Hunyadi László—Hüttl Antónia—Ligeti István

A folytonos és diszkrét megoldás különbsége az egyszektoros dinamikus Leontief modell esetében[1]

A közgazdasági kutatásokban használt matematikai apparátus a legutóbbi évekig jórészt a természettudományokban — főként a fizikában — kialakult és alkalmazott módszereket ölelte fel. Mivel a fizikában már a múlt században széleskörűen alkalmazták a klasszikus analízis, a differenciál- és integrálszámítás, valamint a differenciálegyenletek kezelésének módszereit, a kor közgazdászai számára is adottak voltak és zömében alkalmazásra kerültek ezek a módszerek. Walras óta elfogadott a matematikai közgazdászok körében a gazdasági változók folytonosságának feltételezése a modellek egész sorában. A növekedési modellek, az ökonometriai modellek és a különféle programozási modellek néhány kivételtől eltekintve szinte kizárólag folytonos változókkal dolgoznak és megoldásukban a klasszikus analízis eszközeit használják fel.

Valójában a gazdasági változók a legritkább esetben folytonosak, vagy ha folytonosak is, csupán diszkrét pontokban megfigyelt értékeik állnak rendelkezésre. Sok esetben a folytonosság feltételezése nem okoz számottevő torzítást, előfordul azonban, hogy ez a közelítés nem engedhető meg. Ilyenkor a klasszikus differenciálszámítás helyett a gyakorta kényelmetlenebb differenciaszámítás használható; a módszertani nehézségekért azonban kárpótol az, hogy a modell jobban illeszkedik a valósághoz.

Cikkünkben egy egyszerű, általánosan ismert növekedési modell — a dinamikus Leontief modell — példáján kívánjuk bemutatni a két megoldási módszer és a kapott eredmények közti különbséget.

A cikk három fő részből áll. A bevezetést követő első részben a kiinduló modellt, annak kétféle megoldási módszerét ismertetjük alternatív fogyasztási függvények esetén. A második rész az eredményeket és a két megoldás közti különbséget értékeli, míg a harmadik részben a magyar népgazdaság 1960—1970 évi adatait felhasználva, szemléltető példán mutatjuk be az eredményeket és befejezésül összefoglaljuk a fontosabb következtetéseket.

1. Az egyszektoros dinamikus Leontief modell és megoldása

Leontief dinamikus modellje a következő:[2]

$$x(t) - Ax(t) - B\dot{x}(t) = y(t) \tag{1}$$

[1] A téma a Tervgazdasági Intézetben működő szemináriumon vetődött fel, ezért köszönettel tartozunk dr. Dancs Istvánnak, a szeminárium vezetőjének a kutatásban nyújtott segítségéért és tanácsaiért.

[2] Részletesebb leírása megtalálható pl. Andorka—Dányi—Martos könyvében [1].

ahol:

$x(t)$ a bruttó kibocsátás vektorát,
A a termelő felhasználás mátrixát,
B a beruházási mátrixot,
$\dot{x}(t)$ a termelésnövekmény vektorát,
$y(t)$ a végső felhasználás vektorát jelöli.

A fenti modellnek igen sok változata ismert, ezekre azonban nem szándékozunk kitérni, hiszen ez a modell csupán eszköz arra, hogy rámutassunk a valójában folytonosnak nem tekinthető, mégis folytonosnak feltételezett változók okozta torzításokra. Ezért inkább még jobban egyszerűsítettük a problémát. A gazdaságot egy szektornak tekintve a következő modellt kapjuk:

$$x(t) - \alpha x(t) - \beta \dot{x}(t) = y(t) \tag{2}$$

Kiinduló problémánk: mennyiben vezet a fenti modell alternatív y(t) függvények mellett más x(t) függvényekre, mint a gazdasági valóságot hívebben eíró, de ritkán alkalmazott

$$x(t) - \alpha x(t) - \beta[x(t+1) - x(t)] = y(t) \quad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

modell. A kettő közötti különbség világos: míg a (2) esetében a termelésnövekmény *derivált függvény*, a (3)-ban *függvény differencia*. A (2) modell matematikailag egy inhomogén, állandó együtthatójú lineáris *differenciálegyenlet*, míg a (3) egy ugyanilyen *differenciaegyenlet*.[3]

A kettő közötti különbség részletesebb megvilágítása végett írjuk fel $\dot{x}$(t)-t részletesebben:

$$\dot{x}(\mathrm{t}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

Ez tehát a termelésnek infinitezimálisan kis időegységre vonatkozó növekményét jelenti, míg az $x(t+1) - x(t)$ kifejezés véges, egységnyi idő (pl. év) alatt bekövetkező termelésnövekményt fejez ki. Látható, hogy (3) közelebb áll a valósághoz, mivel $x(t)$-re vonatkozóan csupán diszkrét időpontokban mért adatok állnak rendelkezésre.

Első lépésben tekintsünk el $y(t)$ konkrét alakjától és oldjuk meg a két egyenletet! A differenciálegyenlet megoldása meglehetősen ismert, így csak röviden mutatjuk be. Átrendezve az egyenletet és $1 - \alpha = \gamma$ helyettesítést bevezetve

$$\gamma x(t) - \beta \dot{x}(t) = y(t)$$

adódik, ahol $0 < \gamma < 1$ és $\beta > 0$. Megfelelő integráló tényező alkalmazásával az egyenlet általános megoldása:

$$x(t) = \frac{1}{\gamma} \exp\left[\frac{\gamma}{\beta} \cdot t\right] \cdot \left\{ \int_0^t \exp\left[-\frac{\gamma}{\beta} \cdot z\right] \cdot y(z) \mathrm{d}z + C \right\}, \tag{4}$$

és $x(0) = x_0$ kezdeti feltétel mellett a megoldás a következő formát ölti:

$$x(t) = \frac{1}{\gamma} \exp\left[\frac{\gamma}{\beta} \cdot t\right] \cdot \left\{ \int_0^t \exp\left[-\frac{\gamma}{\beta} \cdot z\right] y(z)\, \mathrm{d}z + \gamma x_0 \right\}. \tag{5}$$

[3] A modellben a paramétereket állandónak tekintettük, matematikai szempontból azonban nem okoz különösebb problémát, ha α és β helyett $\alpha(t)$ és $\beta(t)$ szerepel az egyenletben.

