Réti János

Az általános gazdasági egyensúly Neumann-modelljének egy játékelméleti megoldása

Bevezetés

Az ebben a dolgozatban ismertetésre kerülő modell Neumann János, magyar származású amerikai matematikustól ered 1932-ből. A modell közeli rokonságban van a Walras-féle egyensúlyi modellek családjával, de bizonyítható a kapcsolata a Leontieff-modellekkel is. Ezekkel az összefüggésekkel részletesen foglalkozik Bródy András doktori disszertációja [3].

A Neumann-modell csak a 60-as években került a közgazdasági kutatások előterébe. Néhány év alatt a téma irodalma igen nagyra nőtt, a vizsgálatok nagy része a Neumann-gazdaság feltételrendszerének és működésének közgazdasági-elméleti kutatására irányult. Itt csak az egyik legkorábbi, Kemeny—Morgenstern—Thompson-tól származó tanulmányra hivatkozunk [2].

A vizsgálatok másik, viszonylag szerényebb része a modell algoritmizálásával foglalkozik, ezzel kapcsolatban Weil nevét említjük [4] [5]. Az algoritmizálás egyáltalán nem triviális feladat, sokáig csak a megoldás egzisztenciáját sikerült bizonyítani. Az itt következő eljárás a kétszemélyes mátrixjátékoknak a lineáris programzásból ismert tételeire épül és kidolgozott szimplex program esetén igen könnyen gépesíthető.

1. A modell ismertetése

A modell matematikai felírása előtt vizsgáljuk meg azokat a főbb közgazdasági feltevéseket, amelyekre a Neumann-modell felépül.

a) Legyen a vizsgált gazdaságban m termék, amelyet n eljárással, tevékenységgel állíthatunk elő. A gazdaság változatlan technológiai összefüggéseit az $A = \{a_{ij}\}$, $B = \{b_{ij}\}$, $(i = 1, \ldots, m)$, $(j = 1, \ldots, n)$ konstans, nem-negatív együtthatómátrixok fejezik ki, ahol a_{ij} a j-edik eljárás egységnyi anyagfelhasználását jelöli az i-edik termékből, b_{ij} pedig azt fejezi ki, hogy a j-edik eljárás egységnyi alkalmazása hány egységet termel az i-edik termékből.

b) A gazdaságban, miután elérte az egyensúlyi állapotot, minőségi változás nincs, a termelés változatlan struktúra mellett évről évre állandó ütemben nő, az árrendszer változatlan.

c) A modell zárt, termékjegyzéke tehát mindazon javakat tartalmazza, amelyeket a gazdaság valamilyen formában felhasznál, azaz elfogyaszt, így tartalmazza a közvetlen munkaráfordításokat és a tőkejavak kopását is (pl. ugyanazon, de különböző évjáratú gépek külön termékek lehetnek). A termelés „természetes tényezői", mint pl. a munkaerő mennyisége vagy a föld, amelyek nem építhetők közvetlenül a modellbe, az időben korlátlanul bővíthetők.

d) A zártságból következik, hogy fogyasztása csak az adott eljárásoknak van. Így külön eljárást képez a lakossági fogyasztás. Hasonló módon kell beépíteni a külkereskedelmet a felhasznált illetve megtermelt jószágok, és az ezeket előállító tevékenységek közé. Így a változatlan technológiai eljárások mellett változatlan fogyasztási és külkereskedelmi struktúrát is feltételezünk.

e) Mivel a megtermelt termékek fogyasztása csak a modell keretein belül folyhat, az improduktív fogyasztás is (a munkaerő kiképzésének ráfordításaival együtt) szerepel a modellben, pl. a fogyasztással együtt, mint a munkaerő újratermelésének anyagi alapja. Az adott szinten el nem fogyasztott termékmennyiséget, mint ,,felesleget'', azonnal a termelés további bővítésére fordítják, azaz beruházzák.

f) A modellben szereplő minden ,,tágabban értelmezett tevékenység'' egységnyi időtartamú. Az ennél hosszabb tevékenységeket fel kell bontani, s az így keletkező félkész termékek tovább növelik a termékek listáját.

g) Feltételezzük, hogy az eljárások tetszőleges terjedelemben alkalmazhatók, ami egyenértékű a javak tökéletes oszthatóságával. Ugyanakkor a linearitásból következik, hogy a gazdaságban csak állandó hozadék létezik.

