Simon András—Stahl János

Optimum, árak és egyensúly a nemzetközi kereskedelemben

A nemzetközi kereskedelem elméletének egyik régi problémája, hogy a kereskedelemben hogyan érvényesülnek az egyes résztvevő országok közös, illetve egyéni érdekei. Nyilvánvaló, hogy mindegyik ország érdekelt a nemzetközi munkamegosztás hatékonyságában, de az is nyilvánvaló, hogy a hatékony külkereskedelem mellett arra törekszik, hogy a kereskedelemből származó előnyök — melyek korlátozottan rendelkezésre álló anyagi javakban testesülnek meg — minél nagyobb mértékben őnála, és ne a partnerországnál jelentkezzenek. Ezzel összefüggő probléma az árak, a hatékonyság és a jövedelemeloszlás közötti összefüggés: milyen külkereskedelmi árak segítik elő, hogy az egyes országok egymástól függetlenül hozott gazdasági döntései valamilyen nemzetek feletti koordináció nélkül is hatékonyak legyenek? Az ilyen árak a fizetési mérleg egyenlegétől függően, a kereskedelemből származó előnyök milyen megoszlását biztosítják az egyes partnerországok között?

E cikk szerzői előtt e kérdések egy több országot átfogó optimumszámítási modell[1] kialakítása során merültek fel, amikor el kellett dönteni, hogy mi legyen a programozási feladat célfüggvénye. A felvetett problémák azonban sokkal messzebbre vezetnek, és az adott válaszok sokkal nagyobb területen használhatók fel, mint egy optimumszámítási feladat célfüggvényének meghatározása.

A tárgyalás mégis szorosan kapcsolódik az optimumszámításhoz. Ennek egyik oka módszerünkben rejlik: a nemzetközi gazdaság és ezen belül az egyes országok gazdaságának termelési lehetőségeit egy optimumszámítási feladat feltételrendszereként írjuk fel, az egyes országok gazdasági céljait pedig egy optimumszámítási feladat célfüggvényeként értelmezzük. Ezekre a valóságot kétségtelenül leegyszerűsítő absztrakciókra az a szintén kétségtelen tény jogosít fel, hogy az egyes országok valóban, ha nem is „optimalizálnak", de legalábbis törekszenek a gazdasági jólét fokozására határaikon belül. A tárgyalás másik kapcsolata az optimumszámítással az, hogy a következtetések levonásánál nem feledkeztünk meg eredeti célunkról, az említett nemzetközi optimumszámítási feladat célfüggvény-problémájának megoldásáról, és ahol erre lehetőség van, kitérünk az ezzel kapcsolatos következtetésekre is.

Cikkünk megállapításai a közgazdasági irodalomban általában nem számítanak újnak, inkább összefoglalását és az előbbiekben említett problémák szerinti kifejtését adják ismert tételeknek. Újnak csak a külkereskedelmi egyensúlyi helyzetek linearitási feltételek melletti unicitásának tárgyalása tekinthető.

[1] Lásd: Simon András: Több szocialista ország gazdasági kapcsolatainak optimalizálási modellje c. cikkét ugyanebben a számban.

Mivel a felvetett problémákkal közvetlenül vagy közvetve a nemzetközi kereskedelemmel foglalkozó irodalom egy tekintélyes hányada foglalkozik, nem vállalkoztunk teljes bibliográfia közlésére. Irodalomra csak ott hivatkozunk, ahol a kérdésben alapvető műről vagy egy tétel közvetlen átvételéről van szó.

Néhány alapfeltevés

Tegyük fel, hogy a nemzetközi kereskedelemben résztvevő országok mindegyike az általa fogyasztott termékmennyiségekből álló x vektort egy konkáv $c(x)$ függvény maximalizálása alapján értékeli.

Az összes olyan lehetséges termékkombinációk halmazáról, melyet egy ország elő tud állítani, feltesszük, hogy konvex. A kereskedelemben résztvevő országok mindegyikének az az érdeke, hogy a fogyasztásra kerülő termékeknek olyan kombinációja jöjjön létre, amelyből a saját részesedése a legnagyobb célfüggvény-értéket biztosítja számára és egyik országnak sem fűződik közvetlenül érdeke ahhoz, hogy a másik ország milyen célfüggvény-értéket ér el.

Jövedelemeloszlás

Nyilvánvaló, hogy az adott lehetőségeken belül nem növelhető mindegyik ország célfüggvény-értéke tetszés szerint, sőt egy bizonyos határon túl az egyik ország célfüggvény-értéke már csak a többi ország rovására nőhet. Ezen határnak megfelelő két termékkombináció esetén nem tudjuk megmondani, hogy az egyik termékkombinációt vagy a másikat részesítsük-e előnyben anélkül, hogy egyben az egyes országok célfüggvényeit is rangsorolnánk. Ilyen rangsor felállítása igencsak nehéz lenne; valamilyen nemzetekfeletti ítélőszék felállítását tenné szükségessé, amely eldönti, hogy az egyes országok között milyen életszínvonal különbségek „igazságosak" vagy „igazságtalanok". Annak érdekében, hogy erre a feladatra ne kelljen vállalkoznunk, nevezzük optimálisnak mindazokat a helyzeteket, melyekben bármelyik ország célfüggvény-értéke már csak úgy növelhető, hogy ezzel egyidejűleg valamelyik ország célfüggvény-értékét csökkentenünk kell. Az optimum ilyen fogalmát nevezzük Pareto-féle optimumnak.

Kuhntól és Tuckertől származik az a tétel [9], hogy az ilyen értelemben optimális helyzetet biztosító termékkombinációk bármelyike előállítható egy olyan programozási feladat optimális megoldásaként, ahol a feladat célfüggvénye az egyes résztvevők célfüggvényeinek nem-negatív lineáris kombinációja. (A tétel az úgynevezett vektor-maximum problémaként ismert.)

