Bródy András

Szabályozási modellekről

Kornai–Martos [9], majd Virág [10] vizsgált a Szigma lapjain egy szabályozási rendszert, amelyet [5] is taglalt. E vizsgálatokhoz hozzászólva néhány további szabályozást is bemutatok.

A dolgozat első része a modell megválasztását indokolja, a második a szabályozás jóságának kritériumait definiálja, a harmadik egy szabályozáscsalád nyolc változatát mutatja be.

I.

A modell

Az alapvető gazdasági folyamat modelljéül az egyszerű újratermelés Leontief-féle zárt ábrázolását választottam, azaz olyan nemnegatív és irreducibilis F ráfordítási matroxot, amelynek legnagyobb sajátértéke (spektrális rádiusza) éppen 1-gyel egyenlő. Választásomat az indokolja, hogy a bővített újratermelés $F = A + \lambda B$ alakú matrixa (amely tehát áramlatokat is és lekötött eszközöket is ábrázol) hasonló tulajdonságokkal bír. Így, rögzített λ mellett, az eredmények a bővített újratermelésre is interpretálhatók. E modell két vonatkozásban egyszerűsíti az idézett tanulmányokban tárgyalt modellt: a) nem különbözteti meg az anyagkészletet a termékkészlettől; b) a modell zárt, külső fogyasztása nincs.

Az anyag és termékkészlet megkülönböztetése nem fizikai, hanem csupán tulajdonjogi megkülönböztetés. Elhanyagolása mégis erősen csökkenti modellem realitását. Mint Kornai–Martos modellje, ez is teljes készletinformációt követel meg.

A modell zártsága csak látszólagos megkötés, hisz az F matrix perturbációja ugyanúgy jelenthet technikai, mint ízlésbeli változást, tehát a fogyasztási struktúra változását. A zártság révén azonban ábrázolásra kerülhet a munkaerő is, amelyet az említett modell nem vesz figyelembe. Egyébként a tapasztalat azt mutatja, hogy a személyi fogyasztás nem szakadhat el a gazdaság struktúrájától és növekedésétől, így a zárt rendszer ellen ilyen elvont tárgyalás esetében nem emelhető elvi kifogás.

Hogyan értelmezhetők azonban az ilyen elvont és szimpla modellek és elvont szabályozási előírások révén nyert eredmények?

Ha a szabályozás ilyen elvont modell esetében nem kielégítő, akkor a modell tagoltabbá tételével általában nem javítható. (Esetleg persze javítható a szabályozás módosításával, csillapító előírásokkal stb. — de ez nem a modell, hanem a szabályozási kör kiterjesztését jelenti.) Ha a szabályozás ilyen szimpla modell esetében kielégítő (minden szempontból kielégítő szabályozást még erre az igen szimpla modellre sem találtam), akkor e szabályozási előírást természetesen tovább kell vizsgálni, részletesebb modellek segítségével.

Az elvont és szimpla modellek segítségével történő vizsgálat tehát képes megszűrni a lehetséges szabályozási javaslatokat és kirostálni az elégtelennek mutatkozó előírásokat. Nem biztosítja azonban, hogy a szűrőn csak a színarany javaslatok kerülhetnek át — ehhez a szűrő túl durva. Ugyanakkor azonban arra is kényszeríti, hogy a szabályozás jóságának kritériumait és a szabályozás főbb feladatait egyre szabatosabban fogalmazzuk meg.

II.

Stabilitás

A szabályozás megítélésekor a Ljapunov-kritériumokból [2] indultunk ki. Legyen a kívánt állapottól való eltérés a t időpontban $|z_t|$, akkor a szabályozás *stabil*, ha minden $\varepsilon > 0$ értékhez található oly δ, amelyre

$$|z_0| < \delta \text{ esetén } |z_t| < \varepsilon.$$

Aszimptotikusan stabil, ha stabil és van olyan $\delta > 0$, amelyre

$$\lim_{t \to \infty} |z_t| = 0.$$

Az aszimptotikusan stabil szabályozás tehát egyben stabil, de nem megfordítva.