Jelölje továbbá az $x = \{x_j\}$ az egyes eljárások ismeretlen alkalmazási szintjét, $p = \{p_i\}$ pedig legyen az egyes termékek ismeretlen ára (árindexe). Itt és a továbbiakban mindenhol elhagytuk az i és j indexek mellől a fent meghatározott teljes indexhalmaz részletes kiírását, ezek az indexhatárok az összes képletben értelemszerűen érvényesek.

Modellünk alapösszefüggése a következő egyenlőtlenségrendszer:

$$\alpha \sum_j a_{ij} x_j \leq \sum_j b_{ij} x_j \tag{1.1}$$

valamint

$$\beta \sum_i a_{ij} p_i \geq \sum_i b_{ij} p_i \tag{1.2}$$

ahol α a gazdaság változatlan bővülési együtthatója,

β pedig a nyereség (kamat) tényező, (1 + a nyereségráta).

A fenti feltételek közgazdasági tartalma igen egyszerűen megfogalmazható. (1.1) azt fejezi ki, hogy egyetlen termékből sem lehet többet fogyasztani — az α bővülési együtthatót is figyelembe véve — mint amennyit az adott termékből megtermelnek, (1.2) pedig nem jelent mást, mint hogy egyensúlyi helyzetben egyetlen eljárás sem tartalmazhat több nyereséget, mint amennyit a gazdaságra jellemző átlagos β nyereségtényező meghatároz.

A modell további feltételei az előzőekből következnek az alábbi közgazdasági megfontolások alapján: amennyiben az i-edik termékből többet termelnek, mint amennyit a bővítést is figyelembe véve felhasználnak, akkor az szabaddá válik és ára zérus lesz, azaz:

$$\text{ha} \quad \alpha \sum_j a_{ij} x_j < \sum_j b_{ij} x_j, \quad \text{akkor} \quad p_i = 0, \tag{1.3}$$

a duális oldalon pedig, amennyiben valamely j-edik eljárás kevesebb nyereséget eredményez a β által meghatározott átlagnál, akkor ezt az eljárást a továbbiakban nem fogják felhasználni:

$$\text{ha} \quad \beta \sum_i a_{ij} p_i > \sum_i b_{ij} p_i, \quad \text{akkor} \quad x_j = 0\,. \tag{1.4}$$

Természetesen a termékek árainak, illetve a termelési eljárások szintjeinek nem-negatívaknak kell lenniük, azaz

(1.5)—(1.6) $$p_i, x_j \geq 0,$$

továbbá könnyen belátható, hogy amennyiben egy x illetve p vektor megoldása a modellnek, akkor bármely pozitív skalárral való szorzatuk is megoldás, ezért a további tárgyalás érdekében bevezethetjük a

(1.7) $$\sum_j x_j = 1$$

valamint a

(1.8) $$\sum_i p_i = 1$$

normalizáló feltételeket.

Legyen most az L_x halmaz a pusztán technikailag megvalósítható, vagy röviden a megengedett megoldások halmaza. Technikailag nyilván bármely x vektor megvalósítható, amely eleget tesz az (1.5) és (1.7) feltételeknek, mivel minden ilyen megengedett x termelési struktúrához található olyan α, amely mellett teljesül (1.1) is. Az egyértelműség kedvéért a továbbiakban minden $x \in L_x$ megengedett megoldáshoz tartozzon az a maximális α, melyre teljesül az (1.1), azaz

$$\alpha = \min_i \frac{\sum_j b_{ij} x_j}{\sum_j a_{ij} x_j}, \qquad x \in L_x.$$