A programozási feladat célfüggvényeinek súlyrendszere határozza meg, hogy az egyes országok hogyan részesednek a program eredményeiből. Általában minél nagyobb egy ország célfüggvényének a súlya a közös célfüggvényben, annál nagyobb az illető ország célfüggvény-értéke az optimális programban. Ezt az állításunkat később pontosabban is megfogalmazzuk.

Nemzetközi optimalizációs számítás esetén sem vállalkozhatunk arra, hogy az egyes országok jövedelmi színvonalát összehasonlítsuk és ítéletet alkossunk arra vonatkozóan, hogy a jövedelmek egy adott elosztása igazságos-e vagy sem. Feladatunknak legfeljebb azt tekinthetjük, hogy optimumszámítást végzünk úgy, hogy az egyes feladatok célfüggvényeit a résztvevő országok célfüggvényeinek más és más súlyozásával képezzük és az egyes számítások eredményeit összehasonlítjuk egymással és az optimalizálás előtti helyzettel. A gyakorlatban természetesen eléggé korlátozott a jövedelmek eloszlásának az a sávja, amelyet reálisnak tekinthetünk: valószínű, hogy csak olyan variánsok tekinthetők minden ország részéről elfogadhatónak, melyek mindegyik résztvevő ország számára nagyobb célfüggvényértéket biztosítanak, mint az optimalizálás előtti helyzetben.

Bár nem tudjuk előre, az optimális program ismerete nélkül, hogy egy adott súlyrendszer milyen céfüggvény-értéket biztosít a résztvevőknek, a valutaárfolyamok és a súlyrendszer később ismertetendő összefüggései alapján valószínűleg megbecsülhető lenne, hogy a jövedelmek bizonyos elosztása az optimalizálás során hozzávetőlegesen milyen célfüggvény súlyok mellett valósulna meg.

Árak, egyensúly és hatékonyság

A jövedelemelosztás meghatározásával ellentétben már megoldható közgazdasági feladat, hogy a gyakorlatban a jövedelmek elosztása milyen módon történjen.

Az elosztás egyik meghatározója az ár. Nyilván minél magasabb valamilyen termék külkereskedelmi ára, annál nagyobb jövedelmet ér el az exportáló ország az importáló országgal szemben.

A jövedelem elosztásának másik meghatározója a külkereskedelmi mérleg. Az aktív kereskedelmi mérleg viszonylag nagyobb exportot és kisebb importot jelent. Adott árakon tehát a kereskedelmi mérleg aktívvá válása csökkenti az illető ország rendelkezésére álló termékek mennyiségét.

Az árakat és a kereskedelmi mérleg egyenlegét, mint a jövedelem elosztásának formáit nem célszerű tetszőlegesen alkalmazni. Az áraknak ugyanis nemcsak a jövedelmek elosztásánál van szerepük, hanem az optimális munkamegosztás kialakításának eszközei is lehetnek, míg a kereskedelmi mérleg egyenlegének ilyen szerepe nincsen.

Az egyes országok termelési szerkezetük kialakításánál általában mérlegelik, hogy az adott külkereskedelmi árakon mit érdemes otthon előállítani, illetve mit érdemes inkább importálni. Megfelelő nemzetközi árak esetén az egyes országok annak ellenére, hogy egymástól elkülönülve — nem ismerve a másik fél magatartását — döntenek, a résztvevő országokat együttesen tekintve is (Pareto) optimális termelőtevékenységet és külkereskedelmi szerkezetet alakíthatnak ki, míg nem megfelelő árak esetén az országonként decentralizált döntések eredményeként nem optimális termelési szerkezet jön létre.

Célszerű tehát a nemzetközi kereskedelmet olyan árakon folytatni, hogy az egyes országok döntései optimális nemzetközi munkamegosztásra vezessenek, és a jövedelmek elosztását kizárólag a külkereskedelmi mérlegegyenleg funkciójává kell tenni.

Felmerül a kérdés, hogy mik ezek a ,,megfelelő'', hatékonyságot biztosító árak. A kérdés megválaszolása előtt fogalmazzuk meg pontosabban a külkereskedelmi árak iránt támasztott követelményeket.

Az egyes országok termelési lehetőségeit és célfüggvényét lineáris függvényekkel írjuk le. E feltevésünk kizárólag a tárgyalás egyszerűsítését szolgálja, következtetéseink bármilyen konvex termelési halmaz és maximalizálandó konkáv célfüggvény esetén érvényesek.

Tegyük fel, hogy i ország a következő feltételek mellett maximalizálja a z_i változó értékét:

$$
\begin{aligned}
A_i x_i &\leq b_i \\
H_i x_i + u_i z_i - y_i &\leq 0 \\
P y_i &\leq \alpha_i \\
x_i \geq 0,\ z_i &\geq 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ahol x_i vektor elemei a termelő tevékenységek szintje (ide sorolhatjuk a programozási modellben nem szereplő országokkal folyó exportot és importot is);

z_i a fogyasztás szintje (skalárváltozó)

y_i a külkereskedelmi változók vektora (a pozitív elemek az i országba irányuló forgalom, a negatív elemek az i országból a többi országba irányuló forgalom volumenét mutatják);

A_i mátrix elemei a tevékenységek fajlagos felhasználását mutatják a megfelelő elsődleges erőforrásokból;

b_i az elsődleges erőforrások vektora (ide sorolhatjuk a külkereskedelmi lehetőségeket is a programozási modellben nem szereplő országokkal);

H_i pozitív elemei a tevékenységek fajlagos anyagráfordítását, negatív elemei a tevékenységek fajlagos kibocsátását jelölik;

u_i a fogyasztás egységnyi szintjének fajlagos termékfelhasználása; (skalárváltozó)

P a külkereskedelmi árak vektora;

α_i a külkereskedelmi mérleg egyenlege. Az α_i számokra teljesül a $\Sigma\alpha_i = 0$ feltétel.

A felírt feladat annak megfogalmazása, hogy i ország külkereskedelmi szerkezetének kialakításakor saját termelési lehetőségeinek ismeretén kívül csak két információnak van birtokában: a külkereskedelmi árnak és az előírt devizaegyenlegnek. Ezek ismeretében választja ki a számára optimális termelési és külkereskedelmi tevékenységeket. Kérdés az, hogy milyen P árak mellett lesz az országok közötti munkamegosztás a már definiált értelemben optimális.

