Dancs István—Hunyadi László—Sivák József

Készletjelzésen alapuló szabályozás Leontief-típusú gazdaságban

Tanulmányunk közvetlenül kapcsolódik Kornai J. és Martos B. Szigmában közölt cikkéhez, amely várhatóan egy hosszabb kutatómunka kiindulópontja lehet.[1] Természetesen e vizsgálatoknál kezdetben a sok egyszerűsítő feltevést alkalmazó modellekből kell kiindulni és a tapasztalatok felhasználásával haladhatunk a bonyolultabb szabályozási — magatartási formák elemzése felé. Vizsgálatunkat az idézett cikkben közölt, Leontief-típusú gazdaságra adott folytonos modellel kezdtük. A modellt felírtuk differenciaegyenletek formájában is. A folytonos és diszkrét modell megoldásainak párhuzamos elemzése a készletjelzésen alapuló szabályozás érdekes összefüggéseire hívta fel a figyelmet. Az eredmények elemzése egyúttal a kiinduló modell továbbfejlesztésének lehetőségeire is útmutatást adott. Az általunk vizsgált továbbfejlesztett modell is viszonylag egyszerű, azonban elemzése a kutatás szempontjából tanulságos.

A tanulmány három részből áll. Az első részben a folytonos és diszkrét modell legfontosabb jelöléseit és feltevéseit foglaljuk össze. A második részben a kiinduló modelleket és az azokkal ekvivalens modelleket fogalmazzuk meg és elemezzük. A harmadik részben a folytonos és diszkrét kiinduló modellek továbbfejlesztését végezzük el és e továbbfejlesztett modellek megoldását adjuk. Tárgyalásunkban párhuzamosan vizsgáljuk a folytonos és diszkrét esetet, s rámutatunk az eltérő megközelítésből adódó különbségek lényeges vonásaira. A vizsgálatokban nem térünk ki a rendszer működőképességének részletes elemzésére, inkább a magatartás stabilitásának kérdéseit állítottuk a középpontba.

1. Jelölések és feltevések

1.1. *Jelölések*

a) Általános jelölések

A kis betűk n elemű vektorokat, a nagy betűk mxn-es matrixokat jelölnek. A vektorok komponenseinek jelölésére a kis betűkhöz írott egyszeres indexek, a matrixok elemeinek jelölésére a kettős indexek szolgálnak. A j-edik egységvektort e_j, az összegező vektort e, az egységmatrixot E jelöli.

[1] A Tervgazdasági Intézetben működő szemináriumon kezdtünk el egy vizsgálatot, amelyen e tanulmány első változatát kidolgoztuk és megvitattuk. A vitában elhangzott és hasznosított megjegyzésekért a Matematikai Módszerek Alkalmazási Osztálya munkatársainak mondunk köszönetet.

$H\,u(t) = u(t+1)$ eltolásoperáció
$\Delta\,u(t) = u(t+1) - u(t)$ differenciaoperáció
i = komplex szám imaginárius egysége
$\otimes$ = speciális matrix-szorzás jele. Értelmezése:

$$B \otimes \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BA_{11} & BA_{12} \\ BA_{21} & BA_{22} \end{pmatrix}.$$

b) Speciális jelölések

b1) Változók:

x = a termelés vektora; x_j = a j-edik ágazat termelése;
$\hat{X}$ = a termelési vektorból képzett diagonál-matrix, ahol $\hat{x}_{ii} = x_i$
u = a termelői készletek vektora, u_j = a j-edik ágazat készlete saját termeléséből;
Y = a felhasználói vásárlások matrixa; Y_{jk} = a k-adik termelő vásárlása a j-edik ágazat termékéből;
V = a felhasználói készletek matrixa; V_{jk} = a k-adik ágazatnál levő készlet a j-edik termékből;
w = a fogyasztói készletek vektora, w_j = a fogyasztó készlete a j-edik ágazat termékéből;
z = a fogyasztói vásárlások vektora, z_j = a fogyasztó vásárlása a j-edik ágazat termékéből.

b2) Adott mennyiségek:
$g = g(t) > 0$ a fogyasztás vektora, $g_j(t)$ = a t-edik évbeli fogyasztás a j-edik ágazat termékéből;
$F = F(t) \geq 0$ input-koefficiensek matrixa, F_{jk} = a k-adik ágazat egységnyi termékének előállításához felhasznált j-edik ágazatbeli termék.
u^*, V^*, w^* = a megfelelő készletek norma szerinti szintje.

Ismertek továbbá a változók kezdeti ($t = 0$ időponthoz tartozó) értékei (x°, u°, V°, Y°, w° és z°) a folytonos és (x_0, u_0, V_0, Y_0, w_0, és z_0) a diszkrét modellben.

1.2. *Feltevések*

1⁰ A folytonos modell változói a $t \geq 0$ tartományban folytonosan differenciálhatók. Kezdő értékük a $t = 0$ időpontban adott (x^0, u^0, V^0, Y^0, z^0).
2⁰ Minden változó determinisztikus.
3⁰ A gazdaságban egyetlen fogyasztó van.
4⁰ A gazdaság reálszférája Leontief-típusú, azaz:
- nincsenek külső korlátos erőforrások,
- a j-edik terméket egyetlen termelő állítja elő, s ez a j-edik ágazat. Az előállítás egy technológiával történik,
- a ráfordítások a termelés lineáris függvényei.

5⁰ Az $F(t)$ matrix folytonosan differenciálható, nem negatív és domináns saját értéke minden $t \geq 0$-ra kisebb 1-nél. (A folytonossági kikötés csak a folytonos modellre szükséges.)

6° Az x^0 induló termelés folytatható, azaz:

$$x^0 - F^0 x^0 > 0$$

7° A folytonos modellben $g(t)$ függvény elégséges, azaz minden $t \geq 0$-ra és minden j-re fennáll:[2]

$$g_j(t) > | x_j^0 - \sum_l F_{jl}^0 x^0 - g_j^0 |$$

8° Az induló készletek pozitívak:

$$u^0, V^0, w^0 > 0$$

Az 5° – 8° feltételek a rendszer működőképességére mondanak ki lényeges összefüggéseket, a többi feltétel a vizsgált gazdaság szerkezetét jellemzi. Ebben a cikkben – amint azt bevezetőnkben is említettük – a rendszer működőképességét, annak feltételeit nem elemezzük. Az 5°–8° feltételeket így elsősorban a [4]-ben tárgyalt modellel való szoros kapcsolat miatt soroltuk föl.

2. Leontief gazdaság egy folytonos és diszkrét modellje

2.1. *Eredeti modellek*

A modellek $2n^2+4n$ skaláregyenletből álló rendszerek, amelyek egyik csoportja alkotja a mérlegegyenletek rendszerét, a másik csoportba tartoznak a viselkedési egyenletek. A folytonos modell az idézett cikkben [4] tárgyalt modell kissé egyszerűbb formájú felírása, a diszkrét modell az ennek megfelelő felírás.

Folytonos modell [3] Diszkrét modell [2]

Mérlegegyenletek

$$\dot{u} = x - Ye - z \qquad \Delta u = x - Ye - z$$

$$\dot{V} = Y - F\hat{X} \qquad \Delta V = Y - F\hat{X}$$

$$\dot{w} = z - g \qquad \Delta w = z - g$$

Magatartási szabályok

$$\dot{x} = \dot{Y} + \dot{z} + C^2(u^* - u) \qquad \Delta X = \Delta(Ye) + \Delta z + C^2 [u^* - u(t)]$$

$$\dot{Y} = F\dot{\hat{X}} + \dot{F}\hat{X} + C^2(V^* - V) \qquad \Delta Y = \Delta (F\hat{X}) + C^2[V^* - V(t)]$$

$$\dot{z} = \dot{g} + C^2 (w^* - w) \qquad \Delta z = \Delta g + C^2 [w^* - w(t)]$$

A c_j = a j-edik ágazat szabályozó paramétere,
C = a szabályozó változókból alkotott diagonális matrix,
továbbá: a változó szimbóluma fölé tett pont az idő szerinti deriválást jelöli.

A szabályozó paraméterek – mint az egyenletekből leolvasható – azt mutatják meg, hogy a termelés, a termelői és fogyasztói vásárlások változásá-

[2] Belátható, hogy a diszkrét modell esetében a rendszer működőképessége nem feltételezi a kikötés létezését.

ban milyen „súllyal" szerepelnek a normálkészlettől való eltérések. Másképpen fogalmazva; hogyan változzék pl. a termelés nagysága, ha a változásnál figyelembevesszük a normálkészlettől való eltérést kifejező információt.

Az egyenletek közgazdasági interpretációja viszonylag könnyen megadható. A folytonos modell esetében azonban a magatartási szabályok értelmezése elég nehézkes. A diszkrét modell kategóriái egyszerűbbek, hiszen itt a nehezen értelmezhető deriváltak helyett olyan világos fogalmak szerepelnek, mint készletváltozás, termelésnövekmény stb. A magatartási szabályok értelmezése is egyértelművé válik.