A fentiekhez hasonlóan definiálható a megengedett árvektorok L_p halmaza, melynek elemeire az (1.6) és (1.7) feltételeknek kell teljesülnie, és tartozzon valamely $p \in L_p$ megengedett árvektorhoz az a minimális β, amely még kielégíti (1.2)-t, tehát

$$\beta = \max_j \frac{\sum_i b_{ij} p_i}{\sum_i a_{ij} p_i}, \qquad p \in L_p.$$

Feladatunk azon $x^* \in L_x$, $p^* \in L_p$ vektorpár, illetve az ezekhez tartozó α^* és β^* meghatározása, amelyek kielégítik az (1.3) és (1.4) feltételeket is. Az ilyen $[x^*, p^*]$ vektorpárt közgazdaságilag a modell egyensúlyi megoldásának is nevezhetjük, hiszen (1.3) miatt az x^* termelési szerkezet nem implikál p^*-tól eltérő árrendszert, és fordítva, (1.4)-ből következik, hogy a p^* árrendszer nem ösztönöz az x^* termelési struktúra megváltoztatására. Természetes azonban, hogy a megoldásvektorok említett egyensúlyi tulajdonsága csak a modell által leírt gazdaság keretein belül igaz, s a modell egy konkrét megfogalmazása esetén elsősorban a paraméterek közgazdasági interpretálásától függ.

Az (1.1)—(1.8) alatt megfogalmazott modell megoldásának egzisztenciáját Neumann [1] tanulmányában Brouwer fixponttételének egy általánosítása segítségével bizonyította, továbbá kimutatta, hogy bármely $[x^*, p^*]$ egyensúlyi megoldáshoz tartozó α^*-ra és β^*-ra teljesül, hogy $\alpha^* = \beta^*$ és a megoldás ezekre a változókra egyértelmű. A bizonyítás során felhasználta az együtthatómátrixokra vonatkozó következő megszorítást:

$$a_{ij} + b_{ij} > 0.$$

Kemeny, Morgenstern és Thompson a már említett [2] tanulmányukban bizonyították, hogy ez a feltétel egy gyengébb és közgazdaságilag is jobban értelmezhető feltételpárra cserélhető ki:

(1.9.a) minden j-hez található legalább egy olyan i index, amelyre $a_{ij} > 0$, azaz minden eljárásnak van pozitív anyagfelhasználása, és

(1.9.b) minden i-hez található legalább egy olyan j index, melyre $b_{ij} > 0$, tehát minden termék termelhető valamely eljárással.

A modell algoritmusának kidolgozásához a továbbiakban feltételezzük még, hogy az együtthatómátrixokra teljesül a

$$0 \leq a_{ij}; \qquad b_{ij} \leq 1 \tag{1.10}$$

feltétel is. Könnyű belátni, hogy egy alkalmas szorzótényező segítségével ez mindig elérhető.

A Nemann-gazdaság rövid ismertetése után szeretnénk felhívni a figyelmet arra a szoros kapcsolatra, amely a modell és a játékelmélet között van — részben azért is, mert a továbbiakban tárgyalt megoldási algoritmus éppen a kétszemélyes mátrixjátékok elméletének tételein alapul. Erre a kapcsolatra már Neumann is rámutatott dolgozatában, hivatkozva egy a játékelmélettel kapcsolatos korábbi tanulmányára.

Legyen

$$\Phi(x, p) = \frac{\sum_i \sum_j b_{ij} p_i x_j}{\sum_i \sum_j a_{ij} p_i x_j}.$$

Az (1.1) és (1.2) feltételek alkalmas átalakításával könnyen belátható, hogy amennyiben az (1.1)—(1.8) feladatnak van egyensúlyi megoldása, úgy

$$\alpha = \Phi(x, p^*) \leq \Phi(x^*, p^*) \leq \Phi(x^*, p) = \beta, \qquad x \in L_x; \quad p \in L_p \tag{1.11}$$

valamint

$$\alpha^* = \Phi(x^*, p^*) = \beta^*,$$

azaz

$$\alpha^* = \max \alpha, \quad \text{ha} \quad x \in L_x$$

$$\beta^* = \min \beta, \quad \text{ha} \quad p \in L_p.$$

Az (1.11)-ből közvetlenül leolvasható, hogy a feladat nem más, mint egy játékelméleti nyeregpont-probléma megoldása. Abban a speciális esetben, ha az A mátrix minden eleme egységnyi, az (1.5) és (1.8) felhasználásával az eredeti feladat az (1.11)-nek megfelelő