A kívánt állapottól való eltérés, $|z_t|$ értéket különféle módon értelmezhetjük. Lehet vektorok különbségének valamilyen mérőszáma, például két vektor euklideszi távolsága (az elemenkénti eltérések négyzetösszegének négyzetgyöke), vagy az eltérésvektor valamilyen normája (például maximális elemének abszolút értéke, vagy elemei abszolút értékének összege). Lehet azonban, ha nem egy megkívánt pontba, hanem egy megkívánt pályára kívánjuk vinni a rendszert, két vektor által bezárt szög is. Így mérhetjük egy egyensúlyi pálya, $\bar{x}$ és egy tényleges x_t pálya különbségét, mint a két pálya által bezárt szög cosinusának [8] az egységtől való eltérését, tehát vizsgálhatjuk az

$$1 - \frac{(\bar{x}, x_t)}{\sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}\sqrt{(x_t, x_t)}}$$

értéket, mint az eltérés mérőszámát a t időpontban.

Az ökonómiában is hasznosnak látszik a két fajta stabilitás megkülönböztetése. Ezzel eltérünk [9] terminológiájától, amely az aszimptotikusan stabil szabályozást nevezi stabilnak, a fentiekben definiált pusztán stabil szabályozást instabilnak tartja. E terminológiában elvész az a fontos különbség, hogy a szabályozás képes-e legalább a kívánt állapot környezetében tartani a rendszert (amikor az eltérés korlátos marad, habár nem biztos, hogy csökken vagy megszűnik), vagy pedig nem (amikor az eltérés minden határon túl nőhet).

Ljapunov kritériumai a következő egyszerű módon függnek össze a stabilitás vizsgálatára általában használt lineáris differenciálegyenletrendszer együttható mátrixának, tehát valamely $\dot{z}_t = Dz_t$ egyenlet D matrixának sajátértékeivel [6]:

Ha az összes sajátérték reális része negatív, akkor a szabályozás aszimptotikusan stabil (és természetesen stabil), mert az eltérésvektor zérushoz tart. Ha van olyan sajátérték, amelynek reális része pozitív, akkor megfelelő kezdeti érték esetén az eltérésvektor minden határon túl nő.

Végül, ha a sajátértékek reális része ugyan nempozitív, de van közte zérus reális részű, tehát tisztán képzetes sajátérték, akkor a szabályozás stabil, de nem aszimptotikusan stabil, mert az eltérésvektor fluktuál, de korlátos marad.

Differencia-egyenletrendszer esetén a $z_{n+1} = Dz_n$ egyenlet D matrixának sajátértékei akkor vezetnek aszimptotikus stabilitáshoz, ha abszolút értékben mind egynél kisebbek. Ha van egynél nagyobb sajátérték, akkor az eltérés minden határon túl növekszik. Ha nincs, ugyan egynél nagyobb sajátérték, de van olyan, amelynek abszolút értéke 1-gyel egyenlő, akkor a szabályozás stabil, de nem aszimptotikusan stabil.

A stabilitás esetében azonban külön vizsgálandó a többszörös gyökök esete, mert instabilitáshoz vezethet.

Az ökonómiai vizsgálatokban szükség volna a fentebbieknél szigorúbb kritériumra is. Ilyen szigorúbb kritérium lehetne a *helyes orientáció* megkövetelése.

Helyesen orientálónak egy olyan szabályozást tekinthetünk, amelyben az eltérésvektor z_t minden eleme monoton csökkenve konvergál zérushoz. Az ilyen szabályozás biztosítja azt, hogy a rendszer minden része egyenesen a kívánt állapot felé tart.