2.2. *Származtatott modellek*

2.2.1 Folytonos származtatott modell

A modell $2n^2 + 4n$ skaláregyenletből áll

a) Mérlegegyenletek:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= x - Ye - z \\ \dot{V} &= Y - F\hat{X} \\ \dot{w} &= z - g \end{aligned}$$

b) Magatartási egyenletek:

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= C^2(u^* - u) \\ \ddot{V} &= C^2(V^* - V) \\ \ddot{w} &= C^2(w^* - w). \end{aligned}$$

A származtatott modell és az eredeti modell közötti kapcsolat lényegét az alábbi állítás adja:

TÉTEL: Az eredeti és a származtatott modellek ekvivalensek. A tétel bizonyítása egyszerű, s a formális ekvivalencia mellett belátható a tartalmi egyezőség is [3].

A származtatott modell magatartási egyenletei egy fizikai analógia lehetőségére mutatnak. A fizikai analógiák jelentősége és a közgazdasági modellek elemzésénél adódó hasznossága már általánosan elfogadott. Jelen esetben a formai hasonlóság miatt a magatartási egyenletek a rezgés jelenségeit leíró másodrendű — többnyire állandó együtthatójú — lineáris differenciálegyenletekkel hozhatók rokonságba.

A fizikai példánál maradva tegyük fel, hogy valamely mozgó testre olyan erő hat, amely azt egyensúlyi állapotba igyekszik hozni. Az ilyen erő nagysága arányos az egyensúlyi helyzettől való eltéréssel. Jelöljük s-sel adott t időpillanatban az egyensúlyi helyzettől való távolságot, az arányossági együtthatót w-vel, ekkor az erő nagysága w^2s lesz. Tegyük fel továbbá, hogy a mozgás valamilyen ellenállás jelenlétében megy végbe, s ekkor fellép az ún. *ellenállási erő*, amelynek iránya ellentétes a mozgás irányával, nagysága $2k\dot{s}$-al egyenlő, ahol $2k$ arányossági tényező. Ha $f(t)$-vel jelöljük a rendszerre ható külső *zavaró erőt*, akkor a mozgás differenciál-egyenlettel írható le:

$$\ddot{s} = -2k\dot{s} - w^2s + f(t).$$

Ha $f(t) = 0$, akkor *szabad rezgésről*, egyébként *kényszer rezgésről* van szó.

A modellnél felírt magatartási egyenletek közül tekintsük pl. a következőt:

$$\ddot{u} = -c_j^2 u_j + c_j^2 u_j^*.$$

Ebben az egyenletben az említett arányossági együtthatónak a c_j^2 szabályozási paraméter felel meg, az $f(t)$ „zavaró erő" a normálkészlethez való igazodás kényszerűsége.

A második derivált közgazdasági értelmezése így szemléletessé tehető. Az $\ddot{u}_j$ jelenti a *készletváltozás sebességét*. A magatartási egyenlet tehát azt mondja ki, hogy a készletváltozás sebessége a normálkészlettől való eltéréstől függ.

A fizikai analógia két szempontból is hasznosnak tűnik: Egyfelől a mérlegegyenletek és magatartási egyenletek tisztábbban elkülönülnek. Másfelől a megoldás szemléletesebb menetben valósítható meg és belátható, hogy a megoldás során nem szükséges feltételeznnünk, hogy a C matrix diagonális. (Az egyszerűbb tárgyalásmód és az eredmények könnyebb értelmezhetősége miatt a tárgyalásban a C diagonális matrixszal dolgozunk.)

2.2.2 Diszkrét származtatott modell [2]

A diszkrét modell ugyancsak $2n^2 + 4n$ skaláregyenletből áll, azonban egyszerű átrendezéssel redukálni lehet az egyenletek számát. Így a származtatott modell a következő lesz:

(a) Mérlegegyenletek

$$x = Ye + g + \Delta w + \Delta u$$
$$Y = F\hat{X} + \Delta V$$

(b) Magatartási egyenletek

$$\Delta^2 u = C^2[u^* - u(t)]$$
$$\Delta^2 V = C^2[V^* - V(t)]$$
$$\Delta^2 w = C^2[w^* - w(t)]$$

Diszkrét esetben a folytonoshoz hasonló módon lehet az eredeti és a származtatott modell ekvivalenciáját belátni. Míg azonban a folytonos modell esetében meglehetősen nehéz a származtatott modell értelmezése, a diszkrét modell esetében talán éppen a származtatott modell az, amelynek érdekes közgazdasági tartalmat lehet tulajdonítani.

Már első ránézésre megállapítható, hogy ebben a felírásban — amely tehát az eredeti felírásból logikusan következik — a készletek autonóm szabályozása figyelhető meg, azaz valamely ágazat jövőbeli készletalakulását semmilyen más tényező nem befolyásolja, csupán a normatív készlettől való eltérés és a szabályozás hatékonysága. Vizsgáljuk meg részletesebben példaként a $\Delta^2 u(t)$-re adott egyenletet! A baloldal kifejtése után a következő formula adódik:

$$u(t+2) - 2u(t+1) + u(t) = C^2[u^* - u(t)],$$

vagy átrendezve:

$$u(t+2) = u(t+1) + [u(t+1) - u(t)] + C^2[u^* - u(t)].$$

Még világosabbá válik a képlet tartalma, ha $t = t - 1$ helyen vizsgáljuk a folyamatot. Ekkor ugyanis:

$$u(t+1) = u(t) + [u(t) - u(t-1)] + C^2[u^* - u(t-1)]$$

adódik. A modell tehát úgy határozza meg a $t+1$ időbeli készletet, hogy a t időbeli készlethez hozzáadja a megelőző időszak készletváltozását (ezt nevezzük a továbbiakban mechanikus extrapolációnak) és a szabályozási tagot, amelyben viszont az előző időbeli készletnek a normától való eltérése szerepel. Ez a késleltetett szabályozás (bár természetes, hiszen idő szükséges ahhoz, hogy a normától való eltérést regisztrálják és ennek megfelelő intézkedéseket tegyenek) súlyos problémák forrása és az egész rendszer működőképességét veszélyezteti. A modell folytonos változatában a szabályozást az $\ddot{u} = C^2(u^* - u)$ egyenlet írja le, ennél pedig a szabályozás késleltetés nélkül, a reakcióidő elhanyagolásával követi a normától való eltérést. Ez a magyarázata annak, hogy a kétféle — a folytonos és a diszkrét — megoldás gyökeresen különbözik egymástól.

2.3. *Származtatott modellek megoldása*

2.3.1 A folytonos modell megoldása és a megoldás értelmezése

A megoldás során támaszkodunk az alábbi segédtételre.

1. *Segédtétel*: A $\dot{Z} = \begin{pmatrix} O & E_n \\ -C^2 & 0 \end{pmatrix} Z, \quad Z(0) = E_{2n}$

alakú matrix differenciálegyenlet megoldása:

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -C^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot t} = e^{Qt} = \begin{pmatrix} \cos Ct & C^{-1} \sin Ct \\ -C \sin Ct & \cos Ct \end{pmatrix}$$

ahol $Q = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -C^2 & 0 \end{pmatrix}$.

A tetel bizonyítása a [3]-ben található.

Tekintsük most a $\ddot{V} = C^2(V^* - V)$ rendszert: Ez átírható a következő rendszerré:

$$\dot{V} = \dot{V}$$

$$\ddot{V} = C^2(V^* - V)$$

azaz

$$\begin{pmatrix} \dot{V} \\ \ddot{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -C^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ \dot{V} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ C^2\, V^* \end{pmatrix}.$$

A differenciálegyenletek elméletéből ismert módon kapjuk, hogy:

$$\begin{pmatrix} V \\ \dot{V} \end{pmatrix} = e^{Qt}\left[\begin{pmatrix} V(0) \\ \dot{V}(0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} V^* \\ 0 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} V^* \\ 0 \end{pmatrix} = e^{Qt} \begin{pmatrix} V^0 & -V^* \\ Y^0 & -F^0 \hat{X}^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V^* \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ebből

$$\boxed{V = V^* + (\cos Ct)(V^0 - V^*) + (C^{-1} \sin Ct)(Y^0 - F^0 \hat{X}^0)}\,.$$

Hasonló módon számíthatjuk ki az u és w változók értékeit is, csak az $\dot{u}(0)$ és $\dot{w}(0)$ értékek meghatározására kell ügyelnünk. A megoldás menetét itt nem közöljük, csak az eredményeket adjuk meg.

$$\boxed{u = u^* + \cos Ct(u^0 - u^*) + C^{-1}(\sin Ct)(x^0 - Y^0 e - z^0)}$$

$$\boxed{w = w^* + \cos Ct(w^0 - w^*) + C^{-1}(\sin Ct)(z^0 - g^0)} .$$

Ezzel meghatároztuk az u, V és w változókat.

A továbbiakban meghatározhatjuk az x, Y és z változók értékeit is.

