

Az $\frac{N}{sB + E}$ mutató szerinti optimalizálás egyes kérdései

1968 óta a vállalati jövedelemszabályozási rendszer lényeges vonása, hogy a vállalati nyereséget a bérszorzóval súlyozott bérköltség és a lekötött eszköz-állomány arányában, előírt módon két részre kell osztani. Ez a rendszer a vállalati érdekelttség fontos mutatójává teszi a

$$q = \frac{N}{sB + E}$$

arányt. (N a nyereséget, s a bérszorzót, B a bérköltséget, E pedig az eszköz-állományt — álló- és forgóeszközök összege — jelöli). A q mutató nagysága határozza meg a fajlagos — egységnyi bérre jutó — részesedési alap és az egységnyi eszközértékre jutó fejlesztési alap szintet is, és így megállapíthatjuk, hogy a vállalati gazdálkodás fontos célja lehet e mutató maximalizálása. A vállalati optimalizáló modellek célfüggvényét mindig csak az adott helyzet pontos ismeretében határozhatjuk meg és így nem állítjuk, hogy az ilyen modellek célfüggvényének mindig ezt a mutatót kell tekintenünk, de a mutató központi szerepe indokoltá teszi, hogy részletesen foglalkozzunk a mutató maximalizálása kapcsán felvethető egyes kérdésekkel [2].

Ez a célfüggvény azonban nem csak a jövedelemszabályozás jelenlegi rendszere miatt állítható előtérbe. A vállalati gazdálkodás hatékonyságát tükröző mutatók között fontos szerepet kap a vállalat által elért nyereség és a lekötött termelési tényezők aránya. E mutató kapcsán persze felvethető, nem volna-e helyesebb, ha nemcsak a nyereséget, hanem a vállalat által létrehozott teljes új értéket állítanánk szembe a termelési tényező lekötéssel. Véleményünk szerint erre a kérdésre határozott nemmel kell felelnünk, miután a létrehozott új érték nyereségen kívüli részét a felhasznált termelési tényezők csaknem teljesen meghatározzák, hiszen mind a bérköltség, mind pedig a bérarányos és eszközarányos adók (járulékok) nagysága a vállalati gazdálkodás minőségétől függetlenül, kizárólag a termelési tényező felhasználás mértékétől függően alakul. Így bár árrendszerünk sajátosságai, a kötelező termelési feladatok léte és más, jól ismert problémák miatt a nyereség mutató is jogosan támadható, még mindig ezt a mutatót tekinthetjük a vállalati gazdálkodás eredményeit legjobban tükröző mutatónak, és így általában a nyereség és a lekötött termelési tényezők arányával mérhető a legpontosabban a vállalati gazdálkodás hatékonysága. (Természetesen azzal is tisztában kell lennünk, hogy ez a mutató az eszköz- és bérlekötést közös nevezőre hozó bérszorzó értékének is függvénye). Azt mondhatjuk tehát, hogy a jövedelemszabályozási rendszer a q

mutatóval a vállalati gazdálkodás hatékonyságát viszonylag jól tükröző mutatót állított középpontba. Véleményünk szerint azonban ez a mutató nem csak vállalati szinten tükrözi a gazdálkodás hatékonyságát. Akár a népgazdaság teljes termelő tevékenységére, akár valamely kisebb aggregátumra (pl. ágazat) vonatkozóan is, ezt az arányt a gazdálkodás hatékonyságát mérő egyik mutatónak tekinthetjük. A termelési tényező lekötés mértéke ugyanis bármely aggregátum esetén lényegében meghatározza a létrehozott új érték nyereségen kívüli részét, és az új érték elemei közül elsősorban a nyereség az, amely a gazdálkodás minőségétől függ. A nagyobb nyereség kedvezőbb lehetőségeket ad a termelő ágazatok további fejlesztésére, valamint a társadalmi szempontból rendkívül fontos nem termelő tevékenységek tervezettnél gyorsabb fejlesztésére, a szociális kiadások fokozására stb. (Ne felejtsük el, hogy nyereség csak realizált termelés után képződik, ami biztosítéka annak, hogy a nyereség növekedése csak társadalmilag szükséges javak előállításának lehet a következménye.) Így a nyereség népgazdasági szinten is olyan mutatónak tekinthető, amely összefoglalóan tükrözi a gazdálkodás eredményeit, a kérdés inkább csak az lehet, van-e értelme népgazdasági szinten is annak, hogy a nyereséget a termelésben lekötött termelési tényezők mennyiségéhez viszonyítsuk. Véleményünk szerint erre a kérdésre igennel kell válaszolnunk, hiszen az előbb említett nem termelő jellegű tevékenységek fejlesztése a megfelelő anyagi forrásokon kívül azt is szükségessé teszi, hogy a népgazdaság bizonyos termelő erőforrásait ezeken a területeken hasznosítsuk, így azonos nyereség esetén q nagyobb értéke kedvezőbb lehetőséget teremt a termeléstől független társadalmi célok megvalósítására.

Hangsúlyozni akarjuk, hogy nem tekintjük a népgazdaság kizárólagos céljának a célfüggvény maximalizálását, de úgy érezzük, nem érdektelen annak a kérdésnek a vizsgálata, hogy milyen hatással van a népgazdasági szinten értelmezett hatékonysági mutató alakulására, ha a vállalatok saját hatékonysági mutatójuk maximalizálására törekcszenek, és megfordítva, milyen vállalati célfüggvény felel meg a q népgazdasági szintű maximalizálásának.

A továbbiakban ezekre a kérdésekre keresünk választ.

A q mutató szerinti optimalizálás lényeges vonásait először egy egyszerűsített modell alapján elemezzük és a hangsúlyt a hagyományos nyereség maximalizáló modell jellemző vonásaival való összehasonlításra helyezzük. A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy az egyszerű modell alapján levont következtetések mennyiben módosulnak egy általánosabb modell esetén, majd a q mutatót maximalizáló modellek erőforrás értékelésével és a decentralizált irányítási rendszerek lehetőségeivel foglalkozunk.

A vizsgált modellek csak folytonos változókat tartalmaznak, az elemzés során mégis elsősorban a vállalatok fejlesztési döntéseit vizsgáljuk. Úgy érezzük, hogy ilyen általános jellegű tárgyalás esetén elfogadható, ha a fejlesztési változókat is folytonos változóként kezeljük. Ez a megközelítési mód a gyakorlatól nem idegen, a középtávú tervezés lineáris programozási modelljei is sokszor ezt az utat követik.

1. A q mutató maximalizálása abban az esetben, amikor a tevékenységek mértékét csak egyedi felső korlátok korlátozzák

A q mutató szerinti maximalizálás hatásait először egy egészen egyszerű modell mellett vizsgáljuk. Ez a modell gyakorlati szempontból valószínűleg csak kevés esetben használható, ugyanakkor segítségével jól ábrázolhatjuk a mutató szerinti maximalizálás általános jellemzőit.

A modell alapfeltevése, hogy a vállalati tevékenységek mértékét egyetlen erőforrás-korlát sem korlátozza, valamennyi tevékenység esetén csak a tevékenység egyedi felsőkorlátját kell figyelembevennünk. Ilyen felső korlátnak tekinthető például az adott áron való értékesítési korlát, így a modellben különböző tevékenységekkel reprezentálhatjuk például egy termék különböző piacokon való értékesítését. Természetesen különböző piacnak tekinthető az adott piacon különböző árak mellett való értékesítés is, ahol nyilvánvalóan az ár az eladott mennyiség monoton nem növekvő függvénye. Ezt a konkáv mennyiség-ár függvényt szakaszos lineáris függvénnyel közelítjük.

Vezessük be a következő jelöléseket:

- x_i = i vállalati tevékenység mértéke;
- k_i = i vállalati tevékenység felső korlátja;
- n_i = i vállalati tevékenység fajlagos bruttó nyereséghezama (a tevékenység egységnyi mértékű alkalmazásából származó árbevétel és a tevékenységgel arányos — változó — költségek különbsége);
- b_i = i vállalati tevékenység fajlagos bérigénye (a tevékenység egységnyi mértékű alkalmazása esetén fellépő változó bérköltség);
- e_i = az i vállalati tevékenység fajlagos eszközigenye (a tevékenység egységnyi mértékű alkalmazása esetén fellépő változó eszköz igény);
- C = vállalati állandó költségek összege;
- D = állandó bérköltség.
- G = állandó eszközérték.