A differenciaegyenlet megoldását célszerű kissé részletesebben bemutatni. Elöljáróban bevezetünk néhány jelölést.

Legyen I az egységoperáció, amelyre nézve

$$I\,x(t) = x(t)$$

ε az eltolásoperáció, amelynek definíciója:

$$\varepsilon\,x(t) = x(t+1)$$

és D a differenciaoperáció, amelynek értelmezése:

$$D\,x(t) = x(t+1) - x(t)$$

Könnyen belátható a differenciaoperáció és az eltolásoperáció néhány fontos tulajdonsága, nevezetesen

$$D\,x(t) = (\varepsilon - I)\,x(t)$$

$$\varepsilon^2 x(t) = \varepsilon\big(\varepsilon\,x(t)\big) = \varepsilon\big(x(t+1)\big) = x(t+2)$$

és általában

$$\varepsilon^h x(t) = x(t+h).$$

A továbbiakban szükségünk lesz még D^{-1}-re, amelyet a következőképpen definiálunk:

$$(D^{-1}D)\,x(t) = I\,x(t) = x(t)$$

Belátható, hogy D^{-1} – akárcsak a határozatlan integrál – nem egyértelműen meghatározott, hiszen tetszőleges (egy szerint periodikus), függvény hozzáadásával olyan D^{-1}-ek kaphatók, amelyek kielégítik a fenti relációt. Ezért a számítások során szükségünk van a „határozott összegezésre", amely a határozott integrál megfelelője, és amelyet a következő módon vezetünk be:

$$[\varepsilon^k + \varepsilon^{k+1} + \ldots + \varepsilon^n]\,D\,x(t) = [\varepsilon^{n+1} - \varepsilon^k]\,x(t).$$

Mindkét oldalra D^{-1}-t alkalmazva

$$[\varepsilon^k + \varepsilon^{k+1} + \ldots + \varepsilon^n]\,x(t) = D^{-1}[\varepsilon^{n+1} - \varepsilon^k]\,x(t) = D^{-1}[x(n+1) - x(k)]$$

adódik, azaz más felírással

$$[D^{-1}x(t)]_k^{n+1} = \sum_{t=k}^{n} x(t) \tag{6}$$

ahol $n > k$, n és k természetes számok.

Ennek segítségével a (3) differenciaegyenlet könnyen megoldható. A korábbiakhoz hasonlóan

$$\gamma\,x(t) - \beta\,D\,x(t) = y(t)$$

$$\gamma\,x(t) - \beta\,x(t+1) + \beta\,x(t) = y(t)$$

és innen

$$(\gamma + \beta)\,x(t) - \beta\,x(t+1) = y(t) \tag{7}$$

$x(t)$ együtthatójával végigosztva

$$x(t) - \frac{\beta}{\gamma+\beta}\,x(t+1) = \frac{1}{\gamma+\beta}\,y(t)$$

alakot kapunk. Alkalmas számmal végigszorozva mindkét oldalt a baloldalon teljes differenciát kapunk, és ekkor a megoldás már egyszerű. Ez az alkalmas szorzó itt $-\left(\frac{\beta}{\gamma+\beta}\right)^t$ lesz, ekkor

$$\left(\frac{\beta}{\gamma+\beta}\right)^{t+1}\cdot x(t+1)-\left(\frac{\beta}{\gamma+\beta}\right)^{t}x(t)=-\frac{1}{\gamma+\beta}\cdot\left(\frac{\beta}{\gamma+\beta}\right)^{t}y(t)$$

$$D\left[x(t)\cdot\left(\frac{\beta}{\gamma+\beta}\right)^{t}\right]=-\frac{1}{\gamma+\beta}\cdot\left(\frac{\beta}{\gamma+\beta}\right)^{t}y(t) \tag{8}$$

és

$$\left(\frac{\beta}{\gamma+\beta}\right)^{t}x(t)=D^{-1}\left[-\frac{1}{\gamma+\beta}\cdot\left(\frac{\beta}{\gamma+\beta}\right)^{t}y(t)\right].$$

Ezt az előbbiek szerint megoldva, átrendezve és az $x(0)=x_0$ kezdeti feltétel alkalmazásával a következő megoldás adódik:

$$x(t)=-\frac{1}{\gamma+\beta}\cdot\left(\frac{\beta}{\gamma+\beta}\right)^{-t}\left\{\sum_{i=0}^{t-1}\left(\frac{\beta}{\gamma+\beta}\right)^{i}y(i)-x_0(\gamma+\beta)\right\}. \tag{9}$$

Ez a megoldás az (5) megoldással analóg, de láthatóan nem azonos vele. Hogy az eltérés világosabb legyen, konkrét formát adunk a végső kibocsátás $y(t)$ függvényének. Három esetet vizsgálunk:

a) $y(t)=\delta_1 t+y_0$, azaz a végső felhasználás időfüggvénye (trendje) lineáris;
b) $y(t)=y_0$, azaz a végső felhasználás konstans (ez az előző speciális esete $\delta_1=0$ esetében);
c) $y(t)=y_0\exp[\delta_2 t]$, azaz a végső felhasználás trendje exponenciális.