$$\alpha = \sum_i \sum_j b_{ij} p_i^* x_j \leq \sum_i \sum_j b_{ij} p_i^* x_j^* \leq \sum_i \sum_j b_{ij} p_i x_j^* = \beta, \qquad x \in L_x, \, p \in L_p$$

alakra hozható, ahol x_j^* és p_i^* a keresett egyensúlyi megoldások; és ez a probléma pontosan megegyezik a kétszemélyes mátrixjátékok feladatával.

Az eddigiek alapján könnyen belátható, hogy modellünk a következő nemlineáris programozási feladatnak felel meg:

$$x_j \geq 0 \qquad\qquad p_i \geq 0$$

$$\sum_j x_j = 1 \qquad\qquad \sum_i p_i = 1$$

$$\alpha - \frac{\sum_j b_{ij} x_j}{\sum_j a_{ij} x_j} \leq 0 \qquad\qquad \beta - \frac{\sum_i b_{ij} p_i}{\sum_i a_{ij} p_i} \geq 0$$

$$\alpha \ \max! \qquad\qquad \beta \ \min!$$

2. Megoldási algoritmus

Legyen algoritmusunk induló értéke az $\alpha_0 = 0$ és képezzük a következő mátrixot:

(2.1.a) $$c_{ij}^{(t)} = b_{ij} - \alpha_t a_{ij},$$

ahol α_t értékét az

(2.2) $$\alpha_t = \alpha_0 + \sum_{i=0}^{t-1} v_i$$

képlet határozza meg. Megjegyezzük, hogy a (2.1.a) még a következő alakban is felírható:

(2.1.b) $$c_{ij}^{(t)} = c_{ij}^{(t-1)} - v_{t-1} a_{ij}.$$

Tekintsük most azt a kétszemélyes mátrixjátékot, melynek együtthatómátrixa $c_{ij}^{(t)}$. A programozás elméletéből ismeretes, hogy a játékelméleti feladat a következő lineáris programozási primál—duál feladatpár megoldásának felel meg:

$$x_i \geq 0 \qquad\qquad p_i \geq 0$$

$$\sum_j x_j = 1 \qquad\qquad \sum_i p_i = 1$$

(2.3) $$v_{1,t} - \sum_j c_{ij}^{(t)} x_j \leq 0 \qquad\qquad v_{2,t} - \sum_i c_{ij}^{(t)} p_i \geq 0$$

$$v_{1,t} \ \max! \qquad\qquad v_{2,t} \ \min!$$

A (2.3) feladatról ismert, hogy mindig van megoldása, s így a (t) jelölést használva az optimális megoldásokra, felírhatjuk, hogy

$$v_t = v_{1,t} = v_{2,t} = \sum_i \sum_j c_{ij}^{(t)} p_i^{(t)} x_j^{(t)}.$$

v_t ismeretében folytathatjuk az eljárást a (2.1) alapján $c_{ij}^{(t+1)}$ meghatározásával. Iterációnk minden lépésében tehát a (2.3) — lépésenként változó együtthatómátrixú — lineáris programozási feladatot kell megoldanunk.

Az (1.1)—(1.8) által meghatározott eredeti feladatnak abból az említett tulajdonságából, hogy $\alpha^* = \beta^*$ és a megoldás egyértelmű erre a két változóra, következik, hogy eljárásunk a modell megoldását szolgáltatja abban az esetben, ha az v_t sor konvergens. Ekkor ugyanis v_t zérushoz tart, s így (2.3) a következő alakot ölti:

$$x_j \geq 0 \qquad p_i \geq 0 \tag{2.4.a}$$

$$\sum_j x_j = 1 \qquad \sum_i p_i = 1 \tag{2.4.b}$$

$$-\sum_j c_{ij} x_j \leq 0 \qquad -\sum_i c_{ij} p_i \geq 0 \tag{2.4.c}$$

$$\sum_i \sum_j c_{ij} p_i x_j = 0\,. \tag{2.4.d}$$

A (2.4.a)—(2.4.b) egyértelműen megfelel az eredeti modell (1.5)—(1.8) feltételeinek, a (2.4.c)-ben levő egyenlőtlenségrendszer egyszerű átrendezéssel az (1.1), illetve (1.2) alakra hozható, végül a hiányzó (1.3) és (1.4) feltételek teljesülése a (2.4.d)-ből következik egyszerű megfontolások alapján.