Kezdjük a z-vel:

Mivel $\dot{w} = z - g$,

$$z = g + \dot{w} = g - C \sin Ct(w^0 - w^*) + \cos Ct(z^0 - g^0).$$

Hasonló módon meghatározhatjuk az x és az Y értékeit is. A z ismeretében

$$\dot{u} = x - Ye - z$$

$$\dot{V} = Y - F\hat{X}$$

rendszerből a második egyenletet e-vel szorozva és összeadva az egyenleteket, kapjuk, hogy

$$x = (E - F)^{-1}(\dot{V}e + \dot{u} + z).$$

Ebből

$$\boxed{\begin{aligned} x = (E - F)^{-1}[g - C(\sin Ct)(u^0 - u^* + V^0 e - V^* e + w^0 - w^*) + \\ + (\cos Ct)(x^0 - F^0 x^0 - g^0)] \end{aligned}}$$

($(E - F)^{-1}$ létezik, mert az $F(t) \geq 0$ minden $t \geq 0$-ra, és domináns sajátértéke kisebb 1-nél.)

Az $Y = F\hat{X} + \dot{V}$ rendszerből pedig

$$\boxed{Y = F\hat{X} - (C \sin Ct)(V^0 - V^*) + \cos Ct(Y^0 - F^0 \hat{X}^0)} .$$

A megoldás egy lehetséges értelmezéséhez tekintsük az u vektor j-edik koordinátáját, s ennek megfelelően a megoldásban szereplő többi változó megfelelő koordinátáját:

$$u_j = u_j^* + \cos c_j t(u_j^0 - u_j^*) + \frac{1}{c_j} \sin \quad t(x^0 - \sum_l Y_l - z_j^0).$$

Felhasználunk egy könnyen belátható segédtételt.

2. *Segédtétel*: A $(\sin \alpha)b + (\cos \alpha)c$

felírható a

$$\sqrt{b^2 + c^2} \sin(\alpha + \varphi)$$

formában, ahol $\varphi = \arc\cos \dfrac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \arc\sin \dfrac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}$.

Alkalmazzuk ezt az eredményt az u_j változóra:

$$u_j = u_j^* + L_j \sin(c_j t + \varphi^0)$$

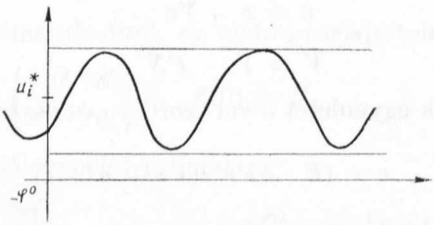
ahol

$$L_j = \frac{1}{c_j}\sqrt{c_j^2(u_j^0 - u_j^*)^2 + (x_j^0 - \sum_l Y_{jl}^0 - z_j^0)^2}$$

$$\varphi^0 = \text{arc}\sin\frac{u_j^0 - u_j^*}{L_j}.$$

A fenti forma a harmonikus rezgésnél megismert összefüggéshez hasonlít. Az L_j állandót a rezgés (általánosabban a mozgás) amplitúdójának nevezzük, a c_j a mozgás frekvenciája, míg a φ^0 a kezdő fázisa.

A mozgás képét az alábbi ábra szemlélteti:



Az $u_j(t)$ függvény értéke periodikus mozgás szerint változik. A mozgás főbb jellemzői a következők:

1⁰ a periodikus mozgás centruma az u^* normálkészlet nagysága. A gazdasági egyedek magatartásában tehát érvényesül az a szempont, hogy a készletek alakulása a normálkészlet szintjéhez igazodjék.

2⁰ A periodikus mozgás amplitudóját az L_j tényező adja. Az amplitúdó fontos jellemzője, hogy nagysága állandó és függ a szabályozási paraméter valamint az egyes változók kezdeti értékének nagyságától.

3⁰ A mozgás periódusa is állandó.

4⁰ A kezdőfázis meghatározásához a $\sin\varphi^0$ értékeit kell tekin- Mivel a $\sin\varphi^0$-ra adott kifejezésben a nevező mindig pozitív előjelű, a szög előjelét az $(u_j^0 - u_j^*)$ különbség határozza meg. Ha $u_j^0 - u_j^* > 0$, akkor $-\pi < \varphi^0 < \pi$, amiből megállapítható, hogy a görbe az u_j^* fölött metszi az $u_j(t)$ tengelyt.

A fenti értelmezés kiterjeszthető a több változóra is. Az eredmények hasonlóak lesznek. Érdekesebb viszont azt megvizsgálni, vajon a diszkrét esetben milyen eltérések vannak a folytonos esethez képest.

2.3.2. A diszkrét modell megoldása és értelmezése

A diszkrét modell megoldása állandó együtthatójú lineáris differenciaegyenlet megoldásához vezet. Itt most csupán példaként mutatjuk be az egyenlet megoldását a

$$\Delta^2 u = C^2[u^* - u(t)]$$

egyenletre. Átrendezés után – mint már láttuk – a következő formula adódik:

$$u(t+2) = 2u(t+1) - u(t) - C^2 u(t) + C^2 u^*$$

Melléírva az $u(t+1) = u(t+1)$ azonosságot a következő rendszer adódik:

$$H\begin{pmatrix} u(t) \\ u(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -(E+C^2) & 2E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(t) \\ u(t+1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ C^2 u^* \end{pmatrix}.$$

Ez egy inhomogén, elsőrendű, lineáris egyenletrendszer, melynek általános megoldása:

$$s(t) = A^t s(0) + A^t \sum_{\nu=0}^{t-1} A^{-(\nu+1)} f(t)$$

alakban írható fel, ahol A a feladat együttható mátrixa, $f(t)$ pedig ismert időfüggvény. Esetünkben az A matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ -(E+C^2) & 2E \end{pmatrix} \text{ az } f(t) \text{ függvény pedig } \begin{pmatrix} 0 \\ C^2 u^* \end{pmatrix} \text{ konstans lesz.}$$

Az általános megoldás pedig a megfelelő átalakítások után az

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ u(t+1) \end{pmatrix} = A^t \left[\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} + (A-E)^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ C^2 u^* \end{pmatrix}\right] - (A-E)^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ C^2 u^* \end{pmatrix}$$

alakot ölti.

A feladat következő lépése A^t matrix meghatározása.

Könnyen belátható, hogy ha léteznek olyan P és P^{-1} matrixok, amelyek A-t diagonális alakra hozták, azaz $A = P.B.P^{-1}$ (B diagonális matrix), akkor $A^t = P.B^t P^{-1}$ alakban írható, B^t pedig könnyen meghatározható. Esetünkben belátható és behelyettesítéssel igazolható, hogy ha

$$P = \begin{pmatrix} E & E \\ E+iC & E-iC \end{pmatrix};\ P^{-1} = (-2iC)^{-1} \otimes \begin{pmatrix} E-iC & -E \\ -(E-iC) & E \end{pmatrix}$$

és $B = \begin{pmatrix} E+iC & 0 \\ 0 & E-iC \end{pmatrix}$, akkor az $A = P.B.P.^{-1}$ reláció teljesül.

Mivel B blokkonként diagonális matrix, hatványai könnyen előállíthatók, így a komplex számok trigonometrikus alakjának felhasználásával előállítható az A^t matrix a következő alakban:

$$A^t = C^{-1}\otimes\begin{pmatrix} -\sqrt{E+C^2}^{\,t-1}(E+C^2)\sin[(t-1)\Phi] & \sqrt{E+C^2}^{\,t}\sin(t\Phi) \\ -\sqrt{E+C^2}^{\,t}(E+C^2)\sin(t\Phi) & \sqrt{E+C^2}^{\,t+1}\sin[(t+1)\Phi] \end{pmatrix}.$$

Könnyen belátható az is, hogy a megoldásban szereplő $(A-E)^{-1}$ matrix

$$C^{-2}\otimes\begin{pmatrix} E & -E \\ E+C^2 & -E \end{pmatrix}$$

lesz, és a megoldás állandója pedig

$$(A-E)^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ C^2 u^* \end{pmatrix} = C^{-2}\otimes\begin{pmatrix} E & -E \\ E+C^2 & -E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ C^2 u^* \end{pmatrix} = C^{-2}\otimes\begin{pmatrix} -C^2 u^* \\ -C^2 u^* \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} u^* \\ u^* \end{pmatrix}.$$

A fenti formulák felhasználásával már könnyen előállítható $u(t)$ explicit megoldása és hasonló módon kapható $V(t)$ és $w(t)$ megoldása is:

$$\boxed{\begin{aligned}
u(t) &= u^* + C^{-1}\sqrt{E+C^2}^{\,t}\left[\sin t\Phi(u_1-u^*) - (\sqrt{E+C^2})^{-1}\sin\left[(t-1)\,\Phi(u_0-u^*)\right]\right]\\
V(t) &= V^* + C^{-1}\sqrt{E+C^2}^{\,t}\left[\sin t\Phi(V_1-V^*) - (\sqrt{E+C^2})^{-1}\sin(t-1)\Phi(V_0-V^*)\right]\\
w(t) &= w^* + C^{-1}\sqrt{E+C^2}^{\,t}\left[\sin t\Phi(w_1-w^*) - (\sqrt{E+C^2})^{-1}\sin(t-1)\Phi(w_0-w^*)\right]
\end{aligned}}$$

A fenti egyenletekben a kezdeti értékek mellett szerepelnek a $t = 1$ időben felvett értékek (u_1, V_1 és w_1) is, amelyek meghatározása a következő egyenletekből történik:

$$\begin{aligned}
u_1 &= u_0 + x_0 - Y_0 e - z_0\\
V_1 &= V_0 + Y_0 - F_0\hat{X}_0\\
w_1 &= w_0 + z_0 - g_0 .
\end{aligned}$$

Ezzel tehát megkaptuk a magatartási egyenletek teljes megoldását.