Miért volna ilyen szigorú kritériumra szükség? Azért, mert a mechanikai rendszerektől az ökonómiai rendszert az különbözteti meg, hogy egy-egy konfigurációjának (paramétereinek, belső arányainak, ténylegesen kvantifikált modelljének) relevanciája igen rövid életű a viszonylag lassan ható szabályozás időigényéhez képest. Így a $t \to \infty$ határátmenet az ökonómiában sohanapján megvalósuló szabályozást jelent: mire a kívánt állapothoz való közeledés megtörtént volna, e kívánt állapot (vagy pálya) már rég megváltozott. A távoli jövőben aszimptotikusan konvergáló szabályozás helyett a szabályozás adott pillanatban érvényesülő hatását kellene vizsgálni, mivel a tranziens jelenségeknek az ökonómiában sokkalta nagyobb szerepük van, mint a végállapotnak. Ha a szabályozás nem közvetlenül a kívánt állapot felé visz, ha egyes szabályozott jellemzők eltérése akár csak átmenetileg is növekedhet, akkor a szabályozás nyilván dezorientál.

Sem a stabil, sem az aszimptotikusan stabil szabályozás nem biztosítja a helyes orientációt ebben az értelemben. A stabil szabályozás esetén az egyes elemek fluktuálnak; az aszimptotikus szabályozás esetén, bár végső soron az elemek a zérushoz tartanak, de eleinte még növekedhetnek, vagy — csillapítva — fluktuálhatnak.

Mivel az eltérésvektort kormányzó egyenlet matrixának sajátértékeire tett szigorúbb kikötések, például a komplex sajátérték kizárása sem vezet a kívánt eredményre, nyilván csak olyan matrixtranszformációra gondolhatunk, amely a (tisztán reális) sajátértékek negativitását megtartva a matrix összes sajátvektorát nemnegatívvá vagy nempozitívvá, azaz egyező előjelűvé teszi.

Ilyen, az általános esetben felhasználható transzformációt eddig nem találtam, úgy vélem azonban, hogy e kérdés megoldhatóságának tisztázása az ökonómiai szabályozáselmélet egyik fontos problémája.

III.

Szabályozási előírások

1. Készletek szintjéről vezérelt szabályozás

1.1. Folytonos eset

A készletek növekedése a termelés és a fogyasztás különbségével egyenlő:

$$\dot{k}_t = (1 - F)x_t. \tag{1.1.1}$$

A $\overset{*}{k}$ készletnormától való eltérés arányában módosítjuk a termelést:

$$\dot{x}_t = \overset{*}{k} - k_t. \tag{1.1.2}$$

Az utóbbi egyenletet deriválva és az eredményt (1.1.1)-be helyettesítve:

$$\ddot{x}_t = (F - 1)x_t. \tag{1.1.3}$$

F maximális abszolút értékű sajátértéke 1. Ezért $(F - 1)$ sajátértékei mind negatív valós részűek, az egy zérus kivételével, amely az $F\bar{x} = \bar{x}$ egyensúlyi állapothoz tartozik. Mivel differenciálegyenletünk másodfokú, e sajátértékek négyzetgyöke adja a megoldásokat. A tisztán valós és negatív sajátértékek négyzetgyöke tisztán képzetes, valós része $= 0$. Tehát ha F sajátértékei mind tisztán valósak (pl. ha szimmetrikus, vagy hasonló egy szimmetrikus matrixhoz), akkor a szabályozás stabil. A rendszer viselkedése: az $\bar{x}$ egyensúlyi helyzetnek az x_0 kezdeti állapotban meglevő komponense az időben változatlanul megmarad, a többi (nem egyensúlyi) sajátvektor irányában a rendszer kezdeti állapota által meghatározott állandó amplitúdójú csillapítatlan rezgőmozgást végez a képzetes sajátértékeknek megfelelő frekvenciákkal.

A szabályozás ösztönzése, ill. fékezése 1-nél nagyobb vagy kisebb γ skalár megválasztásával az

$$\dot{x}_t = \gamma(\overset{*}{k} - k_t) \tag{1.1.2*}$$

egyenletre vezet. A rendszer együtthatómatrixa tehát $\gamma(F - 1)$ alakú lesz, amiből nyilvánvaló, hogy a rendszer viselkedése nem változik, csupán a frekvenciák növekednek $\gamma > 1$ esetén, illetve csökkennek $\gamma < 1$ esetén. Az ösztönzés gyorsabb lüktetéshez, a fékezés lassúbbodáshoz vezet, a sajátvektorok persze nem változnak.