A felírt modell csak megközelítően tükrözi a valóságot annyiban, hogy valójában az egyes országok egyrészt nem képesek optimális döntésre, másrészt az árakon kívül rendelkeznek egyéb információkkal is a partnerek termelési lehetőségeire, fogyasztására vonatkozóan. Az előbbi feltevéssel már foglalkoztunk. Ami az utóbbit illeti, megjegyezzük, hogy az árak csak akkor veszítenék el teljesen jelentőségüket, ha a partnerország termelési lehetőségeiről az információ teljes volna. Ilyen tökéletes információ azonban nem áll semmilyen döntésthozó rendelkezésére, még az országon belüli termelési lehetőségekről sem.

Visszatérve a modellre, bebizonyítjuk, hogy annak, hogy az (1) feladatok optimális megoldásaként Pareto-optimum jöjjön létre, az a feltétele, hogy az optimális megoldásra $\sum\limits_i y_i \leq 0$ legyen, vagyis az exportkínálat ne legyen kisebb, mint az importkereslet. A bizonyítás egyben arra is választ ad, hogy a kereslet és a kínálat ilyen egyensúlya milyen külkereskedelmi árak mellett valósul meg.

1. tétel[2]: Ha az (x_i^*, y_i^*, z_i^*)-k az (1) feladatoknak olyan optimális megoldásai, melyekre teljesül $\sum_i y_i^* \leq 0$, akkor vannak olyan $\lambda_i > 0$ számok, hogy az (x_i^*, z_i^*)-k optimális megoldásai az

$$A_i\, x_i \leq b_i \quad (i = 1, 2 \ldots) \tag{2}$$

$$\sum_i H_i\, x_i + \sum_i u_i\, z_i \leq 0$$

$$x_i \geq 0 \quad z_i \geq 0$$

$$\sum_i \lambda_i\, z_i \to \max$$

lineáris programozási feladatnak, az ún. közös feladatnak.

Megfordítva, ha valamely $\lambda_i > 0$-k mellett (x_i^*, z_i^*) optimális megoldása a (2) feladatnak akkor van olyan P vektor és vannak olyan α_i számok, melyekre $\sum_i \alpha_i = 0$ és az $(x_i^*, H_i x_i^* + u_i z_i^*, z_i^*)$-k optimális megoldásai a megfelelő (1) feladatoknak.

(Az említett vektor-maximum tétel alapján az állítást röviden úgy is fogalmazhatjuk, hogy modellünkben a Pareto optimális és az egyensúlyi helyzetek egybeesnek.)

Bizonyítás. Szükségünk lesz az (1) feladatok duális feladataira:

$$q_i\, A_i + p_i\, H_i \geq 0$$

$$p_i\, u_i \geq 1 \tag{3}$$

$$p_i - \nu_i\, P = 0$$

$$q_i \geq 0, \quad p_i \geq 0, \quad \nu_i \geq 0$$

$$q_i\, b_i + \nu_i\, \alpha_i \to \min;$$

valamint a (2) feladat duálisára:

$$\bar{q}_i\, A_i + pH_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

$$pu_i \geq \lambda \qquad (i = 1, 2 \ldots)$$

$$\bar{q}_i, p \geq 0$$

$$\sum_i \bar{q}_i\, b_i \to \min .$$

Ha (x_i^*, y_i^*, z_i^*) optimális megoldása (1)-nek, akkor van olyan (3)-t kielégítő (q_i^*, p_i^*, ν_i^*), hogy

$$q_i^*\, b_i + \nu_i^*\, \alpha_i = z_i^*$$

[2] Hasonló tétel bizonyítása — nemlineáris esetében — tudomásunk szerint először Uzawa [13] cikkében szerepel. Egy más lineáris modellre Micielski és Piaszczynski bizonyítottak ilyen tételt [10].

Minthogy feladatunk esetén $\nu_i \neq 0$, innen

$$\alpha_i = \frac{z_i^* - q_i^* b_i}{\nu_i^*}$$

amit összegezve és figyelembevéve $\sum_i \alpha_i = 0$-t

$$\sum_i \frac{z_i^*}{\nu_i^*} = \sum_i \frac{q_i^*}{\nu_i^*} b_i.$$

Legyen $\lambda_i = \frac{1}{\nu_i^*}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. $\sum_i y_i \leq 0$ folytán az (x_i^*, y_i^*, z_i^*)-k lehetséges megoldásai (2)-nak és $P^* = \frac{p_1^*}{\nu_i^*} = \ldots = \frac{p_i^*}{\nu_i^*} = \ldots$-t választva $\left(\ldots \frac{q_1^*}{\nu_i^*} \ldots, p^*\right)$ pedig megoldása (4)-nek. Utolsó egyenlőségünk folytán a szóban forgó megoldások optimális megoldások.

A megfordítást bizonyítandó legyen $(\ldots \bar{q}^* \ldots p^*)$ (4) egy optimális megoldása. Ismét a feladat természetéből következően feltehető, hogy $p^* \neq 0$. Legyen $P = p^*$

$$p_i^* = \frac{p^*}{\lambda_i}, \quad q_i^* = \frac{\bar{q}_i^*}{\lambda_i}, \quad \nu_i = \frac{1}{\lambda_i},$$

$$y_i^* = Hx_i^* + u_i z_i^* \text{ és } \alpha_i = Py_i^*.$$

Akkor egyrészt nyilván (x_i^*, y_i^*, z_i^*), illetve (q_i^*, p_i^*, ν_i^*) lehetséges megoldásai (1)-nek, illetve (3)-nak, másrészt a dualitási tétel folytán

$$q_i^* b_i + \nu_i^* \alpha_i = \frac{\bar{q}_i^*}{\lambda_i} A_i x_i^* + \frac{p^*}{\lambda_i} (H_i x_i^* + u_i z_i^*) =$$

$$= \frac{1}{\lambda_i} (\bar{q}_i^* A_i + p^* H_i) x_i^* + p_i^* u_i z_i^* = z_i^*,$$

azaz e megoldások optimális megoldások is. Ugyancsak a kiegészítő eltérések tétele miatt

$$\sum_i \alpha_i = p^* \sum_i (H_i x_i^* + u_i z_i^*) = 0,$$

amivel a tételt bizonyítottuk.