Modellünk ekkor a következőképpen írható le:

$$\begin{aligned} x_i &\geq 0 \\ x_i &\leq k_i \\ \max \quad & \frac{\sum_i n_i x_i - C}{s \sum_i b_i x_i + \sum_i e_i x_i + sD + G} \end{aligned}$$

A modell megoldására egy rendkívül egyszerű algoritmus használható: legyen

$x_i = k_i$ arra az i -re, amelyre $\frac{n_i}{sb_i + e_i}$ maximális, ha

$$\max_i \frac{n_i}{sb_i + e_i} \geq \frac{\sum_j n_j k_j - C}{s \sum_j b_j k_j + \sum_j e_j k_j + sD + G}$$

ahol j a már korábban az optimális programba bekerült tevékenységeken fut végig. Ez az eljárás tehát azt jelenti, hogy az egyes tevékenységek az $\frac{n_i}{sb_i + e_i}$ mutató nagysága szerinti sorrendben kerülnek be az optimális tervbe mindad-

dig, míg a fajlagos hatékonyságukat mérő $\frac{n_i}{sb_i + e_i}$ mutató még nem kisebb a

már alkalmazott tevékenységek révén kialakult vállalati hatékonysági mutatónál.

Ez a megoldási algoritmus abban az esetben is használható, ha a feltételeket egy globális vállalati kapacitáskorláttal is kiegészítjük, de feltesszük, hogy az egyes tevékenységek fajlagos kapacitásigénye megegyezik. (A mértékegység megfelelő megválasztásával ez mindig biztosítható, természetesen ilyenkor megfelelően módosítanunk kell az egyedi felső korlátokat és a célfüggvény mutatókat is.) Az eljárás egy ilyen globális kapacitáskorlát figyelembevételénél csak annyiban módosul, hogy az egyes tevékenységek alkalmazása során az egyedi és az általános hatékonysági mutató összehasonlítása mellett a kapacitásfelhasználást is egybe kell vetnünk a kapacitáskorláttal, és ha a kapacitáskorlát kimerülésekor még van olyan tevékenység, amelynek hatékonysága jobb az átlag hatékonyságnál, akkor az utolsóként alkalmazott (viszonylag legkevésbé hatékony) tevékenység alkalmazásának mértéke k_i -nél kisebb lesz.

Érdekes modellünk eredményeit összehasonlítani a hasonló szerkezetű nyereség-maximalizáló modellek eredményeivel. A nyereségmutató maximalizálása esetén is használható egy hasonló jellegű optimalizálási eljárás, de ebben az esetben nincs szükség az egyes tevékenységek célfüggvény mutatóinak a pillanatnyi célfüggvény értékkel való összehasonlítására, az optimális programba kerülés feltétele a kapacitáskorlát betartása mellett csak annyi, hogy teljesüljön az $n_i \geq 0$ egyenlőtlenség. Ebből következik, hogy abban az esetben, amikor q maximalizálása során a kapacitáskorlát szabja meg az optimális programba kerülő tevékenységek körét, a két célfüggvény szerinti optimalizálás azonos eredményre vezet.

Ugyanakkor, ha a modellben nem vesszük figyelembe globális kapacitáskorlátot, vagy ha a q -t maximalizáló optimális program nem meríti ki ezt a korlátot, már nem feltétlenül lesz azonos a két célfüggvénynek megfelelő optimális terv. A megfelelő optimalizáló eljárások összehasonlítása alapján nyilvánvaló, hogy a két optimális terv akkor tér el egymástól, ha a q mutató maximalizálása során már valamely $n_i \geq 0$ érték mellett az $\frac{n_i}{sb_i + e_i}$ érték kisebb

lesz, mint a már programba került tevékenységek alapján kialakult q érték.

Ez tehát azt jelenti, hogy valamennyi olyan tevékenység, amely a q -t maximalizáló optimális tervbe bekerül, bekerül a nyereségmaximalizáló optimális programba is, mégpedig mindkét esetben azonos lesz a tevékenységek alkalmazásának mértéke is — ami megegyezik a tevékenység egyedi felső korlátjával. Ugyanakkor a két optimális terv eltérése esetén a nyereségmaximalizáló terv még további tevékenységek alkalmazását is előírja, nevezetesen bekerül az optimális programba az összes olyan tevékenység is, amelyek hatékonysági mutatója ugyan nem éri el a vállalati átlag hatékonyság értékét, de alkalmazásuk abszolút értelemben még a nyereség növelésére vezet. Ebben az értelemben tehát a nyereség maximalizálása jobban ösztönöz a termelési lehetőségek kihasználására, mint q maximalizálása.

q maximalizálása esetén az optimális tervbe bekerülő tevékenységek száma attól függ, hányadik tevékenység programba kerülése után lesz már nagyobb az átlagos vállalati hatékonyság a programba még be nem vont tevékenységek

hatékonyságánál. Így a q mutatót maximalizáló optimális program annál kevésbé tér el a nyereség maximalizáló optimális tervtől

- minél nagyobb a vállalati állandó költségek összege,
- ezen belül minél nagyobb az állandó bérköltség,
- minél nagyobb az állandó eszközérték,
- minél kisebb az optimális programba bekerülő tevékenységek átlagos hatékonysága.

Ezek az állítások rendkívül könnyen bizonyíthatóak, csak azt kell belátunk, hogy az aktuális átlagos vállalati hatékonyságot mérő

$$\frac{\sum_j n_j k_j - C}{s \sum_j b_j k_j + \sum_j e_j k_j + sD + G}$$

mutató értéke fenti esetekben mindig csökken, ha minden más érték változatlan.

A modell alapján így a nyereségmaximalizálás és a q mutató szerinti maximalizálás között a termelési lehetőségek kihasználása tekintetében már említett eltérés mellett még egy alapvető eltérés figyelhető meg: a q szerinti maximalizálás „egyedileg” értékeli a tevékenységeket a nyereség maximalizálás általános értékelésével szemben.

Egyedi értékelésen azt értjük, hogy q maximalizálása esetén egy tevékenység nem csak a rá jellemző $\frac{n_i}{sb_i + e_i}$ mutatótól függően kerül be az optimális

programba, hanem értékelése során szerepet játszanak a vállalat olyan egyedi jellemzői is, mint az állandó költségek összege, az állandó bérköltség és az állandóan lekötött eszközérték nagysága, valamint a vállalat által alkalmazható többi tevékenység hatékonysága is. Így adott hatékonyságú tevékenységet e tényezőktől függően esetleg valamely vállalatban már nem célszerű alkalmazni, ugyanakkor egy másik vállalat optimális programja még ennél rosszabb hatékonyságú tevékenységek alkalmazását is célszerűnek tartja. Ugyanakkor a nyereség maximalizálás általánosan értékel: az $n_i \geq 0$ feltétel a vállalati adottságotól függetlenül mindig elegendő ahhoz, hogy a megfelelő tevékenység bekerüljön az optimális programba, ha a globális vállalati kapacitáskorlát azt még lehetővé teszi. (Természetesen maga az n_i érték nem független a vállalati adottságoztól, alapvetően azok határozzák meg, az elmondottak csak arra utalnak, hogy a vállalati adottságok által meghatározott n_i érték nagysága alapján nyereségmaximalizálás esetén már eldönthető, hogy a tevékenység bekerülhet-e az optimális tervbe, míg q maximalizálása esetén ez továbbra is a vállalati adottságok függvénye marad!)

A két célfüggvény szerinti optimalizálást eddig elméleti alapon hasonlítottuk össze, érdemes arra is kitérnünk, hogy ezek az eltérések milyen gyakorlati következményekkel járhatnak.

A rövidtávú tervezés során általában a meglévő termelési kapacitások — állóeszközök és munkaerő — optimális kihasználásán van a hangsúly, a tervezés legfontosabb döntési problémái a termék választék kialakításával, az értékesítési irányok meghatározásával kapcsolatosak. Ebből következik, hogy a q mutató nevezője rövid távon csaknem teljesen adottnak tekinthető, a programozási modell egyes tevékenységeihez tartozó változó bér- és eszközigeny

viszonylag nagyon kis súlyt képvisel az állandó bér- és eszközértékhez képest, és így q nagy valószínűséggel ugyanott veszi fel maximumát, ahol a nyereség maximális, tehát a rövidtávú tervezés céljaira szolgáló modellekben, a termék-választék, az értékesítési irányok optimalizálása során, a meglévő állóeszköz állomány mellett alkalmazható optimális technológiai változatok meghatározásakor a legtöbb esetben a nyereség maximalizáló modell is biztosítja q maximumát.