Eredményeink eddig hasonlítanak a [9] dolgozat 4. pontjában levezetett eredményekhez.

Ha azonban az $F-1$ matrixnak konjugált komplex sajátértékei is vannak s ez az általános esetben nem zárható ki, sőt valószínű, akkor ezek négyzetgyöke biztosan ad pozitív valós részű gyököt, s ez esetben a szabályozás instabil lesz.

1.2. Diszkrét eset

(1.2.1) $$\Delta k_n = (1-F)x_n$$

(1.2.2) $$\Delta x_n = \overset{*}{k} - k_n$$

(1.2.3) $$\Delta^2 x_n = (F-1)x_n, \text{ vagyis}$$

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = (F-1)x_n$$

tehát

$$\begin{pmatrix} 2 & F-2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$$

Ez a differencia-egyenlet azonban már a legegyszerűbb gazdaságban is instabil szabályozáshoz vezethet matrixának többszörös gyöke miatt. $F = 1$ helyettesítéssel ugyanis az egyenletrendszer matrixa

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

alakú, ennek sajátértéke 1, kétszeres gyök. Legyen a kezdeti $x_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Ha most $a = b$ akkor a folyamat egyensúlyban marad, de $a > b$ esetén $+\infty$ felé, $a < b$ esetén pedig $-\infty$ felé tart.

2. Készletek változásáról vezérelt szabályozás

2.1. Folytonos eset

Mint az előbbiekben is

(2.1.1) $$\dot{k}_t = (1-F)x_t$$

Most a készletváltozással fordított arányban módosítjuk a termelést

(2.1.2) $$\dot{x}_t = -\dot{k}_t$$

Behelyettesítve ezt 2.1.1-be

(2.1.3) $$\dot{x}_t = (F-1)x_t$$

Ez elsőfokú differenciál-egyenletrendszer, együtthatómatrixa (1.1.3) matrixával egyező, azaz negatív valós részű sajátértékekkel bír a zéruson kívül. Ezért a szabályozás aszimptotikusan stabil, az $F\bar{x} = \bar{x}$ egyensúlyi állapot komponense változatlan marad, míg a többi sajátvektorokhoz negatív reális részű sajátértékek tartoznak.

Az ösztönző $\gamma >$ skalár beiktatásával

(2.1.2*) $$\dot{x}_t = -\gamma \dot{k}_t$$

Így a rendszer matrixa $\gamma(F-1)$ lesz. Ennek sajátértékei az eredeti rendszer γ-szorosai. Ezért ha F második legnagyobb pozitív reális részű sajátértéke β s így az eredeti rendszer leglassabban elhaló tagja $e^{(\beta-1)t}$ mértékében csökken, akkor a γ skalárral ösztönzött rendszer $e^{\gamma(\beta-1)t}$ mértékében tart zérushoz. $\gamma\beta - \gamma$ tetszőlegesen nagy negatív számmá tehető, s így a konvergencia sebessége tetszés szerint fokozható.

2.2. Diszkrét eset

(2.2.1) $$\Delta k_n = (1-F)x_n$$

(2.2.2) $$\Delta x_n = -\Delta k_n$$

Ezekből

(2.2.3) $$\Delta x_n = (F-1)x_n$$

azaz

$$x_{n+1} - x_n = (F-1)\,x_n$$

tehát

$$x_{n+1} = Fx_n\,.$$

Ez azonos a Mises-féle iterációval, amelyről tudjuk, hogy a matrix maximális 1 sajátértékéhez tartozó $F\bar{x} = \bar{x}$ egyensúlyi vektorhoz konvergál. A szabályozás ez esetben is aszimptotikusan stabil.[1]