A magatartási egyenletek megoldásának ismeretében elvégezhetjük a származtatott rendszer mérlegegyenleteinek megoldását is. Megoldandó tehát az

$$\begin{aligned}
x &= Ye + g + \Delta w + \Delta u\\
Y &= F\cdot\hat{x} + \Delta V
\end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszer, ahol csak x és Y ismeretlen. Egyszerű átalakítások után kapjuk, hogy

$$\boxed{\begin{aligned}
x &= (E-F)^{-1}[g + \Delta u + \Delta V + \Delta w]\\
Y &= F(E-F)^{-1}[\hat{g} + \Delta\hat{u} + \Delta V + \Delta\hat{w}] + \Delta V
\end{aligned}}\,.$$

Ezzel előállítottuk a származtatott modell teljes megoldását. Hasonlóan a folytonos modellhez, a diszkrét modellt is átalakítjuk az elemzéshez. A diszkrét modell j-ik magatartási egyenlete

$$u_j(t) = u_j^* + M_j(t)\sin(\varrho_j t + \varphi^0)$$

alakot ölt, ahol φ^0 megegyezik a korábban definiálttal, míg a másik két tényező eltér a folytonos modellben alkalmazottaktól. A korábban bemutatottakhoz hasonló átalakítások után az adódik, hogy

$$M_j(t) = (\sqrt{1+c_j^2})^{\,t}L_j$$

és

$$\varrho_j = \frac{c_j}{\sqrt{1+c_j^2}}\,.$$

Látható, hogy a két megoldás között – a formai hasonlóságok mellett – jelentős különbség van. Ez a megoldás is periodikus ingadozást ábrázol, de fő jellemzői a következők:

1⁰ A periodikus ingadozás centruma az u_j^* lesz. Ez teljesen érthető, hiszen ez az a készletnorma, amelyhez a termelők minden esetben törekednek. Mivel a rendszer szabályozásának egyik célja az, hogy ezt a centrumot alakítsa ki, a szabályozás ebből a szempontból jónak tekinthető.

2⁰ Az ingadozás amplitúdóját az $M_j(t)$ tag fejezi ki. Ismeretes, hogy $c_j^2 > 0$, így mivel c_j^{-1} és L_j konstans, az amplitúdó t növekedésével korlátlanul növekszik. Ez alól csak egy kivételes eset létezik, mégpedig az, amikor mind u_{0j}, mind pedig u_{1j} megegyezik u_j^*-gal, ez azonban egyszersmind a periodicitást is megszünteti. Mivel a számítások eredményeinek ez az egyik leglényegesebb pontja, kissé részletesebben ki kell térnünk elemzésére.

Az, hogy a rezgőmozgás amplitúdója egyre növekvő és elég nagy t esetén bármilyen naggyá várhat, azt jelenti, hogy a mindenkori készletnagyság igen nagy értékekkel eltérhet a mozgás centrumától mind pozitív, mind negatív irányban. A készletek tehát nem stabilak olyan értelemben sem, ahogy az a folytonos modell esetén értelmezhető volt, tehát úgy, hogy a készletváltozás mindig bizonyos határon belül maradt. Ez pedig azt jelenti, hogy a modell által reprezentált szabályozás nem elégséges, bizonyos idő elteltével a rendszer működésképtelenné válik. Ennek oka — mint azt már a korábbiakban is említettük — az, hogy a szabályozás csak késéssel igazítja a készleteket, nem a pillanatnyi, hanem egy korábbi készletnagyságot vesz alapul, így egyre inkább eltér az előírt szinttől. Megjegyzendő, hogy a késleltetés — ami voltaképpen megfelel a reakcióidőnek — tetszés szerint kicsinek választható, hiszen t skálázását is tetszés szerint választjuk meg, lényeg csupán az, hogy véges intervallumot tekintünk a szabályozás megvalósítására, ekkor korábbi állításaink érvényben maradnak. Természetesen a változók diszkrét kezelése mellett az eredeti modellnek az a tétele, amely a rendszer működőképességét biztosítja az előbb elmondottak miatt nem érvényes.

Vizsgáljuk meg, hogy az amplitúdó növekedésének mértéke mely tényezőktől függ. Az egyszerűség kedvéért ismét csak egy komponensre irjuk fel az egyenlet megfelelő tényezőjét:

$$\frac{\sqrt{1+c_j^2}^{\,t}}{c_j}\sqrt{(u_{1j}-u_{0j})^2+c_j^2(u_{0j}-u_j^*)^2}$$

vagy ugyanezt áttekinthetőbb formába írva:

$$\sqrt{1+c_j^2}^{\,t}\sqrt{\frac{1}{c_j^2}(u_{1j}-u_{0j})^2+(u_{0j}-u_j^*)^2}\,.$$

Ebből a formából az alábbi következtetések vonhatók le:

- ha csak t-t tekintjük változónak, az amplitúdó végtelenhez tart t növekedésével
- ha $u_{1j}=u_{0j}=u_j^*$, akkor az amplitúdó konstans és 0-val egyenlő.
- ha c_j-t és t-t rögzítjük, akkor az amplitúdó úgy lesz nagy, ha a kiinduló készletértékek nagy mértékben eltérnek a normáktól. Ha a folyamat megközelítően egyensúlyi helyzetből indul az oszcilláció kisebb lesz.

3⁰ A megoldásként kapott függvény j-edik elemének hullámhossza $\frac{2\pi}{\varrho_j}$. Mindenek előtt megjegyzendő, hogy ez t-től független, azaz az oszcilláció

állandó hullámhosszú. A hullámhossz csak ϱ_j illetve ezen keresztül c_j függvénye, tehát a szabályozás intenzitásától függ. Érdekes kérdés az, hogy c_j megfelelő értékével lehet-e olyan nagy hullámhosszot kialakítani, amely esetén az oszcilláció már nem dominál az alábbi értelemben. Ha ϱ_j-t elég kicsire választjuk, a hullámhossz igen nagy lehet, ez azonban csak úgy valósulhat meg, hogy c_j is igen kicsi lesz, hiszen $\varrho_j = \arcsin \frac{c_j}{\sqrt{1+c_j^2}}$.
Ha c_j kicsivé válik, akkor a $\sqrt{1+c_j^2}$ közel esik 1-hez, tehát az amplitúdó kisebb mértékben növekszik, ugyanakkor abszolút nagyságát tekintve igen nagy lehet a formula második tényezője miatt. Ez tehát azt jelenti, hogy gyengébb szabályozást alkalmazva a hullámhossz és az amplitúdó is megnő, ezért azt állíthatjuk, hogy ily módon sem érhető el jó szabályozás. Mivel fennáll a $0 \leq \varrho_j < \frac{\pi}{2}$ egyenlőtlenség, csupán érdekességként belátható, hogy a minimális hullámhossz 5 lesz (azaz nagyobb mint 4). Ez azt jelenti, hogy tetszőleges kiindulópontból legalább 5 alkalommal kell szabályozni a folyamatot, hogy az visszatérjen kiinduló helyzetébe. Tekintsünk erre egy példát! Egy gazdaságban évente figyelik meg a készleteket és éves terveket készítenek rájuk. A készlettervezés mechanizmusa legyen a következő:

— a tervezés három információn alapul, ezek: a bázisidőszaki készletnagyság, a legutóbbi időszak készletváltozása, készletnorma;
— a bázisidőszaki készletnagyság és az előző időszak készletváltozása alapján meghatározza a spontán várható készletnagyságot (Ezt nevezhetjük mechanikus extrapolációnak, hiszen csupán a múltbeli fejlődési tendencia jövőbeni kivetítését jelenti)
— a terv azonban szabályoz is, mégpedig abba az irányba, hogy a készletek mozgása a norma körül történjen.

Ha a terv említett két tényezőjéből a szabályozási elem a döntő, akkor korábbi eredményeink azt jelentik, hogy a gazdaságban a készletek 4–5 éves ciklikus ingadozást fognak mutatni.

