tartományba esnek, ahol a két diszkontálási modell teljesen más eredményre jut, például egy örökjáradék esetében, ami alátámasztja a két modell helyettesíthetőségének megkérdőjelezhetőségét ilyen típusú problémák esetén. Ez minden olyan esetben komoly problémákat vethet fel, ahol sorozatok értékeléséről van szó és hosszú távú elemek is vannak a sorozatban. A helyettesíthetőség problémája ugyanakkor nem csak sorozatok esetén merül fel. Előfordulhat olyan hosszú távú döntési helyzet, ahol már egyszeri diszkontálás esetén is más eredményre jut a két diszkontálási modell. Ha megvizsgáljuk, hogy a megfigyelt adatokra illesztett modelleknél mennyi idő után érjük el azt az állapotot, hogy az egyik modell (ez mindig a kvázi-hiperbolikus) legalább kétszer akkora kamatot számít fel, mint a másik, azt kapjuk, hogy ez viszonylag hamar megtörténhet.

A Benzion et al. cikk adatai alapján kijelenthető, hogy bármekkora pénzről van szó, és attól is függetlenül, hogy nyereségről vagy veszteségről van-e szó, 7,5 év után már legalább kétszeres a különbség. Saját adatbázisunk eredményei valamivel árnyaltabb képet mutatnak.

Nyereség (HUF)	Negyedév
5000	16
85000	19
1200000	19
Veszteség (HUF)	Negyedév
5000	16
85000	34
1200000	35

8. táblázat. Mennyi idő után lesz legalább kétszeres különbség a két modell kamatrátái között a saját kísérlet alapján. *Forrás:* Saját készítésű.

A 8. táblázatból látható, hogy míg nyereségben kis eltérés van a pénzösszegek nagyságának tekintetében, de 5 év után már minden esetben legalább kétszeres a különbség a két modell között, addig veszteségben már lassabban alakul ki ekkora különbség. Azonban 10 év után már itt is nagyságrendi a különbség, vagyis még az emberek számára fontos időtávon belül kialakul ilyen különbség. A Benzion et al. cikk adatai alapján viszont kijelenthető, hogy 12-13 félév után már kétszeres különbség alakul ki. De itt is megfigyelhető az a tendencia, hogy minél nagyobb összegről van szó, annál később alakul ki ekkora különbség, és az is megfigyelhető, hogy a veszteségben átlagosan szintén később alakul ki ilyen nagy különbség. Tehát mindkét adathalmazon azt a tendenciát láthatjuk, hogy a pénz nagyságának növekedésével jobban hasonlít a két modell eredménye egymásra, illetve azt is, hogy veszteségben inkább hasonlít a két modell következtetése egymásra, mint nyereségben.

Nyereség (USD)	Félév
40	11
200	12
1000	13
5000	12
Veszteség (USD)	Félév
40	11
200	13
1000	13
5000	15

9. táblázat. Mennyi idő után lesz legalább kétszeres különbség a két modell kamatrátái között a Benzion cikk alapján. *Forrás:* Saját készítésű.

Összefoglalás

Cikkünkben a közgazdasági modellezés alapkérdései közé tartozó intertemporális döntések modellezését vizsgáltuk. Míg a szokásos elemzésben a mai napig az exponenciális diszkontálás a legelterjedtebb, annak ellenére, hogy gyenge leíró erővel bír a megfigyelt adatok kapcsán, az erősebb magyarázó erejű modellre igényt tartó elemzők számára rendelkezésre áll az általánosított hiperbolikus diszkontálás, ami viszont modellezési célra nehezen alkalmazható összetett függvényformája miatt. Ezért terjedt el a kvázi-hiperbolikus diszkontálás, amely megragadja az általánosított hiperbolikus diszkontálási modell két legfontosabb tulajdonságát, de úgy, hogy közben könnyen kezelhető marad. Ennek köszönhetően elterjedt gyakorlat az, hogy a kvázi-hiperbolikus diszkontálást használják a modellezés során, helyettesítve az általánosított hiperbolikus megközelítést, ami rövid távú döntéseknél nagyon jól is működik.

Hosszú távú döntések kapcsán azonban a két modell helyettesíthetősége erősen megkérdőjelezhető. Bár a kvázi-hiperbolikus modell jól megragadja az általánosított hiperbolikus modell tulajdonságait rövid távon, azt már hosszú távon csak nagyságrendi különbségekkel tudja megtenni. Tetszőleges tapasztalati eredmények alapján kalibrált modellek esetén igaz, hogy legalább 10 éves döntések esetén (sok esetben már 5 év után) az egyik diszkontálás (a kvázi-hiperbolikus) legalább kétszer akkora kamatlábhoz vezet, mint a másik. Ráadásul a modellezés során sokszor nem két időpont közötti átváltásról van csak szó, hanem sorozatok diszkontálásáról is. A sorozatok diszkontálásánál még kevésbé feltételezhetjük a helyettesíthetőséget a cikkben bemutatott elméleti és tapasztalati eredmények alapján. Bemutattuk például, hogy az örökjáradék kapcsán nem egyszerűen nagy eltérésről van szó, hanem arról, hogy míg a kvázi-hiperbolikus függvény egy véges nettó jelenértéket ad az örökjáradékra, addig az általánosított hiperbolikus modell csak erős feltételek mellett ad véges nettó jelenértéket. Ráadásul a tapasztalati megfigyelések alapján ez az erős feltétel sosem teljesül. Így nem egyszerűen nagyságrendi különbség van a két modell eredménye között, hanem alapjaiban jutnak különböző következtetésre. Az eredmények alapján láthatjuk, hogy a két diszkontálási modell között a helyettesítés hosszú távon nem működik. Ennek függvényében érdemes újragondolni azokat a nemzetközi és hazai modellezési eredményeket, amelyek hosszú távú döntések kapcsán éltek a helyettesítéssel.