Ha — mint az imént is — a második legnagyobb pozitív sajátérték β, akkor az ehhez tartozó zavaró sajátvektor β^n mértékben hal el. Ha azonban ösztönözzük a szabályozó egyenletet

(2.2.2*) $$\Delta x_n = -\gamma \Delta k_n,$$

amiből

(2.2.3*) $$\Delta x_n = \gamma(F-1)x_n$$

azaz

$$x_{n+1} - x_n = \gamma(F-1)\,x_n,$$

tehát

$$x_{n+1} = (\gamma F + 1 - \gamma)\,x_n.$$

A régi β sajátérték helyére most $\gamma\beta + 1 - \gamma$ nagyságú sajátérték lép. Bár ez $\gamma = -\dfrac{1}{\beta - 1} = \dfrac{1}{1-\beta}$ megválasztásával zérussá tehető, ugyanakkor ez az eljárás a többi sajátérték abszolút nagyságát növelheti. Pl. $\beta = 0{,}5$ esetén $\gamma = 2$, e választás azonban egy eredetileg mondjuk $-0{,}1$ nagyságú sajátértéket $2\,(-0{,}1) + 1 - 2 = -1{,}2$ nagyságúvá tesz, s ezzel a szabályozás instabillá válik. Az ösztönzés tehát csak az F matrix maximális negatív valós részű sajátértékének ismeretében alkalmazható a különösen veszélyesnek tartott zavaró vektorok erőteljes szűrésére vagy teljes kiiktatására.[2]

[1] Ha azonban $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alakú, azaz ciklikus, s így sajátértékei ± 1, akkor a szabályozás csak stabil. Ezt az elméleti határesetet azonban a gyakorlatban figyelmen kívü hagyhatjuk, feltesszük, hogy a matrix nem ciklikus.

[2] Simonovits András felhívta figyelmemet, hogy a (2.2.2) egyenletszabályozásának gyakorlati kivitelezése lehetetlen. Helyesebb volna a $\Delta x_{n+1} = -\Delta k_n$ előírást adni a szabályozásra. Ekkor $x_{n+2} - x_{n+1} = (F-1)\,x_n$, azaz

$$\begin{pmatrix} 1 & F-1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Ez ismét instabilitáshoz vezethet többszörös gyökei miatt.

2.3. A készletszabályozásról általában

A készletszintről történő szabályozás részben stabil, részben instabil, a készletváltozásról történő szabályozás viszont általában aszimptotikusan stabil eredményekhez vezet. A differenciaegyenletek azonban, amelyek a szabályozás késleltetésének elemi ábrázolására alkalmasak, általában a készletszabályozás ellen szólnak.

Egy további probléma is felvetődik: ha az F matrixot úgy perturbáljuk, hogy legnagyobb sajátértéke kissé megnő, azaz a rendszer már csak *szűkített* újratermelésre képes, akkor a készletszabályozások *növekvő* termelési szintekhez vezetnek. Ha viszont csökken valamelyest e sajátérték, azaz a termelés *bővíthető* volna (illetve az $F = A + \lambda B$ alak figyelembevételével a növekedési ráta emelhető volna), akkor ellenkezőleg a szabályozók *csökkentik* a termelési szinteket. Még ha továbbra is jó arányok felé vezet a szabályozás, akkor is helytelen szintek alakulnak ki.

Nyilvánvaló ezenkívül, hogy mindezen szabályozások révén az F matrix perturbációjának kívánatos vagy nem kívánatos voltát nem tudjuk felmérni. A technikai változás az egyik legfontosabb ilyen perturbáció, s jogosan várhatjuk, hogy a szabályozás e kérdésre is feleletet adjon.

Ez utóbbi persze lehetne külön szabályozási mechanizmus tárgya, mert elvben a *mennyit termeljünk?* kérdése elválasztható a *hogyan termeljünk?* kérdésétől. A gyakorlatban azonban e két kérdés nem vált ketté, s ezért meg kell vizsgálni hasonló módon az árak révén történő szabályozást is. Az árak révén ugyanis mindkét kérdésre választ remélhetünk.