A három változat közül csupán a lineáris esetre mutatjuk be azt a lépést, amely némiképp eltér a szokványos megoldásoktól, egyébként csak az eredmények közlésére szorítkozunk.

a) Lineáris $y(t)$ esetében a differenciálegyenlet megoldásaként a következő függvény adódott:

$$x(t)=\frac{y_0+\delta_1 t}{\gamma}+\exp\left[\frac{\gamma}{\beta}\cdot t\right]\cdot\left\{x_0-\frac{y_0}{\gamma}-\frac{\delta_1\beta}{\gamma^2}\right\}+\frac{\delta_1\beta}{\gamma^2} \tag{10}$$

Ugyanezen $y(\mathrm{t})$ esetében a differenciaegyenlet megoldásához a

$$\sum_{i=0}^{t-1}\left(\frac{\beta}{\gamma+\beta}\right)^{i}(\delta_1 i+y_0)$$

összegezést kell elvégezni. Voltaképpen ez az egyetlen lépés, amely némiképp megnehezíti a megoldást, hiszen a folytonos esetben az integrál segítségével ez könnyebb volt. Egy egyszerű fogás segítségével azonban az összegezés könnyen elvégezhető. Felbontjuk a fenti összeget a következőképpen:

$$\delta_1\sum_{i=0}^{t-1}i\cdot\left(\frac{\beta}{\gamma+\beta}\right)^{i}+y_0\sum_{=0}^{t-1}\left(\frac{\beta}{\gamma+\beta}\right)^{i}.$$

Ebből csupán a $\sum_{i=0}^{t-1} i \cdot \left(\frac{\beta}{\gamma+\beta}\right)^i$ tag okoz problémát. $\varrho = \frac{\beta}{\gamma+\beta}$ helyettesítéssel $\sum_{i=0}^{t-1} i\,\varrho^i = \varrho \sum_{i=1}^{t-1} i\,\varrho^{i-1}$ adódik, ez pedig $\varrho \sum_{i=0}^{t-1} (\varrho^i)'$ alakban írható. Mivel az összegezés és a deriválás felcserélhető, ebből $\varrho \left(\sum_{i=0}^{t-1} \varrho^i\right)'$-t kapunk, azaz

$$\varrho \left(\frac{\varrho^t - 1}{\varrho - 1}\right)' = \frac{t\,\varrho^{t-1}(\varrho-1) - (\varrho^t - 1)}{(\varrho-1)^2}.$$

A megfelelő visszahelyettesítések és átrendezések után a differenciaegyenlet megoldása a következő lesz:

$$x(t) = \frac{y_0 + \delta_1 t}{\gamma} + \left(\frac{\gamma+\beta}{\beta}\right)^t \cdot \left\{x_0 - \frac{y_0}{\gamma} - \frac{\delta_1 \beta}{\gamma^2}\right\} + \frac{\delta_1 \beta}{\gamma^2} \tag{11}$$

b) Konstans $y(t)$ esetén (10) és (11) alapján azonnal adódik a *folytonos változatra:*

$$x(t) = \frac{y_0}{\gamma} + \exp\left[\frac{\gamma}{\beta} \cdot t\right] \cdot \left(x_0 - \frac{y_0}{\gamma}\right). \tag{12}$$

A *diszkrét változatra* pedig

$$x(t) = \frac{y_0}{\gamma} + \left(\frac{\gamma+\beta}{\gamma}\right)^t \cdot \left(x_0 - \frac{y_0}{\gamma}\right) \tag{13}$$

c) Ha a végső kibocsátást exponenciális függvénnyel írjuk le, akkor a kapott megoldás *folytonos esetre:*

$$x(t) = \frac{y_0 \exp[\delta_2 t]}{\gamma - \beta\,\delta_2} + \exp\left[\frac{\gamma}{\beta} \cdot t\right] \cdot \left(x_0 - \frac{y_0}{\gamma - \beta\delta_2}\right) \tag{14}$$

Diszkrét változatban a következő függvényt kapjuk:

$$x(t) = \frac{y_0 \exp[\delta_2 t]}{\gamma - \beta(\exp\delta_2 - 1)} + \left(\frac{\gamma+\beta}{\beta}\right)^t \left(x_0 - \frac{y_0}{\gamma - \beta(\exp\delta_2 - 1)}\right). \tag{15}$$

Az egyenleteknek különböző típusú $y(t)$ függvények melletti megoldását tehát megkaptuk. Meglepő a formai hasonlatosság a megfelelő differencia- és differenciálegyenletek megoldásfüggvényei között. Ez a formai hasonlatosság azonban jelentős eltéréseket takarhat, ezért vizsgáljuk meg most részletesebben a kapott eredményeket.

2. A megoldások értelmezése és elemzése

Mindenekelőtt néhány szót kell szólnunk a kapott eredmények közgazdasági értelmezéséről. Ezek tehát a bruttó kibocsátásnak (társadalmi terméknek) azt az időfüggvényét, pályáját adják meg, amelyek kielégítik a modell egyenleteit. Mivel a kapott függvények közül a lineáris fogyasztási trenddel számított alak a legbonyolultabb, itt csupán ennek tartalmát vizsgáljuk, a többi ennek alapján könnyen értelmezhető.

Tekintsük tehát a (11) formulát. Az egyenlet mindkét oldalát γ-val szorozva az alábbi alkalmas alakot kapjuk:

$$\gamma\, x(t) = y_0 + \delta_1 t + \left(\frac{\gamma+\beta}{\beta}\right)^t \cdot \left\{\gamma\, x_0 - \left(y_0 + \frac{\delta_1 \beta}{\gamma}\right)\right\} + \frac{\delta_1 \beta}{\gamma}.$$

A nettó kibocsátásnak ($\gamma\, x(t)$-nek tehát három tételt kell fedeznie. Az első a mindenkori fogyasztás ($y_0 + \delta_1 t$). A másik kettő értelmezése némiképp nehezebb. A zárójelben levő kifejezés első tagja az induló nettó kibocsátás ($\gamma\, x_0$). A második tagjában szerepel $\frac{\delta_1 \beta}{\gamma}$, amely az egységnyi idő alatt bekövetkező fogyasztásnövekedés teljes beruházásigényét jelenti. Így a zárójelben levő kifejezés azt mutatja, hogy a kiinduló nettó termelésnek egyrészt az induló fogyasztást, másrészt a következő időszak fogyasztásnövekményéhez szükséges beruházási eszközöket kell fedeznie. A zárójeles kifejezés normális esetben pozitív számot tartalmaz, ellenkező esetben a gazdaság további működése nincs biztosítva. A zárójel előtt álló $\left(\frac{\gamma+\beta}{\beta}\right)^t$ tényező a növekedés ütemére jellemző szám, ez a megoldásfüggvény leglényegesebb eleme. A második tag tehát a fogyasztás növeléséhez minimálisan szükséges beruházások feletti bővítéseket jellemzi, míg a harmadik tag a következő időszak fogyasztásának eléréséhez szükséges teljes beruházási összeget jelenti. Összesen tehát a termelésnek fedeznie kell a fogyasztási szükségleteket, azok minimálisan előírt növekedéséhez szükséges eszközöket, valamint a gazdaságnak ezeken túlmenő bővítését.