Az elmondottak természetesen nem jelentik azt, hogy q maximalizálása minden rövidtávú tervezési modellben helyettesíthető a nyereség maximalizálással, a két célfüggvénynek megfelelő optimum annál kisebb valószínűséggel lesz különböző, minél kisebb a modell változóihoz kapcsolódó változó bér- és változó eszközigény a vállalati szinten állandónak tekinthető bérköltséghez és eszközállományhoz képest. Érdemes itt felhívni a figyelmet arra is, hogy az állandó munkaerő- és eszközállomány nem értelmezhető mereven, a kategorizálás során nem tekinthetünk el a tervezési időszak hosszától. Minél hosszabb időszakot fog át a vállalati terv, annál inkább jogos az állandó és változó költségek hagyományos módon való elhatárolása, ugyanakkor egy viszonylag rövid tervperiódusban pl. a teljesítmény bérben dolgozó egyértelműen valamely termelési eljárásához kapcsolható munkaerő jó részét is adottsággként kell kezelnünk, amellyel kapcsolatosan rövid távon csak a hasznosítás irányának változtatása merülhet fel, és nem lehet szó az alkalmazás mértékének lényeges változtatásáról.

A tervezési időszak hosszának növelése lehetővé teszi, hogy számos olyan erőforrást is változóként kezeljünk, amelyekkel rövid távon adottsággként kell számolnunk. Minél hosszabb időszakra vonatkozó terv készítéséről van szó, annál nagyobb súlyt kapnak a tervezés döntési problémái között a vállalati kapacitás struktúra, és általában az erőforrás szerkezet fejlesztésével és módosításával kapcsolatos kérdések, és viszonylag kisebb lesz a termék-választék és az értékesítési irányok részletes meghatározására vonatkozó döntések szerepe már csak azért is, mert ezeknek a döntéseknek mindig szorosan kell kapcsolódnia a mindenkori piaci igényekhez, amelyek hosszútávon már csak viszonylag aggregált formában mérhetők fel. Ennek megfelelően a közép- és hosszútávú tervezés céljaira szolgáló modellek változóihoz kapcsolható változó bér- és változó eszközigény súlya az állandónak tekinthető bér- és eszközértékhez képest sok esetben már egészen jelentős lehet, és így általában számolhatunk azzal, hogy a nyereség maximalizáló modellek eredményei esetleg erősen eltérnek a q mutató maximalizáló modell eredményeitől.

Miután látható, hogy q maximalizálása és a nyereség maximalizálás általában csak viszonylag hosszabb időszakot — közép-, ill. hosszútávú tervezés — átfogó modell estén vezet eltérő eredményre, érdemes visszatérnünk a két célfüggvény szerinti optimalizálás eltéréseinek értékelésére.

Egyszerű modellünk viselkedése alapján megállapítottuk, hogy a nyereség maximalizáló modell a termelési lehetőségek jobb kihasználására ösztönöz, mint a q mutató szerinti optimalizálás. Ez az elméleti következtetés a gyakorlatban várható tényleges hatások ismerete nélkül azt a következtetést vonhatja maga után, hogy a nyereségmaximalizálás általában kedvezőbb gazdasági eredményekkel jár, mint q maximalizálása, és így nem helyeselhető, ha a gazdaságirányítási rendszer a q mutatót állítja a vállalati érdekeltég homlokterébe. Egészen más képet kapunk, ha az elméleti megállapítást kiegészítjük a gyakorlatban várható következmények bemutatásával. Miután a meglévő

kapacitások és a már lekötött erőforrások kihasználása tekintetében a két célfüggvény szerinti optimális program azonos eredményre vezet, a szűken értelmezett kapacitás kihasználás tekintetében nem kell attól tartanunk, hogy a q mutató alkalmazása miatt a meglévő állóeszközök kihasználása romlani fog a maximális nyereséget biztosító kihasználási színvonalhoz képest.

A kapacitás bővítési lehetőségek értékelése tekintetében már valószínűleg sok esetben előfordulna, hogy egyszerű modellünk alkalmazása esetén a nyereségmaximalizáló modell jobban használná ki a felmerülő termelési lehetőségeket, mint q -t maximalizáló modell. Utóbbi célfüggvény alkalmazása úgy tekinthető, hogy a modell a termelés bővítési lehetőségek értékelése során egy szigorúbb minimum követelmény alapján dönt a felmerülő lehetőségek elfogadásáról, mint a nyereségmaximalizáló modell. Az a tény, hogy a szabályozási rendszer a vállalatok erőforrás felhasználásának bővítését szigorúbb követelményhez köti, mint a pozitív nyereséghezam követelménye, csak a mindenkori gazdasági helyzettől függően értékelhető. Könnyen belátható, hogy ez a szigorúbb követelmény csak abban az esetben érinti kedvezőtlenül a népgazdaság fejlődését, ha a munkaerő és a beruházási erőforrások kínálata lényegesen nagyobb lesz az irántuk jelentkező keresletnél, és így bizonyos erőforrások kihasználatlanul maradnak annak ellenére, hogy alkalmazásuk még nyereséggel járna.

A szocialista gazdasági rendszerben mindeddig ennek az esetnek pontosan a fordítottja volt jellemző, tehát az erőforrások iránti kereslet rendszeresen nagyobb az erőforrás kínálatnál. Ilyen helyzetben viszont az erőforrások hatékony felhasználása érdekében kifejezetten szükség van arra, hogy a pozitív nyereséghezamnál szigorúbb minimum követelménynek kelljen teljesülnie ahhoz, hogy a vállalatok bővíthessék erőforrásaikat. Érdemes itt megjegyeznünk, hogy kapitalista viszonyok között sem annak alapján döntenek a tőkebefektetésekről, hogy hoznak-e nyereséget, hanem bizonyos hozadék elérését tekintik a befektetés minimum követelményének.

A jelenleg tárgyalt egyszerű modell viselkedése alapján levonható második lényeges következtetés az volt, hogy míg a nyereségmaximalizálás egységes követelmény szerinti értékeli a programozási modellek változóit, q maximalizálása esetén egyedi, a vállalat mindenkori helyzetét tükröző követelmény érvényesül. Miután a rövidtávú tervezés céljaira szolgáló modellekben a két célfüggvény alkalmazása általában nem vezet eltérő eredményekre, ismét csak a viszonylag hosszabb időszakot átfogó modellek esetén kell megvizsgálnunk, milyen követelményei vannak a q szerinti maximalizálás fenti tulajdonságának.

Már utaltunk arra, hogy mindaddig, amíg a különböző erőforrások kereslete nagyobb kínálatuknál, lényegesen javítható felhasználásuk hatékonysága, ha alkalmazásukat szigorúbb minimum követelmény teljesítéséhez kötjük. Ezt a megállapítást kiegészíthetjük azzal, hogy szükségszerűen a hatékonyság csökkenésére vezet, ha ez a minimum követelmény nem egységes. A kérdés formális elemzésére még visszatérünk, de formális bizonyítás nélkül is belátható, hogy a vállalatonként különböző minimum követelmények miatt előfordulhat, hogy egyes hatékonyan dolgozó vállalatok már nem alkalmaznak olyan tevékenységeket, amelyek hatékonysága jobb a népgazdasági átlagnál — és így alkalmazásuk a hatékonyság népgazdasági szintű javulására vezethetne — ugyanakkor pedig egy olyan vállalat, amelynek q mutatója kedvezőtlen, még olyan tevékenységek alkalmazását is célszerűnek tartja, amelynek hatékonysága nem éri el a népgazdasági átlagot, és alkalmazása így az adott vállalat

hatékonyságának javulása ellenére is a népgazdasági szintű hatékonyság csökkenésére vezet.

Elméletileg tehát kimutatható, hogy a q maximalizálásában való érdekelttség a vállalatonként eltérő minimum követelmény miatt azt eredményezheti, hogy az erőforrások felhasználásának hatékonysága elmarad a lehetőségektől. Ez az elméleti eshetőség azonban csak abban az esetben válik gyakorlati, veszélyé, ha a q maximalizálásából származtatható minimum követelmény határozza meg az erőforrás felhasználás mértékét. Világos, hogy abban az esetben, amikor a vállalatok olyan erőforrás felhasználási lehetőségekkel rendelkeznek, amelyek közül még a legrosszabb hatékonysága is nagyobb a népgazdasági átlag hatékonyságánál, ez a minimum követelmény nem játszik szerepet. Modellünkben ugyanilyen eredménnyel jár, ha vannak ugyan a népgazdasági átlagnál rosszabb hatékonyságú erőforrás felhasználási lehetőségek, de a globális vállalati kapacitáskorlát valamennyi vállalat esetében olyan „szűk”, hogy az ilyen tevékenységek nem kerülnek be az optimális programba. A későbbiekben ismertetésre kerülő részletesebb modellek pontos leírása nélkül is eléggé valószínűnek látszik, hogy a modellek korlátozó feltételei sok esetben maguk is olyan szűrőt képeznek, amelyek megakadályozzák a népgazdasági átlagnál rosszabb hatékonyságú tevékenységek bekerülését a programba. Különösen így van ez, ha a feltételek között szerepelnek azok a hitelpolitikai korlátok is, amelyek révén központilag is biztosítani lehet, hogy a q mutatóban való érdekelttség e kedvezőtlen hatása ne jelentkezzék. Minden esetben célszerű szem előtt tartanunk, hogy a nyereség kötelező megosztását előíró jövedelemszabályozási rendszer magában rejti ezt a kedvezőtlen irányzatot, amelynek érvényre jutását esetleg a szabályozás más elemeinek (hitelpolitika) megfelelő alkalmazásával kell megakadályozni.