Megjegyezzük még, hogy

$$\alpha_i = Py_i^* = p^*(H_i x_i^* + u_i z_i^*) = -q_i^* A_i x_i^* + \lambda_i z_i^* = \lambda_i z_i^* - q^* b_i.$$

A bizonyítás során adódott, hogy az egyensúlyt és egyúttal Pareto-optimumot biztosító árrendszer egybeesik egy közös feladat megoldásaként kapott árnyékárakkal.

Az is látható a bizonyításból, hogy az egyensúlyra az jellemző, hogy az ország-feladatok megoldásaként kapott árnyékárak csak egy $\nu_i = \frac{1}{\lambda_i}$ szorzóban különböznek az egyensúlyi külkereskedelmi áraktól. Ha az országfeladat árnyékárrendszerét tekintjük az illető ország belföldi árainak, akkor ezt a szorzót, mint a külkereskedelmi árak belföldi árakra való egységes átszámítási kulcsát, nevezhetjük valutaszorzónak vagy valutaárfolyamnak. A tétel bizonyítása alpján az egyes országok így értelmezett valutaárfolyama az illető ország célfüggvényének a közös feladat célfüggvényében való súlyával azonos.

Ez a tény arra enged következteni, hogy egy optimumszámítási feladat numerikus kiszámítása során a célfüggvények súlyának meghatározásakor bizonyos esetekben a tényleges valutaárfolyamok ismerete segítséget adhat. Akkor ugyanis, amikor szoros kapcsolat van az ország-feladatok árnyékárrendszere és a tényleges belföldi árak között: pl. az egyes országok célfüggvényértéke az illető ország belföldi valutájában van megadva (pl. adott ágazati struktúrájú nemzeti jövedelem Ft-ban). A különböző országok árnyékárszínvonalának arányai ekkor feltehetően közel lesznek a tényleges árszínvonalak arányaihoz, a modell valutaárfolyam-arányai pedig közel lesznek a tényleges valutaárfolyam-arányokhoz. Ez a tény természetesen csak igen hozzávetőleges információt nyújt a modell célfüggvény-súlyaira vonatkozóan. A tényleges valutaárfolyamokat is különbözőképpen értelmezhetjük: úgy, mint valamilyen pénzügyi elszámolásnál használt árfolyamokat, vagy a vásárlóerő-paritás, vagy esetleg külkereskedelmi valutaszorzók átlagaként számított árfolyamokat. Valószínű azonban, hogy ha a súlyok megállapításánál nagyságrendileg az így számbajövő árfolyamokhoz közelálló értékek mellett döntünk, akkor olyan optimumhoz jutunk, amely nem lesz túl „részrehajló": minden résztvevő számára célfüggvényérték-javulást eredményez az optimalizálás előtti helyzethez képest.

Az egyensúly unicitása

A közös programozási feladatban más és más az optimális megoldás attól függően, hogy a célfüggvényben milyen az egyes országok célfüggvényeinek a súlya. Nyilvánvaló, hogy az egyes országok feladatait tekintve is többféle olyan helyzet lehetséges, hogy a külkereskedelemben a kereslet és kínálat egyensúlya biztosított. Ezek az egyensúlyi helyzetek attól függően különbözhetnek, hogy a külkereskedelmi mérleg egyenlege (a devizaegyenleg) mekkora. Különböző mérlegegyenlegek mellett más és más lehet a termelés optimális szerkezete és az egyensúlyt biztosító árrendszer is. Kérdés, hogy a mérlegegyenleg változtatása hogyan befolyásolja az egyes országok célfüggvényeit.

Tegyük fel, hogy az egyik egyensúlyi helyzet abban különbözik a másiktól, hogy az *A* ország külkereskedelmi mérlegegyenlege különböző. Ha a külkereskedelmi árak változatlanok lennének, akkor abban a variánsban, ahol *A* ország aktívuma nagyobb (passzívuma kisebb), a nagyobb értékű export és kisebb értékű import révén kevesebb termék jutna belföldre és így *A* ország célfüggvényértéke is kisebb lenne, mint a másik variáns esetén. Ez azt jelentené, hogy az egyensúlyi árak követelménye és a kereskedelmi mérleg egyenlegének előírása egyértelműen meghatározná a jövedelem eloszlását a kereskedelemben résztvevő országok között: minél passzívabb (aktívabb) egy ország egyenlege, annál nagyobb (kisebb) lesz célfüggvényértéke a többi ország rovására (javára).

Valójában azonban a mérlegegyenleg változtatásával az egyensúlyi árak is változnak. Tegyük fel, hogy *A* ország egyenlege passzívabbá válik. Ha ekkor a külkereskedelmi árarányok *A* ország rovására változnak, (az általa exportált termékek árának csökkenésével és az importált termékek árának növekedésével), és a változás elég nagymértékű, akkor olyan helyzet is előállhat, hogy

A ország célfüggvényértéke a mérlegegyenleg romlása ellenére csökken. Ezzel eljutottunk a közgazdaságtan egyik érdekes elméleti problémájához, az egyensúly ún. unicitásának problémájához. Ha a mérlegegyenlegek rendszere és az említett közös programozási feladatban a célfüggvények súlyrendszere között egyértelmű megfeleltetés létesíthető, akkor ez annyit jelent, hogy egy egyenlegrendszer előírása mellett csak egyféle optimális munkamegosztás és egyféle egyensúlyi árrendszer van. Ekkor beszélünk az egyensúly unicitásáról.