3. Nyereségről vezérelt szabályozás

3.1. Folytonos eset

Legyen az árvektor p, s ennek változása legyen egyenes arányban a túlkereslettel:

$$\dot{p}_t = (F-1)x_t. \tag{3.1.1}$$

Vegyük észre, hogy az így definiált árváltozás a negatívja az (1.1.1)-ben megadott készletváltozásnak. Érdekes ezt egybevetni azzal a korai ,,értékelméleti'' nézettel, hogy az ár a termék ritkaságának következménye, magas ára olyan terméknek van, amely szűkös, míg a bőségben található termék ára alacsony.

Legyen most egy adott árrendszerrel a termékegységen elérhető nyereség $p - F^T p$, tehát az ár és önköltség különbsége, s változzék a termelés színvonala a nyereséggel egyenes arányban:

$$\dot{x}_t = (1-F^T)p_t. \tag{3.1.2}$$

Akkor e két egyenletrendszer összefogásával kapjuk:

$$\begin{pmatrix}\dot{p}_t\\ \dot{x}_t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & F-1\\ 1-F^T & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_t\\ x_t\end{pmatrix}. \tag{3.1.3}$$

Egyenletrendszerünk együttható matrixa ferdén szimmetrikus, s így* ismét csak tisztán képzetes gyökökkel van dolgunk, az $F\bar{x} = \bar{x}$ és $F^T\bar{p} = \bar{p}$ egyensúlyi volumen és árvektorokhoz tartozó zérus sajátértékeken kívül. A szabályozás stabil, a rendszer az egyensúlyi állapot körül csillapítatlan rezgéseket végez. Ösztönzésre, ill. fékezésre az (1.1.3) rendszerhez hasonlóan a rezgések gyorsulásával vagy lassulásával válaszol. E rendszert először Goodwin vizsgálta [7], egyes variánsainak gyakorlati adatokra való alkalmazása a [3] dolgozatban található.

E rendszer egyébként a klasszikus piaci mechanizmus egy igen szimpla modellje s némi útmutatást látszik adni a tőkés rendszerben kialakuló periodicitás létrejöttére, valamint frekvenciáira vonatkozóan.

3.2. *Diszkrét eset*

(3.2.1)
$$\Delta p_n = (F-1)x_n$$

(3.2.2)
$$\Delta x_n = (1-F^T)p_n$$

(3.2.3)
$$\begin{pmatrix} \Delta p_n \\ \Delta x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & F-1 \\ 1-F^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ x_n \end{pmatrix}$$

azaz
$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & F-1 \\ 1-F^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ x_n \end{pmatrix}$$

Az egyenletrendszer matrixa az előbbi rendszer matrixának és az egységmatrixnak összege. Sajátértékei tehát az egyensúlyi helyzethez tartozó 1 sajátértéken kívül 1+ képzetes rész nagyságúak, abszolút értékben tehát mind nagyobbak 1-nél, ezért a szabályozás instabil. Ezt az ösztönzés vagy fékezés sem képes megváltoztatni. A tiszta piaci mechanizmus tehát már az ilyen egyszerűen késleltetett alakjában sem ad stabilnak tekinthető szabályozást. Az eltérést Arrow—Hurwitz [1] eredményeitől az okozza, hogy nem tételezzük fel a termelési függvények konvexitását. A lineáris termelési függvények esetén létrejövő esetleges fluktuációra egyébként ők is utalnak tanulmányuk 83. oldalán.

4. Nyereségváltozásról vezérelt szabályozás

4.1. *Folytonos eset*

Legyen mint az imént is a piac egyenlete

(4.1.1)
$$\dot{p}_t = (F-1)x_t$$

Szabályozzuk a volumenváltozást most a nyereség változásáról

(4.1.2)
$$\dot{x}_t = (1-F^T)\dot{p}_t$$

a két egyenlet összekapcsolásával

(4.1.3)
$$\dot{x}_t = (1-F^T)\,(F-1)x_t$$

* Lásd pl. [6].