3. Az eljárás konvergenciája

A kétszemélyes mátrixjátékok elméletének nyeregpont-tétele értelmében igaz, hogy

$$\sum_i \sum_j c_{ij}^{(t)} p_i^{(t)} x_j \leq \sum_i \sum_j c_{ij}^{(t)} p_i^{(t)} x_j^{(t)} \leq \sum_i \sum_j c_{ij}^{(t)} p_i x_j^{(t)}\,, \qquad x \in L_x;\; p \in L_p, \tag{3.1}$$

ahol a (t)-vel jelölt változók a t-edik iteráció (2.3) feladatának optimális megoldásai.

Vizsgáljuk meg először v_0 értékét. Mivel $\alpha_0 = 0$,

$$v_0 = \sum_i \sum_j b_{ij} p_i^{(0)} x_j^{(0)}\,,$$

ahol $p_i^{(0)}$, $x_j^{(0)}$ optimális megoldásai az

$$\begin{array}{cc}
x_j \geq 0 & p_i \geq 0 \\
\sum_j x_j = 1 & \sum_i p_i = 1 \\
v_{1,0} - \sum_j b_{ij} x_j \leq 0 & v_{2,0} - \sum_i b_{ij} p_i \geq 0 \\
v_{1,0} \text{ max!} & v_{2,0} \text{ min!}
\end{array}$$

feladatpárnak. A B együtthatómátrixra tett (1.9.b) feltétel értelmében, amely szerint B minden sorában van legalább egy pozitív elem, figyelembe véve v_0 maximális tulajdonságát, következik, hogy v_0 biztosan pozitív.

Legyen most a fenti (3.1) egyenlőtlenségben $x_j = x_j^{(t-1)}$ és $p_i = p_i^{(t-1)}$, s így (3.1) jobboldala alapján a következő egyenlőtlenséget írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} v_t &\leq \sum_i \sum_j c_{ij}^{(t)} p_i^{(t-1)} x_j^{(t)} = \sum_i \sum_j c_{ij}^{(t-1)} p_i^{(t-1)} x_j^{(t)} - \\ &- v_{t-1} \sum_i \sum_j a_{ij} p_i^{(t-1)} x_j^{(t)} \leq v_{t-1} \Big(1 - \sum_i \sum_j a_{ij} p_i^{(t-1)} x_j^{(t)}\Big)\,, \end{aligned} \tag{3.2}$$

(3.1) baloldala alapján pedig:

$$v_t \geq \sum_i \sum_j c_{ij}^{(t)} p_i^{(t)} x_j^{(t-1)} = \sum_i \sum_j c_{ij}^{(t-1)} p_i^{(t)} x_j^{(t-1)} - \tag{3.3}$$
$$- v_{t-1} \sum_i \sum_j a_{ij} p_i^{(t)} x_j^{(t-1)} \geq v_{t-1} (1 - \sum_i \sum_j a_{ij} p_i^{(t)} x_j^{(t-1)}).$$

(3.2)-ből és (3.3)-ból közvetlenül következik, hogy amennyiben valamely $v_{t-1} = 0$, akkor v_t értéke minden további lépésben zérus lenne, s így (2.4) alapján α_{t-1}, $x_j^{(t-1)}$, $p_i^{(t-1)}$ megoldása a modellnek. Ebben az esetben eljárásunk tehát véges lépésben szolgáltatja az optimumot.