Ha az egyes országok valutaárfolyamait a közös programozási feladat súlyrendszereként definiáljuk, akkor ugyanezt egyszerűbben is fogalmazhatjuk: az unicitás fennáll, ha a valutaleértékelés mindig javítja, a valutafelértékelés mindig rontja az illető ország kereskedelmi mérlegét.

Régóta keresi a közgazdaságtudomány a választ arra, hogy a valóságban fennáll-e a külkereskedelem egyensúlyának unicitása. A közgazdasági elmélet sok elégséges feltételt talált már, melynek érvényessége esetén bizonyítható az unicitás. Ezek a feltételek azonban — bár többé-kevésbé megközelítik a valóságot — teljesen sohasem érvényesek. Így ezeknek az eredményeknek a segítségével csak valószínűsíthető, de teljesen nem igazolható az unicitás fennállása. Hasonlóan, a világkereskedelemben végbemenő változások figyelése is (pl. valutaleértékelések és -felértékelések vizsgálata), bár valószínűsíti az egyensúly unicitását, de nem ad tökéletesen megnyugtató választ a kérdésre.

Nem foglalkozunk részletesen az egyensúly unicitásának a közgazdasági irodalomban igen nagy terjedelemben tárgyalt témájával, csak példaképpen felsorolunk néhány elégséges feltételt, melyek biztosíthatják az unicitás létezését.[3]

A feltételek egyik csoportja az országok (gazdasági egységek) célfüggvényeire vonatkozik. Az e feltételeket vizsgáló modellek általában azzal az egyszerűsítő feltételezéssel élnek, hogy minden ország egy adott termékkészlettel gazdálkodik, a termelés tehát ki van zárva a modellből. Ilyen esetben az ún. közös társadalmi célfüggvény létezése következtében fennáll az unicitás, ha

vagy a célfüggvény minden országban azonos pozitív homogén függvény,

vagy a célfüggvény pozitív homogén, de nem szükségszerűen azonos minden országban, és minden ország azonos termékkészlettel rendelkezik.[4]

A feltételek másik csoportja a termékek keresleti függvényeire vonatkozik. Ilyen feltétel például az ún. szigorú bruttó helyettesíthetőség: ha valamely termék ára nő, akkor az iránta való kereslet csökken, a többi termék iránti kereslet pedig nő.[5] Ismert, hogy ez a feltétel általában fennáll, de gyakran vannak a termékek komplementaritásából (egymást kiegészítő jellegéből) adódó kivételek.

A célfüggvények és a keresleti függvény bruttó helyettesíthetőségi tulajdonsága közötti kapcsolatot jól mutatja, hogy ha az egyes országok célfüggvénye egy CES függvény,[6] akkor a bruttó helyettesíthetőségi feltétel ekvivalens azzal, hogy a termékek közötti helyettesítés rugalmassága nagyobb, mint 1.[7]

[3] Az unicitás feltételeiről igen átfogó ismertetést nyújt [4] vagy [11].

[4] E feltételekről lásd pl. [5], [6], [8], [12].

[5] Erre az estre Arrow—Block—Hurwicz igazolta az unicitás fennállását. [1], ill. [3]-ben Wald [14] gondolatának továbbfejlesztésével. A bruttó helyettesíthetőségnél valamivel enyhébb feltétel mellett Gale [7] bizonyította az unicitást.

[6] A függvény ismertetését lásd pl. [2].

[7] Lásd Chipman [4], 726. o.

A következőkben lineáris célfüggvények feltételezése mellett vizsgáljuk az unicitás feltételeit. Az említett modellekkel szemben a termelésre is kiterjesztjük a modellt: feltesszük, hogy a termelési lehetőségek egy lineáris egyenlőtlenségrendszerrel határozhatók meg.

Könnyen belátható, hogy ez esetben általában nem áll fenn a bruttó helyettesíthetőség, sőt az unicitás sem.

Példa több egyensúlyra

Az alábbi esetben például azonos mérlegegyenleg mellett két ország között többféle egyensúlyi helyzet létezik.

Legyenek 1 és 2 ország termelési lehetőségei és célfüggvénye:

$$\begin{array}{rrrrrl}
x_1 + 3x_2 & & & & & \leq 20 \\
-x_1 & & -y_1 & & +2z & \leq 0 \\
 & -x_2 & & -y_2 & +z & \leq 0 \\
 & & P_1y_1 & +P_2y_2 & & \leq 0 \\
\hline
 & & & & z & \to \max
\end{array}$$

valamint

$$\begin{array}{rrrrrl}
2x_1' & +x_2' & & & & \leq 30 \\
-x_1' & & +y_1' & & +z' & \leq 0 \\
 & -x_2' & & +y_2' & +3z' & \leq 0 \\
 & & -P_1y_1' & -P_2y_2' & & \leq 0 \\
\hline
 & & & & z' & \to \max
\end{array}$$

A 0 egyenleg mellett három egyensúly, tehát háromféle Pareto optimális program létezik. A közös feladat célfüggvénye a három esetben:

$$\text{(a)} \quad \frac{15}{30}z + \frac{15}{30}z'$$

$$\text{(b)} \quad \frac{18}{30}z + \frac{12}{30}z'$$

$$\text{(c)} \quad \frac{10}{30}z + \frac{20}{30}z'.$$

Az optimális programok a következők:

Változók	Változók értékei (a) esetben	(b)	(c)
x_1	20	20	17
x_2	0	0	1
x_1'	2	0	0
x_2'	26	30	30
$y_1 = y_1'$	-4	-8	-9
$y_2 = y_2'$	8	6	3
z	8	6	4
z'	6	8	9

A külkereskedelmi árarány — mivel a mérlegegyenleg 0 — megegyezik az export és az import arányának reciprokával.

Látható, hogy a célfüggvénysúlyok (valutaárfolyamok) változtatása ellenére a kereskedelmi mérleg egyenlege változatlan, az optimális célfüggvényérték viszont az 1. országban 8-tól 4-ig, a 2. országban 6-tól 9-ig változik.