4° Röviden megemlítjük, hogy az ingadozás fáziseltolódását ϱ_j mutatja. A már korábban felírt formula részletes elemzése helyett ennek is csupán néhány jellegzetes értékét mutatjuk be:

— c_j változásával szabályozni lehet a fáziseltolódást: ha c_j elég kicsi és $u_{1j} \neq u_{0j}$, akkor $\varrho_j = 0 \pm n\pi$, azaz nincs fáziseltolódás, ha viszont c_j nagy, akkor $\varrho_j \to \frac{\pi}{2}$;
— ugyancsak nincs fáziseltolódás akkor sem, ha $u_{0j} = u_j^*$, de ismét $\frac{\pi}{2}$ az eltolódás, ha $u_{1j} = u_{0j}$;
— könnyen leolvasható a formuláról, hogy amennyiben $u_{0j} > u_j^*$, azaz a rendszer a normálnál nagyobb készlettel indul, akkor $0 \leq \varrho_j \leq \pi$, ha viszont $u_{0j} < u_j^*$, akkor $\pi \leq \varrho_j \leq 2\pi$.

Érdemes megemlíteni, hogy a fáziseltolódás önmagában még nem ad választ arra a kérdésre, hogy a kiindulópontból pozitív, vagy negatív irányba indul a folyamat.

A fentiekben $u(t)$ függvény elemzését végeztük el, teljesen hasonló az elemzés és a következtetések más készletek ($V(t)$ és $w(t)$)esetében is. Áttérve a modell többi változójára belátható, hogy a fogyasztói vásárlások — feltéve, hogy reális $g(t)$ fogyasztási függvényt választunk — a készletek ingadozása és a fogyasztás viszonylagos stabil volta miatt szintén növekvő amplitúdójú ingadozásokat végeznek. Nem ilyen egyszerű a helyzet a termelés és a felhasználás esetében. Ezeknél ugyanis a különféle készletek lineáris kombinációi szerepelnek, azaz a termelés és a felhasználás pályája több különböző hullámhosszú, aplitúdójú és más eltolású függvény eredőjeként adódik. Az ily módon kapott pályák speciális esetben lehetnek símák, lehetnek szabályosan oszcillálók, de általában szabálytalan, hullámzó alakulást mutatnak.

Áttekintve a fenti elemzéseket a következő összefoglaló megállapításokat tehetjük:

a) A két modellfelírás, bár formailag nagyon hasonló, feltételeiben jelentős különbséget tartalmaz. Ez az eltérés a szabályozás megvalósításához szükséges idő figyelembe vételét, illetve elhanyagolását jelenti.

b) A feltételekben meglevő különbségek miatt a két modell más eredményeket szolgáltat. Más modellek elemzésénél is belátható, hogy a két felírás és megoldási mód között jelentős különbség van, itt azonban éppen a szabályozási idő bevezetésével a két modell egymásnak ellentmondó következtetésekhez vezet.

c) A folytonos modell eredményei azt mutatják, hogy a feltételezett szabályozás mellett a készletek állandó amplitúdójú periodikus ingadozást mutatnak, az oszcilláció hullámhossza állandó. A diszkrét modell esetében viszont az amplitúdó nem állandó, hanem idő függvényében növekvő, a megkívánt készletszinttől való eltérések a végtelenbe tartanak. A hullámhossz itt is állandó.

d) A folytonos modell megoldásában viszonylagos stabilitás észlelhető és nem túl szigorú megkötések mellett biztosítható a rendszer működőképessége. A diszkrét megoldás minden esetben t növekedésével a rendszer működőképességének megszűnéséhez vezet, így felveti azt a gondolatot, hogy az itt alkalmazott nem elégséges szabályozás helyett egy több szabályozóval történő szabályozást próbáljunk modellezni. A továbblépést — egy fizikai analógián keresztül — ismét a folytonos modell biztosította.

3. Továbbfejlesztett modellek

3.1. *Folytonos továbbfejlesztett modell leírása és megoldása*

Már utaltunk rá, hogy a továbbfejlesztés egy lehetséges módjához a fizikai analógia, valamint az eredmény értékeléséből adódó tanulság adott ötletet.[3] Alább megfogalmazzuk az ún. t o v á b b f e j l e s z t e t t m o d e l l t. A továbbfejlesztett modell az eredeti modellből kiindulva a következőképpen írható fel:

[3] Az általunk folytonos továbbfejlesztett modellnek nevezett modell speciális esetét dolgozta ki és működését elemezte Kornai J. és Martos B. Erről, a jelen tanulmány szerzőinek munkájától függetlenül kidolgozott modellről beszámoló cikk az Econometricaban jelenik meg [6].

(a) Mérlegegyenletek

$$\dot{u} = x - Xe - z$$
$$\dot{V} = Y - F\hat{X}$$
$$\dot{w} = z - g$$

(b) Magatartási szabályok

$$\dot{x} = \dot{Y} + \dot{z} + C^2(u^* - u) + 2D(u^{**} - \dot{u})$$
$$\dot{Y} = (F\dot{\hat{X}}) + C^2(V^* - V) + 2D(V^{**} - \dot{V})$$
$$\dot{z} = \dot{g} + C^2(w^* - w) + 2D(w^{**} - \dot{w})$$

ahol az eddig használt jelölések mellett az újak jelentése u^{**}, V^{**} és w^{**} = a megfelelő készletváltozás kívánatos üteme. D = szabályozási paraméterek matrixa.

Az 1. tétel alapján felírhatjuk a továbbfejlesztett modellt a származtatott modellből levezetett formában is.

Értelmezzük most a magatartási szabályokat! Látható, hogy az eredeti modellhez képest módosítottuk a szabályok tartalmát. A fizikai példához kapcsolódva egyfajta csillapítást igyekszünk az u, V és w oszcillációjába vinni azáltal, hogy ellenállási erővel is számolunk. A gazdálkodási egységek (ágazatok) magatartási, alkalmazkodási törvényeire gondolva megállapíthatjuk, hogy ez esetben a normálkészlethez való alkalmazkodáson túlmenően megköveteljük a készletváltozás egy adott szinthez való alkalmazkodását is. A megoldás értelmezésénél majd szemléltetjük, hogy ez a szabályozás két tendencia érvényesítését követeli meg. Az egyik tendenciát a c_i paraméterek határozzák meg, a másik tendenciáról még nem tudjuk, vajon erősíti-e ezt, vagy ellene hat.

A modell megoldásának menete a már megismert menethez áll közel. A megoldás során felhasználjuk a következő segédtételt:

3. *Segédtétel*: A $\dot{Z} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -C^2 & -2D \end{pmatrix} Z$, $Z(0) = E_{2n}$

matrix-differenciálegyenlet megoldása[4]

$$e^{St} = \frac{E}{-2R} \otimes \begin{bmatrix} e^{(-D+R)t}(-D-R) + e^{(-D+R)t}(D-R) & e^{(-D-R)t} - e^{(-D+R)t} \\ (-D+R)e^{(-D+R)t}(-D-R) + (-D-R)e^{(-D-R)t}(D-R) & (-D-R)e^{(-D-R)t} - (-D+R)e^{(-D+R)t} \end{bmatrix}$$

ahol

$$S = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -2C^2 & -2D \end{pmatrix}$$
$$R = \sqrt{D^2 - C^2}.$$

(Feltesszük, hogy $R \neq 0$. Ha $R = 0$, akkor az alábbi tárgyalástól eltérő elemzés szükséges, amit itt nem végzünk el.) A tétel bizonyítása [3]-ban található.

[4] Levezetéseinkben az egyszerűbb jelölés miatt esetenként törtalakban írunk matrixokat, amit valójában a nevezőben szereplő matrix inverzével való szorzásként értelmezünk.

Tekintsük a következő egyenletrendszert:

$$\dot{V} = \dot{V}$$

$$\ddot{V} = C^2(V^* - V) + 2D(V^{**} - \dot{V})$$

azaz

$$\begin{pmatrix} \dot{V} \\ \ddot{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -C^2 & -2D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ \dot{V} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ C^2 V^* + 2DV^{**} \end{pmatrix}.$$

Ebből

$$\begin{pmatrix} V \\ \dot{V} \end{pmatrix} = e^{St}\left[\begin{pmatrix} V^0 \\ \dot{V}(0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} V^* + 2C^{-2}DV^{**} \\ 0 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} V^* + 2C^{-2}DV^{**} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ebből kifejezve a V-t kapjuk:

$$\boxed{\begin{aligned} V = e^{-Dt}\left[\frac{e^{Rt} - e^{-Rt}}{2R} \cdot D + \frac{e^{Rt} + e^{-Rt}}{2}\right](V^0 - V^* - 2C^2DV^{**}) + \\ + e^{-Dt}\left[\frac{e^{Rt} - e^{-Rt}}{2R} \cdot \dot{V}(0)\right] + \left(V^* + 2\frac{D}{C^2}V^{**}\right) \end{aligned}}$$

(A fenti számítási menetben felhasználtuk, hogy

$$e^{(-D-R)t} = e^{-Dt} \cdot e^{-Rt}$$

fennáll, mivel D és R diagonál matrixok.)