Vizsgáljuk meg most azt az esetet, ha α végtelen sorozatot alkot. Mivel a fenti megfontolások alapján v_0 biztosan pozitív — (1.10)-ből következik, hogy a (3.2) és (3.3) kifejezésben levő szummák értéke 0 és 1 között van — tehát v_t értéke bármely t-re pozitív, s így felírhatjuk, hogy

$$0 \leq 1 - \sum_i \sum_j a_{ij} p_i^{(t)} x_j^{(t-1)} \leq \frac{v_t}{v_{t-1}} \leq 1 - \sum_i \sum_j a_{ij} p_i^{(t-1)} x_j^{(t)} \leq 1. \tag{3.4}$$

v_t tehát monoton, nemnövekvő sorozatot alkot, ezért elegendő azt bizonyítanunk, hogy a (2.2)-ben meghatározott v_t sor, vagy a megfelelő $\sum_{i=0}^{t-1} v_i$ részletösszeg-sorozat konvergens. Tegyük fel ennek az ellenkezőjét, azaz legyen

$$\lim_{t \to \infty} \alpha_t = \infty.$$

Válasszuk meg ekkor t értékét úgy, hogy

$$\alpha_t = \alpha_0 + \sum_{i=0}^{t-1} v_i > \frac{n}{a_{kl}}, \tag{3.5}$$

ahol n az együtthatómátrixok oszlopainak számát jelöli. Legyen továbbá

$$a_{kl} = \min_{i,j} \{a_{ij} \mid a_{ij} > 0\} \tag{3.6}$$

és képezzük a következő A' mátrixot:

$$A' = \{a'_{ij}\} = \begin{cases} a_{kl} & \text{ha } a_{ij} > 0 \\ 0 & \text{ha } a_{ij} = 0. \end{cases}$$

(2.3)-ból ugyanakkor következik, hogy

$$v_t \leq \sum_j c_{ij}^{(t)} x_j^{(t)} = \sum_j b_{ij} x_j^{(t)} - \alpha_t \sum_j a_{ij} x_j^{(t)} \leq \tag{3.7}$$
$$\leq \sum_j b_{ij} x_j^{(t)} - \alpha_t \sum_j a'_{ij} x_j^{(t)}.$$

Most figyelembe véve, hogy (1.9.a) szerint az A, s így az A' mátrix minden oszlopában kell lennie pozitív elemnek, továbbá, hogy $x^{(t)}$ nem-negatív és normalizált, következik, hogy léteznie kell valamely u sorindexnek, melyre

$$u \in \{1, \ldots, m\}$$

és fennáll, hogy

$$\sum_j a'_{uj} x_j^{(t)} \geq \frac{a_{kl}}{n}. \tag{3.8}$$

A (3.7) reláció természetesen minden i-re fennáll, teljesülnie kell tehát erre a bizonyos u indexre is:

$$v_t \leq \sum_j b_{uj} x_j^{(t)} - \alpha_t \sum_j a'_{uj} x_j^{(t)}.$$

Ebből viszont (1.10), (3.5) és (3.8) felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$v_t < 1 - \frac{n}{a_{kl}} \frac{a_{kl}}{n} = 0.$$

Ez azonban nyilvánvalóan ellentmond (3.4)-nek, s így hibás volt kiinduló feltevésünk, mely szerint α_t értéke tetszőlegesen nagyra választható. Így a v_t sor konvergens, s biztosan zérushoz tart. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a (2.1)–(2.3) alatt megfogalmazott algoritmus konvergens és véges vagy végtelen lépésben a Neumann-modell megoldását szolgáltatja.

A kézirat lezárása után ismertem meg az [5]-ben közölt, szintén a kétszemélyes mátrixjátékokat felhasználó algoritmust. A két módszer közötti lényeges különbség, hogy α értékét nem egy végtelen sor, hanem egy intervallumfelezéses eljárás határozza meg. Az itt közölt eljárás fő előnye a közgazdasági interpretáció lehetősége.

(Beérkezett: 1972. január 19.)