Amikor a példa több egyensúly létezésének lehetőségét bizonyítja, egyben azt is sugallja, hogy az a valóságban eléggé valószínűtlen. Feltételezései ugyanis több szempontból speciálisak és szélsőségesek:

a termékek nem helyettesíthetik egymást a fogyasztásban;

a két ország célfüggvénye nemcsak különböző, hanem speciálisan olyan tulajdonságú, hogy mindkét ország saját exporttermékét fogyasztja nagyobb arányban a másik termékhez képest.

Egy speciális lineáris modell

Belátható, hogy egy másik szélsőséges esetet tekintve példának, amikor az országok fogyasztásában a termékek változatlan arányban helyettesíthetik egymást, valamint nem kerülnek külkereskedelmi forgalomba továbbfeldolgozásra kerülő termékek, akkor az egyensúly unicitása fennáll.

Tekintsünk két országot, 1. és 2. országot.

Legyen az egyes országokra vonatkozó modell

$$\begin{aligned} A_i x_i &\leq b_i \\ H_i x_i + z_i - y_i &\leq 0 \\ P y_i &\leq \alpha_i \\ x_i \geq 0, \quad z_i &\geq 0 \\ c_i z_i &\to \max \qquad (i = 1, 2) \end{aligned} \tag{5}$$

alakú, ahol a H_i mátrixok minden eleme nempozitív, minden sora tartalmaz legalább egy nemzérus elemet és $c_i > 0$.

Tegyük fel, hogy az (5)-nek most megfelelő

$$\begin{aligned} A_1 x_1 \qquad\qquad\qquad &\leq b_1 \\ A_2 x_2 \qquad\quad &\leq b_2 \\ H_1 x_1 + H_2 x_2 + z_1 + z_2 &\leq 0 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \lambda_1 c_1 z_1 + \lambda_2 c_2 z_2 &\to \max \end{aligned} \tag{6}$$

,,közös feladatok'' minden optimális megoldása nem degenerált.

Az egyes országokra vonatkozó (5) alakú modell esetén is bizonyítható az 1. tételnek megfelelő állítás. Ennek alapján egyensúly esetén minden α_i külkereskedelmi mérlegegyenleg rendszer egy valamilyen λ_i-rendszernek megfelelő (6) feladat és duálisának optimális megoldásaiból adódik, az

$$\alpha_i = \lambda_i c_i z_i^* - q_i^* b_i$$

összefüggések alapján. Minthogy a (6) feladatban a λ_i-kat ugyanazzal a számmal megszorozva ugyancsak ezzel a számmal szorzódik P és α_i is, anélkül, hogy az (5) és (6) feladatok optimális megoldásai megváltoznának, csak az $(1, \lambda_2)$ alakú súlyrendszerekkel foglalkozunk. Érdektelennek tekintjük és kizárjuk azt az esetet is, amikor z_2^* minden eleme 0.

Ekkor fenn áll a következő:

2. tétel: A tett feltevések mellett $\alpha_1 = -\alpha_2$ külkereskedelmi mérlegegyenlegekhez legfeljebb egy olyan $(1, \lambda_2)$ súlyrendszer tartozik, hogy az (5) feladatok optimális megoldásaira $y_1 \leq -y_2$ teljesül.

Bizonyítás. Két országot tartalmazó modellünk esetében elég azt belátnunk, hogy

$$\alpha_1 = c_1 z_1^* - q_1^* b_1$$

mint λ_2 függvénye szigorúan monoton (amint a modell közgazdasági tartalma alapján várható, csökken).

Tekintsük λ_2 két tetszőleges $\lambda_2^{(1)}$, $\lambda_2^{(2)}$ értékét, melyre $\lambda_2^{(1)} < \lambda_2^{(2)}$

Legyen z_1 optimális értéke $(1, \lambda_2^{(1)})$ súlyok mellett $z_1^{(1)}$, valamint $(1, \lambda_2^{(2)})$ súlyok mellett $z_1^{(2)}$.

Ekkor

$$c_1 z_1^{(2)} + \lambda_2^{(1)} c_2 z_2^{(2)} \leq c_1 z_1^{(1)} + \lambda_2^{(1)} c_2 z_2^{(1)}$$

és

$$c_1 z_1^{(1)} + \lambda_2^{(2)} c_2 z_2^{(1)} \leq c_1 z_1^{(2)} + \lambda_2^{(2)} c_2 z_2^{(2)},$$

melyekből

$$c_2 z_2^{(1)} \leq c_2 z_2^{(2)},$$

amit az első összefüggéssel összehasonlítva

$$c_1 z_1^{(2)} \leq c_1 z_1^{(1)}$$

adódik.

A (6) feladat duálisa

$$\begin{aligned} q_1 A_1 + pH_1 &\geq 0 \\ q_2 A_2 + pH_2 &\geq 0 \\ p &\geq c_1 \\ p &\geq \lambda_2 c_2 \\ q_1 b_1 + q_2 b_2 &\to \min \end{aligned} \tag{7}$$

és (6) optimális megoldásainak nemdegenerált voltából és a H_i mátrixokra tett feltevés folytán (7) egyetlen optimális megoldásában $p^* = \max\{c_1, \lambda_2 c_2\}$, ahol a max komponensenként értendő. Igy a $\lambda_2^{(2)}$-hez tartozó $q_1^* b_1$ érték nagyobb a $\lambda_2^{(1)}$-höz tartozó megfelelő értéknél, mivel rögzített λ_2 esetén

$$\begin{aligned} q_1 A_1 &\geq -p^* H_1 \\ q_1 &\geq 0 \\ q_1 b_1 &\to \min \end{aligned}$$

feladat optimumértékéről van szó. A tételt ezzel igazoltuk.

Ha modellünkben több mint két országot veszünk figyelembe, nem alkalmazható a 2. tételéhez hasonló bizonyítás, és valamelyest módosulnak is az unicitás feltételei.