A V változónál megismert számításhoz hasonlóan könnyen kiszámíthatjuk az u és w változók, a származtatott rendszernél már megismert módon pedig az x, Y és z értékeit is. Mivel az u, V és w értékeit és ebből azok deriváltjait ismerjük, a számítás elvégezhető. A nehézkes felírásmód miatt most ezen változók értékeinek leírásától eltekintünk.

3.2. *Diszkrét továbbfejlesztett modell leírása és megoldása*

Diszkrét esetben a továbbfejlesztett modell — akárcsak a származtatott modell — mérlegegyenletekből és magatartási egyenletekből áll, hasonlóan a folytonos modellhez a következő:

(a) Mérlegegyenletek

$$x = Ye + g + \Delta w + \Delta u$$

$$Y = F\hat{x} + \Delta V$$

(b) Magatartási egyenletek

$$\Delta^2 u = 2D(u^{**} - \Delta u) + C^2[u^* - u(t)]$$

$$\Delta^2 V = 2D(V^{**} - \Delta V) + C^2[V^* - V(t)]$$

$$\Delta^2 w = 2D(w^{**} - \Delta w) + C^2[w^* - w(t)].$$

Ebben a modellben tehát két szabályozás érvényesül: nem csupán a készletek nagyságát, de a készletváltozás nagyságát is szabályozzák. (Ez utóbbi történhet úgy, hogy a készletek stabilitását tekintjük kívánatosnak, azaz az előírt normatív készletváltozás valamennyi készletre nulla.) A jobb értelmezhetőség kedvéért alakítsuk át a magatartási egyenleteket; az átalakítást ismét csak egy egyenlet példáján mutatjuk be:

$$u(t+2)-2u(t+1)+u(t)=2Du^{**}-2D\Delta u+Cu^{*}-Cu(t)$$

és átrendezésével a következő egyenletet kapjuk:

$$u(t+2)=u(t+1)+[E-2D][u(t+1)-u(t)]-C^2u(t)+C^2u^{*}+2Du^{**},$$

vagy ismét $t=t-1$ helyen tekintve

$$u(t+1)=u(t)+[E-2D][u(t)-u(t-1)]+C^2\big(u^{*}-u(t-1)\big)+2Du^{**}$$

adódik. Ez a forma erősen hasonlít a származtatott modell értelmezésére felírt formára. Az alapvető különbség a kettő között az, hogy ott az $u(t)-u(t-1)=$ $=\Delta u(t)$ tag együttható mátrixa E volt, míg itt $[E-2D)$, Visszatérve korábbi példánkhoz ez a magatartási egyenlet olyan készlettervezési mechanizmust ábrázol, amely a bázisidőszaki készletnagysághoz nem egyszerűen az utolsó időszak készletváltozását, hanem annak csak egy részét adja hozzá, s a normától való eltéréssel a korábban említett módon szabályoz. Ezt nevezzük az előző „mechanikus extrapolációval" szemben „lineáris extrapolációnak". Eltérést jelent még az is, hogy a fenti, az $u(t+1)$-re adott formulában szerepel egy additív konstans tag is ($2Du^{**}$).

A megoldás módja hasonló a korábban bemutatott származtatott modelléhez. Kiragadva ismét csak egy magatartási egyenletet vázlatosan mutatjuk be a megoldást. Megoldandó most tehát az

$$u(t+2)=u(t+1)+(E-2D)\Delta u(t)-C^2u(t)+C^2u^{*}+2Du^{**}$$

másodrendű lineáris differenciaegyenlet.

Az első lépésben ismét A^t hatványt állítjuk elő a már bemutatott főtengely-transzformáció segítségével. Itt az adódik, hogy

$$A^t=\left(-2\sqrt{D^2-C^2}\right)^{-1}\otimes$$

$$\otimes\begin{bmatrix}(E-D+\sqrt{D^2-C^2})^t(E-D-\sqrt{D^2-C^2})+(E-D-\sqrt{D^2-C^2})^t(-E+D-D^2-C^2); \\ (E-D+\sqrt{D^2-C^2})^t+(E-D-\sqrt{D^2-C^2})^t \\ (E-D+\sqrt{D^2-C^2})^{t+1}(E-D-\sqrt{D^2-C^2})+(E-D-\sqrt{D^2-C^2})^{t+1}(-E+D-\sqrt{D^2-C^2}); \\ (E-D+\sqrt{D^2-C^2})^{t+1}+(E-D-\sqrt{D^2-C^2})^{t+1}.\end{bmatrix}$$

Ezután meghatározzuk a konstans tagot, amely ez esetben is — akárcsak a folytonos modellnél $-u^{*}+2C^{-2}\cdot Du^{**}$ lesz. A keresett megoldás pedig

$$\begin{pmatrix}u(t)\\ u(t+1)\end{pmatrix}=A^t\begin{pmatrix}u_0-u^{*}-2C^{-2}Du^{**}\\ u_1-u^{*}-2C^{-2}Du^{**}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u^{*}+2C^{-2}Du^{**}\\ u^{*}+2C^{-2}Du^{**}\end{pmatrix}$$

alakban írható. A részletes megoldást általában az A^t matrix bonyolultsága miatt nem írjuk fel; a következő, elemző részben csoportosítjuk a megoldásokat és ekkor adjuk meg a pontos megoldást is.

3.3. *A folytonos továbbfejlesztett modell megoldásának értelmezése*

A fenti formában adott megoldások további diszkussziója kívánatos. Az elemzést az u változóra végezzük el, de analóg módon a többi változóra is elvégezhetjük. A megoldásnál adott formulában az R valós vagy komplex voltától eltekintettünk. Az alábbiakban a D és C nagyságrendi relációja alapján két esetet különböztetünk meg.

I. eset: $\boxed{D < C}$

Ekkor $D^2 - C^2 < 0$ így $R = \sqrt{D^2 - C^2} = (\sqrt{C^2 - D^2})\, i = i \cdot \hat{R}$ ahol tehát $\hat{R} = \sqrt{C^2 - D^2}$ valós.

Helyettesítsük be R helyére az $i\hat{R}$ értékeket.

$$u = e^{-Dt}\left[\frac{e^{i\hat{R}t} - e^{-i\hat{R}t}}{2i} D\hat{R}^{-1} + \frac{e^{i\hat{R}t} + e^{-i\hat{R}t}}{2}(u^0 - u^* - 2C^2Du^{**}) + \right.$$

$$\left. + e^{-Dt}\left[\frac{e^{i\hat{R}t} - e^{-i\hat{R}t}}{2i\hat{R}}\dot{u}(0)\right] + (u^* + 2C^{-2}Du^{**})\right.$$

$$u = e^{-Dt}\{(\sin \hat{R}t) \cdot (D\hat{R}^{-1})[(u^0 - u^* - 2C^2Du^{**} + \dot{u}(0)] +$$

$$+ (\cos \hat{R}t)(u^0 - u^* - 2C^2Du^{**})\} + (u^* + 2C^{-2}Du^{**}).$$

Mivel

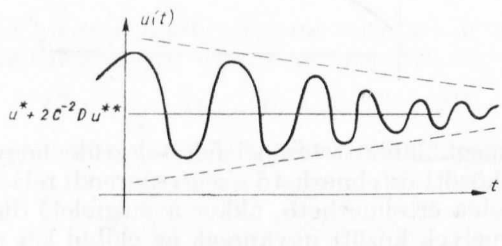
$$\dot{u}(0) = x^0 - Y^0 e - z^0$$

$$u = e^{-Dt}\{[(\sin \hat{R}t)(D\hat{R}^{-1})(u^0 - u^* - 2C^2Du^{**} + x^0 - Y^0 e - z^0) +$$

$$+ (\cos \hat{R}t)(u^0 - u^* - 2C^2Du^{**})]\} + (u^* + 2C^{-2}Du^{**}).$$

Az u változónak ebből a formájából már kiolvashatjuk a továbbfejlesztett modell megoldásának egyik nagyon fontos tulajdonságát. Látható, hogy az eredeti modell oszcilláló megoldását sikerült csillapítanunk. Ugyanis ha $t \to \infty$, akkor $e^{-Dt} \to 0$ és ebből következően $u \to (u^* + 2C^{-2}Du^{**})$.

Sematikus ábrán szemléletes képet adhatunk a csillapodás formájáról:



A továbbfejlesztés ötletét a fizikai analógia is segítette, s látható, hogy a csillapított rezgéshez hasonló mozgást kaptunk. Ezt a rendszert a következőkben gyengén csillapított rendszernek fogjuk nevezni.

Az eléggé nehezen áttekinthető felírás miatt most nem részletezzük az amplitúdó és frekvencia kiszámítását. Eredményünk: a rendszer stabillá vált.