A függvény alakja – jól látható – a $\gamma\, x_0 - \left(y_0 + \frac{\delta_1 \beta}{\gamma}\right) = K$ kifejezés előjelétől függ. Arra már utaltunk, hogy ez nem lehet negatív. Abban az esetben, ha $K = 0$, azaz kiinduló helyezetben bizonyos egyensúly áll fenn, azaz a gazdaságnak nem marad eszköze a bővítésre,

$$x(t) = y_0 + \delta_1 t + \frac{\delta_1 \beta}{\gamma}$$

alakúvá egyszerűsödik a függvény. Ha $K > 0$, akkor viszont a termelés exponenciálisan növekszik, a gazdaság bővül.

Hasonlóképp értelmezhető – a paraméterek eltérő jelentésének szem előtt tartásával – a többi megoldásfüggvény is. Mivel azonban elsődleges célunk nem a megoldások értelmezése, hanem a módszertani problémák vizsgálata, térjünk most át ezek elemzésére.

Az eredmények értelmezését több szempont szerint végezhetjük el. A (10)–(15) kifejezéseket egymással összevetve, lényeges hasonlóságokat és eltéréseket vehetünk észre mind a különböző függvénytípusok szerint, mind pedig a differenciál- és a differenciaszámítással kapott eredmények között. A következőkben három szempontot veszünk figyelembe, és ezek alapján hasonlítjuk össze az eredményeket.

a) A differenciál- és a differencia-számításból származó eltérések az időtől függetlenül, a paraméterek függvényében.

b) A differenciál- és a differencia-számításból származó eltérések alakulása azonos paraméterek mellett az idő függvényében.

c) A három különböző típusú fogyasztási függvény mellett kapott eltérések.

ad. *a)* Figyeljük meg páronként a kapott eredményeket, azaz állítsuk szembe egymással a két különböző módszerrel kiszámított függvényeket: a lineárist a lineárissal, a konstans esetet a konstans esettel és az exponenciálisat megfelelő párjával. Ebben a szemléletben a megfelelő párok a (1)—(11); (12)—(13); (14)—(15). Teljesen hasonló alakú tagokat találhatunk, kivéve a differenciál esetnél az exponenciális tagot, amelynek mindhárom esetben szemmel látható megfelelője egy hatványkifejezés. A differenciál- és a differencia-egyenlettel számolt változatok tehát csupán akkor jó közelítései egymásnak, ha éppen ez a két tag közel esik egymáshoz, azaz ha

$$e^{\frac{\gamma}{\beta}} \approx \frac{\gamma + \beta}{\beta}. \tag{16}$$

Amennyiben ez az összefüggés jó közelítésben teljesülne, a lineáris és a konstans esetben a két módszer között nem lenne lényeges eltérés. Az exponenciális esetben még egy másik tényező is van, amelyre még visszatérünk. Tekintsük először csak (16)-ot és írjuk fel először a baloldal hatványsorát.

$$e^{\frac{\gamma}{\beta}} = 1 + \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2}{2!} + \ldots + \frac{\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^k}{k!} + \ldots \tag{17}$$

A (16) jobboldalát β-val leosztva:

$$\frac{\gamma + \beta}{\beta} = 1 + \frac{\gamma}{\beta}. \tag{18}$$

Látható, hogy a hatványsor első két tagja adja a differenciaszámításnál használt hatványkifejezés alapját. Ezek után látható, hogy a két módszer közötti különbség csak abban az esetben elfogadható, ha:

$$|\gamma| \ll |\beta|. \tag{19}$$

Az exponenciális esetben még egy hasonló összefüggést is figyelembe kell venni. Ez a (14)—(15) kifejezés nevezőjében található különbség. A megfelelő tagok között fenn kell állnia a következő relációnak:

$$\delta_2 \approx e^{\delta_2} - 1. \tag{20}$$

A fentiekhez hasonlóan a jobb oldal hatványsora

$$e^{\delta_2} - 1 = \delta_2 + \frac{\delta_2^2}{2!} + \frac{\delta_2^3}{3!} + \ldots$$

A (20) kifejezés baloldala tehát megegyezik a jobboldal hatványsorának első tagjával, így a következő hatványoktól függ, hogy (20) mennyire teljesül. A közelítés tehát akkor elfogadható, ha $|\delta_2|$ elég kicsi. Exponenciális fogyasztási trend esetén tehát a két módszer közötti eltérés annál kisebb, minél inkább teljesül egyidejűleg (19) és a $|\delta_2|$-re tett kikötés.

ad. *b)* A differenciál és a differencia közötti különbség létezik, és a gyakorlatban — mint látni fogjuk — nem is jelentéktelen. Nem okozna ez különösebb problémát, ha a modell olyan értelemben stabil rendszer lenne, hogy a paraméterek változtatása és a két módszer különbsége által okozott eltérés az idő múlásával csökkenne. A Leontief rendszer azonban gyakorlatilag instabil.[4]

A rendszerek stabilitásának elmélete matematikailag jól kidolgozott terület. A [3] különösen fontos definíciókat ad a folytonos és a diszkrét rendszerek stabilitására. A matematikai forma helyett itt azonban csak verbálisan, a Leontief rendszerre alkalmazva fogalmazzuk meg a rendszerek instabilitását.