Tekintsünk ugyanis két tetszőleges λ_i-rendszert. $(i = 1, 2, \ldots n)$. Normáljuk őket a két-országos modellhez hasonlóan úgy, hogy az egyik ország célfüggvény-súlya mindkét súlyrendszerben azonos legyen. Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy λ_1 értéke azonos mindkét rendszerben és azt is, hogy az összes többi ország célfüggvény-súlya a második λ_i-rendszerben nem kisebb, mint az elsőben.

Ha ekkor a 2. tétel bizonyításának logikáját követve be tudnánk bizonyítani, hogy a két λ_i rendszerben az

$$\alpha_1 = \lambda_1 c_1 z_1 - q_1 b_1$$

összefüggés alapján különböző α_1 értékek adódnak, akkor bizonyítva lenne a 2. tételnek megfelelő állítás: modellünk feltevései mellett egy α_i rendszerhez ($\Sigma\alpha_i = 0$) csak egy olyan $(1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ rendszer van, hogy az (5) feladatok optimális megoldásaira $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén $\Sigma y_i^* \leq 0$ teljesül.

A megfelelő feltételek mellett továbbra is igaz az előbbi bizonyítás azon állítása, miszerint a második λ_i-rendszerbeli $q_1^* b_1$ érték nagyobb az első rendszerbeli megfelelő értéknél, mivel $p^* = \max \{\lambda_1 c_1, \lambda_2 c_2 \ldots \lambda_n c_n\}$, és $q_1^* b_1^*$ a

$$q_1 A_1 \geq -p^* H_1$$
$$q_1 \geq 0$$
$$q_1 b_1 \to \min$$

feladat optimumértéke.

Általánosan nem igaz azonban a két országot tartalmazó modell $c_i z_i$-kre vonatkozó állítása. Nem mindig teljesül ugyanis, hogy tekintve egy $\lambda_1^{(1)} \lambda_2^{(1)} \ldots \lambda_n^{(1)}$ és egy $\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)} \ldots \lambda_n^{(2)}$ rendszert, ahol $\lambda_1^{(1)} = \lambda_1^{(2)}$ és a további i-kre $\lambda_i^{(1)} \leq \lambda_i^{(2)}$, akkor a megfelelő $z_1^{(1)}, z_2^{(1)} \ldots z_n^{(2)}$ és $z_1^{(2)}, z_2^{(2)} \ldots z_n^{(2)}$ optimális megoldásokra $c_1 z_1^{(1)} \geq c_1 z_1^{(2)}$.

Sőt, amint a következő példa is mutatja, a fenti feltétel nem teljesülése esetén azonos α_i rendszer mellett több egyensúlyi helyzet is létrejöhet.

Tegyük fel, hogy három ország létezik, és $\alpha_1 = 12$, $\alpha_2 = 72$, $\alpha_3 = -84$. Mindegyik országnak három termék termelésére van lehetősége, de az 1. ország csak az első terméket, a 2. ország csak a második terméket és a 3. ország csak a harmadik terméket fogyasztja és a célfüggvények koefficiensei a fogyasztott termékekre vonatkozóan 1, a többi termékre vonatkozóan 0. Két egyensúlyi helyzetet tekintsünk, az első esetben $\lambda_1^{(1)} = 1$, $\lambda_2^{(1)} = 2$, $\lambda_3^{(1)} = 3$, a második esetben $\lambda_1^{(2)} = 1$, $\lambda_2^{(2)} = 6$, $\lambda_3^{(2)} = 6$.

Anélkül, hogy a termelési lehetőségek teljes halmazát meghatároznánk, feltehetjük, hogy az egyes országok termelési lehetőségei olyanok, hogy az első esetben az 1. ország termelése a három termékből rendre 0, 0, 4, a 2. országé 0, 0, 24, a 3. országé 0, 0, 24. A második esetben az 1. ország termelése 1, 1, 3, a 2. ország termelése 6, 6, 18, a 3. ország termelése 6, 6, 18. Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\sum_i \lambda_i^{(1)} c_i z_i^{(1)} \geq \sum_i \lambda_i^{(1)} c_i z_i^{(2)} \text{ és } \sum_i \lambda_i^{(2)} c_i z_i^{(2)} \geq \sum_i \lambda_i^{(1)} c_i z_i^{(2)},$$

megfelelő termelési halmazok mellett tehát mindkét termelési program optimális.

Könnyen ellenőrizhető az is, hogy a termelés és fogyasztás értékének különbsége országonként mindkét esetben azonos a megadott devizaegyenlegekkel, valamint az is, hogy a két esetben az országok célfüggvény-értékei rendre 0, 0, 52, illetve 7, 7, 39.

Az unicitás eddigi értelmezése mellett példánk kétségtelenül több egyensúly létezését bizonyítja.

A példa ennek ellenére egy kissé „sántít". A második helyzetben ugyanis az elsőhöz képest — a célfüggvény-súlyok növelésének eredményeként — nagyon megnőtt a „külkereskedelmi árak" színvonala ($p^* = \max\{\lambda_1 c_1 \ldots \lambda_n c_n\}$-ből következően). Így például a 2. ország értékben előírt kereskedelmi aktívuma az „infláció" utáni árrendszerben „reálértéken" jóval kisebb exportszállításokkal is teljesíthető. Ez teszi lehetővé, hogy az új helyzetben a 2. országnak nagyobb legyen a célfüggvény-értéke. A nominálisan azonos α_i-rendszerek ellenére ilyen értelemben mégsem azonosak a külkereskedelmi mérlegek egyenlegei a két helyzetben.

Az „infláció" hatását vagy úgy szűrhetjük ki, hogy másképpen normáljuk a λ_i-rendszereket, például előírjuk, hogy $\sum_i \lambda_i = 1$, vagy pedig csak olyan helyzeteket tekintünk, melyeknél $\alpha_i = 0$ $(i = 1, 2 \ldots, n)$.

Ez utóbbi esetekre nem sikerült általánosan bizonyítanunk az unicitást. A modell feltevéseinek következményeként fennálló nagyfokú helyettesítési lehetőségek a termékek között azonban nagymértékben valószínűsítik azt a hipotézist, hogy az unicitás ilyen esetben a több országos modellre is fennáll.