Egyszerű modellünk alapján még egy kérdésre, a bérszorzó szerepének vizsgálatára térünk ki. A bérszorzó egyrészt szerepet játszik az optimális tervbe való bekerülés minimum követelményének kialakításában, másrészt hatást gyakorol a különböző eszköz-bér aránnyal járó fejlesztési változatok gazdagságának alakulására.

A bérszorzó növelése az eszköz-bér arány nagyságával fordított arányban vezet a q mutató csökkenésére, tehát minél nagyobb az eszköz-bér arány, annál kisebb mértékben csökken az értéke. Ebből következik, hogy abban az esetben, amikor az állandóan lekötött eszközök és az állandó bérek aránya nagyobb, mint a modell egyes változóihoz tartozó változó eszköz-igény változó bérköltség arány, a bérszorzó növelése az erőforrás felhasználás minimum követelményének növelését jelenti, miután adott vállalati tevékenység struktúra esetén nagyobb mértékben nő az átlaghatékonyság, mint az egyes tevékenységekhez rendelhető egyedi hatékonyság, aminek az átlagos hatékonyságnál nagyobbak kell lennie annak érdekében, hogy a tevékenység alkalmazása a vállalati q érték növelésére vezessen. Feltételezhető, hogy a gyakorlatban többnyire ez az eset fordul elő, és csak ritkán lesz az állandóan lekötött eszköz-érték és az állandó bérköltség aránya kisebb, mint az egyes tevékenységekhez kapcsolható változó eszköz-igény változó bérköltség arány. Ezt a feltevést megerősíti az a tény, hogy a nem kifejezetten rövidtávú modellekben, tehát azokban a modellekben, amelyekben a változó eszköz-igény és a változó bériköltség általában már lényeges szerepet játszanak az optimális terv kialakításában, a munkaerő állomány viszonylag nagy része szabadon kezelhető, míg az állóeszközállomány esetében ez nem mondható el.

A bérszorzó és a minimum követelmény kapcsolata valójában persze minden egyes tevékenységre vonatkozóan más lesz — itt is megfigyelhető a q mutatóban való érdekeltség bizonyos fajta „egyedi” értékeléssel járó hatása — bár az előbb vázolt fő irányzatot a legtöbb esetben csak lényegtelen mértékben torzítják ezek a hatások. A bérszorzó nagysága ugyanis az elmondottaknak megfelelően a tevékenységre jellemző változó eszközigeny — változó bérköltség-arány és a vállalati átlagos eszköz-bér arány kapcsolatától függő módon változtatja meg a tevékenység gazdaságosságáról e modell alapján kialakult képet, tehát minél kisebb a tevékenységre jellemző eszköz-bér arány a vállalati eszköz-bér arányhoz képest, annál nagyobb mértékben romlik a tevékenység gazdaságossága, az adott tevékenység szempontjából annál nagyobb mértékben nő a minimum követelmény. Így a bérszorzó nemcsak az „abszolút” gazdaságosság mércéjének kialakulásában kap szerepet, hanem meghatározza a tevékenységek „relatív”, egymáshoz viszonyított gazdaságosságát is: növelése javítja azoknak a tevékenységeknek a relatív gazdaságosságát, amelyeket nagy eszköz-bér arány jellemez, és csökkenti a kis eszköz-bér aránnyal rendelkező tevékenységek relatív gazdaságosságát.

Egyszerű modellünk elemzésének befejezésekor ismét utalunk arra, hogy ezt a modellt nem annyira a gyakorlati felhasználási lehetőségek miatt tárgyaltuk részletesen, hanem azért, mert rendkívül egyszerű szerkezete lehetővé tett adottságot, hogy bemutassuk a q mutató szerinti optimalizálás lényeges jellemzőit. A továbbiakban a gyakorlati alkalmazás követelményeit helyeztük előtérbe, de megvizsgáljuk azt is, hogy az egyszerű modellünk alapján levont következtetések továbbra is érvényesek maradnak-e, tehát valóban q szerinti optimalizálás lényeges jellemzőinek tekinthetjük-e őket.

2. A q mutató maximalizálása lineáris feltételi egyenletek esetén

A gazdasági gyakorlatban alkalmazott matematikai programozási modellek javarésze lineáris programozási modell. Ezek a modellek az alkalmazott, sokszor bizonyos fokig egyszerűsítő feltevések — a tevékenységek mértékétől független fajlagos erőforrásigény, a tevékenységek alkalmazásának folytonosan változtatható mértéke és a tevékenységek alkalmazásának mértékétől független fajlagos eredmény és költség hatás mellett is többnyire gyakorlatilag is hasznosítható eredményeket adnak. A lineáris programozási modelleket a vállalati gazdálkodás különböző részterületein adódó döntési problémák — szállítási feladat, termékválaszték meghatározás stb. — megoldása mellett széleskörűen alkalmazzák a vállalati terveket előkészítő munka során is.

Ha egy programozási modellben lineáris feltételi egyenletek mellett törekszünk q maximalizálására, ugyanazokat az egyszerűsítő feltevéseket alkalmazzuk, melyeket a lineáris programozási modellek alkalmazása során kell alkalmaznunk. Így a megfelelő hiperbolikus programozási modell alkalmazásának feltételei a célfüggvény kérdését leszámítva ugyanazok, mint egy lineáris programozási modell alkalmazásának feltételei, ezért minden olyan tervezési feladat esetén, amikor elfogadhatónak bizonyul egy lineáris programozási modell alkalmazása, elfogadhatónak tartható a hiperbolikus programozási modell alkalmazása, ha meghatározható az egyes tevékenységek fajlagos árbevétel, változó költség, változó bérköltség és változó eszközigeny mutatója.

A q maximalizálásának modellje általános formában így a következő lesz:

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ Ax &\leq k \\ Fx &\geq f \\ \frac{n^*x - C}{sb^*x + e^*x + sD + G} &\max \end{aligned} \quad (1)$$

Az alkalmazott új jelölések a következők:

a_{ij} = a j tevékenység egységnyi alkalmazása esetén az i erőforrásból szükséges mennyiség, $A = [a_{ij}]$

f_{ij} = a j tevékenység egységnyi alkalmazásának hozzájárulása az i feladat teljesítéséhez, $F = [f_{ij}]$

f_i = az i feladat mértéke, $f^* = [f_1, f_2, \dots, f_n]$.

A megfelelő hiperbolikus programozási feladat megoldása több, viszonylag egyszerű, a szimplex módszerhez közelálló algoritmus segítségével is biztosítható.

A q mutató szerinti optimalizálás jellemzőinek vizsgálatára jó lehetőséget ad Martos algoritmus [3]. (Gyakorlati feladatok esetén mindig teljesül, hogy a lehetséges megoldások halmaza korlátos, és hogy a nevező minden lehetséges megoldás esetén pozitív.)

Jelölje egy tetszőleges megoldásban a célfüggvénybeli számláló értékét p_0 , a nevező értékét pedig m_0 , a j tevékenységhez tartozó, az adott bázisra vonatkozó számláló értékét p_j , a nevező értékét pedig m_j . A megoldás akkor optimális, ha valamennyi, a bázisban nem szereplő j -re teljesül az

$$m_0 p_j - p_0 m_j \leq 0$$

egyenlőtlenség. Ha valamely j -re

$$m_0 p_j - p_0 m_j > 0,$$

a megoldás javítható, ha a megfelelő j tevékenység bekerül a bázisba (degeneráció esetén természetesen a célfüggvény érték nem javul).

Az $m_0 p_j - p_0 m_j \leq 0$ egyenlőtlenség helyett felírhatjuk a következő három egyenlőtlenséget:

$$\frac{p_j}{m_j} \leq \frac{p_0}{m_0} \quad (\text{ha } m_j > 0),$$

$$\frac{p_j}{m_j} \geq \frac{p_0}{m_0} \quad (\text{ha } m_j < 0),$$

és

$$p_j \leq 0 \quad (\text{ha } m_j = 0),$$

(m_0 értéke a gyakorlati feladatokban mindig pozitív).