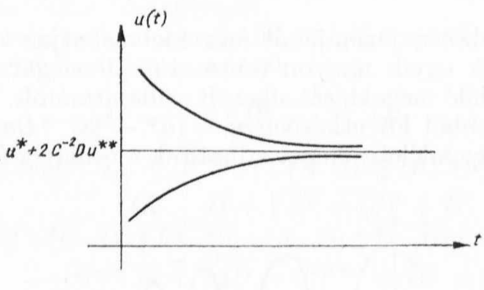
Jó lenne az u változó alakulásának közgazdasági hátterét is megadni. Ez nem könnyű. Említettük már, hogy a továbbfejlesztett rendszerben két szabályozási tendencia érvényesül: egyrészt a normálkészlethez való alkalmazkodás, másrészt a készletváltozás alkalmazkodása a kívánt mértékű változáshoz. Az előbbi fejtegetésből kiderült, hogy a rendszer nem az u^* helyen válik stabillá, hanem $u^* + 2C^{-2}Du^{**}$ helyen, azaz az u^{**} is ,,beleszól'' a stabilitásba. Ez az érték magasabb az u^*-nál, ami azt sejteti, hogy a gazdálkodási egység magatartása, viselkedése erre a szabályozásra sajátosan reagál: ha megkívánjuk a készletváltozás kívánatos értékhez való alkalmazkodását, akkor ez a készletezésben bizonyos ,,rátartási'' tendenciát vált ki. Másképpen fogalmazva ez azt is jelenti, hogy a kétféle szabályozás (a készletnorma betartása, illetve a készletváltozás betartása) ellentétes tendenciát fejez ki és emiatt az u^*-nál magasabb értéknél alakul ki a stabil helyzet.

II. eset: $\boxed{D > C}$. Mivel ez az előbbivel ellentétes relációt jelent, ezért ezt a rendszer erősen csillapított rendszernek fogjuk nevezni. Ebben az esetben a megoldás

$$u = e^{-Dt}\left[\frac{e^{t\sqrt{D^2-C^2}} - e^{-t\sqrt{D^2-C^2}}}{2\sqrt{D^2-C^2}}D + \frac{e^{t\sqrt{D^2-C^2}} + e^{-t\sqrt{D^2-C^2}}}{2}(u^0 - u^* - 2C^2Du^{**})\right] +$$

$$+ e^{-Dt}\left[\frac{e^{t\sqrt{D^2-C^2}} - e^{-t\sqrt{D^2-C^2}}}{2\sqrt{D^2-C^2}}\dot{u}(0)\right] + (u^* + 2C^{-2}Du^{**}).$$

Látható, hogy ebben az esetben semmiféle oszcilláció (rezgés) nem történik. A t növekedésével az u csökken, és ha $t \to \infty$, akkor $u \to (u^* + 2C^{-2}Du^{**})$. Ezt a mozgást a fizikában túlcsillapított mozgásnak hívják. A mozgás az alábbi ábrával szemléltethető:



Az említett eset megkülönböztetésénél feltételeztük, hogy a két szabályozási matrix (C és D) között értelmezhető a nagyságrendi reláció. Ha a nagyságrendi reláció nem volna értelmezhető, akkor a megfelelő diagonális elemeket hasonlítjuk össze, amelyek között ugyancsak az előbbi két reláció lehetséges. Az elmondottak alapján belátható, hogy a fenti szabályozási forma rugalmasan alkalmazható a vizsgált gazdaságra. Nem szükséges, hogy a D és C között egyértelmű nagyságrendi reláció legyen. Ez közgazdaságilag azt jelenti, hogy nem szükséges minden ágazatra ugyanazt a szabályozást alkalmazni. Egyik ágazatnál megkívánhatjuk, hogy a normálkészlethez való alkalmazkodás legyen a domináns a készletváltozás üteméhez való alkalmazkodás rovására, más ágazatoknál ennek a fordítottja is megengedhető. Az egész rendszer stabilitása szempontjából ez közömbös, csupán a csillapodás mértékében lesz különbség.

3.4. *A diszkrét továbbfejlesztett modell megoldásának értelmezése*

A diszkrét modell esetében ugyancsak a két szabályozási tag nagyságrendi relációja szerint tárgyaljuk a megoldásokat:

I. eset: $\boxed{D < C}$

Ekkor $D^2 - C^2 = -R^2$ és $\sqrt{-R^2} = iR$.

Jelöljük továbbá az $E - D$ matrixot G-vel, akkor a korábbi levezetésekhez hasonlóan belátható, hogy a megoldás ez esetben a következő lesz.

$$u(t) = R^{-1}\sqrt{G^2 + R^2}^t\,[\sin t\Phi(u_1 - u^* - 2C^{-2}Du^{**}) -$$
$$-\sqrt{G^2 + R^2}\sin(t-1)\Phi(u_0 - u^* - 2C^{-2}Du^{**}) + u^* + 2C^{-2}Du^{**}].$$

Az első megállapításunk az, hogy ha D-t O-nak választjuk, ez visszaadja a származtatott modell megoldását, tehát az ennek speciális esete. A másik fontos megállapítás az, hogy a függvény konstans része lényegesen bonyolultabb, mint az előző modell esetében. Az itt kapott konstans úgy interpretálható, hogy a kettős szabályozás folytán a készletalakulás centrumát nemcsak a normatív készlet, hanem a normatív készletváltozás is befolyásolja. Az ingadozás centruma e két norma lineáris kombinációjaként alakul ki, ahol a ,,súlyokat'' a két szabályozó egymáshoz viszonyított aránya határozza meg.

Tekintsük most a kapott periodikus függvény amplitúdóját és vizsgáljuk meg, hogyan viselkedik az idő függvényében. Az amplitúdó tulajdonságai — elhagyva most R^{-1}-et és az átalakítás során belépő egyéb konstans tényezőket — alapvetően a $G^2 + R^2$ tényezőtől függnek. Visszahelyettesítve az eredeti jelöléseket azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{G^2 + R^2}^t = \sqrt{(E-D)^2 + C^2 - D^2}^t = \sqrt{E - 2D + D^2 + C^2 - D^2}^t =$$
$$= \sqrt{C^2 + E - 2D}^t.$$

Az amplitúdó jellegét a gyök alatti kifejezés nagysága dönti el:

(a) Az amplitúdó t növekedésével végtelenhez tart, ha

$$C^2 + E - 2D > E,\ \text{azaz}\ C^2 > 2D.$$

Mivel a most vizsgált esetben $C^2 > D^2$ volt a feltétel, tehát

$$\boxed{C^2 > \max\,(D^2, 2D)}$$

esetben a megoldásfüggvény hasonló lesz, mint a származtatott modellnél. A származtatott modellnél egyébként $D = 0$, $D^2 = 0$, $2D = 0$ volt, így valóban ott fennállt ez az egyenlőtlenség. Ez másként azt jelenti, hogy ha a tervezésben a készletnagyság szerinti szabályozás a domináns, úgy a készletek az előző modellhez hasonlóan növekvő amplitúdójú ciklikus mozgást végeznek.

(b) Az amplitúdó t növekedésével állandó marad, ha

$$C^2 + E - 2D = E, \text{ azaz}$$

$$\boxed{C^2 = 2D \text{ és } C^2 > D^2}.$$

Következmény: Ha tekintjük a származtatott modellt; de feltételezzük, hogy a szabályozás nem késik, azaz elhanyagoljuk a reakcióidőt, a folytonos megoldáshoz hasonlóan állandó amplitúdójú periodikus függvény adódik.

Bizonyítás: A származtatott modell

$$u(t+2) = u(t+1) + \Delta u(t) + C^2(u^* - u(t))$$

egyenlete helyett írjuk fel ugyanezt nem késleltetett szabályozással!

$$u(t+2) = u(t+1) + \Delta u(t) + C^2[u^* - u(t+1)].$$

Mivel itt csak egy szabályozó van, $D = 0$, így a feltétel második egyenlőtlensége eleve teljesül. Rendezzük át ezt az egyenletet a következő formára:

$$u(t+2) = u(t+1) + (E - C^2) + \Delta u(t) + C^2[u^* - u(t+1)],$$

Látható, hogy ez esetben a $\Delta u(t)$ tag együtthatójában az egységmatrix és az $(u^* - u(t))$ tag együtthatójának különbsége szerepel, ez pedig nem más, mint az

$$u(t+2) = u(t+1) + [E - 2D]\Delta u(t) - C^2 u(t) + C^2 u^*$$

egyenlet $C^2 = 2D$ esetében. Így ez esetben a megoldásfüggvény amplitúdója állandó marad, azaz az állítást bebizonyítottuk.

Ez a következmény azért fontos, mert ez bizonyítja, hogy a diszkrét modell növekvő amplitúdóját a rekcióidő figyelembevétele, azaz a késleltetett szabályozás okozza. Más megfogalmazásban úgy mondhatjuk, hogy amennyiben a tervezés megfelelő előrelátással lehetőséget ad az azonnali szabályozásra, a szabályozás ilyen esetben hatékony lehet.

(c) Az amplitúdó t növekedésével 0-hoz tart, ha

$$C + E - 2D < E, \text{ azaz } C^2 < 2D$$

Annak feltétele tehát, hogy a periodikus ingadozás csillapítottá váljék az, hogy

$$D^2 < C^2 < 2D$$

Ez a felírás egyébként megadja azt az intervallumot, amelyben D értékeit választhatjuk, hiszen $D^2 < 2D$ csak akkor teljesülhet, ha $0 < D < 2$ áll fenn. Ilyen szabályozó-választás mellett tehát a rendszer stabilizálódik olyan értelemben, hogy a ciklikus kilengések egyre csökkennek.