Unicitás igazolása tényadatokkal

A speciális modellekről visszatérve a valóságos gazdasághoz, érdekes lenne egy olyan vizsgálat, amely tényadatok segítségével adna valószínű választ arra a kérdésre, hogy a valóságban fennáll-e az unicitás. Erre egy nemzetközi optimumszámítási modell lehetőséget adna. A vizsgálat a termelési technológiákra és a célfüggvényre vonatkozó tényadatok felhasználásával végzett optimumszámítások sorozatát jelentené. Az egyes számításokban a közös célfüggvény súlyrendszere más és más lenne. A súlyok változtatásától függően az egyes országok árnyékárakon számított mérlegegyenlege is változna. Ha a számítások azt mutatnák, hogy a különböző közös célfüggvények és a külkereskedelmi mérlegegyenlegek között egyértelmű megfeleltetés létesíthető, akkor az unicitás — legalábbis bizonyos λ-tartományban — fennáll.

Tudomásunk szerint nem készült még ilyen számítás, amely az unicitás problémájára tényadatok segítségével, optimumszámítások eredményeinek összehasonlításával keresné a választ.

(Beérkezett: 1972. június 10.)

IRODALOM

1. ARROW, K. J.—BLOCK, H. D.—HURWICZ, L.: On the Stability of the Competitive Equilibrium, II, Econometrica, 27 (1959. Január) 82—109.
2. ARROW, K. J.—CHENERY, H. B.—MINHAS, B. S.—SOLOW, R. M.: Capital-Labour Substitution and Economic Efficiency, Review of Economics and Statistics, 43 (1961 augusztus) 225—250.
3. ARROW, K. J.—HURWICZ, L.: On the Stability of the Competitive Equilibrium, I, Econometrica, 26 (1958 október) 522—552.

4. CHIPMAN, J. S.: A Survey of the Theory of International Trade: Part 2, The Neoclassical Theory, Econometrica, 33 (1965 október) 685—760.
5. DORFMAN, R.—SAMUELSON, P. A.—SOLOW, R. M.: Linear Programming and Economic Analysis. New York, 1968. McGraw-Hill.
6. EISENBERG, E.: Aggregation of Utility Functions, Management Science 7 (1961 július) 337—350.
7. GALE, D.: The Law of Supply and Demand, Mathematica Scandinavica, 3 (1955) 155—169.
8. GORMAN, W. M.: Community Preference Fields, Econometrica, 21 (1953 január) 63—80.
9. KUHN, H. W.—TUCKER, A. W.: Non-linear programming. Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1951.
10. MICIELSKI, J.—PIASZCZYNSKI, W.: A Mathematical Model of International Economic Cooperation, 1965. Sokszorosított előadás.
11. QUIRK, J.—SAPOSHNICK, R.: Introduction to General Equilibrium Theory and Welfare Economics. New York, 1968. McGraw-Hill.
12. SAMUELSON, P. A.: Social Indifference Curves, Quarterly Journal of Economics, 70 (1956 február) 1—22.
13. UZAWA, H.: Prices of the Factors of Production in International Trade, Econometrica, 27 (1959 július) 448—468.
14. WALD, A.: Über die eindeutige positive Lösbarkeit der neuen Produktionsgleichungen, Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, Heft 7 (1934—1935), 1—6.

OPTIMUM, PRICES AND EQUILIBRIUM IN INTERNATIONAL TRADE

The article deals with the prices in international trade, as means of efficient economic allocation as well as with the role of prices and of the balance of trade in the distribution of income among the countries. It draws its conclusions from economic models of the trading countries, where each country maximizes a linear objective function on a production set determined by linear functions.

It proves that a theorem of economics, proven under other conditions, claiming that the Pareto optima and the trading equilibria coincide, is valid with these linear models, too. The Pareto optimal situations are established as optimal solutions of linear programming problems where the constraints are the countries' constraints on production and the objective function is a non-negative linear combination of the objective functions of the countries. The systems of shadow prices are at the same time the equilibrium prices. It is stated, that the informational trade prices have to fulfil this only function, and the aspects of the distribution of income among countries should not be considered in their formation. These latter aspects can be taken into account by means of unilateral money transfer among countries, which appears in the balance of payments.

Furthermore, the article deals with the question if the system of trade balances uniquely determines the distribution of income among countries. It illustrates with an example that in a general case this uniqueness does not exist, and then it discusses the conditions which ensure uniqueness under the above mentioned assumptions of linearity.

ОПТИМУМ, ЦЕНЫ И РАВНОВЕСИЕ В МЕЖДУНАРОДНОЙ ТОРГОВЛЕ

Статья занимается действительными в международной торговле ценами, как средством эффективного хозяйства, а также ролью цен и внешнеторгового баланса в распределении дохода между странами. Для выводов она использует модели экономик стран, принимающих участие в торговле, в которых каждая страна максимизирует линейную целевую функцию на производственном множестве, установленной линейными функциями.

Она доказывает, что тезис экономики, доказанный в других условиях, согласно которому оптимальные положения Парето совпадают положениями торгового равновесия, действителен и в линейных моделях. Оптимальные положения Парето складываются в оптималь-

ных решениях таких проблем, системы условий которых — совокупность производственныху словий стран, и целевые функции — неотрицательные линейные комбинации целевых функций отдельных стран. Система теневых цен оптимального решения проблемы является в то же время системой цен, обеспечивающей равновесие. Авторы констатирую, что внешнеторговые цены должны исполнять только эту функцию и нельзя допускать, чтобы аспект распределения доходов между странами влиял на их формирование. Указанные аспекты могут быть учтены посредством одностороннего перевода, который проявляется в модели во внешнеторговом балансе.

В дальнейшем статья ставит проблему: однозначно установливает ли система внешнеторговых балансов распределение доходов между странами. Она иллюстрирует примером, что в общем случае нет такой однозначности, а потом она занимается условиями, которые обеспечивают эту однозначность в вышеупомянутых предположениях линейности.