Az optimum feltételét tehát megfogalmazhatjuk úgy, hogy a megoldás optimális, ha valamennyi olyan tevékenység esetén, amelynek alkalmazása növelné a nevező értékét, az egységnyi nevező növekményre jutó számláló növekmény kisebb az aktuális célfüggvényértéknél, és ha valamennyi olyan tevékenység

esetén, amelynek alkalmazása csökkentené a nevező értékét, az egységnyi nevező csökkenésre jutó számláló csökkenés nagyobb az aktuális célfüggvényértéknél, az olyan tevékenységekre vonatkozóan pedig, amelyek alkalmazása a nevező értékét változatlanul hagyja, a számláló értéke csökkenne.

Miután a q célfüggvény számlálójában ugyanaz a mutató szerepel, mint amely a vállalati nyereség maximalizálása esetén a megfelelő lineáris programozási modell célfüggvénye volna, könnyen összehasonlíthatjuk a két célfüggvény szerinti optimalizálás eredményeit. Nyereség maximalizálás esetén egy megoldás akkor optimális, ha valamennyi, a bázisban nem szereplő j -re $p_j \leq 0$.

Ennek megfelelően, ha a q -t maximalizáló megoldásban valamely tevékenységre, amelyhez pozitív m_j tartozik és a $\frac{p_j}{m_j} \leq \frac{p_0}{m_0}$ egyenlőtlenség teljesül, de p_j nem negatív, a megfelelő tevékenység a nyereség maximalizálása esetén még bekerülne az optimális megoldásba. Ugyanakkor, ha a nyereséget maximalizáló megoldásban valamely olyan tevékenységre vonatkozóan, amelyhez negatív m_j tartozik és az optimum feltételnek megfelelően p_j is negatív, de a $\frac{p_j}{m_j}$ érték kisebb, mint q aktuális értéke, nagyobb q értéket kapunk, ha a megfelelő tevékenység kerül a bázisba.

Az elmondottak tehát azt jelentik, hogy a q maximalizálása esetén az optimális programban szereplő valamennyi olyan tevékenység, amelynek alkalmazása növelné a változó bér- és eszközigényt, szerepel a nyereség maximalizáló optimális programban is, és ez a program esetleg további ilyen tevékenységek alkalmazását is célszerűnek tartja. Ugyanakkor, ha a nyereséget maximalizáló optimális programot q maximalizálása esetén módosítanunk kell, akkor olyan „tevékenységeket” kell a bázisba vonnunk, amelyekhez negatív m_j tartozik, amelyek tehát csökkentik a változó bér- és eszközigényt. Ez tehát azt jelenti, hogy valamely „igazi” tevékenységet vagy meg kell szüntetnünk, vagy pedig egy olyan másik tevékenységre kell kicserélnünk, amelynek alkalmazása kevesebb $sB + e$ lekötéssel jár, mint az elhagyandó tevékenység alkalmazása.

Az optimális programok összehasonlítása alapján így megállapítható, hogy a vizsgált modell eredményei lényegében ugyanolyan irányzatokat tükröznek, mint amilyeneket az egyszerű modell alapján ismertettünk: a nyereség maximalizálás általában jobban ösztönöz a termelési lehetőségek kihasználására, mint a q szerinti maximalizálás. Ha pontosan fogalmazunk, csak azt állapíthatjuk meg, hogy az optimális program által felhasznált változó bérköltség és eszközfelhasználás összege nyereségmaximalizálás esetén legalább akkora, mint q maximalizálás esetén. Miután azonban a termelési lehetőségek kihasználása többnyire megfelelően mérhető a változó bér- és eszközfelhasználással, általában nem követünk el hibát, ha a két kifejezést alternatív módon használjuk. Természetesen könnyen szerkeszthető olyan modell, amelyben a termelési lehetőségek kihasználását valamely más mutatóval mérve — pl. termelési érték — q maximalizálása nagyobb termelési értékkel jár, mint a nyereség maximalizálás, reális feltételek esetén azonban ez nem következhet be, tehát bár matematikailag elképzelhető ilyen eset, a közgazdasági megfontolások miatt ezt kizártnak, vagy legalábbis egészen ritka kivételnek tekinthetjük.

A q és a nyereség maximalizálás eltérései ebben a modellben is azoktól a tényezőktől függenek, mint az egyszerű modellben, tehát szerepe van a vállalati állandó költségeknek, az állandó bérköltségnek, az állandóan lekötött

eszközértéknek és az optimális programban szereplő tevékenységek átlagos hatékonyságának.

Állításaink részletes bizonyítására nem térünk ki, csak utalunk arra, hogy az állandó költség tételek nagysága és a programban szereplő tevékenységek

hatékonysága határozza meg az adott megoldásban szereplő $\frac{p_0}{m_0}$ értékét, ami

viszont meghatározza azt a hatékonysági követelményt, amelyet a tevékenységek relatív hatékonyságának el kell érnie, hogy alkalmazása még célszerű legyen. Csak annyiban kell módosítanunk az egyszerű modell alapján levont következtetéseket, hogy a tevékenységre jellemző hatékonysági mutató

— $\frac{n_j}{sb_j + e_j}$ — helyett ebben a modellben a tevékenységek relatív hatékonysága

— $\frac{p_j}{m_j}$ — játszik döntő szerepet, amelyet eredeti hatékonyságuk mellett

a bázisban szereplő többi tevékenység hatékonysága, a tevékenység erőforrás igénye és a bázisban szereplő tevékenységek erőforrás igényei is befolyásolnak.

Ebben a modellben is megfigyelhető, hogy a nyereség maximalizálás „általános” értékelésével szemben a q szerinti maximalizálás „egyedileg” értékeli a tevékenységeket, bár az értékelés eltérései nem olyan szembeszökőek. Nyereség maximalizálás esetén ugyanis már nem a tevékenység eredeti n_j értéke, hanem az aktuális p_j érték dönti el, bekerül-e a tevékenység az optimális programba. A p_j érték a tevékenységre egyértelműen jellemző n_j értéken kívül a vállalat sajátos-helyzetétől, bizonyos egyedi jellemzőitől is függ, miután a bázisban szereplő tevékenységek nyereségmutatói, e tevékenységek fajlagos erőforrás-igényei és a j tevékenységre jellemző fajlagos erőforrásigény mutatók is szerepet játszanak abban, mekkora lesz p_j . (A lineáris programozás szokásos jelölései szerint $p_j = n_j - n^*B^{-1}a_j$, ahol n^* a bázisban szereplő tevékenységek célfüggvény együtthatóit, B pedig a bázisvektorokból alkotott matrixot jelöli). Így tulajdonképpen ez a modell már nyereségmaximalizálás esetén is egyedileg értékeli a tevékenységeket, a q szerinti maximalizálás azonban további egyedi jellemzőket is figyelembe vesz annak eldöntése során, bekerül-e a tevékenység az optimális programba, így egyrészt szerepet játszanak a tevékenységek nevező értékei, másrészt pedig az aktuális célfüggvény érték is. Ehhez képest pedig általánosnak tekinthetjük a nyereség maximalizáló célfüggvény értékítéletét, ha pedig el akarjuk kerülni a nem egészen egyértelmű egyedi, ill. általános értékelés kifejezéseket, megfogalmazhatjuk úgy a két célfüggvény szerinti optimalizálás egyik lényeges eltérését, hogy míg nyereség maximalizálás esetén teljesen független az aktuális célfüggvényértéktől, hogy egy tevékenység alkalmazása javítja-e a célfüggvényértéket, a q maximalizálása esetén ez a mindenkor megoldáshoz tartozó célfüggvény értéktől, és így az azt befolyásoló valamennyi tényezőtől is függ.

A modell alapján levonható elméleti következtetések gyakorlati jelentőségéről ugyanazt mondhatjuk el, mint az egyszerű modell esetén, így erre nem térünk ki ismét.

Ismertetjük viszont azt a duális feladatot, amely a hiperbolikus programozási feladat megoldására használható Charnes — Copper-féle lineáris programozási feladathoz rendelhető.

3. Az erőforrások értékelése az $\frac{N}{sB + E}$ mutató maximalizálása esetén

Charnes és Cooper a hiperbolikus programozási feladat megoldására egy lineáris programozási feladatot szerkesztettek, amelynek megoldása egyszerű transzformáció révén megadja a hiperbolikus feladat megoldását is. (Az eljárás alkalmazhatóságának feltételei, a lehetséges megoldások halmazának korlátossága és a nevező pozitivitása a q maximalizálása során gyakorlati feladatok esetén mindig teljesülnek.) Az

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ Ax &\leq b \\ \frac{c^*x + c_0}{d^*x + d_0} &\rightarrow \max \end{aligned} \quad (2)$$

feladathoz rendelhető lineáris programozási feladat a következő:

$$\begin{aligned} y &\geq 0, \quad t \geq 0 \\ Ay - bt &\leq 0 \\ d^*y + d_0t &= 1 \\ c^*y + c_0t &\rightarrow \max \end{aligned} \quad (3)$$

A két feladat optimum értéke megegyezik, a lineáris programozási feladat optimális megoldásából az $x_0 = \frac{1}{t_0}y_0$ formulával kapjuk meg a hiperbolikus feladat optimális megoldását (t_0 így az optimális megoldáshoz tartozó nevező érték reciproka).