A rendszert akkor nevezzük instabilnak, ha az időtengelyen van olyan pont, ahol egy $\varepsilon > 0$ elmozduláshoz a bruttó termelés változása nagyobb lehet, mint egy előre meghatározott, tetszőleges szint.

Azt, hogy maga a Leontief rendszer a paraméterek gazdaságilag szóbajöhető értékei mellett kielégíti a definíciót, könnyű belátni. Próbáljuk inkább megvizsgálni, mit jelent az instabilitás definíciója a differencia és differenciál módszert illetőleg.

A modell megoldásában a (16) t-edik hatványa szerepel. A (16)-nak megfelelő formát tekintve:

$$\left(1+\frac{\gamma}{\beta}\right)^t \approx \left(1+\frac{\gamma}{\beta}+\left(\frac{\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2}{2!}+\ldots\right)\right)^t.$$

A jobboldalon szereplő kifejezést vizsgálva két megállapítást tehetünk:

a) A differenciál-számítással kapott eredmény számszerűen mindig nagyobb, mint a differencia módszer eredménye, ugyanis

$$\frac{\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^3}{3!}+\ldots>0$$

b) Rögzített γ és β mellett a két módszer eredménye közötti különbséget okozó kifejezést így írhatjuk:

$$h(t)=\left[\left(1+\frac{\gamma}{\beta}\right)+\left(\frac{\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^3}{3!}+\ldots\right)\right]^t-\left(1+\frac{\gamma}{\beta}\right)^t.$$

A binomtétel alkalmazásával belátható, hogy

$$h(t)=\binom{t}{1}\left(1+\frac{\gamma}{\beta}\right)^{t-1}\cdot\sum_{i=2}^{\infty}\frac{\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^i}{i!}+\sum_{k=2}^{t}\binom{t}{k}\left(1+\frac{\gamma}{\beta}\right)^{t-k}\left(\sum_{i=2}^{\infty}\frac{\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^i}{i!}\right)^k.$$

Mivel $\sum_{i=2}^{\infty}\frac{\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^i}{i!}$ pozitív konstans, a kifejezés második tagja pedig pozitív, így

$$\lim_{t\to\infty} h(t)\to\infty.$$

Ez azt jelenti, hogy a Leontief rendszer a megoldásban használt módszerre nézve is instabil.

[4] A stabilitás kérdésével részletesebben foglalkozik pl. a megadott két rendszerelméleti munka: [2] és [3].

A gyakorlati használhatóságot illetően, mint később látni fogjuk, t-nek már elég kis értékénél $h(t)$ olyan nagy lehet, hogy használhatatlanná teszi az eredményeket.

ad. *c)* A modell megoldásánál három különböző típusú fogyasztási trendet használtunk. A függvénytípusok lényegesen befolyásolták a modell eredményét is. A konstans fogyasztás mellett eredményül kapott (12) és (13) speciális esetei a lineáris és exponenciális esetnek, ugyanis ha (10) és (11)-be $\delta_1 = 0$-t, illetve (14) és (15)-be $\delta_2 = 0$-t helyettesítünk, a (12), illetve (13) kifejezéshez jutunk.

A függvénytípusok különbözősége erősen függ a paraméter-értékektől. Ezt számításaink is igazolták. Továbbá könnyen belátható, hogy a konstans fogyasztás esetében számolt differencia- és differenciál-eredmény relatív hibája nagyobb, mint az exponenciális és a lineáris eset relatív hibája; azaz:

$$\frac{x_l^d(t)}{x_l^\Delta(t)} < \frac{x_c^d(t)}{x_c^\Delta(t)};$$

valamint

$$\frac{x_{\exp}^d(t)}{x_{\exp}^\Delta(t)} < \frac{x_c^d(t)}{x_c^\Delta(t)}$$

ahol:

d — a differenciállal számított függvény jele
Δ — a differenciával számított függvény jele
l — a lineáris függvény jele
exp — az exponenciális függvény jele
c — a konstans függvény jele.

Összegezve: a két módszer közötti eltérésre a konstans fogyasztás mellett számított eredmény a legérzékenyebb.

3. A numerikus számítások értékelése

Mint a korábbiakban beláttuk, a modell pusztán elméleti jellegű elemzésével is sok figyelemreméltó következtetésre jutottunk, ezen túlmenően azonban eredményeinket numerikus számításokkal is alá kívántuk támasztani.[5] A számítások célja elsősorban az volt, hogy a számítási módszerekre vonatkozó megállapításokat demonstráljuk, tehát főként módszertani következtetések levonására alkalmasak. Bár konkrét statisztikai adatok[6] alapján határoztuk meg a modell paramétereit, az eredmények gazdaságpolitikai jellegű következtetések levonására természetesen nem alkalmasak. Részben azért, mert az egyszektoros modell túlságosan aggregált, részben pedig azért, mert a paraméterek meghatározásánál — módszertani kísérletről lévén szó — nem törekedtünk teljes pontosságra.

Mindhárom említett fogyasztási trenddel kilenc számítást végeztünk. A számításokat egyrészt aszerint különböztettük meg, hogy a paraméterek mely évre vonatkoznak (feltettük, hogy az időtől függetlenek), másrészt aszerint, hogy a nettó nemzeti termelést hogyan osztottuk meg felhalmozásra és fogyasztásra.

[5] A számítások az OT.SzK. System 4/70 elektronikus számítógépen készültek.
[6] A számításokhoz szükséges alapadatokat a KSH kiadványából [4] vettük.

A felhalmozási hányad az a tényező, amelyre legérzékenyebben reagál a modell eredménye, ezért a statisztikában alkalmazott „felhalmozás" mellett az egyes változatokban az üzembehelyezett nettó beruházásokat, illetve az anyagi ágazatokban üzembehelyezett beruházásokat szerepeltettük. A különféle módon számított paraméterek azt mutatták, hogy a fogyasztási trendek paraméterei igen kis mértékben változtak; a különböző variánsok közti eltérés főként a beruházási együttható értékeit befolyásolta.