Irodalom

1. Ahlbrecht, M. – M. Weber (1997): An Empirical Study of Intertemporal Decision-Making in the Case of Risk. *Management Science*, 43. 813–826.
2. Ainslie, G. (1975): Specious Reward: A Behavioral Theory of Impulsiveness and Impulse Control. *Psychological Bulletin*, 82, 463–469.
3. Ainslie, G. – N. Haslam (1992): Hyperbolic Discounting. In G. Loewenstein and J. Elster (eds.) *Choice over Time*. New York: Russell Sage Foundation.
4. Angeletos, G. – M. D. Laibson – A. Repetto – J. Tobacman – S. Weinberg (2001): The Hyperbolic Consumption Model: Calibration, Simulation and Empirical Evaluation. *Journal of Economic Perspectives*, 15(3), 47–69.

5. Benhabib, J. – A. Bisin – A. Schotter (2010): Present bias, quasi-hyperbolic discounting, fixed cost. *Games and Economic Behavior*, 69, 205–223.
6. Benzion, U. – A. Rapaport – J. Yagil. (1989): Discount Rates Inferred from Decisions: An Experimental Study. *Management Science*, 35, 270–284.
7. Böhm-Bawerk, E. (1888-1930): *The Positive Theory of Capital.* New York: G. E. Stechert and Co.
8. Diamond, P. – Kőszegi B. (2003): Quasi-hyperbolic discounting and retirement, *Journal of Public Economics*, 87, 1839–72.
9. Frederick, S. – G. Loewenstein – T. O'Donoghue (2002): Time Discounting and Time preference: A Critical Review. *Journal of Economic Literature*, 40(2), 351–401.
10. Harvey, C. M. (1994): The reasonableness of nonconstant discounting. *Journal of Public Economics*, 53(1), 31-51.
11. Kahneman D. – A. Tversky (1979): An Analysis of Decision under Risk. *Econometrica*, 47(2), 263–291.
12. Koopmans, T. C. (1960): Stationary ordinal utility and impatience. *Econometrica*, 28, 287–309.
13. Laibson, D. (1997): Golden eggs and hyperbolic discounting. *Quarterly Journal of Economics*, 112, 443–477.
14. Laibson, D. – A. Repetto – J. Tobacman (2007): Estimating Discount Functions with Consumption Choices over the Lifecycle. NBER working paper No. 13314
15. Loewenstein, G. (1987): Anticipation and the Valuation of Delayed Consumption, *Economic Journal*, 97(387), 666–684
16. Loewenstein, G. – R. Thaler (1989): Anomalies: Intertemporal Choice. *Journal of Economic Perspectives*, 3, 181–193.
17. Loewenstein G. – D. Prelec (1991): Decision Making over Time and under Uncertainity. *Management Science*, 37(7), 770–786.
18. Loewenstein, G. – N. Sicherman (1991): Do Workers Prefer Increasing Wage Profiles? *Journal of Labor Economics*, 9(1), 67–84.
19. Loewenstein, G. – D. Prelec (1992): Anomalies in Intertemporal Choice—Evidence and an Interpretation. *Quarterly Journal of Economics*, 107(2), 573–597.
20. Mazur, J. E. (1984): Tests of an equivalence rule for fixed and variable delays. *Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Processes*, 10, 426–436.
21. Nagy B. (2011): A kvázi-hiperbolikus diszkontálás alkalmazása az optimális szabadalmak elméletében, *Szigma*, 42(1-2), 57–78.
22. O'Donoghue, T. – M. Rabin (2000): The economics of immediate gratification. *Journal of Behavioral Decision Making*, 13(2), 233–250.
23. Phepls, E. S. – R. A. Pollack (1968): On the second-best national saving and game-equilibrium growth. *Review of Economic Studies*, 35, 185–199.
24. Read, D. (2003): Intertemporal Choice, Working paper, No. LSEOR 03.58
25. Samuelson, P. (1937): A Note on the Measurement of Utility. *Review of Economic Studies*, 4, 155–161.

26. Scholten, M. – D. Read (2011): Descriptive Models of Intertemporal Choice Part 2: The Delay-Speedup Asymmetry and Other Anomalies. Working paper. Elérhető: http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1849705 vagy http://ssrn.com/abstract=1849705
27. Strotz, R. H. (1955): Myopia and inconsistency in dynamic utility maximization. *Reviewof Economic Studies*, 23, 165–180.
28. Thaler, R. (1981): Some empirical evidence of dynamic inconsistency. *Economics Letters*, 8, 201–207.

QUASI- AND GENERALIZED HYPERBOLIC DISCOUNTING IN LONG TERM

Intertemporal choice is one of the crucial questions in economic modeling and it describes decisions which require trade-offs among outcomes occurring in different points in time. In economic modeling the exponential discounting is the most well known, however it has weak validity in empirical studies. Although according to psychologists generalized hyperbolic discounting has the strongest descriptive validity it is very complex and hard to use in economic models. In response to this challenge quasi-hyperbolic discounting was proposed. It has the most important properties of generalized hyperbolic discounting while tractability remains in analytical modeling. Therefore it is common to substitute generalized hyperbolic discounting with quasi-hyperbolic discounting. This paper argues that the substitution of these two models leads to different conclusions in long term decisions especially in the case of series; hence all the models that use quasi-hyperbolic discounting for long term decisions should be revised if they states that generalized hyperbolic discounting model would have the same conclusion.