A (3) lineáris programozási feladathoz a következő duális feladatot rendelhetjük:

$$\begin{aligned} u^* &\geq 0 \\ u^*A + vd^* &\geq c^* \\ -u^*b + vd_0 &\geq c_0 \\ y &\rightarrow \min \end{aligned} \quad (4)$$

Az $\frac{N}{sB + E}$ mutatót maximalizáló (1) modellhez tartozó duális feladat így a következő lesz:

$$\begin{aligned} u^* &\geq I, \quad w^* \geq 0, \\ u^*A - w^*F + v(sb^* + e^*) &\geq n^* \\ u^*k - w^*f - v(sD + G) &\leq C \\ v &\rightarrow \min \end{aligned} \quad (5)$$

Miután a (3) feladat optimális megoldásában t értéke mindig pozitív lesz, az

$$u^*k - w^*f - v(sD + G) \leq C$$

egyenlőtlenség az optimális megoldásban a kiegészítő eltérések tétele értelmében mindig egyenlőség formájában teljesül.

Az optimális v érték az optimális q értékkel egyenlő, így ez az egyenlet lehetőséget ad a duális feladat változóinak értelmezésére.

Az $\frac{1}{sD + G} u_i$ érték azt méri, hogyan alakul a hatékonysági mutató optimális értéke, ha az i erőforrásból egységnyivel több áll rendelkezésre, míg az $\frac{1}{sD + G} w_i$ érték azt mutatja, mennyivel nő a hatékonysági mutató értéke, ha az i feladat szintje egységnyivel csökken. A lineáris programozás elméletéből ismeretes, hogy a duális változó értékek abban a tartományban, amelyben az optimális megoldás szerkezete — az optimális bázis — változatlan, állandóak, és mivel gyakorlati feladatok esetén a megoldáshoz mindig rendelhető egy ilyen tartomány (általános jellegű feladatnál zérus annak a valószínűsége, hogy a megoldás degenerált), az erőforrások és a feladatok kismértékű változása esetén mindig elfogadjhatjuk a duális változók által az erőforrások és a feladatok gazdaságosságáról adott információkat.

A hiperbolikus programozási feladat esetén szintén rendelhetünk az egyes megoldásokhoz egy olyan tartományt, amelyben a megoldás szerkezete változatlan, és lényegében ez lesz az a tartomány, amelyben a duális változók által az erőforrások és a feladatok gazdaságosságáról adott információkat érvényeseknek tekinthetjük, de ebben az esetben a duális változók értéke nem marad teljesen változatlan, csak annyit mondhatunk, hogy értékeik nem változnak ugrásszerűen, és változásuk gyakorlati feladatok esetén általában lényegtelen nagyságrendű lesz. Mindez világos, ha az

$$u^*A - w^*F + v(sb^* + e^*) \geq n^*$$

egyenlőtlenségeket tekintjük, amelyek az optimális bázisban szereplő tevékenységek esetén egyenlőség formájában teljesülnek. Miután pedig a tevékenységeket jellemző paraméterek állandóak, v értéke pedig megváltozik, az egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha legalábbis valamelyik u , ill. w érték megváltozik.

Abból viszont, hogy az $\frac{1}{sD + G} w_i$ értékek v értékének változását mérik a

megfelelő erőforrás, ill. feladat változása esetén, arra is következtethetünk, hogy nemcsak egy u , ill. w érték változik meg, hanem valamennyi nem zérus érték változni fog, miután pl. a valamely erőforrásból rendelkezésre álló mennyiség növelése azt eredményezi, hogy valamelyik tevékenység alkalmazásának mértéke növelhető. Egy tevékenység egységnyivel nagyobb mértékű alkalmazása viszont egyre kisebb mértékben növeli v értékét, mivel a tevékenységet jellemző hatékonyság állandó, a vállalati hatékonyság pedig nő. Így az adott erőforráshoz tartozó u érték csökkenni fog. Ugyanakkor ebből az is látható, hogy a duális változók értékének változása csak viszonylag kismértékű, miután egy tevékenység alkalmazásának kismértékű fokozása csak kis mértékben változtatja a hatékonysági mutatót, és így csak lényegtelenül módosítja a tevékenység egységnyivel nagyobb mértékű alkalmazásától várható hatékonyság növelés értékét. Így abban a tartományban, amelyben a megoldás szerkezete nem változik, ha matematikai értelemben nem is tekinthetjük állandónak a duális változó értékeket, a gazdasági elemzésben elhanyagolhatjuk változásukat.

4. Decentralizált irányítási modellek a q mutató népgazdasági szintű maximalizálása esetén

A nyereség és a q mutató szerinti maximalizálás eltérő vonásai tükröződnek az (5) feladat feltételi egyenleteiben is. A nyereség maximalizáló modell duálisának feltételi egyenletei

$$u^*A - w^*F \geq n^*$$

típusú egyenletek lesznek. Ezek az egyenlőtlenségek azt kötik ki, hogy az egyes tevékenységek egységnyi alkalmazásához szükséges erőforrások árnyékáraikon értékelt összege legalább akkora, mint a tevékenység egységnyi alkalmazásával járó összes „hozadék”. Ezen az összes hozadékon a tevékenység bruttó nyereségmutatójának és annak a névleges hozadéknak az összegét értjük, amely a kötelező feladatokhoz való hozzájárulás alapján illeti meg a tevékenységet, és amelyet az egyes feladatokhoz való hozzájárulásnak a feladatok árnyékárainal súlyozott összegeként definiálunk. Ezt a névleges hozadékot a tevékenységeket megillető „különbözeti járadékként” is értelmezhetjük. Minden kötelező feladathoz rendelhetünk ugyanis egy különözeti járadékot, amelynek nagysága egyenlő lesz azzal a nyereségsökkenéssel, amely annak a tevékenységnek az alkalmazásából származik, amely tevékenységet csak a megfelelő kötelező feladat miatt kell alkalmaznunk. Az összes olyan tevékenység, amely hozzájárul e feladat teljesítéséhez, a megfelelő gazdaságtalan tevékenység alkalmazásának bizonyos mértékű megtakarítását, és így az ebből származó nyereségsökkenés megtakarítását tesz lehetővé. A feladathoz tartozó árnyékár révén ezt a megtakarítást adjuk hozzá a megtakarító tevékenység hozadékához, tehát a tevékenység különözeti járadékot kap.

A lineáris programozás elmélete alapján ismeretes, hogy az optimális programban szereplő tevékenységek esetén fenti egyenlőtlenségek egyenlőség formájában teljesülnek, míg a többi tevékenység esetén az árnyékáron mért erőforrás igény nagyobb lesz a tevékenység összhozadékánál. Erre az összefüggésre alapulnak a decentralizált irányítási rendszerek egyes modelljei, miután az erőforrások és a feladatok árnyékárainak elszámolási árként való alkalmazása esetén bármely részterületen csak azok a tevékenységek bizonyulnak nem veszteségesnek, amelyet a központilag meghatározott megoldás is optimálisnak tart. Ezért ha az egyes részterületeken a döntéshozók érdekeltisége a veszteség nélküli működéshez kötődik, csak olyan tevékenységek alkalmazását fogják célszerűnek tartani, amelyeket a központi program is előírna. Miután azonban semmi sem biztosítja, hogy a tevékenységek alkalmazásának mértékét a központ és az egyes részterületek azonosnak válasszák, a központi irányítás általában nem kerülhető el, és az árnyékárak előírásán kívül a tevékenységek mértékének meghatározása is központi feladat marad.