Összehasonlítási alapnak az 1975-ös évet választottuk. Bár a számításokat 20 éves periódusra készítettük el, mégis reálisabbnak látszott egy viszonylag közeli évre kapott eredményeket elemezni. A tényleges termelési adatok idősorából is elég megbízhatóan lehetett következtetni az 1975. évi bruttó nemzeti termelésre. Az elemzésnél az 1960-as bázisév alapján kapott eredményeket nem vettük figyelembe. Ez esetben $t = 15$ évre nyert megoldás a modell instabilitása miatt már nagyon eltér a reálistól.

A számítások egyik fontos következtetése az, hogy *a modellből nyert bruttó nemzeti termelés minden variánsnál magasabb*, mint a trend szerinti, amit az 1960–1970-es évek átlagos növekedési ütemét feltételezve exponenciális függvény alapján becsültünk meg. Ez a tendencia általában is jellemző a növekedési modellekre; a gazdaságban rejlő lehetőségeket túlértékelik.

A következőkben azt vizsgáljuk meg, hogy a legszélsőségesebb számítási eredmények és a tényleges termelési számok közti eltérés milyen tényezőkre vezethető vissza, a különbség kialakulásában melyik milyen szerepet játszik. A tényezőket aszerint csoportosíthatjuk, hogy melyek azok, amelyek a modell megoldásánál alkalmazott módszerre vezethetők vissza, melyek azok, amelyek a paraméterek numerikus meghatározásához kapcsolódnak, és végül mit tekinthetük a Leontief modell „hibájának". Módszerünk ez esetben az volt, hogy először kiszűrtük azokat az eltéréseket, amelyek a megoldásnál alkalmazott feltételezésekből származtak, majd a paraméterek kiszámításából adódó hibákat vontuk le és csak a megmaradó rész tudható be annak, hogy a modell pontatlanul írja le a valóságot.

a) *A modell matematikai levezetésénél alkalmazott feltételezésekből származó eltérések*

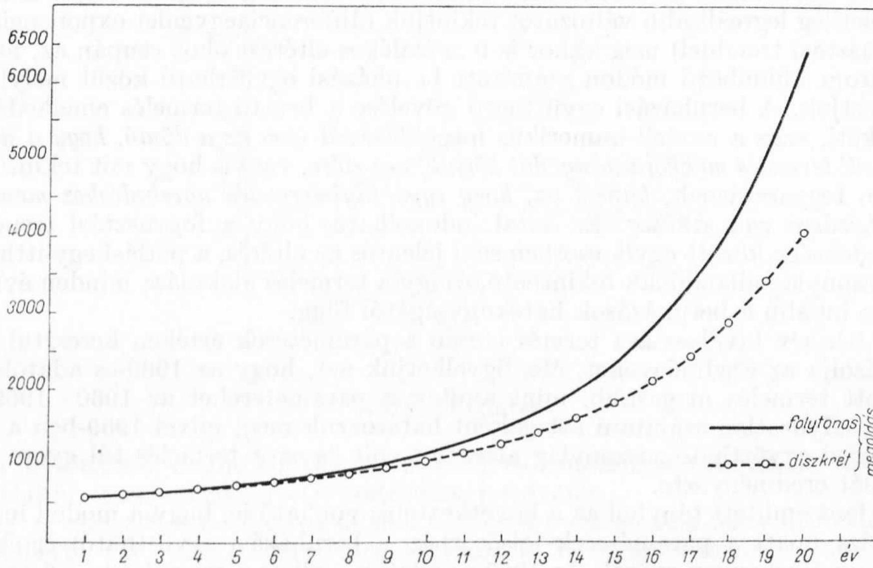
Tekintsük először a *differenciál- és a differencia-egyenlet* megoldásának eredményéből adódó eltéréseket. A legnagyobb hibát – ami a teljes eltérés mintegy 67 százaléka – akkor követjük el, ha a gazdaság fejlődését differenciál- és nem differencia-egyenlettel írjuk le.

A differencia-egyenlet használatát a következő megfontolások alapján tartjuk helyesebbnek:

– a rendelkezésre álló statisztikai adatok diszkrét időpontokra vonatkoznak,
– a gazdasági folyamatokat befolyásoló intézkedések diszkrét időpontokhoz kapcsolódnak,
– a beruházások bizonyos késleltetésekkel valósulnak meg; ezek figyelembevétele diszkrét modellekkel jobban interpretálható.

A Leontief modellből nyert numerikus eredmények is azt igazolják, hogy különösen hosszútávú előrebecsléseknél nem célszerű differenciál-egyenlettel számolni, mert ez számottevő torzítást okozhat. Az általunk ebből a szempontból vizsgált változat az 1969-es évet tekinti bázisnak, és már 6 év alatt is jókora eltérés mutatható ki. Minthogy az eltérés időben nő, hosszútávon ez teljesen irreális eredményekre vezet.

A két megoldás közti eltéréseket szemléletesen mutatja az alábbi ábra.



1. ábra

A differenciál- és a differencia-egyenlet megoldásának eltérése rendkívül érzékeny az induló paraméterek kiválasztására. A közelítés hibája csökkenthető, ha a beruházási együtthatót a pótlási együtthatóhoz képest nagyra választjuk, így a $\frac{\gamma}{\beta}$ arány nullához közelít. Az ábrán bemutatott változat is ezért mutat ki viszonylag kis eltérést a két módszer között. Már korábban utaltunk rá, hogy a paraméterek reálisan szóbajöhető értékei mellett az általunk vizsgált összes változatban a differenciál és a differencia egyenletek relatív hibája (eltérés/differencia-érték) lineáris fogyasztást trend esetén a legkisebb. Ezt a tényt a számítási eredmények egyértelműen igazolták.