II. eset: $\boxed{C^2 < D^2}$

Ekkor $D^2 - C^2 = R^2$ és $\sqrt{R^2} = R$.

A teljes megoldás ekkor a következő alakot ölti:

$$u(t) = 2R^{-1}\big((G+R)^t - (G-R)^t(u_1 - u^* - 2C^{-2}Du^{**}) - (G^2 - R^2)\cdot$$
$$\cdot (G+R)^{t-1} - (G-R)^{t-1}) \cdot (u - u^* - 2C^{-2}Du^{**})\big) + u^* + 2C^{-2}Du^{**}.$$

Ez esetben a megoldás nem hozható olyan egyszerű, jól áttekinthető alakra, mint az előbb, ezért az elemzést is két lépésben végezzük.

(a) A megoldás függvény sima, azaz nem tartalmaz periodikus, oszcilláló tagot, ha mind $G + R$, mind $G - R$ nem-negatív. Ha bármelyik kifejezés negatívvá válik oszcilláció lép fel.

(b) A megoldásfüggvény t növekedésével végtelenhez tart, ha

$$\max \{ |G + R|, |G - R| \} > E$$

és konvergál az $u^* + 2C^{-2}Du^{**}$ értékhez, ha

$$\max \{ |G + R|, |G - R| \} < E.$$

Ezeknek az eredményeknek igen nehéz lenne közvetlen értelmezést adni, ezért itt csupán azt hangsúlyozzuk, hogy ilyen szabályozás mellett is lehetséges a rendszer stabilizálódása.

Az elemzést a továbbfejlesztett modellnek csak egy egyenletére végeztük el. Könnyen belátható, hogy V és w esetén teljesen analóg módon járhatunk el és a következtetések is hasonlóak lesznek. Mivel a továbbfejlesztett modell és a származtatott modell mérlegegyenletei megegyeznek, az x-re és Y-ra ott adott formulák itt is megadják a modell teljes megoldását.

A továbbfejlesztett modell megoldása és elemzése alapján az alábbi összefoglaló megállapításokat tehetjük:

(a) A továbbfejlesztett modell felírásának és elemzésének célja az volt, hogy bemutassunk egy olyan szabályozást, amely megszünteti az eredeti illetve származtatott modell egyes hiányosságait.

(b) A magatartási egyenleteket megfelelően átalakítva egy közgazdaságilag is jól értelmezhető formát kaptunk: a készletek tervezésekor az előző időszak készletváltozási tendenciáját nem lehet mechanikusan extrapolálni. Ha ehelyett ezt a készletváltozást egy alkalmas szorzóval szorozzuk, elérhető, hogy a készletek ingadozása ne nőjjön, sőt az oszcilláció csillapítható is.

(c) Megfelelő szabályozók választása — akárcsak a folytonos esetben — esetén a készletek időfüggvénye konvergál, határértéke $u^* + 2C^{-2}Du^{**}$ lesz.

(d) A megoldás elemzése során bizonyíthatóvá vált, hogy amennyiben az eredeti (és a származtatott) modellben a szabályozás időkésleltetés nélkül érvényesül, a megoldásfüggvény amplitúdója állandó lesz, és hasonlóan viselkedik, mint a folytonos modell megoldásfüggvénye. A modell felírásából az is látható, hogy egy szabályozó esetén — megfelelő előrelátást, előrebecslést feltételezve — ugyancsak lehetséges a rendszer bizonyos stabilizálása.

(e) A vizsgálatok bizonyították, hogy az itt alkalmazott kettős szabályozás segítségével mind sima, mind pedig periodikus függvény előállítható, sőt a szabályozók megfelelő értékei mellett a hullámzás amplitúdója nőhet, csökkenhet és állandó is maradhat. Ez arra utal, hogy ez a fajta szabályozás a folyamat összes fontos jellemzőjét képes szabályozni, így a korábbi helyett ezt a kettős szabályozást megfelelőbbnek tekintjük.

Összefoglalás

1⁰ Tanulmányunkban egy meglevő modellből [4] indultunk ki. Alapvető célunk az volt, hogy ezt a modellt különféle újabb feltételezésekkel, illetve egyes feltételek feloldásával több irányban általánosítsuk.

2^0 A módszer logikája az, hogy egyrészt fizikai analógiák alapján egyre bonyolultabb rendszert írjunk le folytonos modellek segítségével, másrészt viszont a megoldott és elemzett folytonos modellekből azok diszkrét párjával a gazdasági gyakorlathoz közelebb álló modellekhez jussunk.

3^0 A kiinduló modell és annak diszkrét változata közt az alapvető eltérést a szabályozáshoz szükséges idő elhanyagolása, illetve figyelembe vétele okozza. Az elemzések fő eredménye az, hogy véges szabályozási (reakció) idő esetén a kiinduló szabályozási rendszer nem működőképes.

4^0 A továbbfejlesztett modell megoldása mind folytonos, mind diszkrét esetben hasonló tulajdonságú. Mindkét megoldás bizonyítja, hogy a bevezetett kettős szabályozás megfelelőbb, mind az eredeti, a szabályozók megfelelő megválasztásával stabil készletalakulás is létrehozható.

5^0 Befejezésül szerenénk rámutatni arra, hogy a vizsgált modell még sok általánosítási és továbbfejlesztési lehetőséget rejt magában. Ezeket további kutatásaink során kívánjuk részletesebben vizsgálni.

(Beérkezett: 1973. március 26.)

IRODALOM

1. Coddington, E. A.—Levinson, N.: Theory of ordinary differential equations. New-York, 1955. McGraw-Hill.
2. Dancs I.—Hunyadi L.: Készletjelzésen alapuló szabályozás egy Leontief típusú gazdaságban. A diszkrét modell. Budapest, 1972. Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézet. 35. o.
3. Dancs I.—Sivák J.: Készletjelzésen alapuló szabályozás egy Leontief-típusú gazdaságban. Budapest, 1972. Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézet. 29. o.
4. Kornai J.—Martos B.: Gazdasági rendszerek vegetatív működése. Szigma, 1971. 1—2. sz. 34—50. o.
5. Virág I.: Gazdasági rendszerek vegetatív működése sztochasztikus külső fogyasztással. Szigma. 1971. 4. szám. 261—268. o.
6. J. Kornai—B. Martos: Autonomous functioning of the economic system. Econometrica, sajtó alatt.

CONTROL BASED ON STOCK SIGNALS IN A LEONTIEF-TYPE ECONOMY

The article introduces some advances of a stock control model elaborated by Kornai-Martos: The autonomous functioning of an economic system. SZIGMA 1971(1—2).

In the first part it introduces a derived model, equivalent mathematically to the original one, and describes the discrete analogous variant thereof, too. It presents and analyzes the solutions obtained.

The second part deals with the so-called advanced models. In these models it introduces an additional control term, the idea of which has been given by a physical analogue — the damped oscillation. It presents the solution to the continuous and discrete models, the interpretation and analysis of the solutions. On the basis of the results the next two main consequence can be drawn.

— the basic deviation between the continuous variants of the original model is that the continuous model neglects, and the discrete model takes into consideration the time necessary for regulation. In case of the discrete model this means that the control system is not viable in every case;

— the solution to the advanced model has similar features in the continuous as well as the discrete case. Both solutions prove that the introduced double control is more appropriate than the original one; stabilization of stocks can be achieved with an appropriate choice of regulators.

РЕГУЛИРОВАНИЕ НА ОСНОВЕ СИГНАЛИЗАЦИИ РЕЗЕРВОВ В ЭКОНОМИКЕ ТИПА ЛЕОНТЬЕВА

Статья представляет собой некоторые дальнейшие разработки модели Корнаи-Мартоша по регулированию резервов (Вегетативное действие экономических систем, СИГМА, 1971/1—2).

В первой части излагается т. н. заимствованная модель, которая математически эквивалентна оригинальной модели и описывает дискретный аналогичный вариант модели. Представляются решения обоих вариантов и анализируются полученные решения.

Вторая часть занимается т. н. развитыми моделями. В развитых моделях вводится добавочный регулятор, идею которого дала физическая аналогия — затухающее колебание. Эта часть знакомит также с решением непрерывной и дискретной развитой модели, дает объяснение и анализ решений.

На основе полученных результатов можно сделать два основных вывода:

— основное расхождение между непрерывным и дискретным вариантами оригинальной модели в том, что непрерывная модель упускает, а дискретная модель учитывает необходимое для регулирования время. В случае дискретной модели это означает то, что первоначальнач система регулирования не всегда способна к действию;

— решение развитой модели имеет похожие свойства и в непрерывным и в дискретном случаях. Оба решения доказывают, что введенное двойное регулирование более подходящее, чем оригинальное; соответствующим выбором регуляторов можно создать и стабильные резервы.