A q szerinti optimalizálás esetén az erőforrásokon és a feladatokon kívül a bér- és eszközfelhasználáshoz — pontosabban a bérszorzóval súlyozott bérigény és az eszközlekötés összegéhez is tartozik egy árnyékár, amelynek értéke éppen az optimális q értékkel lesz azonos. Fogalmazhatjuk ezt úgy is, hogy mind a bérigényhez, mind pedig az eszközlekötéshez tartozik egy árnyékár, és a bérigényhez tartozó árnyékár a bérszorzónak megfelelő számszor — s -szer — nagyobb, mint az eszközigényhez tartozó árnyékár. Érdekes itt arra is felfigyelnünk, hogy ha a modell korlátozó feltételei között munkaerőkortlát is szerepel, akkor ez a modell a munkaerőhöz kétféle árnyékárt rendel. A munka-

erőhöz mint erőforráshoz tartozó árnyékár a munkaerő szűkösségét méri, értéke zérus, ha a modell megoldása nem meríti ki a munkaerő korlátot, míg ellenkező esetben ez az árnyékár a korábban leírt módon mutatja, milyen hatékonyság növekedést eredményezhetne a munkaerő korlát egységnyi bővítése. Ugyanakkor a munkaerőhöz — bérköltséghez — mint termelési tényezőhöz tartozó árnyékár mindig pozitív lesz, és értéke — sv — azt mutatja, milyen nyereség növekedést kell biztosítani egységnyi bér felhasználásának az adott modellben. Hasonlóan kétféle árnyékár rendelhető az eszközlekötéshez, bár globális eszközkorlát általában nem szerepel a korlátozó feltételek között.

Az

$$u^*A - w^*F + vsb^* + ve^* \geq n^*$$

típusú egyenletek tehát azt kötik ki, hogy az egyes tevékenységek által igényelt erőforrások árnyékárainak értékelt összegének és a megfelelő árnyékárainak súlyozott bér-, valamint eszközigény összegének az összege legalább akkora, mint a tevékenység összes hozadéka, amelyet a nyereség maximalizáló modellhez hasonlóan a bruttó nyereséghezam és a „névleges” hozadék összegeként definiálunk. Egyenlőség csak az „optimális” tevékenységek esetén teljesül. A termelési tényezők árnyékárait így értelmezhetjük kötelezően fizetendő járulékokként is, és ekkor azt mondhatjuk, hogy a tevékenységek gazdaságosságának eldöntésekor hozadékukkal a bér-, valamint eszközlekötési járulékkal növelt költségeket kell szembe állítanunk.

A q szerinti maximalizálás „egyedi” jellege mutatkozik meg abban, hogy az optimális bér- és eszközlekötési járulék értéke az adott modell optimális q értékével lesz egyenlő, tehát ha a vállalatok egymástól függetlenül optimalizálják ezt a mutatót, a bér- és eszközfelhasználás célszerűségét mérő mutató vállalatoként különböző lesz, a kevésbé hatékony vállalatok a népgazdasági átlagnál kisebb hozadék esetén is célszerűnek fogják találni újabb termelési tényezők alkalmazását, míg az átlagnál hatékonyabban dolgozó vállalatok olyan alkalmazási lehetőségeket is gazdaságtalannak találnak, amelyek javítanak a népgazdasági szintű hatékonyságot. Így az optimális primál megoldás szerkezetének elemzése kapcsán levont következtetéseket megerősíti a duális feladat optimális megoldása alapján a termelési tényezők járulékaikról levonható következtetés. E járulékokkal kapcsolatosan felhívjuk a figyelmet arra, hogy ez a modell semmi esetre sem ad választ a bér- és eszközlekötési járulékok arányának sokat vitatott kérdésére, miután elfogadja a bérszorzó értékét, és tulajdonképpen csak a bérszorzóval súlyozott bérköltség és az eszközlekötés összegéhez tartozóan határoz meg egy járulékot, amelynek bér- és eszközlekötési járulékra való osztását formálisan hajtottuk végre.

Érdekes lehet a duális feladat most vizsgált feltételi egyenleteit v -re rendezve is megvizsgálunk. A megfelelő skalár egyenletek

$$v \geq \frac{n_j + \sum_i w_i f_{ij} - \sum_i u_i a_{ij}}{sb_j + e_j} = \frac{n'_j}{sb_j + e_j}$$

azt mondják, hogy az egyes tevékenységek módosított q mutatója nem nagyobb, mint az optimális v érték, és a lineáris programozás elméletéből ismert összefüggésnek megfelelően egyenlőség csak az optimális programban szereplő

— degeneráció esetén alternatívaként szereplő — tevékenységek esetén teljesül. A tevékenységek q mutatójának módosítása csak a számlálót érinti: a bruttó nyereséghozamot növelni kell a kötelező feladatokhoz való hozzájárulásért járó „különbözeti járadékok” összegével, és csökkenteni kell a tevékenység által igényelt erőforrások árnyékárakon mért költségével.

A hiperbolikus és a lineáris programozási modellek számos közös vonása alapján várható, hogy a decentralizált irányítási modellek könnyen adaptálhatók q maximalizálásának esetére is.

A mutató népgazdasági szintű maximalizálása elméletileg megvalósítható egy olyan nagyméretű modell alapján, amely a népgazdaság valamennyi erőforrását, az összes minimálisan teljesítendő feladat formájában előírható célkitűzést és a népgazdaság valamennyi tevékenységét átfogja. E modell megoldása egyrészt megadja, hogy mely tevékenységeket milyen mértékben kell alkalmazni annak érdekében, hogy a népgazdasági szintű hatékonyság (g) maximális legyen, másrészt viszont megadja egy speciális szabályozási rendszer elemeinek számszerű értékeit is a duális feladat optimális megoldása révén. E szabályozási rendszer elemei a következők:

- az erőforrások árnyékárai (u_i értékek);
- a kötelező feladatokhoz rendelhető különözeti járadék kulesok (w_i értékek);
- a termelési tényezők felhasználása után kötelezően fizetendő járulékkules (v), amelyet bérjárulék (sv) és eszközlekötési járulék kulesra oszthatunk (v).

A szabályozási rendszer arra épül, hogy a tevékenységek alkalmazásáról döntéseket hozó kisebb egységek (vállalatok) érdekeltsége egy speciálisan definiált hozadékösszeg maximalizálásához fűződik. E hozadék összeg számítása során a vállalatok az egyes tevékenységek bruttó nyereséghozamát (az árbevétel és a változó költségek különbségét) növelhetik azzal a különbözeti járadékösszeggel, amely a tevékenységnek a kötelező feladatokhoz való hozzájárulásai alapján jár (értelmezhetjük ezeket a járadékokat termelési támogatás-ként is). Ugyanakkor ezt a hozadékot csökkenteniük kell a tevékenység által igényelt erőforrások árnyékáraikon mért költségeivel (amelyeket adóként is értelmezhetünk), és a bér-, valamint eszközlekötés után fizetendő járulékokkal.

A népgazdasági modell optimális megoldásában szereplő tevékenységek esetén a tevékenység hozadéka éppen fedezi a felhasznált erőforrások és termelési tényezők költségeit, míg az összes olyan tevékenység esetén, amely népgazdasági szempontból nem optimális, ezek a költségek nagyobbak lesznek a tevékenység hozadékánál.

A nyereségmaximalizáló modellhez hasonlóan a szabályozási rendszer ebben az esetben is csak azt biztosítja, hogy a vállalatok népgazdaságilag optimális tevékenységek alkalmazását tartják célszerűnek, de nem biztosítja automatikusan, hogy a vállalatok ezeket a tevékenységeket olyan mértékben alkalmazzák, amilyen mértékét a népgazdasági modell optimális megoldása írta elő. Így a közvetett szabályozást ebben az esetben is ki kell egészíteni bizonyos mértékű közvetlen irányításnak is: a vállalatok által optimálisnak tartott tevékenységek mértékét központilag kell előírni. Valójában azonban az optimális tevékenységeknek csak viszonylag kis részére vonatkozóan van szükség erre a központi előírásra, miután az olyan tevékenységek esetén, amelyek optimális mértékű alkalmazása egymagában meríti ki a modell valamelyik korlátját, a tevékenység alkalmazásáról döntést hozó vállalat e korlátnak megfelelően az opti-

mális mértékű alkalmazásnak megfelelően dönt, ha a nem központilag szabályozott mértékű tevékenységek esetén a lehetőségek teljes kihasználását írjuk elő. Ugyanakkor általában a tevékenységek nagy részéhez egyedi felsőkorlátokat rendelhetünk — többnyire a piaci lehetőségeknek megfelelően — így ebben az irányítási rendszerben a közvetlen utasításokon alapuló beavatkozás viszonylag kismértékűre csökkenthető. Ha ezt a megállapítást kiegészítjük azzal a már említett ténnyel, hogy a közvetlen utasítás csak a vállalat által optimálisnak tartott alternatívák közötti választást érinti, és így nem ellentétes a vállalat érdekeivel, elméletileg mindenképpen elfogadhatónak tekinthetjük ezt a szabályozási rendszert.