Lineáris egyenletrendszer, amelynek együttható matrixa egy Gram-féle matrix negatívja. Mivel a matrix szimmetrikus, így a sajátértékek mind reálisak. Mivel továbbá a Gram-féle M^TM alakú matrixok pozitív szemidefinitek vagy pozitív definitek [8], ezért a Gram matrix negatívja az esetleges szingularitáson kívül csupa negatív sajátértéket ad. A szingularitás nyilván ismét az $F\bar{x} = \bar{x}$ egyensúlyi helyzethez tartozik. A szabályozás aszimptotikusan stabil és megfelelő transzformációval (azaz „ösztönző" matrixszal) helyesen orientálóvá is tehető. A γ általános ösztönző faktor bevezetésével a konvergencia tetszés szerint fokozható.

4.2. *Diszkrét eset*

$$\Delta p_n = (F-1)x_n \tag{4.2.1}$$

$$\Delta x_n = (1-F^T)\Delta p_n \tag{4.2.2}$$

$$\Delta x_n = (1-F^T)(F-1)x_n \tag{4.2.3}$$

azaz

$$x_{n+1} = [(1-F^T)(F-1)+1]x_n$$

Ha a folytonos (4.1.3) rendszer sajátértékei λ_i értékűek ($\lambda_1 = 0$, $\lambda_n < \lambda_{n-1} < \ldots < \lambda_2 < 0$), akkor a jelen rendszer sajátértékei $1+\lambda_i$ alakúak lesznek. Az $1+\lambda_1 = 1$ értékhez megint az egyensúlyi állapot $F\bar{x} = \bar{x}$ sajátvektora tartozik. Ha $|\lambda_n| < 2$, akkor a rendszer aszimptotikusan stabil. Megfelelő *fékező* faktor beépítésével azonban $|\lambda_n| < 2$ mindig biztosítható.

4.3. *A nyereségszabályozásról általában*

Az árrendszeren s így a nyereségen alapuló szabályozás stabil, illetőleg instabil, a nyereségváltozásról történő szabályozás azonban aszimptotikusan stabil, illetve azzá tehető. Valószínűleg helyesen orientáló volta is biztosítható.

Az F matrix legnagyobb 1 sajátértékének perturbálása a nyereségváltozásról történő szabályozás esetében helyes irányba vezet. Mind a folytonos, mind a diszkrét esetben ugyanis a sajátérték növekedése a termelési szint csökkentéséhez, csökkenése a szint növekedéséhez vezet.

Mint másutt részletesen kimutattam, az egyensúlyú árrendszer alkalmas a technikai változások megítélésére [4]. Fennmaradó fogas probléma azonban, hogy az egyenletek p_t, illetve p_n értékére nem adnak jó megoldást — az áraknak az egyensúlyi ár felé való szabályozását (amely a helyes technológiai döntések előfeltétele) nem biztosítják. E probléma elméleti megoldását még nem látom világosan. Annyi a fentiekből világos, hogy ez itt nem bízható valamilyen „mechanizmusra", hiszen ha $\dot{p}_t$, illetve Δp_n értékét másként határozzuk meg, mint ahogy az a (4.1.1), ill. (4.2.1) egyenletekből adódik, akkor veszélyeztetjük a volumenszabályozás stabilitását. Csak időszakonkénti „külső" árrendezések jöhetnek tekintetbe, ezek pillanatnyi módosító „ugrását" a szabályozó mechanizmusnak figyelmen kívül kellene hagynia. Ez a megoldás azonban gyakorlatilag tisztázatlan.

(Beérkezett: 1972. december 21.)