IRODALOM

1. Neumann J.: Válogatott előadások és tanulmányok. Budapest, 1965. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
2. Kemeny J. G.—Morgenstern O.—Thompson G. L.: A generalization of the Von Neumann-model of an expanding economy. Econometrica, 24 (1956), 115—135. o.
3. Bródy A.: Érték és újratermelés. Budapest, 1969. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
4. Weil, R. L., Jr.: An Algorithm for the von Neuman Economy, Zeitschrift für Nationalökonomie, 24 (1964) 371—384.
5. Hamburger, M. J. — G. L. Thompson — R. L. Weil: Computation of Expansion Rates for the Generalized von Neumann Model of an Expanding Economy, Econometrica, 35 (1967), 542—547.

A GAME THEORETICAL SOLUTION TO THE NEUMANN MODEL OF GENERAL ECONOMIC EQUILIBRIUM

The paper deals with a solution algorithm of the Neumann-model of general economic equilibrium. In the model the unknown vector x denotes the levels of the applied production processes, the vector p denotes the prices of the products, α and β denote the growth rate of the economy and its profit (interest) rate, respectively. The non-negative constant coefficient matrices A and B mean the inputs and outputs of the unit application of activities from each product.

The solution algorithm of the model is built on the theory of two-person matrix games. Let e.g., vectors x_t and p_t be the optimal strategies, belonging to the C_t matrix game,

and v_t be the value of this game. Thus, in each step of the algorithm one must solve a pair of primal-dual linear programming problems corresponding with the above matrix game.

$$x_j \geq 0 \qquad\qquad p_i \geq 0$$

$$\sum_j x_j = 1 \qquad\qquad \sum_i p_i = 1$$

$$v_{1t} - \sum_j c_{ij}^{(t)} x_j \leq 0 \qquad\qquad v_{2t} - \sum_i c_{ij}^{(t)} p_i \geq 0$$

$$v_{1t} \text{ max!} \qquad\qquad v_{2t} \text{ min!}$$

Let us determine matrix C_t by means of

$$c_{ij}^{(t)} = b_{ij} - \alpha_t a_{ij} ,$$

where

$$\alpha_t = \alpha_0 + \sum_{i=0}^{t-1} v_i .$$

It is easy to see that this algorithm does solve the Neumann-model if the series v_t is convergent. It can be ensured by the aid of a simple transformation that v_t should constitute a monotone, non-negative sequence and the convergence of the above series of partial sums can also be proved.

РЕШЕНИЕ НЕЙМАН-МОДЕЛИ ОБЩЕГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ ПРИ ПОМОЩИ ТЕОРИИ ИГР

Труд занимается алгоритмом решения Нейман-модели общего экономического равновесия. В модели неизвестный вектор x означает уровни использованных производственных процессов, вектор P — цены на товары, а α и β — индекс роста и фактор прибыли (процента) хозяйства. A и B не-отрицательные, постоянные матрицы коэффициентов, означают затраты и выпуски по различным продуктам единичного применения деятельностей.

Обработанный алгоритм решения модели базируется на теории двух-личных матричных игр. Пусть векторы x_t и P_t — оптимальные стратегии, принадлежащие к матричной игре C_t, а v_t — стоимость этой игры. Значит на каждом шаге алгоритма мы должны решить пару прямых двойственных задач программирования, соответствующих высшей матричной игре.

$$x_j \geq 0 \qquad\qquad p_i \geq 0$$

$$\sum_j x_j = 1 \qquad\qquad \sum_i p_i = 1$$

$$v_{1t} - \sum c_{ij}^{(t)} x_j \leq 0 \qquad\qquad v_{t2} - \sum c_{it}^{(t)} p_i \geq 0$$

$$v_{1t} \text{ max-} \qquad\qquad v_{t2} \text{ min!}$$

Определим матрицу C_t с помощью

$$c_{ij}^{(t)} = b_{ij} - \alpha_t a_{ij}$$

где

$$\alpha_t = \alpha_0 + \sum_{i=0}^{t-1} v_i .$$

Можно легко видеть, что наш алгоритм дает решение модели Неймана, если ряд v_t — сходится. С помощью простой трансформации можно обеспечить, чтобы v_t образовал монотонную не-отрицательную последовательность и можно доказать сходимость последовательности частичных сумм.