A *fogyasztási trend megválasztása* alapvetően befolyásolja a számítási eredményeket. Mint az várható volt, a modell elég érzékenyen reagál a fogyasztási trend típusára. Az eltérésnek hozzávetőleg 22 százalékát az okozhatta, hogy a fogyasztást konstansnak tekintettük. Ez a tény azzal magyarázható, hogy állandó fogyasztás mellett a nettó nemzeti termelés növekedése teljes egészében felhalmozásra fordítható. A lineáris és az exponenciális fogyasztási függvény között nem lehet egyértelmű rangsort felállítani, az érzékenységi vizsgálatok többségénél (9 esetből 7-nél) hosszú távon az exponenciális trend használata bizonyult reálisabbnak. Mindazonáltal olyan változat is akadt, ahol kezdetben a lineáris, később az exponenciális függvény szolgáltatott jobb közelítést.

b) *A kezdő paraméterek kiválasztásából adódó eltérések*

A beruházási együttható nagysága mind a 9 változatban eltér egymástól, így az együttható módosításának hatását jól nyomon lehet követni. Ha az elméletileg legreálisabb változatot tekintjük (differenciaegyenlet exponenciális fogyasztási trenddel) még akkor is 9 százalékos eltérést okoz csupán az, hogy a három különböző módon számított beruházási együttható közül melyiket választjuk. A beruházási együttható növelése a bruttó termelés emelkedését megköti, azaz a modell numerikus megoldásánál *nem az a döntő, hogy a nettó nemzeti termelés mekkora hányadát kötjük meg előre*, vagyis hogy mit tekintünk végső fogyasztásnak, *hanem az, hogy egységnyi termelés növekedéshez mennyi beruházásra van szükség.* Ez azzal indokolható, hogy a fogyasztási trendek meredeksége között egyik esetben sem jelentős az eltérés, a pótlási együttható is viszonylag állandónak tekinthető, és így a termelés alakulása minden évben egyre inkább a beruházások hatékonyságától függ.

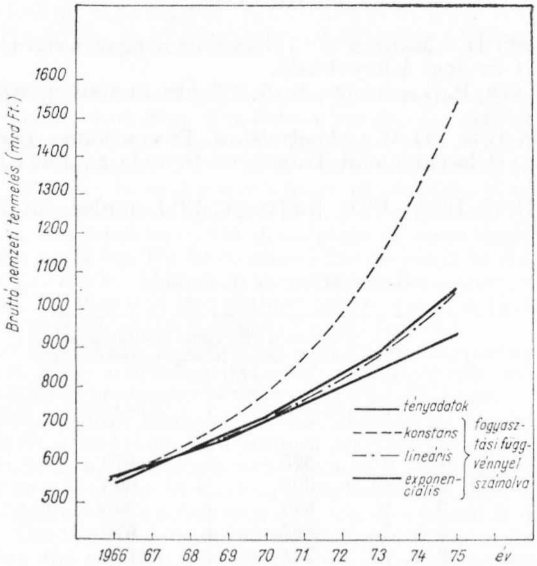
A bázisév kiválasztása természetesen a paraméterek értékén keresztül befolyásolja az eredményeket. Megfigyelhetjük azt, hogy az 1969-es adatokkal kapott termelés magasabb, mint amikor a paramétereket az 1960–1969-es évek súlyozatlan számtani átlagaként határozzuk meg, mivel 1969-ben a beruházási együttható viszonylag alacsony volt és ez a termelés túl gyors felfutását eredményezte.

A fent említett tényből az a következtetés vonható le, hogy a modell instabilitása miatt a paraméterek (elsősorban a beruházási együttható) értékére nagyon érzékenyen reagál. Az 1969-es adatok mellett a termelés $t = 6$ esetén is már szélsőségesebben alakul, mint átlagadatokkal a 10-ik évben. Ez arra hívja fel a figyelmet, hogy a modell csak akkor használható hosszabb távú előrebecslésekre, ha a paraméterek meghatározásánál kellő gondossággal járunk el.

c) *A Leontief modell hibája*

Ha azt vizsgáljuk, hogy milyen tényezők okozhatják a tényadatok (illetve az azokhoz illesztett trend értékei), valamint a modell által számított eredmények eltérését, mindenekelőtt az aggregáltságot kell megemlítenünk, hiszen az egyszektoros modell sohasem lehet reális folyamatok hű tükrözője. A modell szükségszerűen elhanyagol egy sor tényezőt, illetve ezekre *ceteris paribus* feltételt ad. Nyilvánvaló, hogy amennyiben ezek a tényezők a tervidőszakban másként alakulnak, mint a bázisidőszakban, modellhibákhoz vezetnek. Feltétlen megemlítendő, hogy a paraméterek állandóságának feltételezéséből is hasonló hibák adódhatnak.

Ha a modell megoldásából az a) és b) alatti tényezőket kiszűrjük, az így nyert termelési érték és a trend szerinti bruttó nemzeti termelés közti különbség a teljes eltérésnek kb. 2 százaléka. A tényleges (trend szerinti) és a számított eredmények eltérését a következő ábra mutatja be.



2. ábra

4. Összefoglalás

A fentiekben vázolt elméleti elemzések és numerikus számítások alapján az alábbi összefoglaló következtetésekre jutottunk.

a) A vizsgált egyszektoros modell esetében a differencia- és a differenciálegyenlettel való felírás, illetve megoldás között, bár nagy a formai hasonlóság, *jelentős eltérés van.* Számításaink kimutatták, hogy a magyar népgazdaságra jellemző paraméterértékek mellett a két megoldási mód közötti különbségek olyan nagyok, hogy a folytonos közelítés el nem hanyagolható hibákra vezet.

b) Modellünk esetében még a reálisabbnak tekinthető — differencia-egyenlettel kapott — megoldás is szisztematikusan *felülbecsli a tényadatokat*, a növekedésnek valamiféle megalapozatlanul optimista útját adja.

c) Anélkül, hogy numerikus számításainkból messzemenő következtetéseket vonnánk le, feltétlen megemlítendő, hogy a *modell* felettébb *érzékeny a beruházások hatékonyságát jellemző paraméterek változására.* Ez a beruházások hatékonyságának az egész termelési folyamatra gyakorolt jelentős szerepét hangsúlyozza.

d) Az elemzés során nyilvánvalóvá vált, hogy a modell ilyen egyszerű formában sok hibaforrást rejt magában. Ezeket a hibákat a kiinduló feltételezések egy részének feloldásával csökkenteni lehet. A többszektoros diszkrét feladat megoldása, az együtthatók időfüggvényként való kezelése és a modell reális konzisztens adatbázisra való helyezése a középtávú tervezés még hatékonyabb eszközévé teheti a dinamikus Leontief modellt.