IRODALOM

1. ARROW, K. J.—HURWITZ, L.: Decentralization and computation in resource allocation. Essays in Economics and Econometrics. Chapel Hill, 1960. University of North Carolina Press.
2. BELLMAN, R.: Stability theory of differential equations. New York, 1953. McGraw-Hill.
3. BRÓDY, A.: An input-output model of the market, a BRÓDY—CARTER (szerk.): Input-output techniques. 574—581. Amsterdam, 1972. North-Holland kötetben.
4. BRÓDY A.: Érték és újratermelés. Budapest, 1969. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
5. DANCS I.—SIVÁK J.: Készletjelzésen alapuló szabályozás egy Leontief-modellben. Kézirat.
6. GANTMACHER, F. R.: Matrizenrechnung I. Berlin, 1965. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.
7. GOODWIN, R. M.: Static and dynamic linear equilibrium models. Proceedings of the First International I—O. Conference.
8. KREKÓ, B.: Matrixszámítás. Budapest, 1964. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
9. KORNAI J.—MARTOS B.: Gazdasági rendszerek vegetatív működése. Szigma. 1971. IV. évf. 1—2. 35—50. o.
10. VIRÁG I.: Gazdasági rendszerek vegetatív működése sztochasztikus külső fogyasztással. Szigma 1971. IV. évf. 261—268. o.

ON CONTROL MODELS

The paper, continuing the investigation of Kornai—Martos examines 8 different control prescriptions on a simpler model.

The first part describes and motivates the model. The core of the model is a matrix $F = A + \lambda B$ which gives the current flow and fixed capital coefficients of the simple (or extended) reproduction. It is a nonnegative irreducible and primitive matrix, its spectral radius is 1. It does not distinguish material and commodity stocks, but it also contains the reproduction of labour. By the aid of this modelcore and the vector $\dot{x}$ of production levels, vector $\dot{k}$ of stock change and vector p of price change can be defined. By the aid of the price vector p the vectors of profit and profit change can be defined.

After introducing the Ljapunov stability the second part points out the criteria of control with correct orientation. This can be realized by a differential equation, with negative real eigen values and eigen vectors of identical sign.

Finally the third part, investigating the different simple control prescriptions obtains the following results:

Control signal	Continuous case Differential equation	Discrete case Difference equation
1. From level of stocks	stable or unstable	stable or unstable
2. From change of stocks	asymptotically stable (convergence can be increased)	asymptotically stable (convergence can be increased) or unstable
3. From profits	stable	unstable
4. From change of profits	asymptotically stable, (convergence can be increased) can be adjusted to orient correctly	asymptotically stable, or asymptotic stability can be ensured

О КОНТРОЛЬНЫХ МОДЕЛЯХ

Труд в продолжении исследования Корнаи—Мартош исследует 8 разных контрольных предписаний проще той модели.

Первая часть излагает и мотивирует модель. Ядро модели матрица $F = A + \lambda B$, которая дает текущие индексы и индексы капиталоемкости простого (или расширенного) воспроизводства. Это — такая не-отрицательная иррeдуцибильная и примитивная матрица, спектральный радиус которой — I. Она не дает различия в материальных и товарных запасах, но содержит и воспроизводство рабочей силы. При помощи ядра модели и уровней производства $\dot{x}$ можно установить векторы изменения запасов $\dot{k}$ и измененич цен $\dot{p}$. А при помощи ценового вектора $\dot{p}$ можно установить векторы прибыли и изменения прибыли.

После изложения критериев стабильности по Ляпунову вторая часть показывает критерий правильно ориентировочного контроля. Это можно осуществлять дифференциальным уравнением, индекс-матрица которого дает отрицательные реальные основные стоимости и основные векторы одинакового знака после спектрального разложения.

Наконец третья часть, исследуя разные простые контрольные предписания, получает следующие результаты:

Управление контролем	Продолжительный случай Дифференциальное уравнение	Дискретный случай Уравнение разницы
1. С уровня запасов	стабильное или инстабильное	стабильное или инстабильное
2. С изменения запасов	асимптотически стабильное конвергенцию можно усилить	асимптотически стабильное конвергенцию можно усилить или инстабильное
3. С прибыли	стабильное	инстабильное
4. С изменения прибыли	асимптотически стабильное, конвергенцию можно усилить, можно сделать правильно ориентировочным	асимптотически стабильное, или из-за тормозирующего фактора асимптотическую стабильность можно обеспечить