A realizálhatóság lehetőségeivel nem foglalkozunk részletesen, miután ebből a szempontból nincs különbség a népgazdaság lineáris programozási modelljeinek és a q mutatót maximalizáló modellnek a duálisára épülő szabályozási rendszerek között. Így míg kisebb aggregátumok — pl. egy több részegységet tartalmazó nagyvállalat — esetén gyakorlatilag is minden részletében megvalósíthatónak látszik az előzőekben ismertetett irányítási rendszer, népgazdasági szinten inkább csak azt mondhatjuk, hogy a szabályozási rendszer felépíthető a q mutatót népgazdasági szinten maximalizáló modell duális megoldása alapján, és elvárható, hogy ez a szabályozási rendszer olyan vállalati magatartást eredményez, amely tendenciájában megfelel a népgazdasági érdekeknek.

Az elmondottak a q szerinti optimalizálás érdekes sajátosságát tükrözik: míg a vállalati q mutatók maximalizálása révén nem biztosítható a mutató népgazdasági szintű optimalizálása, konstruálható egy olyan szabályozási rendszer, amely a vállalati nyereség maximalizálására épülve a népgazdasági szintű q mutató optimalizálására vezet.

A hiperbolikus célfüggvényt optimalizáló modellhez rendelhető duális feladatot felírhatjuk úgy is, hogy a feltételi egyenleteket v -re rendezzük. Bár matematikailag nyilván azonos feladatról van szó, ebben az esetben közgazdaságilag más értelmezést adhatunk a felépíthető decentralizált irányítási rendszernek. Ha ugyanis a vállalatok nyereségük és a részükre járó különbözeti járadékok (termelési támogatások) összegéből fedezik az erőforrások után fizetendő adókat, és az azután náluk maradó nettó nyereség, valamint a tevékenységhez kapcsolható bérszorzóval súlyozott bérköltség és lekötött eszközérték arányának maximalizálásában érdekeltek, csak olyan tevékenységek alkalmazását találják majd célszerűnek, amely tevékenységek népgazdaságilag

optimálisak, miután az ilyen tevékenységekhez tartozó
$$\frac{n_j + w^* f_j - u^* a_j}{s b_j + e_j}$$

érték eléri a hatékonyság népgazdasági szintű mutatójának, v -nek az értékét, míg a többi tevékenység esetén a tevékenységhez rendelhető hatékonysági mutató v -nél kisebb lesz. Első pillanatra úgy tűnhet, hogy a vállalati q mutató maximalizálást előíró rendszer is biztosíthatja a mutató népgazdasági szintű maximumát. Ez a vállalati célfüggvény azonban csak az újonnan lekötött termelési tényezők hatékonyságát értékeli, és az egyes tevékenységekhez rendelhető „változó” hatékonyság értékelése során semmilyen szerepet nem kap a vállalati hatékonysági mutató korábbi értéke, tehát a rendszer kiszűri az ebből eredő torzító hatásokat. A vállalat egészére vonatkozó q mutató még javulhatna — ha értéke v -nél kisebb — népgazdaságilag nem optimális tevékenységek alkalmazása révén, ill. a népgazdaságilag optimális tevékenységek

csökkentik a v -nél nagyobb vállalati hatékonysági mutatók értékét, miután azonban az érdekeltiség nem q -hoz, hanem csak az újonnan lekötött termelési tényezőkre vonatkozó ilyen mutatóhoz fűződik, a vállalat számára csak népgazdaságilag optimális tevékenységek alkalmazása lesz célszerű. A rendszer természetesen ebben az esetben sem biztosítja automatikusan, hogy a vállalatok minden tevékenység mértékét helyesen válasszák meg, ezért a pontos optimum biztosítása ekkor is bizonyos mértékű közvetlen irányítást tesz szükségessé, amely azonban ebben az esetben is csak az alternatívák közötti választást érinti, és nem ellentétes a vállalati érdekekkel.

Az irányítási rendszer ilyen megfogalmazása talán szerencsésebbnek tekinthető abból a szempontból, hogy a vállalati érdekeltiségi mutató maximuma ebben az esetben nem 0 lesz, mint a nyereség maximalizáló megfogalmazás esetén, hanem egy pozitív érték, ami a matematikai azonosság ellenére, valószínűleg az érdekeltiségi mutató hatásának intenzívebb érvényesülését teszi lehetővé. Ezt csak alátámasztja az a tény, hogy a nyereség maximalizáló megfogalmazás esetén az optimális megoldáshoz tartozó vállalati nyereség tulajdonképpen negatív érték, ha figyelembe vesszük, hogy az n_j értékek a tevékenységek árbevételének és változó költségeinek a különbségei, és így ennek a bruttó nyereség összegnek fedeznie kell a vállalati állandó költségeket is. Az n_j értékek természetesen nem módosulnak a hiperbolikus célfüggvény esetén, miután azonban ebben az esetben az érdekeltiség eleve egy „mesterséges” mutatóhoz kötődik — a nevezőben nem szerepelnek az állandóan lekötött termelési tényezők —, a gyakorlati megvalósítás talán realisabb lehetőségnek tekinthető, mint egy olyan nyereségmaximalizáló rendszerben, amely végeredményben csak a veszteség nagyságát minimalizálja.

(Beérkezett: 1972. május 4.)

IRODALOM

1. CHARNES, A.—COOPER, W. W.: Programming with linear fractional functionals. *Nava Research Logistics Quarterly*, Sept.-Dec. 1962.
2. KOVÁCS Á.: Megjegyzések a jövedelemszabályozási rendszerről és a vállalati célfüggvényről. *Pénzügyi Szemle*, 1969/2.
3. MARTOS B.: Hyperbolic programming. *Naval Research Logistics Quarterly*, June-Sept. 1964, 135—155. o.

SOME PROBLEMS IN OPTIMIZATION ACCORDING TO THE

$$\frac{N}{sB + E} \text{ INDEX NUMBER}$$

In the present control system of firm's income the $q = \frac{N}{sB + E}$ index is in the focus of the firm's interest (N = profit, B = wage cost, E = fixed assets, s = weighting coefficient). At the same time q can be considered one of the most important indices measuring the efficiency of economic entities, since the other elements of the new value beside profits are independent on the quality of management if factor inputs are fixed.

The characteristics of optimization according to q are examined first by means of a simple model and we compare the behaviour of the model with that of the profit maximizing model. Two characteristic features of optimization according to q are emphasized: Furthermore, stronger minimal requirements for the utilisation of productive factor and

the increased role of the firm's working conditions. Furthermore, it is shown on the basis of Martos' hyperbolic programming algorithm that the above differences between the maximization of q and of the profit can be pointed out in every model where the constraints are described by a linear equation system. The resource evaluation of the q -maximizing model is analysed according to the dual of the linear program equivalent of the hyperbolic program in the sense of Charnes and Cooper.

This model is used for the demonstration of how the maximization of the index q can be ensured in a decentralized management system where the decisions on the activities are made according to the taxes paid for the use of resources and to the extra allowances given for obligatory tasks.

It is shown that the index q of a higher economic unit cannot generally be maximized by the way of the lower units maximizing their own q , and indicated how to modify the objective function to this end.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОПТИМИЗАЦИИ СОГЛАСНО ИНДЕКСУ $\frac{N}{sB + E}$

При настоящей системе регулирования доходов на предприятиях в центре заинтересованности предприятия стоит индекс $q = \frac{N}{sB + E}$ (N = прибыль, B = расход зарплат, E = стоимость вложенных средств, s = расчетный фактор). В то же время q можно считать одним из самых важных индексов, измеряющих эффективность экономических единиц, потому что при данном факторе производства элементы новой стоимости кроме прибыли являются независимыми от качества хозяйствования.

В статье характерные черты оптимизации согласно индексу q мы исследуем сперва на основе простой модели и сопоставляем ведение модели ведением модели максимизации прибыли. Подчеркиваем две характерные черты оптимизации согласно q : «строгость» минимального требования к использованию фактора производства и большая роль способностей предприятия. В дальнейшем, на основе гиперболического алгоритма программирования Мартоша показывается, что вышеупомянутые различия между q и максимизацией прибыли можно показать во всех моделях, где условия записываются системой линейного неравенства. Статья анализирует оценку ресурсов модели, максимизирующей q , на основе дуали проблемы гиперболического программирования согласно линейному варианту Чарнеса—Купера и употребляет эту модель для представления того, как можно обеспечивать максимизацию индекса q при децентрализованной системе управления, в которой ответственные лица за деятельность решат об употреблении деятельности на основе налогов, уплачиваемых за пользование ресурсов.

Показывается, что индекс q большей единицы вообще нельзя максимизировать так, чтобы частичные единицы максимизали свою стоимость q и дается, как следует модифицировать целевые функции частичных единиц в интересах этой цели.