(Beérkezett: 1972. április 26.)

IRODALOM

1. ANDORKA R.—DÁNYI D.—MARTOS B.: Dinamikus népgazdasági modellek. Budapest, 1967. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
2. KALMAN, R. E.—FALB, P. L.—ARBIB, M. A.: Topics in Mathematical System Theory. Mc.Graw-Hill Book Co.
3. MICHER, A. N.—POSTER, D. W.: Analysis of Discontinous Large-Scale Systems: Stability, Transient Behaviour and Trajectory Bounds. Systems Science. Volume 2. July 1971. No. 1.
4. Népgazdasági mérlegek 1966—1970. Budapest, 1971. június. Statisztikai Kiadó.

Értéktáblázat az 1. ábrához

Év	Eltérések a differencia- és differenciál-megoldások között (lineáris fogyasztási függvény esetén)	
	Differenciál	Differencia
1	575	573
2	608	605
3	645	639
4	686	676
5	734	718
6	790	766
7	855	820
8	934	882
9	1030	956
10	1147	1043
11	1293	1146
12	1475	1271
13	1703	1423
14	1992	1607
15	2358	1834
16	2825	2113
17	3421	2457
18	4183	2885
19	5161	3415
20	6416	4075

Értéktáblázat a 2. ábrához

Év	A bruttó nemzeti termelés alakulása			
	Tényadatok alapján	Konstans	Lineáris	Exponenciális
		fogyasztási függvény esetén		
1966	560	573	573	575
1967	603	610	605	608
1968	632	656	639	644
1969	665	714	676	684
1970	711	786	718	728
1971		876	766	777
1972		990	820	833
1973		1133	882	897
1974		1311	956	969
1975	935	1536	1043	1053

THE DIFFERENCE BETWEEN THE CONTINUOUS AND DISCRETE SOLUTION TO THE ONE-SECTOR DYNAMIC LEONTIEF MODEL

A great part of the mathematical models used in economic research presupposes the continuity of the economic variables. The reason for this is mainly methodological: the techniques of handling continuous variables have long been established in sciences, so there were readily available methods for the economic model-makers. The discrete handling of variables is, however, in many cases more reasonable, than the supposition of continuity, both the informations as well as the economic decisions are linked to discrete points of time, and, at the same time, the description of some time-lags is more natural by the help of discrete variables. The basic aim of the article is to show up the deviations which arise from the two kinds of handling the variables, or rather from the difference in the solution methods. To this end the authors make use of a simple and well-known model, the one-sector variant of the dynamic Leontief model.

In the first part of the article they solve the equation, supposing continuous as well as discrete variables with three different types of consumption functions. Comparing the fellow solutions, the formal similarity is conspicuous in all cases.

The second part deals with the analysis of the solutions. The dependence of the solution on the parameters is discussed first. The authors consider parameter values so that the results of the two methods approximate each other well. They examine the results with identical parameters as a function of time and establish that the deviation between the solutions can grow indefinitely as a function of t, i. e. the model is not stable as regards the solution method. The type of consumption function influences the results essentially, too and estimation on the relative deviations with different consumption functions is made.

In the third part the analysis is illustrated by a numerical example. The calculations with the 1960—1969 data of the Hungarian national economy have pointed out that the two solution methods lead to deviations that cannot be neglected, even for practically acceptable values of the parameters. The results obtained with the discrete handling of variables have seemed more realistic so it is expedient to solve more complex Leontief models with discrete variables.

РАЗНИЦА МЕЖДУ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНЫМ И ДИСКРЕТНЫМ РЕШЕНИЯМИ В СЛУЧАЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЛЕОНТЬЕВА

Большая часть математических моделей, употребляемых в экономических исследованиях, предполагает продолжительность экономических переменных. Причина этого в первую очередь методологическая: техника продолжительных переменных была создана в естественных науках уже раньше, итак в распоряжении экономических модельников были готовые модели. Дискретная трактовка переменных, однако, является во многих случая более логичной, чем предположение продолжительности, ведь и система информации и экономические решения связываются дискретными временными сроками, и в то же время предписание некоторых запаздывающих эффектов более естественное при помощи дискретных переменных. Основная цель статьи представить разницы, которые даются из двухобразной трактовки переменных и из разницы между способами решения уравнений. К этой цели авторы употребляют простую, общеизвестную модель, односекторный вариант динамической модели Леонтьева.

В первой части статьи дается решение модели, предположением и продолжительных и дискретных переменных при функциях потребления трех разных типов. Если пары решения возле друг друга, мы легко намечаем похожность по форме во всех случаях.

Вторая часть статьи занимается анализом полученных решений. Авторы сперва анализируют полученные решения в функции параметров. Установливаются параметры, при которых два метода можно считать хорошим приближением друг друга. Изучаются полученные результаты при одинаковых параметрах в функции времени и установливаются, разница между парами решения в функции t может увеличивать до любой величины. т. е. метод решения модели является нестабильным. Авторы устанавливают, что и тип функции

потребления существенно влияет на результаты, а потом они создают релации величины релативной ошибки решений, полученных при разных функциях потребления.

В третьей части анализ иллюстрируется нумерическим примером. Вычисления на основе данных венгерского народного хозяйства по 1960—1969 гг. оказали, что при практически возможных стоимостях параметров два метода решения ведут к значительным разницам. Результаты, полученные при дискретной трактовке переменных оказывались более реальными, итак решение более сложных моделей Леонтьева при дискретных переменных является целесообразным.